

الثلاثيات الفيثاغورية ودائرة الوحدة

Pythagorean Triples and the Unit Circle

في الفصل السابق وصفنا جميع حلول المعادلة :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

حيث a ، b و c أعداد الصحيحة.

إذا قسمنا طرفي هذه المعادلة على c^2 نحصل على :

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

وعليه ؛ فإن زوج الأعداد النسبية $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ هو حل للمعادلة :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

جميعنا يعرف ما الذي تمثله المعادلة $x^2 + y^2 = 1$. إنها دائرة C نصف قطرها

1 ومركزها $(0, 0)$.

سنستخدم هندسة الدائرة C لإيجاد جميع النقاط على C والتي إحداثياتها

أعداد نسبية. لاحظ أن على الدائرة أربع نقاط بديهية ، إحداثياتها أعداد نسبية وهي

$(\pm 1, 0)$ و $(0, \pm 1)$.

افرض أننا قمنا بأخذ أي عدد نسبي m ونظرنا إلى الخط المستقيم المار بالنقطة $(-1, 0)$ وميله m (انظر الشكل 3.1). يمكن كتابة معادلة هذا الخط المستقيم على الصورة:

$$L : y = m(x + 1) \quad (\text{صيغة النقطة-الميل})$$

من الواضح من خلال الشكل أن التقاطع $C \cap L$ يضم نقطتين فقط، إحداهما $(-1, 0)$. المطلوب الآن إيجاد النقطة الأخرى.

لإيجاد نقاط التقاطع بين L و C نحتاج لحل المعادلتين

$$y = m(x + 1) \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 = 1$$

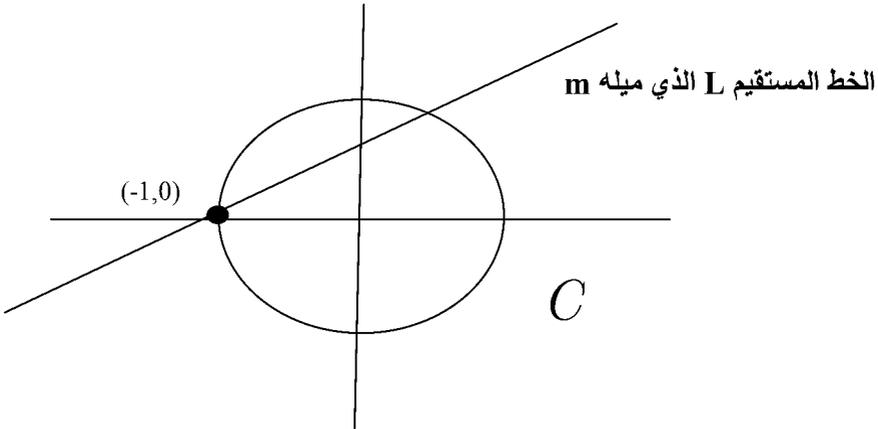
بدلالة x و y . عوض المعادلة الثانية في المعادلة الأولى وبسط، نحن بحاجة إلى

حل:

$$x^2 + (m(x + 1))^2 = 1$$

$$x^2 + m^2(x^2 + 2x + 1) = 1$$

$$(m^2 + 1)x^2 + 2m^2x + (m^2 - 1) = 0.$$



الشكل رقم (٣, ١). الدائرة والخط المستقيم.

المعادلة الناتجة ليست إلا معادلة تربيعية، ونستطيع استخدام الصيغة التربيعية لحلها بدلالة x . لكن هناك طريقة أسهل لإيجاد الحل، فنحن نعرف أن $x = -1$ حل للمعادلة لأن النقطة $(-1, 0)$ تقع على كل من C و L ، وهذا يعني أن بإمكاننا قسمة كثير الحدود التربيعية، على $(x + 1)$ للحصول على الجذر الآخر:

$$(m^2 + 1)x + (m^2 - 1) \\ x + 1 \overline{) (m^2 + 1)x^2 + 2m^2x + (m^2 - 1)}$$

لذا؛ فإن الجذر الآخر هو حل المعادلة $(m^2 + 1)x + (m^2 - 1) = 0$ ، وهذا يعني أن:

$$x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

نقوم بعد ذلك بتعويض قيمة x هذه في معادلة الخط المستقيم L

$$y = m(x + 1) \text{ لإيجاد الاحداثي الصادي،}$$

$$y = m(x + 1) = m \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} + 1 \right) = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

وعليه؛ فإنه لأي عدد نسبي m نحصل على عدد

$$\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \frac{2m}{1 + m^2} \right) \text{ نسبي يمثل حلاً للمعادلة } x^2 + y^2 = 1.$$

من جهة أخرى، إذا كان لدينا الحل (x_1, y_1) في \mathbb{Q} فإن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 0)$ و (x_1, y_1) سيكون عدداً نسبياً، وعليه، وبأخذ جميع القيم المحتملة لـ m ؛ فإن العملية التي قمنا بوصفها سابقاً ستنتج جميع الحلول للمعادلة $x^2 + y^2 = 1$ في \mathbb{Q} ما عدا النقطة $(-1, 0)$ والتي تقع على الخط العمودي الذي ميله " $m = \infty$ ". نلخص النتائج التي حصلنا عليها في النظرية التالية.

نظرية (١, ٣). أي نقطة على الدائرة:

$$x^2 + y^2 = 1$$

والتي إحداثياتها أعداد نسبية يمكن الحصول عليها باستخدام القاعدة:

$$(x, y) = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \frac{2m}{1 + m^2} \right)$$

وذلك بالتعويض بأعداد نسبية بدلا عن m . ما عدا النقطة $(-1, 0)$ والتي

تمثل قيمة النهاية عندما " $m \rightarrow \infty$ ".

السؤال الآن هو كيف ترتبط هذه القاعدة الخاصة بالنقاط النسبية على دائرة

بالقاعدة الخاصة بالثلاثيات الفيثاغورية؟ إذا قمنا بكتابة العدد النسبي m على شكل

كسر u/v فإن القاعدة أعلاه تصبح:

$$(x, y) = \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \frac{2uv}{u^2 + v^2} \right),$$

وبالتخلص من المقامات نحصل على الثلاثي الفيثاغوري

$$(a, b, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2).$$

وهذه طريقة أخرى لوصف الثلاثيات الفيثاغورية، على الرغم من أننا نحتاج

إلى وضع بعض القيود على كل من u و v للحصول على الثلاثيات الفيثاغورية الأولية.

يمكنك ربط ما تقدم بالقاعدة الواردة في الفصل الثاني، وذلك بوضع:

$$v = \frac{s - t}{2} \text{ و } u = \frac{s + t}{2}$$

تمارين

(٣.١) كما رأينا، فإننا نحصل على كل ثلاثي فيثاغوري (a, b, c) حيث b زوجي، من الصيغة :

$$(a, b, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$$

وذلك من خلال التعويض بأعداد صحيحة مختلفة للمتغيرين u, v . فمثلاً، $(u, v) = (2, 1)$ تعطي أصغر ثلاثي $(3, 4, 5)$.

(a) إذا كان للعدد u, v عامل مشترك، اشرح لماذا لا يكون (a, b, c) ثلاثياً فيثاغورياً أولياً.

(b) أعط مثلاً على عددين صحيحين $u > v > 0$ ليس لهما عامل مشترك وفي نفس الوقت لا يكون $(a, b, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ ثلاثياً فيثاغورياً أولياً.

(c) إعمل جدول لكل الثلاثيات الفيثاغورية التي تنتج عند تعويضك بجميع القيم u, v بحيث $1 \leq v \leq u \leq 10$.

(d) استخدم جدولك من الفقرة (c) لإيجاد شروط بسيطة على u, v تؤكد أن $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ ثلاثي فيثاغوري أولي.

(e) برهن أن شروطك في (d) تعمل بشكل صحيح.

(٣.٢) (a) استخدم الخطوط المارة بالنقطة $(1, 1)$ لوصف جميع النقاط الواقعة على الدائرة :

$$x^2 + y^2 = 2$$

التي إحداثياتها أعداد نسبية.

(b) أين يكمن الخطأ إذا حاولت تطبيق نفس الإجراء لإيجاد جميع النقاط

الواقعة على الدائرة $x^2 + y^2 = 3$ التي إحداثياتها أعداد نسبية؟

(٣.٣) أوجد صيغة لجميع النقاط الواقعة على القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ والتي

إحداثياتها أعداد نسبية.

[مساعدة: خذ الخط المار بالنقطة $(-1, 0)$ والذي ميله m عدد نسبي، وأوجد

صيغة بدلالة m للنقطة الثانية التي يتقاطع عندها الخط مع القطع الزائد].

(٣.٤) المنحنى:

$$y^2 = x^3 + 8$$

تقع عليه النقطتان $(1, -3)$ ، $(-7/4, 13/8)$. الخط المار بهاتين النقطتين يقطع

المنحنى في نقطة أخرى فقط. أوجد هذه النقطة الثالثة. هل يمكنك أن تشرح لماذا

إحداثيات هذه النقطة الثالثة عدنان نسيان؟