الفصل السادس

المعادلات الخطية والقاسم المشترك الأكبر
Linear Equations and the Greatest Common Divisor

افرض أن a و b عددان صحيحان غير سالبين (Whole numbers)، سنبحث عن جميع الأعداد المحتملة التي يمكن أن نحصل عليها بإضافة مضاعف لـ a إلى مضاعف لـ b. بمعنى آخر، سنبحث عن جميع الأعداد التي من الممكن الحصول عليها من القاعدة $ax + by$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$.

جدول لـ قيم $42x + 30y$.

	$x=-3$	$x=-2$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$y=-3$	-216	-174	-132	-90	-48	-6	36
$y=-2$	-186	-144	-102	-60	-18	24	66
$y=-1$	-156	-114	-72	-30	12	54	96
$y=0$	-126	-84	-42	0	42	84	126
$y=1$	-96	-54	-12	30	72	114	156
$y=2$	-66	-24	18	60	102	144	186
$y=3$	-36	6	48	90	132	174	216

لاحظ أننا سنسمح بقيم سالبة وموجبة لـ x و y. على سبيل المثال، افرض أن $a = 42$ و $b = 30$، القائمة التالية تقدم بعض قيم $ax + by$.

الملاحظة الأولى التي نلاحظها من خلال التدقيق بالقائمة السابقة أن جميع المدخلات في القائمة تقبل القسمة على 6 ، وهذه ليست مفاجأة ؛ لأن كلاً من 42 و 30 يقبل القسمة على 6 ؛ وعليه فإن أي عدد على الصورة

$$42x + 30y = 6(7x + 5y)$$

من مضاعفات العدد 6. بصورة أكثر تعميما ، يمكننا ملاحظة أن أي عدد على الصورة $ax + by$ يقبل القسمة على $\gcd(a,b)$ ؛ لأن كلا من a و b يقبل القسمة على $\gcd(a,b)$.

الملاحظة الثانية ، والمثيرة أكثر للدهشة ، هي أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 42 و 30 ، والذي هو 6 ، يظهر في القائمة ؛ لذا ومن القائمة نستطيع أن نرى أن

$$42 \cdot (-2) + 30 \cdot 3 = 6 = \gcd(42, 30)$$

التدقيق في أمثلة إضافية يقودنا إلى الاستنتاج التالي :

أصغر قيمة موجبة لـــ
$ax + by$
يساوي $\gcd(a,b)$

هناك عدة طرق لإثبات أن ذلك صحيح. سنأخذ المنحى الاستنتاجي (Constructive approach) كما فعلنا مع خوارزمية إقليدس. ميزة هذه الطريقة أنها تعطي إستراتيجية إيجاد القيم المناسبة لـ x و y. بمعنى آخر سنقدم طريقة لإيجاد الأعداد الصحيحة لـ x و y والتي هي حل للمعادلة.

$$ax + by = \gcd(a, b).$$

بما أن، وكما لاحظنا سابقاً، أي عدد $ax + by$ يقبل القسمة على $\gcd(a, b)$ ؛ فإن هذا يعني أن أصغر قيمة موجبة لـ $ax + by$ هي بالضبط $\gcd(a, b)$.

السؤال الآن هو، كيف يمكننا حل المعادلة $ax + by = \gcd(a, b)$ ؟ إذا كان a و b عددين صغيرين، فمن الممكن تخمين الحل. على سبيل المثال، المعادلة :

$$10x + 35y = 5$$

حلها $x = -3$ و $y = 1$ ، والمعادلة :

$$7x + 11y = 1$$

حلها $x = -3$ و $y = 2$.

يمكننا أيضاً ملاحظة أنه قد يكون هناك أكثر من حل، حيث $x = 8$ و $y = -5$ هو حل آخر للمعادلة $7x + 11y = 1$.

على أي حال، إذا كان a و b عددين كبيرين، فإن طريقة التخمين أو التجربة والخطأ لن تكون مجدية.

سنبدأ بتوضيح طريقة خوارزمية إقليدس لحل المعادلة :

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

من خلال مثال محدد، لذلك لنحاول حل المعادلة :

$$22x + 60y = \gcd(22, 60)$$

الخطوة الأولى تكون باستخدام خوارزمية إقليدس لحساب gcd . نجد أن :

$$
\begin{aligned}
60 &= 2\times 22 + 16\\
22 &= 1\times 16 + \ \ 6\\
16 &= 2\times 6 + \ \ \ 4\\
6 &= 1\times 4 + \ \ \ \ 2\\
4 &= 2\times 2 + \ \ \ \ 0
\end{aligned}
$$

هذا يبين أن $\gcd(22,60) = 2$ ، وهي حقيقة واضحة دون اللجوء لخوارزمية إقليدس. على كل حال، فإن الحسابات التي أجريناها مهمة؛ لأننا سنستخدم نواتج القسمة والبواقي لحل المعادلة $22x + 60y = 2$.

الخطوة الأولى هي إعادة كتابة المعادلة على الشكل:

$16 = a - 2b$, حيث $a = 60$ و $b = 22$.

الخطوة التالية هي تعويض هذه القيمة بدلاً من الـ 16 الموجودة في المعادلة الثانية من خوارزمية إقليدس، هذا يعطي (تذكر أن $b = 22$).

$$b = 1\times 16 + 6 = 1\times (a - 2b) + 6,$$

أعد ترتيب هذه المعادلة بحيث تضع 6 في طرف لوحدها فينتج:

$$6 = b - (a - 2b) = -a + 3b$$

الآن عوض القيمتين 16 و 6 في المعادلة الثالثة، $16 = 2\times 6 + 4$؛

$$a - 2b = 16 = 2\times 6 + 4 = 2(-a + 3b) + 4$$

مرة أخرى نقوم بوضع الباقي 4 في طرف لوحده لنحصل على:

$$4 = (a - 2b) - 2(-a + 3b) = 3a - 8b.$$

أخيراً، نستخدم المعادلة $6 = 1\times 4 + 2$ لنحصل على:

$$-a + 3b = 6 = 1\times 4 + 2 = 1\times(3a - 8b + 2)$$

بإعادة ترتيب هذه المعادلة نحصل على الحل المطلوب $-4a + 11b = 2$.

(للتحقق من صحة الحل : $-4\times 60 + 11\times 22 = -240 + 242 = 2$.)

يمكن تلخيص الحسابات السابقة بالطريقة المجدولة الفعالة التالية . لاحظ أن المعادلات في الطرف الأيسر تمثل خوارزمية إقليدس ، بينما المعادلات في الطرف الأيمن تحسب الحل للمعادلة $ax + by = \gcd(a,b)$

$a = 2\times b + 16$	$16 = a - 2b$
$b = 1\times 16 + 6$	$6 = b - 1\times 16$
	$= b - 1\times(a - 2b)$
	$= -a + 3b$
$16 = 2\times 6 + 4$	$4 = 16 - 2\times 6$
	$= (a - 2b) - 2\times(-a + 3b)$
	$= 3a - 8b$
$6 = 1\times 4 + 2$	$2 = 6 - 1\times 4$
	$= (-a + 3b) - 1\times(3a - 8b)$
$4 = 2\times 2 + 0$	$= -4a + 11b$

لماذا تعمل هذه الطريقة ؟ الجدول التالي يوضح ذلك. نبدأ بأول خطوتين من خوارزمية إقليدس والتي تضم الكميتين a و b ونبدأ العمل نزولا.

$$\begin{array}{l|l}
a = q_1 b + r_1 & r_1 = a - q_1 b \\
b = q_2 r_1 + r_2 & r_2 = b - q_2 r_1 \\
 & \quad = b - q_2(a - q_1 b) \\
 & \quad = -q_2 a + (1 + q_1 q_2) b \\
 & r_3 = r_1 - q_3 r_2 \\
r_1 = q_3 r_2 + r_3 & \quad = (a - q_1 b) - q_3(-q_2 a + (1 + q_1 q_2) b) \\
 & \quad = (1 + q_2 q_3) a - (q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3) b
\end{array}$$

كلما تحركنا من خطوة إلى أخرى، فإننا سنشكل باستمرار معادلات تبدو على الصورة آخر باقي = أحد مضاعفات a مضافا إليه أحد مضاعفات b

وأخيراً، نحصل على آخر باقي غير صفري، والذي نعرف أنه يساوي $\gcd(a,b)$، وهذا يعطينا الحل المطلوب للمعادلة $\gcd(a,b) = ax + by$.

المثال التالي، والذي يتضمن قيماً أكبر لـ a و b، حيث $a = 12453$ و $b = 2347$ نقدمه بصورة مجدولة على النحو الآتي، حيث إن المعادلات في الطرف الأيسر تمثل خوارزمية إقليدس بينما المعادلات في الطرف الأيمن تحسب الحل للمعادلة $ax + by = \gcd(a,b)$.

نستنتج من الجدول السابق أن $\gcd(12453, 2347) = 1$، وأن $(x, y) = (304, -1613)$ حل للمعادلة:

$$12453x + 2347y = 1.$$

نعرف الآن أن المعادلة :

$$ax + by = \gcd(a,b)$$

$a = 5\times b + 718$	$718 = a - 5b$
$b = 3\times 718 + 193$	$193 = b - 3\times 718$ $= b - 3\times(a-5b)$ $= -3a + 16b$
$718 = 3\times 193 + 139$	$139 = 718 - 3\times 193$ $= (a-5b) - 3\times(-3a+16b)$ $= 10a - 53b$
$193 = 1\times 139 + 54$	$54 = 193 - 139$ $= (-3a+16b) - (10a - 53b)$ $= -13a + 69b$
$139 = 2\times 54 + 31$	$31 = 139 - 2\times 54$ $= (10a - 53b) - 2\times(-13a + 69b)$ $= 36a - 191b$
$54 = 1\times 31 + 23$	$23 = 54 - 31$ $= -13a + 69b - (36a - 191b)$ $= -49a + 260b$
$31 = 1\times 23 + 8$	$8 = 31 - 23$ $= 36a - 191b - (-49a + 260b)$ $= 85a - 451b$
$23 = 2\times 8 + 7$	$7 = 23 - 2\times 8$ $= (-49a + 260b) - 2\times(85a - 451b)$ $= -219a + 1162b$
$8 = 1\times 7 + 1$	$1 = 8 - 7$ $= 85a - 451b - (-219a + 1162b)$
$7 = 7\times 1 + 0$	$= 304a - 1613b$

دائماً لها حل بعددين صحيحين x و y. السؤال الأخير الذي سنقوم بمناقشته في هذا الفصل هو، كم عدد الحلول للمعادلة $ax + by = \gcd(a,b)$ ؟ وكيف نصف جميع هذه الحلول؟

لنبـــدأ بالحالـــة الـــتي يكـــون فيهـــا العـــددان a و b أولـــيين نســـبيا ، أي $\gcd(a,b) = 1$ ، وسنفرض أن (x_1, y_1) هو حل للمعادلة :

$$ax + by = 1.$$

بالإمكان توليد حلول أخرى بطرح أحد مضاعفات b من x_1 وإضافة نفس المضاعف لـ a إلى y_1. بمعنى آخر ، لأي عدد صحيح k نحصل على الحل الجديد

$$(x_1 + kb, y_1 - ka).$$ (١)

الحســابات التاليــة تــبين أن الــزوج الســابق يمثــل فعــلا حــلا للمعادلــة $ax + by = 1$:

$$a(x_1 + kb) + b(y_1 - ka) = ax_1 + akb + by_1 - bka = ax_1 + by_1 = 1$$

علـى سـبيل المثـال إذا بـدأنا بـ $(-1,2)$ كحـل للمعادلـة $5x + 3y = 1$ فـإن $(-1 + 3k, 2 - 5k)$ تولد لنا حلولا جديدة للمعادلة. لاحظ أن k يمكـن أن يكـون عدداً موجبا ، سالبا أو صفراً. بتعويض بعض القيم الخاصة بدلا من k نحصل على الحلول

$$\ldots.(-13,22),(-10,7),(-7,12),(-4,7),(-1,2),$$
$$(2,-3),(5,-8),(8,-13),(11,-8)\ldots.$$

---

(١) هندسياً ، نحن بدأنا من نقطة معلومة (x_1, y_1) واقعة على الخط $ax + by = 1$ واستخدمنا حقيقة أن ميل الخط يساوي $-a/b$ لإيجاد نقطة جديدة $(x_1 + t, y_1 - (a/b)t)$. للحصول على نقاط جديدة بإحداثيات صحيحة ، نحتاج لجعل t من مضاعفات b. تعويض $t = kb$ يعطي الحل الصحيح الجديد $(x_1 + kb, y_1 - ka)$.

لاحظ أننا ما زلنا في الحالة الخاصة والتي فرضنا فيها أن $\gcd(a,b) = 1$. بالإمكان إثبات أن هذه العملية ستعطينا جميع الحلول الممكنة. افرض أن (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلان للمعادلة $ax + by = 1$ ، بمعنى أن:

$$ax_1 + by_1 = 1 \quad \text{و} \quad ax_2 + by_2 = 1$$

بضرب المعادلة الأولى بـ y_2 والمعادلة الثانية بـ y_1 والطرح نحصل على:

$$ax_1y_2 - ax_2y_1 = y_2 - y_1.$$

بطريقة مماثلة إذا قمنا بضرب المعادلة الأولى بـ x_2 والمعادلة الثانية بـ x_1 والطرح نحصل على:

$$bx_2y_1 - bx_1y_2 = x_2 - x_1.$$

لذلك إذا فرضنا أن $k = x_2y_1 - x_1y_2$ سنجد أن:

$$y_2 = y_1 - ka \quad \text{و} \quad x_2 = x_1 + kb.$$

وهذا يعني أن الحل الثاني (x_2, y_2) قد تم الحصول عليه من الحل الأول (x_1, y_1) وذلك بإضافة مضاعف لـ b إلى x_1 وطرح نفس المضاعف لـ a من y_1. مما سبق نستنتج أن جميع الحلول للمعادلة $ax + by = 1$ يمكن الحصول عليها من الحل الأول (x_1, y_1) وذلك بتعويض قيم مختلفة لـ k في $(x_1 + kb, y_1 - ka)$.

ماذا يحدث إذا كان $\gcd(a,b) > 1$. لجعل المعادلة تبدو أكثر سهولة سنفرض أن $\gcd(a,b) = g$. نعرف من خوارزمية إقليدس أنه يوجد على الأقل حل واحد (x_1, y_1) للمعادلة:

$$ax + by = g.$$

لكن g يقسم كلا من a و b ؛ وعليه فإن (x_1, y_1) حل للمعادلة الأبسط التالية :

$$\frac{a}{g}x + \frac{b}{g}y = 1.$$

الآن بتطبيق ما عملناه سابقاً، يمكننا أن نعلم أن أي حل آخر يمكن الحصول عليه بتعويض قيم لـ k في الصيغة :

$$(x_1 + k \cdot \frac{b}{g}, y_1 - k \cdot \frac{a}{g}).$$

وبهذا نكون قد أنهينا النقاش حول حلول المعادلة $ax + by = g$ ، وسنلخصه في النظرية التالية.

نظرية (١,٦) (نظرية المعادلة الخطية). *ليكن a و b عددين صحيحين غير صفريين، وليكن $\gcd(a,b) = g$. المعادلة :*

$$ax + by = g$$

دائمًا لها حل (x_1, y_1) في $\mathbb{Z}$ ، وهذا الحل يمكن إيجاده بطريقة خوارزمية إقليدس. عندئذ أي حل للمعادلة يمكن الحصول عليه بالتعويض بأعداد صحيحة k في الصيغة :

$$(x_1 + k \cdot \frac{b}{g}, y_1 - k \cdot \frac{a}{g}).$$

على سبيل المثال، نرى أن $x = -4$ ، $y = 11$ هو حل للمعادلة :

$$60x + 22y = \gcd(60, 22) = 2$$

وعليه ؛ فإن نظرية المعادلة الخطية تنص على أن كل حل يمكن الحصول عليه بالتعويض عن k بأعداد صحيحة في الزوج :

$$(-4+11k, 11-30k).$$

بشكل خاص، إذا أردنا حلا يتضمن قيماً موجبة لـ x فبإمكاننا أخذ $k=1$ والتي تعطينا أصغر حل $(x,y)=(7,-19)$.

في هذا الفصل أثبتنا أن المعادلة :

$$ax+by=\gcd(a,b),$$

دائما لها حل. هذه الحقيقة مهمة جدا لأسباب نظرية وعملية، وسنستخدمها مرارا وتكرارا في دراستنا اللاحقة. على سبيل المثال، سنحتاج حل المعادلة $ax+by=1$ عند دراستنا للتشفير في الفصل الثامن عشر. وفي الفصل التالي سنستخدم هذه المعادلة في دراستنا النظرية حول تحليل الأعداد إلى عواملها الأولية.

تمارين

(٦.١) وجد حل في $\mathbb{Z}$ للمعادلة $12345x+67890y=\gcd\left(12345,67890\right)$

(b) أوجد حلاً في $\mathbb{Z}$ للمعادلة $54321x+9876y=\gcd\left(54321,9876\right)$

(٦.٢) صف جميع الحلول الصحيحة لكل معادلة من المعادلات التالية :

$(a)\quad 105x+121y=1$

$(b)\quad 12345x+67890y=\gcd\left(12345,67890\right)$

$(c)\quad 54321x+9876y=\gcd\left(54321,9876\right)$

(٦.٣) طريقة حل المعادلة $ax+by=\gcd\left(a,b\right)$ المشروحة في هذا الفصل تنطوي على قدر كبير من التلاعب والتعويض الخلفي . هذا التمرين يصف طريقة بديلة

وسهلة لحساب y,x خصوصاً عند تنفيذها في الكمبيوتر.

(a) بين أن الخوارزمية الموصوفة في الشكل رقم (٦.١) تحسب القاسم المشترك الأكبر g للعددين الصحيحين الموجبين b,a بالإضافة إلى حل $\left(x,y\right)$ في $\mathbb{Z}$ للمعادلة $ax+by=\gcd\left(a,b\right)$.

(b) نفذ هذه الخوارزمية على كمبيوتر باستخدام لغة برمجة من اختيارك.

(c) استخدم برنامجك لحساب $g=\gcd\left(a,b\right)$ وإيجاد حلول صحيحة للمعادلة $ax+by=g$ للأزواج $\left(a,b\right)$ التالية :

$$(i)\quad \left(19789,23548\right)$$

$$(ii)\quad \left(31875,8387\right)$$

$$(iii)\quad \left(22241739,19848039\right)$$

(d) ماذا يحدث لبرنامجك إذا كان $b=0$ ؟ جَهِّز البرنامج ليتعامل مع هذه الحالة بشكل صحيح.

(e) من المفيد في التطبيقات اللاحقة أن يكون لديك حل فيه $x>0$. عَدِّل برنامجك بحيث يعطيك دائماً حلاً فيه $x>0$.[مساعدة : إذا كان $\left(x,y\right)$ حلاً ، فإن $\left(x+b\,,y-a\right)$ حل أيضاً].

١- اجعل $x = 1, g = a, v = 0, w = b$.

٢- إذا كان $w = 0$ فاجعل $y = \left(g - ax\right)/b$ وأعط القيم $\left(g, x, y\right)$.

٣- اقسم g على w بوجود باقي ، $g = qw + t$ ، حيث $0 \le t < w$.

٤- اجعل $S = x - qv$.

٥- اجعل $\left(x, g\right) = \left(v, w\right)$.

٦- اجعل $\left(v, w\right) = \left(s, t\right)$.

٧- اذهب إلى الخطوة (2).

الشكل رقم (٦,١). خوارزمية فعّالة لحل المعادلة $ax + by = \gcd\left(a, b\right)$.

(٦,٤) (a) أوجد أعداداً صحيحة x, y, z تحقق المعادلة

$$6x + 15y + 20z = 1$$

(b) تحت أي شروط على a, b, c يكون للمعادلة

$$ax + by + cz = 1$$

حل ؟ صف طريقة عامة لإيجاد حل عندما يتوفر أحد الحلول.

(c) استخدم الطريقة التي أوجدتها في (b) لإيجاد حل في $\mathbb{Z}$ للمعادلة

$$155x + 341y + 385z = 1$$

(٦,٥) افرض أن $\gcd\left(a, b\right) = 1$. برهن أنه لكل عدد صحيح c ، فإن المعادلة

$ax + by = c$ لها حل صحيح لكل من x و y. (مساعدة: أوجد حل للمعادلة $au + bv = 1$ واضربه في c).

أوجد حل للمعادلة $37x + 47y = 103$. حاول جعل x و y أصغر ما يمكن.

(٦،٦) أحياناً نكون مهتمين بإيجاد الحلول غير السالبة فقط للمعادلة $ax + by = c$.

(a) اشرح لماذا لا توجد حلول للمعادلة $3x + 5y = 4$ عندما $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(b) اعمل قائمة لبعض الأعداد التي على الشكل $3x + 5y$ ، عندما $x \geq 0$, $y \geq 0$. اعمل تخميناً عن القيم غير الممكنة للأعداد التي على الشكل $3x + 5y$ ، ثم برهن أن تخمينك صحيح.

(c) لكل قيمة من قيم (a,b) التالية، أوجد أكبر عدد ليس على الشكل $ax + by$ عندما $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$(i)\ (a,b) = (3,7) \qquad (ii)\ (a,b) = (5,7) \qquad (iii)\ (a,b) = (4,11)$

(d) ليكن $\gcd(a,b) = 1$ ، باستخدام النتائج التي حصلت عليها في (c) ، أوجد صيغة تخمينية بدلالة a , b تجد من خلالها أكبر عدد ليس على الشكل $ax + by$ عندما $x \geq 0$, $y \geq 0$ ؟ اختبر صحة تخمينك لقيمتين على الأقل لـ (a,b).

(e) برهن أن صيغتك التخمينية في (d) صحيحة.

(f) حاول تعميم هذه المسألة على مجموع ثلاثة حدود $ax + by + cz$ عندما $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. مثلاً ، ما هو أكبر عدد ليس على الشكل $6x + 10y + 15z$ ، حيث x, y, z أعداد غير سالبة؟