الفصل التاسع

تحليل التبايـــن

Analysis of Variance

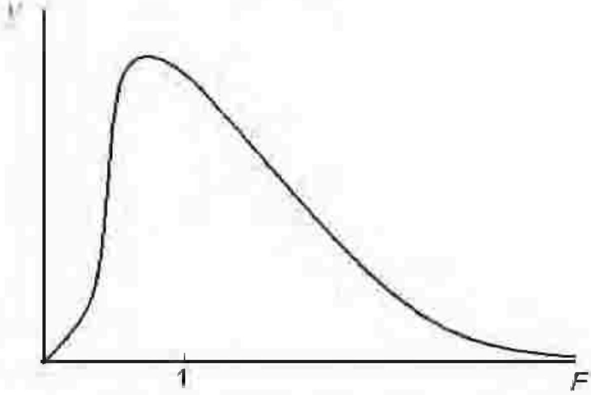
في الفصول السابقة تمت دراسة الاستدلال الإحصائي وقمنا بعرض اختبارات الفروض لقيم المعالم في حالة وجود مجتمع أو مجتمعين. في هذا الفصل سيتم التطرق لطريقة إجراء اختبارات الفروض في حالة وجود ثلاثة مجتمعات أو أكثر. وتكمن أهمية هذا الموضوع ؛ نظراً لأن المقارنات بين الأزواج المتعاقبة عمليه مرهقة وغالبا لا تعطي في النهاية نتائج دقيقه. فمثلاً إذا كان لدينا اختبار لثلاثة متوسطات، يمكننا اختبار جميع الأزواج الممكنة من المتوسطات باستخدام الطريقة التي تم عرضها في الفصول السابقة ولكن هذا الاختبار لا يمكن الاعتماد عليه، ويعطي تحليل التباين طريقة جيدة لإجراء الاختبارات لثلاثة متوسطات أو أكثر ذات موثقية عالية.

وحيث إن تحليل التباين له مصطلحات خاصة تختلف نوعاً ما عن السابق فإننا سنتطرق أولاً للحديث عن تلك المصطلحات. تستخدم بيانات العينة لمقارنة مجموعة مستويات من المتغيرات العشوائية تدعى المعاملة أو المعالجة. ويشير مصطلح المعاملة إلى أي متغير عشوائي كضابط للباحث. فمثلاً عالم الحشرات ربما

يرغب في اختبار مدى فعالية مجموعة من المستويات من مبيد حشري في التحكم في فراشة معينة على شجر التفاح كمعاملة. أو عالم الحيوان ربما يختار تركيزات مختلفة من البروتين في تغذية الأبقار كمعاملة أو معالجة. المصطلح الثاني هو وحدة التجربة. وحدة التجربة هي عبارة عن الكيان الذي يتم معاملته. ففي مثال عالم الحشرات وحدة التجربة ربما تكون الشجرة أو قطعة من الأرض ذات مساحة معينة في حقل التفاح. وفي حالة عالم الحيوان وحدة التجربة ربما تكون العجول ذات وزن ٦٠٠ رطل أو تكون الثور . والمصطلح الإحصائي الجديد هو متوسط المربعات والذي هو عبارة عن مسمى آخر للتباين.

ولعرض نتائج تحليل التباين فإننا عادة ننشئ جدول بعمود نسميه " متوسط المربعات" والذي يحتوي على التباين لمكونات مختلفة للتحليل.

يركز تحليل التباين على التباين. كما هو معلوم فإنه يمكننا كتابة التباين كمجموع للمربعات مقسوماً على درجات الحرية. وفي تحليل التباين يتم تقسيم إجمالي تباين العينة. إذا كان فرض العدم صحيح فإن الأقسام تعطي تقديرات مستقلة لنفس التباين ويتم حساب إحصاءة توزيع F كنسبة لكلا التقديرين وتوزيع المعاينة لتلك النسبة للتباين مستمرة وتعطي شكل توزيع F (الشكل رقم ٩,١) . إشارة لاسم العالم الذي طورها ويدعى Sir.R.A.Fisher ويتراوح مدى المتغير العشوائي F من الصفر إلى مالا نهاية ؛ نظراً لأن نسبة الأعداد المربعة لا يمكن أن تكون سالبة. يتميز التوزيع بالتواء موجب ولكنه يصبح متماثلاً كلما اقتربت درجات الحرية لكل تباين من القيمة ما لانهاية. لذا فإننا نتوقع أن تكون أكثر التواء للعينات الصغيرة وأقل التواء كلما زاد حجم العينة.



الشكل رقم (٩.١). توزيع F

وعليه فإن درجة الحرية تحدد شكل التوزيع. ويمكن الاطلاع على الجدول رقم (١٠) بالملحق على قائمة بالقيم الحرجة لـ F لمستويين من المعنوية عندما α تساوي ٥٪ و ١٪ . وتشير القيم في الجدول المكتوبة بالطباعة العادية لقيم F عندما تكون α تساوي٥٪ بينما تشير القيم المكتوبة بالبنط العريض إلى قيم F عندما α تساوي ١٪ . وتشير درجات الحرية الرأسية في الجدول إلى درجات الحرية لتباين البسط في نسبة F بينما تشير درجات الحرية الأفقية في الجدول (الصف) إلى درجات الحرية لتباين المقام.

وتقوم المصطلحات النظرية لتحليل التباين على مجموعه من الافتراضات هي :

١- يتم سحب عينات عددها K عشوائياً من عدد K من المجتمعات.

٢- المجتمعات K مجتمعات طبيعة.

٣- تباينات المجتمعات البالغ عددها K متساوي.

وأيضاً فإن متوسطات المجتمعات K يجب أن تكون متساوية لـ F حتى تكون متغير عشوائي في توزيع F. ولكن هذا الشرط عبارة عن الفرض الذي نختبره باستخدام تحليل التباين. وقبل إجراء الاختبار نعتبر أن الفرض صحيح ولكن ربما يتم رفضه بعد

إجراء الاختبار. أما الشروط الثلاثة الأخرى فيجب أن تكون صحيحة قبل وبعد الاختبار. وللتحقق من صحة الفرض الأول يجب أن نقتنع بأنه تم اختبار العينات عشوائياً باستخدام الطرق التي تم مناقشتها سابقاً لاختبار العينات العشوائية. وهذا الشرط من أهم الشروط الواجب تحققها ؛ لأن مخالفة فرض العشوائية يسبب أخطاء جسيمة في اختبار F أما الشرط الثاني فليس شرط حرج. فإذا كانت المجتمعات غير طبيعية فإن القيم الحرجة الصحيحة لـ F تكون أكبر من تلك الموجودة بالجدول. الشرط الثالث المختص بالتساوي أو التجانس لتباين المجتمعات التي يتم اختيار العينات منها ليس حرجاً أيضاً. فإذا كان التباين لا يختلف كثيراً فإن اختبار F لن يتأثر بدرجة كبيرة ويمكن تخفيض أثر ذلك باختيار عينات ذات حجم متساوي . وبصفة عامة فإنه يوجد طرق إحصائية للتعامل مع الحالات التي تكون فيها المجتمعات غير طبيعية أو ذات تباين غير متجانس.

تحليل التباين عبارة عن موضوع شامل في الإحصاء . ولكن في الجزء التالي سوف يتم مناقشة أسلوب تحليل التباين لحالة تصميم ثلاث تجارب فقط.

تحليل التباين في اتجاه واحد One-Way Analysis of Variance

في تحليل التباين باتجاه واحد يتم تطبيق مجموعة مستويات من المعاملات ثم اختبار فرض العدم القائل بأن متوسطات المعاملات (المعالجات) متساوية مقابل الفرض البديل بعدم تساوي تلك المتوسطات. وهذا مكافئ للقول في فرض العدم بأن تباين متوسطات المعاملات يساوي الصفر مقابل الفرض البديل بأن تباين متوسطات المعاملات أكبر من الصفر. ولذلك يمكن صياغته رياضياً :

$$H_o: \mu_1=\mu_2= \ldots =\mu_k (or \sigma_\mu^2 = 0)$$
$$H_a: \mu_1\neq\mu_2\neq \ldots \neq\mu_k (or \sigma_\mu^2 > 0)$$

ويتم رفض فرض العدم إذا كانت F المحسوبة أكبر من الجدولية لمستوي المعنوية α. وعند تساوي المتوسطات فإن عينات عددها K يمكن معاملتها على أنها عينة واحدة من مجتمع واحد، ولكن إذا كانت المتوسطات غير متساوية فإنه يجب التعامل معها على أساس أنها عدد k عينة عشوائية مستقلة مختارة من عدد k مجتمعات مختلفة. وقد ذكرنا ضمن الشروط اللازمة لتحليل التباين بأنه يتم إجراء الاختبار كما لو كان فرض العدم صحيح. لذا، بدأنا بالتعامل مع البيانات كما لو أنها مسحوبة من مجتمع كبير ومتجانس. وقد تم أخذ الاختلاف الكلي وتقسيمه إلى جزأين ، أحدهما للمعاملات والآخر لخطأ التجربة. فإذا كان فرض العدم صحيح ومتوسطات المعاملات متساوية فإن مكونات الاختلاف الكلي للمعاملات لن تحتوي على اختلافات؛ نتيجة اختلاف متوسطات المعاملات وخلاف ذلك فإنه سيكون تقدير آخر لخطأ التجربة.

وإذا تم حساب النسبة لكلا التباينين ، المعاملات وخطأ التجربة طبقاً لهذه الشروط ، فإننا سوف نحصل على قيمه لـ F المحسوبة قريبة من الواحد؛ نظراً لأنه تم تقديرها لنفس الكمية. ولكن إذا كانت متوسطات المعاملات غير متساوية فإن مكونات الاختلاف الكلي للمعاملات سوف تشمل كلا الاختلافين نظراً للاختلاف في متوسط المعاملات وكذلك خطأ التجربة وسيكون متضخم. في هذه الحالة فإن النسبة للتباينين (الاختلافين) ، المعاملات وخطأ التجربة، سوف تعطي رقم كبير لقيمة F المحسوبة – أكبر من القيمة الجدوليه – وسوف تؤدي إلى رفض فرض العدم . وسيتم إجراء هذا الاختبار لحالتين : حالة عينات متساوية الحجم وعينات غير متساوية الحجم.

العينات متساوية الحجم Equal Sample Size

كمثال، انظر للبيانات في الجدول رقم (٩,١) الخاصة بطرق شحن البيض والتي تم تقيمها من قبل تجار الجملة للبيض. تم اختيار أربع طرق للشحن بعدد ٥ شحنات لكل طريقة. وتم تسجيل عدد البيض المكسور في كل شحنه لكل طريقه من الطرق كما في الجدول. فهل متوسط البيض المكسور متساوٍ لكل الطرق المستخدمة في الشحن؟ استخدم مستوى معنوية ١٪ لإجراء الاختبار.

الجدول رقم (٩.١). عدد البيض المكسور لعينات طرق الشحن الأربع.

رقم وحدة المعاينة	طريقة الشحن A	B	C	D
١	٤	٩	١	٩
٢	٣	٧	٦	٧
٣	١	٦	٤	٧
٤	٢	٨	٣	٦
٥	٥	٨	٤	٨
الإجمالي	١٥	٣٨	١٨	٣٧
المتوسطات	$\overline{X}_{.1} = 3.0$	$\overline{X}_{.2} = 7.6$	$\overline{X}_{3} = 3.6$	$\overline{X}_{4} = 7.4$

$$\overline{X}_{..} = \frac{15+38+18+37}{5(4)} = 5.4$$

طريقة تحليل التباين المستخدمة لتحديد هل طريقه الشحن لها تأثير على عدد البيض المكسور تشتمل على متغيرين. طريقه الشحن وهي عبارة عن متغير نوعي (وصفي) وله أربع قيم، قيمه واحده لكل معاملة ، وعدد البيض المكسور وهو متغير

الاستجابة والذي سيكون دائماً متغير كمي ؛ نظراً لأن الاستجابة المتحصل عليها ربما تعتمد على طريقة المعاملة الخاصة التي استخدمت ؛ وعلى الرغم من أن تحليل التباين يهتم مبدئياً بالعوامل الوصفية فإنه ربما يستخدم أيضاً مع متغيرات كمية إذا تم تحويلها باستخدام بعض الطرق لإنشاء فئات كمية بدلاً من متغيرات مستمرة.

ولمناقشة البيانات في الجدول رقم (٩,١)، فإننا يجب أن نقوم بتعريف بعض الرموز أولاً. يتم تعريف كل رقم لعينة البيض المكسور بالرمز X_{ij} حيث تشير i إلى الصف أو رقم المشاهدة في العينة و j تشير إلى العمود. فمثلاً الرمز X_{21} يساوي ثلاث بيضات مكسورة وهي عدد البيضات المكسورة في الشحنة الثانية التي تم إرسالها باستخدام الطريقة الأولى A. ويمكن حساب متوسط العينة لعدد *jth* معاملة باستخدام $\overline{X}_j = \Sigma X_{ij}/n$ (j-x) بحيث يتم الجمع لقيم i حيث تمت الاستعاضة بالنقطة بدلاً عن i في $\overline{X}$. وفي المثال الحالي فإن j تساوي ١، ٢، ٣ أو ٤ بناء على أي المعاملات ندرس. فمثلاً المعاملات الأولى نحسب متوسط العينة بأخذ المجموع الكلي للقيم في العمود A ثم نقسمها على حجم العينة $n = 5$.

$$\overline{X}_1 = \frac{4+3+1+2+5}{5} = 3.0$$ بيضه مكسورة

وقد تم حساب متوسطات العينات المتبقية بنفس الطريقة وكانت $\overline{X}_2 = 7\cdot 6$ ، $\overline{X}_3 = 3\cdot 6$ ، $\overline{X}_4 = 7\cdot 4$.

والمتوسط العام $\overline{X}..$ (X شرطه نقطه نقطه) عبارة عن المتوسط لجميع المشاهدات العشرين نظراً لأنه إذا كان فرض العدم صحيح فإن كامل البيانات يمكن جمعها. وعليه يمكن حساب $\overline{X}..$ باستخدام المعادلة رقم (9.1):

$$\overline{X}_{..} = \Sigma\Sigma X_{ij}/nk \qquad (9.1)$$

حيث تم الجمع لكلا i ، j وذلك يتطلب استخدام علامتين لصيغة الجمع. يتم الجمع أولاً للصفوف للحصول على العمود الإجمالي ثم نجمع القيم في العمود المتحصل عليه للحصول على المجموع الكلي. ثم نقسم على حاصل ضرب عدد الصفوف n في عدد الأعمدة K وبالتالي تم استخدام جميع مشاهدات العينة في المقام. ويتطبيق ذلك على المثال أعلاه فإن المتوسط الكلي في الجدول رقم (٩,١) يساوي $\bar{X}_{..} = 5 \cdot 4$ بيضه مكسورة.

ونظراً لاستخدامنا مجموعة مجتمعات، فإننا نستخدم بيانات العينة لقياس ثلاثة مصادر للاختلاف في اختلافات المعاملات أو مجموع مربعات المعاملات، والتي تقيس كيفية اختلاف نتائج العينة بين المعاملات المختلفة، اختلافات الخطأ أو مجموع مربعات الخطأ ، والتي تقيس بشكل جماعي كيفية اختلاف المشاهدات داخل العينات، والاختلاف الكلي أو مجموع المربعات، والتي تقيس إجمالي الاختلاف لمشاهدات العينة لكامل التجربة بغض النظر عن عدد المجتمعات.

مجموع المربعات للمعاملة Treatment Sum of Squares

لتلخيص الاختلاف بين نتائج العينة المختلفة ، يتم استخدام مجموع المربعات للمعاملة والذي يعرف بالرمز SST كما في المعادلة رقم(9.2) :

$$\text{SST} = n\sum(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 \tag{9.2}$$

لحساب SST نجمع مربعات الفرق بين متوسطات المعاملات والمتوسط الكلي ثم نضربها بعدد المشاهدات للعينة n. وعليه فإنه للبيانات في الجدول رقم (٩,١) لدينا :

$$SST = 5[(3.0-5.4)^2 + (7.6-5.4)^2 + (3.6-5.4)^2 + (7.4-5.4)^2]$$

$$SST = 5(5.76 + 4.84 + 3.24 + 4.00) = 89.2$$

ثم ضرب مربع الفروقات عن المتوسط بالرقم٥ $(n = 5)$ عدد المشاهدات للعينة في المعاملة ، وحيث إن عدد المعاملات $K = 4$ ، يكون العدد الإجمالي للمشاهدات ٢٠ مشاهده $(nk = 20)$. ونظراً لأنه تم الحصول على SST كفرق لمتوسطات العينة فإنه يسمى غالبا الاختلاف المفسر. حيث إنه يفسر الفرق في متوسطات العينة الناتج من الفرق الحقيقي في مجتمعات المعاملة بدلاً من الصدفة.

مجموع مربعات الخطأ Error Sum of Squares

يتم حساب الاختلاف داخل العينات ، أو مجموع مربعات الخطأ ، بتجميع مربع الاختلافات بين مشاهدات العينة ومتوسطها. ولذلك يمكن تعريف مجموع مربعات الخطأ SST ، بالمعادلة رقم (9.3) :

$$SSE = \sum\sum(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 \qquad (9.3)$$

وبحساب هذه القيمة لطرق شحن البيض في المثال السابق الموضح (الجدول رقم ٩،٢) نجد أنها تساوي SSE = 33.6 وتم استخدام نفس التنظيم المستخدم سابقاً لحساب هذه القيمة حيث تم جمع مربع الاختلافات لكل معاملة ثم جمعها للحصول على SSE. وكذلك تم استخدام المشاهدات لكل عينة في حساب مجموع مربعات الخطأ كما فعلنا سابقاً في حساب مجموع مربعات المعاملة.

الجدول رقم (٩.٢). حسابات مجموع مربعات الخطأ لمثال طرق شحن البيض.

القيمة	$(X_{i1} - \overline{X}_{.1})^2$	$(X_{i2} - \overline{X}_{.2})^2$	$(X_{i3} - \overline{X}_{.3})^2$	$(X_{i4} - \overline{X}_{.4})^2$
١	١,٠٠=٢(٣ -٤)	١,٩٦=٢(٧,٦ -٩)	٦,٧٦=٢(٣,٦ -١)	٢,٥٦=٢(٧,٤ -٩)
٢	٠,٠٠=٢(٣ -٣)	٠,٣٦=٢(٧,٦ -٧)	٥,٧٦=٢(٣,٦ -٦)	٠,١٦=٢(٧,٤ -٧)
٣	٤,٠٠=٢(٣ -١)	٢,٥٦=٢(٧,٦ -٦)	٠,١٦=٢(٣,٦ -٤)	٠,١٦=٢(٧,٤ -٧)
٤	١,٠٠=٢(٣ -٢)	٠,١٦=٢(٧,٦ -٨)	٠,٣٦=٢(٣,٦ -٣)	١,٩٦=٢(٧,٤ -٦)
٥	٤,٠٠=٢٢(٣ -٥)	٠,١٦=٢(٧,٦ -٨)	٠,١٦=٢(٣,٦ -٤)	٠,٣٦=٢(٧,٤ -٨)
الإجمالي	١٠,٠٠	٥,٢٠	١٣,٢٠	٥,٢٠

$$SSE = \sum\sum(X_{ij} - \overline{X}_{.j} = 10.00 + 5.20 + 13.20 + 5.20 = 33.6$$

مجموع المربعات الكلي Total Sum of Squares

يتم الحصول على مجموع المربعات الكلي كمجموع لمربعات الفرق بين المشاهدات والمتوسط الكلي كعينه واحده بحيث يتم تجاهل المجموعات في هذه الحالة (معادلة رقم 9.4).

$$\textit{Total}\ \mathrm{SS} = \Sigma\Sigma(\mathrm{X}_{ij} - \overline{\mathrm{X}}_{..})^2 \qquad (9.4)$$

ولمثال طرق شحن البيض السابق تم حساب مجموع المربعات الكلي كالتالي :

$$\text{Total SS} = (4 - 5.4)^2 + (3 - 5.4)^2 + \ldots + (8 - 5.4)^2 = 122.8$$

ويجب ملاحظة أنه في حالة جمع مربعات المعاملة مع مربعات الخطأ ، أننا نحصل على مجموع المربعات الكلي ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالمعادلة رقم (9.5) :

$$\text{Total SS} = \text{SST} + \text{SSE} \qquad (9.5)$$

ويتطبيق ذلك على مثال طرق شحن البيض نحصل على :

$$\text{Total SS} = 89.2 + 33.6 = 122.8$$

اختبار *F* ، ***The F Test***

بحسابنا لمجموع المربعات يمكننا إجراء اختبار *F* لنقرر رفض فرض العدم من عدمه . $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_K$. واختبار *F* يعبّر عنه كنسبه بالمعادلة رقم (9.6) :

$$F = \frac{\frac{SST}{k-1}}{\frac{SSE}{n-k}} \tag{9.6}$$

والتي تتبع لتوزيع *F* بدرجه حرية k-1 للبسط و *n-k* للمقام حيث k عبارة عن عدد المعاملات و *n* عدد المشاهدات لكل عينة . ويمكن إعادة كتابة التعبير عن*F* ، والذي يساوي النسبة بين مجموع المربعات إلى درجات الحرية ، كنسبة لمتوسط المربعات ؛ نظراً لأن تعريف متوسط المربعات عبارة عن مجموع المربعات مقسوماً على درجات الحرية. ولذا يمكن إيضاح ذلك رياضياً كالتالي :

$$F = \frac{MST}{MSE} \tag{9.7}$$

وتستخدم قيمة *F* المحسوبة من البيانات باستخدام المعادلة أعلاه كقاعدة لرفض فرض العدم ، فإذا كانت تلك القيمة أكبر من قيمة F_α الجدولية من الجدول رقم (١٠) بالملحق فإنه يتم رفض فرض العدم ، وماعدا ذلك فلا يتم رفضها. وبصفة عامة يتم عرض تحليل التباين باتجاه واحد في جدول يسمى ANOVA كما هو موضح في الجدول رقم (٩،٣) :

الجدول رقم (٩.٣). تحليل التباين باتجاه واحد ANOVA

F	متوسط المربعات	مجموع المربعات	درجات الحرية	مصدر الاختلاف
MST / MSE	$MST = SST / (k-1)$	$SST = n\Sigma(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2$	$k-1$	المعاملات
	$MSE = SSE/(k(n-1))$	$SSE = \Sigma\Sigma(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2$	$k(n-1)$	الخطأ
		$SS = \Sigma\Sigma(X_{ij} - \overline{X}_{..})^2$	$kn-1$	الكلي

وبذلك فإن جدول ANOVA لمثال طرق شحن البيض يمكن عرضها في الجدول التالي رقم (٩.٤):

الجدول رقم (٩.٤). جدول ANOVA لمثال طرق شحن البيض.

F	متوسط المربعات	مجموع المربعات	درجات الحرية	مصدر الاختلاف
14.16	*89.2/3 = 29.73*	*89.2*	*4 – 1 = 3*	المعاملة
	33.6/16 = 2.1	*33.6*	*4 (5 – 1) = 16*	الخطأ
		122.8	*4 (5) – 1 = 19*	الكلي

ولقبول أو رفض فرض العدم تتم مقارنه قيمة *F* المحسوبة والتي تساوي $F = 29 \cdot 73/2 \cdot 1 = 14.16$ (جدول رقم ٩.٤) بالقيمة الجدولية أو الحرجة F_{α} بدرجه حرية ٣ للبسط و ١٦ درجه حرية للمقام ومستوى معنوية ١٪ من الجدول رقم (١٠) بالملحق والتي تساوي $F = F_{0.01} = 5 \cdot 2922$ ، نجد أن قيمة *F* المحسوبة أكبر من قيمه *F* الجدوليه ولذلك نرفض فرض العدم في هذه الحالة والتي يمكن القول بناء على ذلك بأن متوسط البيض المكسور غير متساوي في جميع طرق الشحن المستخدمة.

وبدارسة الجدول رقم (٩.٤) نلاحظ أن مجموع المربعات الكلي Total SS يساوي SSE + SST ومجموع درجات الحرية يساوي درجات حرية المعاملات ودرجات حرية الخطأ، وتتحقق هذه العلاقات دائماً في تحليل التباين وتعطي طريقه سهله للتأكد من الخطأ في حالة الحسابات . أيضاً ، درجات الحرية الموجودة في جدول تحليل التباين ANOVA يمكن استخدامها لإيجاد قيم F الجدوليه من الجدول رقم (١٠) بالملحق.

الصيغ الحسابية Computational Formulas

حيث تم عرض الصيغ الخاصة بالمعاملة والخطأ وكذلك المجموع الكلي في الأجزاء السابقة، ولكن لا يفضل استعمال تلك الصيغ لحساب القيم باستخدام الآلة الحاسبة اليدوية.

والطريق الأنسب لحساب قيمه F هو استخدام الكمبيوتر وبرامج أوراق العمل مثل أكسل أو البرامج الإحصائية المتخصصة مثل برنامج SPSS للكمبيوتر الشخصي. ومع ذلك فإننا نعرض هنا المعادلات الحسابية الممكن استخدامها في حالة الحساب بالآلة الحاسبة. وأفضل طريقة لحساب مجموع المربعات الكلي هو استخدام المعادلتين رقمي (9.8 و 9.9) التالية :

$$\text{Total SS} = \sum\sum X_{ij}^2 - C \qquad (9.8)$$

$$C = (\sum\sum X_{ij})^2 / kn \qquad (9.9)$$

وكذلك يمكن حساب مجموع المربعات للمعاملات باستخدام الصيغ الحسابية الموضحة في المعادلة رقم (9.10):

$$SST = \sum T_j^{\,2}/n - C \qquad (9.10)$$

حيث T_j^2 عبارة عن مجموع المربعات الكلية(العمود) للمعاملة ويمكن حساب مجموع مربعات الخطأ باستخدام الطرح كما هو موضح في المعادلة رقم (9.11) :

$$SSE = \text{Total}SS - SST. \qquad (9.11)$$

ويمكن استخدام البيانات الخاصة بمثال طرق شحن البيض لعرض كيفية عمل الصيغ الحسابية كالتالي :

$$C=(\sum\sum X_{ij})^2/kn=(4+3+\ldots+8)^2/(4)(5)=(108)^2/20=583.2$$
$$\text{Total SS}=\sum\sum X_{ij}^2-C=(4^2+3^2+\ldots+8^2)-583.2=706-583.2=122.8$$
$$SST=\sum T_{ij}^2/n-C=(15^2+38^2+18^2+37^2)/5-583.2=$$
$$SST=(225+1444+324+1369)/5-583.2=672.4-583.2=89.2$$
$$SSE=\text{Total SS}-SST=122.8-89.2=33.6$$

وعند إكمال عملية الحساب يمكن إدراج هذه القيم لمجموع المربعات في الأماكن المناسبة لها في جدول تحليل التباين ANOVA كما في العمود الثالث من الجدول رقم (٩،٤) ثم إكمال التحليل كما سبق. ويجب أن نتذكر أن مجموع المربعات لا يمكن أن يكون سالب. ولذلك، يجب أن نعلم أننا قد أخطائنا في حساب القيم عند الحصول على قيم سالبة لناتج الطرح.

العينات غير متساوية الحجم Unequal Sample Size

حيث إننا في تحليل التباين في الغالب نرغب في الحصول على عينات متساوية الحجم لكل معاملة ولكن في بعض الأحيان لا نستطيع عمل ذلك فمثلاً ، الحيوانات المستخدمة كوحدة للتجربة في تحليل التباين ربما تمرض وتموت، أو اختلاف الطقس ،

الأمراض والحشرات يمكن أن تسبب ضرر للمساحة الحقلية المقامة عليها التجربة ولذلك نفقد بعض المشاهدات، وربما لأسباب أخرى فقد لا يكون هناك بيانات كافية لبعض المعاملات تسمح بالحصول على عينات متساوية الحجم. في مثل هذه الحالات يمكن القيام بإجراء تحليل التباين ولكن الصيغ المستخدمة لدرجه الحرية ومجموع المربعات مختلفة نوعاً ما.

مجموع المربعات، درجات الحرية، F
Sum of Squares, Degrees of Freedom, and F

مجموع المربعات للمعاملة (المعالجة) معرف كالتالي بالمعادلة رقم (9.12):

$$\text{مجموع مربعات المعاملة} = SST = \sum n_j(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2 \qquad (9.12)$$

في هذه الحالة تم ضرب حجم العينة للمعاملة j_{th} بمربع فرق متوسط المعاملة j_{th} من المتوسط الكلي قبل إيجاد المجموع للمعاملات k.

ويحسب مجموع مربعات الخطأ ومجموع المربعات الكلي، كما هو موضح في المعادلتين رقمي (9.13 و 9.14):

$$\text{مجموع مربعات الخطأ} = SSE = \sum\sum(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 \qquad (9.13)$$

$$\text{مجموع المربعات الكلي} = Total\,SS = \sum\sum(X_{ij} - \overline{X}_{..})^2 \qquad (9.14)$$

ويمكن حساب درجة الحرية للمعاملات باستخدام الصيغة الرياضية الموضحة في المعادلة رقم (9.15):

$$\text{درجة حرية المعاملة} \quad df = k-1 \qquad (9.15)$$

ولحساب درجات الحرية للخطأ نستخدم المعادلة رقم (9.16) والتي تأخذ في الحسبان الفرق في حجم العينات. أيضاً فإن درجة الحرية للإجمالي يمكن حسابها باستخدام الصيغة الرياضية الموضحة في المعادلة رقم (9.17):

$$\text{df} = \sum (n_j - 1). \quad \text{درجة حرية الخطأ} \qquad (9.16)$$

$$\text{df} = (\sum n_j) - 1. \quad \text{درجة الحرية الإجمالية} \qquad (9.17)$$

ويوضح الجدول رقم (٩،٥) جدول تحليل التباين ANOVA المستخدم لحساب إحصاءة F لتحليل التباين باتجاه واحد لبيانات عينات غير متساوية الحجم.

الجدول رقم (٩.٥). تحليل التباين ANOVA باتجاه واحد لعينات غير متساوية الحجم.

مصدر الاختلاف	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	*F*
المعاملة	$k - 1$	$SST = \sum n_j (\overline{X}_j - \overline{X}_{..})^2$	$MST = SST/(k-1)$	MST / MSE
الخطأ	$\sum (n_j - 1)$	$SSE = \sum\sum (X_{ij} - \overline{X}_j)^2$	$MSE = SSE/\sum (n_j - 1)$	
الكلي	$(\sum n_j) - 1$	$SS = \sum\sum (X_{ij} - \overline{X}_{..})^2$		

والصيغة الحسابية المستخدمة في تحليل التباين باتجاه واحد لعينات غير متساوية الحجم تختلف نوعاً ما. وسيتم عرض تلك الصيغ إضافة لمثال توضيحي لطريقة استخدامها في الجزء التالي.

الصيغ الحسابية Computational Formulas

لعرض ذلك نفترض المثال التالي والمتضمن رغبة مدير الإنتاج في مصنع للآلات الزراعيـة في مقارنـة المنتجـات لعـدد ثـلاث آلات إنتاجيـة. قـام المـدير بـإجراء تجربـة للمخرجات لكل آلة كمعاملة وذلك باستخدام نفس الظروف الإنتاجية وقام بتدوين الإنتاج لكل دقيقه. قام بهذه التجربة لمدة ٥ دقائق للآلة A و ١٠ دقائق للآلـة B و ٦ دقائق للآلة C و النتائج التي تم التوصل إليها موضحة بالجدول رقم (٩،٦). المطلوب عنـد مـستوى معنويـة ٥٪ اختبر هـل يوجـد فـرق في متوسـط الإنتـاج لـلآلات الـثلاث. ولذلك يمكن صياغة فرض العدم والفرض البديل لهذا الاختبار على النحو التالي :

$$H_0 : \mu_A = \mu_\beta = \mu_C$$
$$H_a : \mu_A \neq \mu_\beta \neq \mu_C$$

ولإجراء اختبار F لهذه التجربة فإنه لابد من حساب مجموع المربعات ويتم ذلـك باستخدام الصيغ الحسابية الموضحة في المعادلات من (9.18-9.21) .

$$\text{Total SS} = \sum\sum X_{ij}^2 - C \tag{9.18}$$

$$C = (\sum\sum X_{ij})^2 / \sum n_j \tag{9.19}$$

$$SST = \sum(T_j^2/n_j) - C \tag{9.20}$$

$$SSE = \text{Total SS} - SST \tag{9.21}$$

وباستخدام البيانات الموضحة في الجدول رقم (٩،٦) نحسب أولاً قيمة C ثم مجموع المربعات الكلي :

$$C=(\sum\sum X_{ij})^2/\sum n_j = 173^2/21=1425.19\,.$$

$$\text{Total SS}=\sum\sum X_{ij}{}^2 - C = (10^2+6^2+\ldots+12^2)-1425.19$$

$$\text{Total SS}=1557-1425.19=131.81$$

الجدول رقم (٩.٦). مخرجات الإنتاج للآلات الثلاث.

الآلة C	الآلة B	الآلة A
١١	٦	١٠
٨	٧	٦
١٣	٩	٨
١٠	٤	١٢
١٠	٦	٦
١٢	١٠	
	٥	
	٦	
	٨	
	٦	
$\bar{X}_{.3}=10.7$	$\bar{X}_{.2}=6.7$	$\bar{X}_{.1}=8.4$
$T_{.3}=\sum X_{i3}=64$	$T_{.2}=\sum X_{i2}=67$	$T_{.1}=\sum X_{i1}=42$

وبحساب مجموع المربعات للمعاملة نحصل على:

$$SST=\sum(T_j{}^2/n_j)-C=42^2/5+67^2/10+64^2/6-1425.19$$

$$SST=352.8+448.9+682.67-1425.19=59.18$$

ثم بعد ذلك نستطيع الحصول على مجموع مربعات الخطأ بالطرح كالتالي :

$$SSE = \text{Total SS} - SST = 131.81 - 59.18 = 72.63$$

وبعد إجراء هذه الحسابات فإننا أوجدنا المعلومات الضرورية لتكوين جدول تحليل التباين ANOVA والموضحة بالجدول رقم (٩،٧).

الجدول رقم (٩.٧). جدول تحليل التباين ANOVA لتجربة مخرجات الإنتاج.

مصدر الاختلاف	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F
المعاملة	$3-1=2$	59.18	59.18/2=29.59	7.33
الخطأ	$\sum(n_j-1)=18$	72.63	72.63/18=4.035	
الكلي	$(\sum n_j)-1=20$	131.81		

وباستخدام الجدول رقم (١٠) بالملحق لإيجاد قيمه F الجدوليه عند مستوى معنوية ٥٪ ودرجه حرية للبسط تساوي ٢ ودرجه حرية للمقام تساوي ١٨ نجد أنها تساوي ٣،٥٥. وحيث إن F المحسوبة تساوي ٧،٣٣ من الجدول رقم (٩،٧) وهي تزيد عن F الجدوليه فإن القرار هو رفض فرض العدم. وبالتالي فإنه في حالة هذا المثال فإن المدير يستنتج بأن متوسط مخرجات الإنتاج لهذه الآلات الثلاث غير متساوي.

تحليل التباين باتجاهين Two-Way Analysis of Variance

في حاله تصميم التجارب التي نستخدم فيها مجموعتين من المعاملات أو المعالجات آنياً ربما نختار تجربة قطاع عشوائي بحيث تكون أحد المجموعات ذات أهمية مركزية والمجموعات الأخرى تكون مصدر للاختلاف في البيانات ولذلك يمكن إزالتها

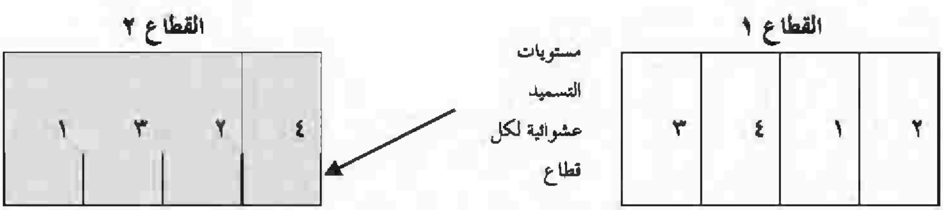
من خطأ التجربة، وربما نقوم بإجراء تجربه تامة التعشية عندما يكون الاهتمام بالاختلاف في كلا العوامل . في هذه الحالة، يكون لدينا مجموعتين من فرض العدم والفرض البديل ونجرى اختبارين لـ F لكل معالجه أو عامل.

تصميم القطاع العشوائي Randomized Block Design

تصميم القطاع العشوائي عبارة عن تصميم عام يستخدم لاختبار t المزدوج. في هذا الاختبار يتم تجميع البيانات ثم التعامل مع الفروق للتخلص من مصادر الاختلاف المعروفة في البيانات.

وفي التصميم التام التعشية يتم إنشاء قطاعات تمثل الوقت والمكان أو أدوات التجربة. ولذلك إذا كان الهدف هو مقارنة ثلاث معالجات وتم الاشتباه بوجود اتجاه زمني في متوسط الاستجابة عبر الزمن، يمكننا التخلص من جزء كبير من اختلاف الاتجاه الزمني باستخدام القطاعات. ويتم عمل ذلك بالتطبيق العشوائي للمعالجات على وحدات التجربة في أحد قطاعات التجربة خلال فتره زمنية معينة ثم إعادة التجربة في فترات زمنيه حتى نجمع البيانات الكافية. أيضاً القطاعات ربما تكون قطع أراضي أو أنواع من الحيوانات أو بعض العوامل الأخرى في التحليل التي يعزى لها جزء من الاختلافات في مجموع المربعات الكلي ويمكن التخلص من أخطاء التجربة بحساب مجموع المربعات للقطاع. فمثلاً إذا كان أحد المهندسين الزراعيين يرغب في تحديد أثر ثلاثة مستويات من تطبيقات الأسمدة على إنتاجية القمح ؛ بالإضافة لقطاع المقارنة بدون إضافة تسميد ويمكن اختيار مواقع مكونه من مزرعتين لإجراء التجربة، واختيار مواقع المزرعة كقطاعات لفصل أثر الاختلاف في خصائص التربة على الإنتاجية عن اختلافات الخطأ. ولذا يمكن أن يكون تصميمه للتجربة مثل الخريطة الحقلية الموضحة في

الشكل رقم (٩،٢)، بحيث تم اختيار مواقع المعالجات عشوائياً في كل موقع. كل قطاع يجب أن يحتوي على جميع المعالجات و إلا فإنه سيكون لدينا تصميم قطاعي غير مكتمل والذي يكون من الصعوبة تحليله (وأبعد من هدفنا). أيضاً في هذا التصميم فإن المعالجة تظهر مرة واحدة في كل قطاع. والجدير بالذكر فإن هناك تصميم قطاعات عشوائية بحيث يمكن إعادة المعالجات أو تكرارها لكل قطاع ولكن ليست مجال الاهتمام في هذا الكتاب.



الشكل رقم (٩.٢). الخريطة الحقلية لأجهزة التسميد.

تحليل التباين لتصميم القطاع العشوائي

The Analysis of variance for a Randomized Block Design

يحتوي تصميم القطاع العشوائي على متغيرين نوعيين (وصفيين) مستقلين هما القطاعات والمعالجات. لذا فإنه يتم تجزئة مجموع المربعات الكلي إلى ثلاثة أجزاء: المعالجات، والقطاعات، وأخطاء التجربة. نفرض أن $\overline{X}_{i.}$ يعبر عن متوسط القطاع، $T_{i.}$ يعبر عن أجمالي القطاع i th. وعليه فإنه لتصميم قطاع عشوائي به عدد n قطاعات وتم إجراء عدد K معالجات تكون لدينا العلاقات الرياضية التالية والموضحة في المعادلات من (9.22 إلى 9.30).

$$\text{Total SS} = SSB + SST + SSE \qquad (9.22)$$

$$\text{Total SS} = \sum\sum(X_{ij} - \overline{X}_{..})^2 \text{ or} \qquad (9.23)$$

$$\text{Total SS} = \sum\sum X_{ij}^{\ 2} - C \qquad (9.24)$$

$$SSB = k\sum(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2 \text{ or} \qquad (9.25)$$

$$SSB = \sum T_{i.}^{\ 2}/k - C \qquad (9.26)$$

$$SST = n\sum(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2 \text{ or} \qquad (9.27)$$

$$SST = \sum T_{.j}^{\ 2}/n - C \qquad (9.28)$$

$$SSE = \text{Total SS} - SSB - SST \qquad (9.29)$$

$$\text{Where } C = (\sum\sum X_{ij})^2/kn \qquad (9.30)$$

الجدول رقم (٩.٨). جدول ANOVA لتصميم القطاع العشوائي.

مصدر الاختلاف	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	*F*
المعاملات	*k - 1*	*SST*	*MST = SST/(k - 1)*	*MST/MSE*
القطاعات	*n - 1*	*SSB*	*MSB = SSB/(n – 1)*	
الخطأ	*(k – 1)(n – 1)*	*SSE*	*MSE = SSE/(k – 1)(n – 1)*	
الكلي	*kn - 1*	*Total SS*		

ويوضح الجدول رقم (٩.٨) عرض لتحليل التباين لتصميم القطاع العشوائي حيث يحتوي العمود الثاني على درجات الحرية المرتبطة بكل مجموع مربعات. وتم حساب متوسط المربعات بقسمة مجموع المربعات لهم على درجات الحرية الخاصة بها. ويلاحظ وجود قيمة واحدة محسوبة لـ إحصاءة F لهذا الاختبار- وهي عبارة عن متوسط مربع المعالجة مقسوماً على متوسط مربع الخطأ – نظراً لأن فرض العدم الذي

تم اختباره هو هل متوسط المعالجات متساوية أم لا. وقد تم استخدام القطاع في هذه الحالة لتقليل خطأ التجربة.

ويمكن إيضاح ذلك من خلال المثال التالي :

قامت مربية نباتات بتطوير صنف جديد من القمح والذي تأمل أن يعطي إنتاجية أعلى في السهول مقارنة بثلاثة أنواع أصناف مشهورة تزرع تحت ظروف المزارع في الأراضي الجافة. قامت بتصميم تجربه باستخدام القطاعات العشوائية لثلاث أنواع من التربة في المنطقة هي الرملية والطينية والطمي. واختارت حقول لكل نوع من التربة وقسمتها إلى أربعة أجزاء ثم قامت بزراعة الأربعة الأنواع من القمح عشوائياً فيها. ويوضح الجدول رقم (٩.٩) الإنتاجية المتحصل عليها لكل ايكر من كل الأجزاء المزروعة، المطلوب إجراء اختبار لمعرفة هل متوسط الإنتاجية لكل صنف من أصناف القمح متساوية باستخدام مستوى معنوية ٥٪.

الجدول رقم (٩.٩). بيانات إنتاجية قمح المناطق الجافة حسب نوع الصنف والتربة.

القطاع	الصنف				الإجمالي
	A	B	C	D	
رملي	٢٠	٢١	٢١	١٨	٨٠
طيني	٢٥	٢٤	٢١	٢٠	٩٠
طمي	٣٠	٢٨	٢٢	٢٠	١٠٠
الإجمالي	٧٥	٧٣	٦٤	٥٨	٢٧٠

يتم أولاً صياغة فرض العدم والفرض البديل كالتالي :

$$H_o : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$

$$H_a : \mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C \neq \mu_D$$

ثم نحسب مجموع المربعات باستخدام الصيغ الرياضية التالية :

$$C=(\sum\sum X_{ij})^2/kn=(270)^2/(4)(3)=6{,}075$$

$$\text{Total SS}=\sum\sum X_{ij}^{\ 2}-C=20^2+25^2+...+20^2-6{,}075=141$$

$$SST=\sum T_j^{\ 2}/n-C=(57^2+73^2+64^2+58^2)/3-6{,}075=63$$

$$SSB=\sum T_i^{\ 2}/k-C=(80^2+90^2+100^2)/4-6{,}075=50$$

$$SSE=\text{Total SS}-SST-SSB=141-63-50=28$$

ومن النتائج آنفاً نستطيع إنشاء جدول تحليل التباين ANOVA والموضحة في الجدول رقم (٩،١٠) التالي :

الجدول رقم (٩.١٠). جدول ANOVA لاختبار أصناف قمح المناطق الجافة لأنواع محددة من التربة.

مصدر الاختلاف	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F
المعاملات	(4-1)=3	٦٣	٢١	٤،٥
القطاعات	(3-1)=2	٥٠	٢٥	
الخطأ	(4-1)(3-1)=6	٢٨	٤،٦٧	
الكلي	(4)(3)-1=11	١٤١		

من بيانات الجدول آنفاً نلاحظ بأن قيمة F المحسوبة تساوي ٤،٥٠ والتي تمثل حاصل النسبة TMS/EMS ونقارنها بقيمة F الحرجة والتي يمكن الحصول عليها من الجدول رقم (١٠) بالملحق عند مستوى معنوية ٥٪ وثلاث درجات حرية للبسط و٦ درجات حرية للمقام والتي تساوي ٤،٧٦. وحيث إن قيمه F المحسوبة أقل من قيمة F الجدوليه فإننا لا نستطيع رفض فرض العدم. ولذلك يمكننا القول بأن متوسط إنتاجية القمح في الأراضي الجافة لأصناف القمح الأربعة (بما فيها الصنف الجديد) متساوية.

التصميم العشوائي التام The Completely Randomized Design

التصميم العشوائي التام هو النوع الثاني من تحليل التباين باتجاهين حيث يتركز الاهتمام في دراسة المتغيرين الوصفيين – المعالجات والقطاعات. في هذا التصميم يوجد فرضين للعدم أحدهما للمعالجات والآخر للقطاعات والتي يتم اختبارها مقابل الفروض البديلة الملائمة لكل منهما . لذا فإنه يوجد قيمتان لـ F المحسوبة – واحدة لكل اختبار _ ويتم رفض أو عدم رفض فرض العدم بناء على نتائج الاختبارات الفردية. الصيغ لدرجات ومجموع المربعات ومتوسط المربعات هي نفس الصيغ المستخدمة في حالة تجربة القطاع العشوائي التام. ويمكن عرض ذلك من خلال المثال التالي.

يرغب بستاني الزينة في اختبار مدى استجابة صنف معين من نباتات اليوينسينيا لمستويين من هرمونات النمو وكذلك ثلاثة مستويات من تطبيقات السماد . ويرغب أيضاً في إضافة ضابط لكل معالجة عبارة عن نبات لا يتم معاملته بأي من ذلك. لذا يكون لدينا ثلاث معالجات وأربعة قطاعات. وبعد ثلاثة أسابيع من النمو في البيت المحمي قام بقياس ارتفاع النباتات والموضوعة في حوض مقاس ٨ بوصة. وقد توصل إلى النتائج الموضحة في الجدول رقم (٩.١١).

الجدول رقم (٩.١١). ارتفاع نبات اليوينسينيا (بوصة) المعاملة في حوض ٨بوصة بهرمونات النمو والسماد.

معدل التسميد	مستوى هرمونات النمو			
	الضابطة	الجرعة ١	الجرعة ٢	الإجمالي
الضابطة	٢٤	١٦	١٤	٥٤
منخفض	٢٥	١٧	١٤	٥٧
متوسط	٢٧	١٧	١٥	٥٩
مرتفع	٢٨	١٨	١٦	٦٢
الإجمالي	١٠٥	٦٨	٥٩	٢٣٢

المطلوب الاختبار بمستوى معنوية ٥٪ مدى تأثر متوسط ارتفاع نبات اليوينسينيا بهرمون النمو وتطبيقات السماد.

يتم أولاً صياغة فروض العدم والفروض البديلة لهذا الاختبار كالتالي:

$$H_o: \mu_0 = \mu_L = \mu_M = \mu_H \qquad H_o: \mu_0 = \mu_1 = \mu_2$$
$$H_a: \mu_0 \neq \mu_L \neq \mu_M \neq \mu_H \qquad H_a: \mu_0 \neq \mu_1 \neq \mu_2$$

ولإجراء تحليل التباين لهذا المثال فإن الأمر يتطلب حساب مجموع المربعات ويتم حساب معامل التصحيح C كالتالي:

$$C = (\sum\sum X_{ij})^2/kn = (232)^2/(3)(4) = 4,485.33$$
$$\text{Total SS} = \sum\sum X_{ij}^2 - C = (24^2 + 26^2 + ... + 16^2) - 4,485.33 = 310.67$$
$$SST = \sum T_{.j}^2/n - C = (105^2 + 68^2 + 59^2)4 - 4,485.33 = 297.17$$
$$SSB = \sum T_{i.}^2/k - C = (54^2 + 57^2 + 59^2 + 62^2)/3 - 4,485.33 = 11.33$$
$$SSE = \text{Total SS} - SST - SSB = 310.67 - 297.17 - 11.33 = 2.17$$

ويمكن التعويض لتلك النتائج في جدول تحليل التباين ANOVA لحساب قيم F كما في الجدول رقم (٩.١٢).

الجدول رقم (٩.١٢). جدول ANOVA لاختبار أصناف قمح المناطق الجافة لأنواع محددة من التربة.

مصدر الاختلاف	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F
المعاملات	(3-1)=2	٢٩٧,١٧	١٤٨,٥٨	٤١٠,٨
القطاعات	(4-1)=3	١١,٣٣	٣,٧٨	١٠,٤٥
الخطأ	(3-1)(4-1)=6	٢,١٧	٠,٣٦	
الكلي	(4)(3)-1=11	٣١٠,٦٧		

ولذلك يمكننا مقارنه F المحسوبة والتي تساوي ٤١٠,٨ لهرمون النمو بالقيم الحرجة لـ F التي تساوي ٥,١٤ المتحصل عليها عند مستوى معنوية ٥٪ ودرجة حرية ٢ للبسط ودرجة حرية تساوي ٦ للمقام من الجدول رقم (١٠) بالملحق لاختبار الفرض الأول من فروض العدم. وحيث إن قيمه F المحسوبة أكبر بكثير من قيمه F الجدوليه فإنه يتم رفض فرض العدم. أما الاختبار الثاني نجد أن قيمه F الحرجة الجدوليه عند مستوى معنوية ٥٪ ودرجه حرية تساوي ٣ للبسط ودرجه حرية تساوي ٦ للمقام هي ٤,٧٦ وبمقارنتها بقيمه F المحسوبة والتي تساوي ١٠,٤٥ فإننا نرفض فرض العدم . ويمكن تفسير هذه النتائج بأن متوسط ارتفاع نباتات البينستينا تختلف بناء على جرعات هرمون النمو مما يعنى أن لها تأثير على الارتفاع وكذلك الحال بالنسبة للمستويات المختلفة من تطبيقات السماد.

تصميم المربع اللاتيني The Latin Square Design

يوجد بعض الحالات التي تتطلب تحليل ثلاث أو أكثر من المعالجات بناء على طبيعة المشكلة المدروسة. وتحليل التباين المصمم لمثل هذه الحالات يشار له بنطاق واسع على أنه تصميم عاملي. وأبسط هذه الحالات هو المربع اللاتيني والذي يتعامل مع ثلاثة عوامل على أساس مشاهدات قليله نسبياً. ويتم إجراء التجربة بتنظيم مستويات العامل بإعطائها الحرف A ، B ، ... إلخ في شكل صفوف أو مصفوفة بحيث يظهر الحرف مرة واحدة فقط في كل صف وعمود. فعلى سبيل المثال، المربع اللاتيني المكون من أربعة مستويات من المتغيرات يظهر بالشكل التالي (يمكن الرجوع للملحق جدول رقم (١١) للإطلاع على تصاميم أخرى).

D	B	A	C
B	A	C	D
A	C	D	B
C	D	B	A

وهناك عاملان للقطاع، أحدهما للصفوف والآخر للأعمدة، وتتم المعالجات عشوائياً خلالها. هذا التصميم ملائم للمختص بالاقتصاد الزراعي لإجراء الدراسات للمستهلكين بحيث تكون الصفوف عبارة عن مواقع محلات الأغذية في مدينة كبيره والأعمدة عبارة عن أيام الأسبوع . ونعلم من بحوث سابقة أن المستهلكين يشترون في أيام مختلفة من الأسبوع وكذلك أنهم يتسوقون من المحلات القريبة من سكنهم. وحيث إن الناس يسكنون في المناطق بناء على مستوى دخلهم فإن موقع المحل مؤشر مناسب لدخل المستهلك. المعالجة ربما تكون مستوى الأسعار لبرتقال تاكسس، والعدد المباع منه عند كل سعر هي البيانات المطلوب جمعها. ومن جهة أخرى فإن باحث التربة ربما يوظف تصميم المربع اللاتيني لتحديد استجابة إنتاجيه فول الصويا لمعالجات الأسمدة، ويتم تصميم القطاع باستخدام نفاذية التربة ونسبة الميل للحقل.

وتكون الفروض اللازم اختبارها للمعالجات K هي :

$$H_o : \mu_A = \mu_B = ... = \mu_k$$

لعدد k معالجة و :

$$H_a : \mu_A \neq \mu_B \neq ... \neq \mu_k$$

ويحدد عدد المعالجات حجم المربع اللاتيني. ويتم عرض البيانات بـ $X_{ij(K)}$ و r^2 للمربع اللاتيني بحيث r صفوف و r أعمدة. الرمز $X_{ij(K)}$ يحتوي على الرمز i الذي يمثل الصف والرمز j الذي يمثل العمود والرمز K الذي يمثل المعالجة.

تحليل التباين للمربع اللاتيني

The analysis of variance for a Latin Square

توضح المعادلات من (9.31-9.36) الصيغ الحسابية المستخدمة في المربع اللاتيني لحساب مجموع المربعات الكلي. حيث تشمل مجموع المربعات الكلي Total SS وصيغه المعالجات (SST) والصفوف (SSR) والأعمدة (SSC) والخطأ (SSE). ويوضح الجدول (٩،١٣) جدول تحليل التباين ANOVA :

$$C=(\sum\sum X_{ij(k)})^2/r^2 \tag{9.31}$$

$$\text{Total SS}=\sum\sum X_{ij(k)}{}^2-C \tag{9.32}$$

$$SST=\sum T_k{}^2/r-C \tag{9.33}$$

$$SSR=\sum T_{i.}{}^2/r-C \tag{9.34}$$

$$SSC=\sum T_j{}^2/r-C \tag{9.35}$$

$$SSE=\text{Total SS}-SST-SSR-SSC \tag{9.36}$$

ويتم إيجاد قيمة F المحسوبة من الجدول رقم (٩،١٣) بينما نوجد القيمة الحرجة لـ F_α وذلك بدرجات حرية $(r-1)$ للبسط ودرجات حرية $(r-2)(r-1)$ للمقام من الجدول رقم (١٠) بالملحق. ويتم رفض فرض العدم عندما تكون قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F الحرجة (الجدولية).

الجدول رقم (٩.١٣). تحليل التباين للمربع اللاتيني.

مصدر الاختلاف	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	*F*
المعاملات	$r-1$	SST	$MST=SST/(r-1)$	MST/MSE
الصفوف	$r-1$	SSR	$MSR=SSR/(r-1)$	
الأعمدة	$r-1$	SSC	$MSC=SSC/(r-1)$	
الأخطاء	$(r-1)(r-2)$	SSE	$MSE=SSE/(r-1)(r-2)$	
الكلي	r^2-1	*total SS*		

الجدول رقم (٩.١٤). تصميم المربع اللاتيني لتجربة تغذية الأبقار.

الصف	العمود		
	I(0%)	II (25%)	III(50+%)
(تبيعة) 1	B 150	A 28	C 256
(ثور) 2	C 288	B 148	A 24
(تبيع) 3	A 60	C 288	B 156

الجدول رقم (٩.١٥). مجاميع الصف والعمود والمعاملات لتجربة تغذية الأبقار.

الصف	العمود			مجموع الصف	مجموع المعاملات
	I(0%)	II (25%)	III(50+%)		
(تبيعة) 1	B 150	A 28	C 256	434	A 112
(ثور) 2	C 288	B 148	A 24	460	B 454
(تبيع) 3	A 60	C 288	B 156	504	C 832
الكلي	498	464	436	1,398	

وكمثال على ذلك نفترض أن تجربة لتغذية الأبقار باستخدام ثلاث معالجات أجريت على حظيرة حيوانات ذات الوزن ٥٥٠ رطلاً بصفوف من الأجناس (تبيعه ، ثور ، تبيع) والأعمدة تساوي نسبة تأثير البراهاما (صفر ، ٢٥ ، أكثر من ٥٠). وتتكون المعالجة من علائق أو وجبات هي ١,٥ (A) ، ٢,٥ (B) ، ٣,٥ (C) في المائة لوزن الجسم والمتغير المقاس هو إجمالي الوزن المكتسب بالرطل خلال فتره التجربة البالغة ١٢٠ يوماً. ويوضح الجدول رقم (٩,١٤) البيانات المتحصل عليها من التجربة. المطلوب اختبار بدرجه معنوية ٥٪ مدى تساوي متوسط الوزن المكتسب للحيوانات للثلاث الوجبات المستخدمة. يمكن صياغة الفروض لهذا المثال على النحو التالي :

$$H_o : \mu_A = \mu_B = \mu_C$$
$$H_a : \mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C$$

ولإجراء تحليل التباين فإنه يجب حساب إجمالي الصفوف والأعمدة والمعالجات. ويتم الحصول على إجمالي المعالجات بجمع القيم الثلاث لـ A في الجدول رقم (٩،١٤) للحصول على T_A وكذلك الحال بالنسبة لباقي المعالجات. ويمكن الاطلاع على العمود الأخير في الجدول رقم (٩،١٥) لإجمالي المعالجات.

ولإجراء تحليل التباين فإننا نحسب أولاً معامل التصحيح C وكذلك مجموع المربعات الكلي باستخدام الخطوات التالية :

$$C=(\sum\sum X_{ij(k)})^2/r^2=1{,}398^2/3^2=217{,}156$$

مجموع المربعات الكلي

$$Total\ ss=\sum\sum X_{ij(k)}{}^2-c=150^2+288^2+\ldots$$
$$+156^2-217{,}156$$
$$Total\ ss=87{,}968$$

و

$$SST=\sum T_K^2/r-C=(112^2+454^2+$$
$$832^2)/3-217{,}156=86{,}472$$

بينما

$$SSR=\sum T_{i.}^2/r-C=(434^2+460^2+$$
$$504^2)/3-217{,}156=834.66$$

و

$$SSC=\sum T_{.j}^2/r-C=(498^2+464^2+$$
$$436^2)/3-217{,}156=642.66.$$
$$SSE=Total\ SS-SST-SSR-SSC$$

وعليه

$$SSE=87{,}968-86{,}472-834.66-642.66$$
$$=18.68$$

ويتم استخدام القيم المتحصل عليها لإنشاء جدول تحليل التباين ANOVA والتي يمكن التعبير عنها بالجدول رقم (٩،١٦) التالي :

الجدول رقم (٩.١٦). جدول ANOVA لتجربة تغذية قطيع الأبقار لمدة ١٢٠يوم.

مصدر الاختلاف	درجة الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F
المعاملات	3-1=2	٨٦,٤٧٢,٠٠	٤٣,٢٣٦=٢/٨٦,٧٧٢	٤,٦٢٩
الصفوف	3-1=2	٨٣٤,٦٦	٤١٧,٣٣=٢/٨٣٤,٦٦	
الأعمدة	3-1=2	٦٤٢,٦٦	٣٢١,٣٣=٢/٦٤٢,٦٦	
الخطأ	(3-1)(3-2)=2	١٨,٦٨	٩,٣٤=٢/١٨,٦٨	
الإجمالي	3^2-1=8	٨٧,٩٦٨,٠٠		

ومن النتائج آنفاً نلاحظ أن قيمة F المحسوبة هي ٤٦٢٩ والتي قيمتها أكبر بكثير من قيمة F الحرجة (الجدوليه) والتي تم الحصول عليها من الجدول رقم (١٠) بالملحق عند درجه حرية ٢ للبسط ودرجه حرية ٢ للمقام ومستوى معنوية ٥ ٪ . وعليه فإننا نرفض فرض العدم. ويمكن تفسير ذلك بالقول إن متوسط الوزن المكتسب يومياً غير متساوي للعلائق الثلاث المستخدمة.

ملحق الفصل التاسع Appendix to Chapter 9

تحليل التباين باستخدام برنامج اكسل Analysis of Variance with Excel

ANOVA باتجاه واحد One – Way ANOVA

لاستخدم برنامج اكسل لإجراء تحليل التباين باتجاه واحد ندخل بيانات المعالجة في ورقة العمل بحيث تكون بيانات كل معالجه عمود ثم نختار الأمر تحليل البيانات من قائمة الأدوات . وحيث إنه تم تعريف المعالجات في الصف الأول فإنه يمكن تفسير مدى البيانات في الصفوف الأول في الجدول الذي ظهر لنا . نعلّم الصندوق الذي أمام العلامات ونتأكد أن قيمه ألفا (α) هي ٠,٠٥ ثم نكتب مدى المخرجات في الصندوق الخاص بها ثم نختار

الأمر التنفيذ OK. نحصل بعد ذلك على مخرجات مكونه من جزأين. ويوضح الجدول رقم (٩.١٧) تلك المخرجات حيث يتكوّن من جزأين، الأرقام في الجزء الأعلى تمثل خلاصة البيانات بينما الجزء السفلي يحتوى على تحليل التباين. ويعرّف البرنامج المعالجات بين المجموعات بينما يعرّف الخطأ داخل المجموعات ولكن قيم النتائج المتحصل عليها هي نفسها التي تم إيجادها سابقاً. وقيمة F الجدوليه موضحة في آخر عمود.

الجدول رقم (٩.١٧). مخرجات ورقة العمل لبرنامج اكسل لتحليل التباين باتجاه واحد.

الخلاصة

المجموعات	العدد	المجموع	المتوسط	التباين
A	٥	١٥	٣	٢,٥
B	٥	٣٨	٧,٦	١,٣
C	٥	١٨	٣,٦	٣,٣
D	٥	٣٧	٧,٤	١,٣

ANOVA

مصدر الاختلاف	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-VALUE*	*F CRIT*
بين المجموعات	٨٩,٢	٣	٢٩,٧٣٣٣٣	١٤,١٥٨٧	E-05٩,١٢	٣,٢٣٨٨٦٧
داخل المجموعات	٣٣,٦	١٦	٢,١			
الإجمالي	١٢٢,٨	١٩				

تحليل التباين ANOVA غير المتساوي
Unequal ANOVA

يعمل تحليل التباين باتجاه واحد في برنامج اكسل بطريقة متساوية مع المعالجات ذات حجم العينات المتساوية وغير المتساوية. ولذلك، ندخل البيانات في ورقة العمل ثم نختار طريقة تحليل التباين باتجاه واحد من تحليل البيانات داخل القائمة أدوات وفي الجدول الذي يظهر لنا نكمل البيانات المطلوبة ثم ننفذ الأمر. وللمثال الذي تم حله سابقاً فإن النتائج باستخدام برنامج اكسل موضحة في الجدول رقم (٩.١٨) التالي :

الجدول رقم (٩.١٨). مخرجات ورقة العمل لبرنامج اكسل لتحليل التباين باتجاه واحد لحالة عدم تساوي حجم العينة.

الخلاصة

المجموعات	العدد	المجموع	المتوسط	التباين
الآلة A	٥	٤٢	٨,٤	٦,٨
الآلة B	١٠	٦٧	٦,٧	٣,٣٤٤٤٤٤
الآلة C	٦	٦٤	١٠,٦٦٦٦٧	٣,٠٦٦٦٦٧

ANOVA

مصدر الاختلاف	SS	df	MS	F	P-VALUE	F CRIT
بين المجموعات	٥٩,١٧٦١٩	٢	٢٩,٥٨٨١	٧,٣٣٢٥٢	٠,٠٠٤٦٨٥	٣,٥٥٤٥٦١
داخل المجموعات	٧٢,٦٣٣٣٣	١٨	٤,٠٣٥١٨٥			
الإجمالي	١٣١,٨٠٩٥	٢٠				

تحليل التباين ANOVA للقطاع العشوائي

Randomized Block ANOVA

لاستخدام برنامج اكسل في تصميم القطاع العشوائي، فإننا ندخل البيانات وليست الإجماليات وذلك بعناوين الصفوف والأعمدة في ورقه العمل ثم نختار من قائمة الأدوات الخيار تحليل البيانات ثم نختار منها ANOVA طريقه عاملين بدون إعادة. يظهر لنا جدول ندخل فيها المدى للبيانات بما في ذلك عناوين الصفوف والأعمدة وذلك في الصندوق الأول، نعلّم على المربع الذي يشير إلى العلامات، نختار القيمة ٠,٠٥ في الصندوق ألفا (α) ثم نكتب مدى النتائج في الصندوق الأخير وبعد ذلك نختار أمر التنفيذ. تظهر لنا النتائج الموضحة في الجدول رقم (٩,١٩) التالي:

الجدول رقم (٩.١٩). مخرجات ورقة العمل لبرنامج اكسل لتحليل التباين للقطاع العشوائي.

الخلاصة	العدد	المجموع	المتوسط	التباين
رمليه	٤	٨٠	٢٠	٢
طينية	٤	٩٠	٢٢,٥	٥,٦٦٦٦٦٦٧
رملية طينية	٤	١٠٠	٢٥	٢٢,٦٦٦٦٧
صنف A	٣	٧٥	٢٥	٢٥
صنف B	٣	٧٣	٢٤,٣٣٣٣	١٢,٣٣٣٣٣
صنف C	٣	٦٤	٢١,٣٣٣٣	٠,٣٣٣٣٣٣
صنف D	٣	٥٨	١٩,٣٣٣٣	١,٣٣٣٣٣٣

ANOVA

مصدر الاختلاف	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-VALUE*	*F CRIT*
الصفوف	٥٠	٢	٢٥	٥,٣٥٧١٤	٠,٠٤٦٢٥٨	٥,١٤٣٢٤٩
الأعمدة	٦٣	٣	٢١	٤,٥	٠,٠٥٥٨٤٨	٤,٧٥٧٠٥٥
الخطاء	٢٨	٦	٤,٦٦٦٦٦٧			
الإجمالي	١٤١	١١				

ونلاحظ أن جزء الخلاصة للبيانات يحتوي على الإجمالي والمتوسطات والتباينات بحيث تشمل الصفوف أولاً ثم الأعمدة بعد ذلك. أما الجزء الذي يعطي تحليل التباين ANOVA فإنه يظهر بنفس الطريقة. بحيث يعرض الاختلاف بسبب الصفوف أولاً ، وحيث إننا نستخدم الصفوف كقطاعات في هذا التحليل ولسنا مهتمين بهذا الاختبار فإننا نتجاهل قيمة F المحسوبة والجدوليه للصفوف. من جهة أخرى فإننا مهتمين بقيم F المحسوبة والجدوليه للأعمدة ؛ نظراً لأننا نهدف إلى اختبار الإنتاجية المرتبطة بالأصناف المختلفة.

تحليل التباين ANOVA للتصميم العشوائي التام
Completely Randomized Design ANOVA

هذه الطريقة مماثله لتصميم القطاع العشوائي باستخدام برنامج أكسل ؛ نظراً لأننا نستخدم نفس طريقه تحليل التباين. ولكن في هذه الحالة فإننا مهتمين بكلا اختبارات F . لذا فإننا في مثال اليونستينا تم أولاً إدخال البيانات بما في ذلك عناوين الصفوف والأعمدة في ورقة العمل وليس الإجماليات ثم نختار من قائمة الأدوات الخيار تحليل البيانات ثم نختار منها الخيار ANOVA : طريقه العاملين بدون إعادة. يظهر لنا جدول ندخل فيه مدى البيانات في الصندوق الأول ثم نؤشر على المربع الذي يشير للعلامات (العناوين)، وندخل القيمة ٠,٠٥ في الصندوق الخاص بـ ألفا (α) نختار مدى النتائج ثم نختار أمر التنفيذ. تظهر لنا النتائج الموضحة في الجدول رقم (٩,٢٠). ونلاحظ أن قيم F المحسوبة هي نفسها المتحصل عليها سابقاً ماعدا التقريب.

الجدول رقم (٩.٢٠). مخرجات ورقة العمل لبرنامج اكسل لتحليل التباين للتصميم العشوائي التام.

الخلاصة	العدد	المجموع	المتوسط	التباين
السماد الضابطة	٣	٥٤	١٨	٢٨
منخفض	٣	٥٧	١٩	٣٩
متوسط	٣	٥٩	١٩,٦٦٦٦٧	٤١,٣٣٣٣٣
مرتفع	٣	٦٢	٢٠,٦٦٦٦٧	٤١,٣٣٣٣٣
الهرمون الضابطة	٤	١٠٥	٢٦,٢٥	٢,٩١٦٦٦٧
الجرعة ١	٤	٦٨	١٧	٠,٦٦٦٦٦٧
الجرعة ٢	٤	٥٩	١٤,٧٥	٠,٩١٦٦٦٧

ANOVA

مصدر الاختلاف	SS	df	MS	F	P-VALUE	F CRIT
الصفوف	١١,٣٣٣٣٣	٣	٣,٧٧٧٧٧٨	١٠,٤٦١٥٤	٠,٠٠٨٤٨٠٢	٤,٧٥٧٠٥٥
الأعمدة	٢٩٧,١٦٦٧	٢	١٤٨,٥٨٣٣	٤١١,٤٦١٥	E-07٣,٧٩٢	٥,١٤٣٢٤٩
الخطاء	٢,١٦٦٦٦٧	٦	٠,٣٦١١١١			
الإجمالي	٣١٠,٦٦٦٧	١١				

تمارين Exercises

١- تم إجراء التجربة التالية لتحديد أثر أربعه أنواع من التغذية على الوزن المكتسب للعجول. تم اختيار عدد عشرين عجل وتم تقسيمها عشوائياً في أربع مجموعات وتم تغذية كل مجموعة بنوع من تلك العلائق. ويوضح الجدول التالي الوزن المكتسب بالرطل لكل طريقه. المطلوب باستخدام مستوى معنوية ٥٪ اختبر مدى تساوي متوسط الوزن المكتسب لكل عليقة.

عليقه (١) Ful-O-Vigor	عليقه (٢) Peptone	عليقه (٣) Accu-Ration	عليقه (٤) Echo Feeds
١٣٠	١٦٠	٢٠٧	١٩٢
١٤٧	١٥١	٢٣٦	١٨٧
١٣١	١٤٨	٢١٦	١٩٥
١٥٣	١٥٠	٢٣٠	١٩١
١٤١	١٥٥	٣٣٧	١٩٠

٢- تم تقسيم مجموعة من العجول في مجموعات وفقاً لحجم المزرعة، وتم تسجيل الوزن المكتسب بعد الرعي في حقل القمح لمدة ٦٠ يوماً. كما في البيانات التالية:

مزرعة كبيرة	مزرعة متوسطة	مزرعة صغيرة
١٧٥	١٤٤	١٢٣
١٨٤	١٥١	١١٨
١٦٨	١٥٧	١٣٠
	١٤٨	١٢٥
	١٥٢	
	١٤٠	
	١٥٥	

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ مدى تساوي الوزن المكتسب وفقا لأحجام المزرعة.

٣- صنّف أحد الاقتصاديين الزراعيين المزارع متوسطه الحجم التي لم تستفيد من برنامج التمويل الزراعي المحدد وفقاً للنوع والمنطقة كالتالي :

	نوع المزرعة		
المنطقة	قطن	حبوب عليقه	حبوب غذائية
الجنوب الشرقي	٣١	٣٨	٢٧
الوسط	٤٦	٤٢	٣٥
الغرب	٣٠	٢٦	٤٨

اختبر ما إذا كان متوسط الدفع المقدم من البرنامج (بالألف دولار) متساوي حسب نوع المزرعة والمنطقة باستخدام مستوى معنوية ٥٪.

٤- رش البستاني أشجار الجوز تامة النمو في مواقع مختلفة في الحقل باستخدام عدة تطبيقات من الأسمدة خلال فتره أسبوعين لتحديد استجابة الإنتاجية. وتم تسجيل الإنتاجية بالرطل لأشجار الجوز كما في الجدول التالي :

مستوى السماد مضافاً له النيتروجين والزنك			
الموقع	عالي	متوسط	منخفض
بالمجري المائي	١٣٨	١٢٠	١٠٨
منتصف الحقل	٩٠	٧٨	٧٠
اختيار عشوائي	١١٥	٨٩	٧٦

اختبر ما إذا كان متوسط الإنتاجية متساوي لمستويات السماد المختلفة بمستوى معنوية ١٪ مستخدماً المواقع كقطاعات.

٥- اختبر مخططات تصميم التجارب التالية ثم حدد أيهما من نوع المربع اللاتيني.

أ)

A	B	C
C	A	B
B	C	A

ب)

A	B	C
C	C	A
B	A	B

ج)

A	B	C
C	A	B
A	C	A

د)

B	C	D	A
A	D	B	C
D	A	C	B
C	B	A	D

هـ)

B	C	D	A
D	A	B	C
A	C	D	B
C	B	A	D

٦- أكمل جدول تحليل التباين التالي :

مصدر الاختلاف	درجة الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	*F*
المعالجات		١٣٥	٣٣,٧٥٠	
القطاعات	٣		٢٣,٣٣٣	
الخطأ				
الإجمالي		٢٥٠		

٧- يرغب أحد الاقتصاديين الزراعيين في اختبار السوق لمنتج غذائي جديد مصنوع من البطاطس. قام بتصميم مربع لاتيني باستخدام ثلاث معاملات ٠ (وضع السعر عند A =٠,٩٥دولار ، B =١,٠٥ دولار ، C =١,١٥ دولار) وذلك خلال ثلاثة أسابيع في ثلاثة محلات ٠ في ثلاثة مواقع داخلية من المدينة)المطلوب أختبر بمستوى معنوية ١٪ ما إذا كان متوسط المبيعات متساوي لمستويات الأسعار الثلاثة.

الأعمدة

الصفوف	(المحل ١) I	(المحل ٢)II	(المحل ٣)III
أ) (الأسبوع ١)	(C) ٥٠	(B) ٧٩	(A) ١٠٥
ب) (الأسبوع ٢)	(B) ٧٤	(A) ١٠٧	(C) ٦٣
ج) (الأسبوع ٣)	(A) ٩٨	(C) ٦١	(B) ٩٣

٨- استخدم برنامج أكسل لحل التمرين ١ ، ٢ .

٩- استخدم برنامج أكسل لحل التمرين ٣ ، ٤ .