الفصل الثالث

الاحتمـــال

Probability

يتطلب الاستدلال الإحصائي فهم نظرية الاحتمالات لربط خصائص العينة بالمجتمع الذي سحبت منه. لذلك فإننا نحتاج معرفة نظرية الاحتمالات لإجراء عمليات الاستدلال الإحصائي Statistical Inference.

وبشكل عام فإنه يتم استخدام نظرية الاحتمالات لرسم خلاصة حول مكونات العينة بناء على نموذج رياضي للمجتمع. ولكن يتم استخدام الاستدلال الإحصائي لرسم خلاصة حول النموذج الرياضي للمجتمع بناء على بعض الإحصاءات المحسوبة من العينة.

وتتضمن دراسة الاحتمالات ثلاثة أنواع من المسائل :

١- تعريف وتفسير معنى الاحتمالات.

٢- استخدام الاحتمالات المعروفة لحساب الاحتمالات الأخرى.

٣- الحصول على الاحتمالات العددية.

وسيتم التطرق للنوعين الأول والثاني في حين سيتم التطرق للنوع الثالث عند دارسة موضوع التقدير. أيضاً، ستتم مناقشة مواضيع نظرية الاحتمال الأكثر فائدة في

فهم الاستدلال الإحصائي وسوف يتم الاهتمام بمعنى الاحتمالات ووضع افتراضات باستخدام قواعد الاحتمالات. بعد عرض بعض طرق العد سيتم التطرق لنظرية الاحتمالات بحيث تتضمن موضوعات عن نظرية المجموعة، قواعد حساب الاحتمالات، مراجعة الاحتمالات والتوقع الرياضي.

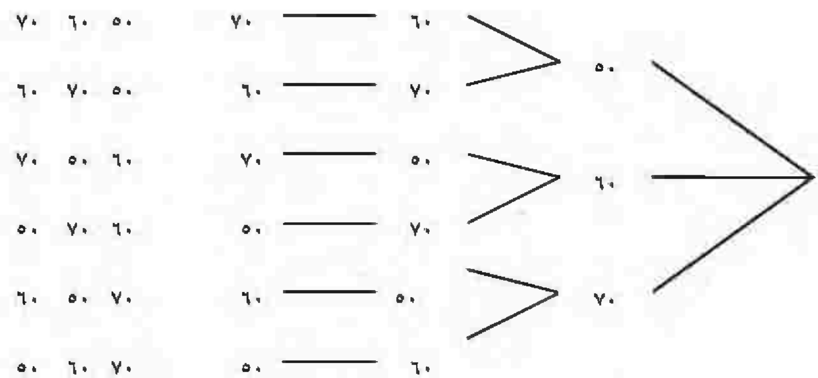
طرق العد Methods of Counting

لقد تعلمنا العدّ مبكراً في الحياة، وعند القيام بالعد يتم ترتيب الوحدات أو وضعها في قائمة. وتشتمل طريقة العد المهمة في نظرية الاحتمالات على اختيار عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها مجموعة البيانات.

التباديل Permutations

تعرف التباديل بأنها ترتيب لمجموعة من الأشياء مع مراعاة الترتيب. على سبيل المثال نفترض أن بائع الآلات يرغب في وضع ثلاث حراثات جديدة في صف لعرضها في غرف العرض. أيضاً نفترض أن البائع يرغب في معرفة عدد الطرق الممكن بها ترتيب هذه الحراثات من موديل ٥٠ ، وموديل ٦٠ ، وموديل ٧٠ بغرفة العرض. الطريقة الوحيدة لعمل الخيارات الممكنة لحل هذه المشكلة هو وضع قائمة بالتوليفات الممكنة من هذه الحراثات.

يمكن إيجاد ست توليفات، أو تباديل، هي ٥٠ ٦٠ ٧٠، ٥٠ ٧٠ ٦٠، ٦٠ ٥٠ ٧٠، ٦٠ ٧٠ ٥٠، ٧٠ ٥٠ ٦٠، ٧٠ ٦٠ ٥٠. ويمكن استخدام الرسم الشجري لعرض هذه التوليفات بيانياً. الشكل الشجري (الشكل رقم ٣،١) يوضح كل ترتيب والذي يمكن به عرض الحراثات في غرفة العرض وكما نلاحظ أن كل ترتيب يختلف عن الآخر.



الشكل رقم (٣,١). الشكل الشجري للتباديل الممكنة لثلاثة أنواع من الجرارات.

كبديل لذلك، يمكن اعتبار المتاح في كل خطوة لاختيار الجرار الزراعي ومن ثم الوصول لعدد التباديل الممكنة . في الخطوة الأولى هناك ثلاث خيارات ممكنة لاختيار الجرار الزراعي. ولكن باختيار الجرار الأول يتبقى لدينا خيارات للخطوة الثانية. بعد اختيار جرارين يتبقى لدينا اختيار جرار واحد في الخطوة الثالثة. ولذلك فإن لدينا ثلاث طرق لعمل الخطوة الأولى، طريقتين لعمل الخطوة الثانية، طريقة واحدة لعمل الخطوة الثالثة، حاصل ضرب ٣×٢×١ ، أو ست تباديل أو طرق لاختيار الجرارات الزراعية. حيث تم استخدام قاعدة الضرب، وكما هو متوقع فإن العديد من مشكلات العد تتطلب أكثر من ثلاث خطوات. لذلك ، فإن الأمر يتطلب وضع قاعدة الضرب، بشكل عام. حيث يمكن عمل الخطوة الأولى بعدد n_1 طريقة، والخطوة الثانية بعدد n_2 طريقة، والاستمرار حتى r خطوات ، ولذلك فإن إجمالي عدد الطرق يمكن صياغته بإيجاد حاصل ضرب تلك الخطوات كما في المعادلة رقم (3.1).

$$(n_1)\ (n_2)\ (n_3)\ \ldots\ldots\ldots (n_r) \tag{3.1}$$

على سبيل المثال ، قائمة الغداء في مطعم تحتوي على ثلاثة خيارات من المتبلات، وخمسة خيارات من الأطباق الرئيسية، وأربعة أنواع من المشروبات وستة أنواع من الحلويات. ولذلك فإن العدد الإجمالي للتشكيلات المختلفة من قائمة الغداء الممكن طلبها هي :

$$(3)\,(5)\,(4)\,(6) = 360$$

ويمكن عادة تحديد عدد التباديل باستخدام أساسيات الضرب ولكن هناك بعض الحالات التي لا يمكن استخدام هذه القاعدة فيها لإيجاد عدد التباديل الممكنة.

وعلى العموم فإنه في حالة شمول جميع عناصر المجموعة في التباديل يمكن حساب عدد التباديل الممكنة باستخدام المضروب $n!$ كما في المعادلة (3.2).

$$_nP_n = n! \tag{3.2}$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي: إذا كان المطلوب إيجاد عدد الطرق الممكنة لتوزيع عدد أربعة عمال زراعيين على عدد أربع وظائف مختلفة يمكن استخدام قاعدة المضروب ومن ثمَّ تكون القيمة الممكنة هي :

$$_4P_4 = 4!\ or\ (4)\,(3)\,(2)\,(1) = 24$$

إذاً لدينا ٢٤ توليفة لتعيين العمال في الوظائف.

في بعض الحالات الأخرى عندما يكون الهدف تحديد البدائل لمجموعة جزئية r من المجموعة n فإنه يمكن استخدام الصيغة الموضحة في المعادلة رقم (3.3).

$$ {}_nP_r = n!/(n-r)! \qquad (3.3) $$

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي : إذا كان لدى شركة تعمل في الكيمياء الزراعية عدد ٦ مندوبين مبيعات يعملون في قسم المبيعات بالشركة وترغب الشركة في اختيار عدد ٢ منهم لتعيينهم في وظائف خارج المبيعات مع إبقاء الأربعة الآخرين في القسم فإن عدد الخيارات الممكنة لمندوبي المبيعات تكون :

$$ {}_6P_2 = 6!/(6-2)! = \frac{6!}{4!} = \frac{(6)\,(5)\,4!}{4!} = 30 $$

وفي حالات أخرى قد يكون الهدف هو إيجاد عدد التباديل لنشاطين متنافيين الحدوث ، على سبيل المثال ، عند وقوع أحد الحدثين فإن الآخر لا يقع. في هذه الحالة إذا تمت صياغة النشاط الأول بعدد j طريقة والنشاط الثاني بعدد k طريقة فإنه يمكن عمل أحدهما أو الآخر بعدد k + j طريقه. مثال ذلك ، إذا كان المزارع يرغب في شراء جرار زراعي وأخبره مندوب المبيعات بتوفر نوعين من الجرارات الأول عبارة عن دفع ثنائي ومتوفر بعدد ست سرعات ، وناقلين للحركة ، وثلاثة أنواع من المظلات ، بينما النوع الثاني يمتاز بدفع أمامي ومتوفر بعدد أربع سرعات وثلاثة نواقل للحركة ، ونوعين من المظلات وعليه فإن لدى المستهلك عدداً من الخيارات لاختيار جرار يمكن إيجادها كالتالي :

$$ j + k = (6)(2)(3) + (4)(3)(2) = 60 $$

التوافيق Combinations

بما أن التباديل تعتمد على تنظيم الترتيبات ، بحيث أن أي تغيير في التنظيم يعطى

ترتيب مختلف ، إلا أن التوافيق لا تعتمد على التنظيم. وعليه فإن عدد التوافيق الممكنة لـ n عناصر في مجموعه معينه يساوي واحد ؛ لأن الترتيب لا يهم ولذلك لدينا طريقة واحده لشمول جميع العناصر في التوفيق. ولكن يمكن اختيار مجموعة جزئية r من المجموعة n ومن ثم الحصول على أكثر من توفيق والتي يمكن تعريفها بالرمز التالي $_nC_r$.

في المثال التالي ، نفترض أن لدينا أربعة عناصر ، $w\,x\,y\,z$ ، ونرغب في إيجاد عدد التباديل والتوافيق لمجموعة من ثلاثة عناصر في الوقت نفسه من هذه المجموعة. يوضح الجدول رقم (٣.١) قائمة بالخيارات الممكنة للتباديل والتوافيق ولذلك يمكن ايجاد أربع من عدد التوافيق لعدد ثلاثة عناصر مختارة من مجموعة مؤلفة من أربعة عناصر ، ويمكن إيجاد عدد ٢٤ من التباديل.

ولذلك فإن كل توفيق يحتوي على عدد ٦ تباديل

$$r! = (3)(2)(1) = 6$$

وعند قسمة العدد الإجمالي لعدد التباديل $n!/(n-r)!$ على عدد التباديل لكل توفيق $r!$ نحصل على عدد التوافيق الممكنة والتي يمكن صياغتها رياضياً في المعادلة التالية (3.4) .

$$_nC_r = n!\,/\,r!\,(n-r)! \tag{3.4}$$

وكمثال على ذلك ، فلو افترضنا أن مدير المبيعات يرغب في وضع أربعة أنواع مختلفه من الجرارات في غرفة العرض على أرضية المعرض من عدد ستة أنواع موجودة لديه فإن عدد التوافيق الممكن عرضها يمكن حسابها كالتالي :

$$_6C_4 = 6!/(4!)(6-4)! = 15$$

وسـيتم اسـتخدام التوافيـق لاحقـاً في حالـة دراسـة التوزيـع الاحتمـالي ثنـائي الحدين.

الجدول رقم (٣,١). مقارنة عدد التباديل والتوافيق الممكنة للحروف wxyz في مجموعة من ثلاثة عناصر.

التوافيق	التباديل					
wxy	*wxy*	*wyx*	*xwy*	*xyw*	*ywx*	*yxw*
wxz	*wxz*	*wzx*	*xwz*	*xzw*	*zwx*	*zxw*
wyz	*wyz*	*wzy*	*ywz*	*yzw*	*zwy*	*zyw*
xyz	*xyz*	*xzy*	*yxz*	*yxz*	*zxy*	*zyx*

الاحتمال Probability

تـستخدم الاحتمـالات عنـد الحاجـة لـصنع قـرار حيـال ظـاهرة ذات نتـائج غـير مؤكـدة. تعـرض نظريـة الاحتمـالات الطريقـة الرياضـية لتقـدير النتـائج غـير المؤكـدة، ونرغـب في الاختيـار بـين بعـض الاسـتنتاجات مـن الاحتمـالات والتفـسير الرياضـي المتحصل عليه من مسلمات الاحتمال.

ولكـن يجـب ذكـر بعـض المفـاهيم قبـل الـدخول في ذلـك ، وأول هـذه المفـاهيم التجربة. حيث تعرّف التجربة بأنها عبارة عن أي عملية يتم إجراؤهـا بغـرض الملاحظـة وهكذا ، فإن رمي زهرة النرد، أو ملاحظـة عـدد بـذور الطمـاطم النامية في الأراضي الطينية أو تسجيل عدد العملاء في السوق المركزي عند نقط المحاسبة عبارة عن تجارب. والتجربة لها نتائج . العـدد الـذي يظهـر عنـد رمـي زهـرة الـزد، نمو بـذرة معينـة ، عـدد العمـلاء عنـد نقطـة المحاسـبة في الـسوق المركـزي خـلال الـساعة الأولى مـن يـوم الـسبت عبارة عن نتائج محتملة للتجربة.

الحدث الأولي، أو أي حدث، عبارة عن الاسم الذي يتم إعطاؤه لكـل نتيجـة للتجربة التي يمكن أن تقع في محاولة مفردة. على سبيل المثال، محاولـة التجربـة المتـضمنة

لرمي زهرة النرد تمثل النتائج الممكنة أعداد النقاط من ١ إلى ٦ الموجودة على الأوجه المختلفة وبذلك فإن أي رقم يظهر بعد رمي الحجر عبارة عن حدث ، والأعداد من ١ إلى ٦ عبارة عن جميع الأحداث الممكنة لتجربة رمي زهرة النرد. والأحداث السابقة عبارة عن حوادث متنافية ؛ حيث إن وقوع أحدها ينفي وقوع الأحداث الأخرى. وكمثال آخر في حالة وجود محل تجاري لديه نقطتين للمحاسبة فإن الأحداث متنافية ؛ نظراً لأن المستهلك سيحاسب عند محاسب واحد فقط ، الحوادث لها مشاهدات أو وحدات أولية مرتبطة بها ، وجمع الوحدات الأولية معاً يعطي المجتمع.

نفترض أن لدينا صندوقاً يحتوي على مسامير بقطر $\frac{1}{4}$ بوصة ومقاسات أخرى وتم إجراء تجربة لاختيار مسمار بطريقة عشوائية من الصندوق وملاحظة هل المسمار المختار قطره $\frac{1}{4}$ بوصة أم لا؟ ثم إعادته في الصندوق والنتيجة المحتملة مرتبطة بالوحدات الأولية.

يتم وضع التفسيرات للاحتمالات الموضوعية بطريقتين مختلفتين لمعنى الاحتمالات ثم توظيف إما النظرية وإما الخبرة لتحديد الاحتمالات. الأحداث المتساوية تشير إلى أن جميع نتائج التجربة لها نفس الفرصة في الظهور باحتمالات متساوية وهذه الطريقة تستخدم في الحالة التي لا يوجد هناك سبب لتفضيل نتيجة معينة للتجربة. وعليه فإن احتمال ظهور أحد وجهي العملة (إما الكتابة أو الصورة) يساوي $\frac{1}{2}$ لأن هنالك نتيجتين للتجربة ويظهر وجه واحد عند رمي العملة ويكون للوجهين نفس الفرصة في الظهور.

والاحتمال $\frac{1}{2}$ عبارة عن نسبة عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها وجه معين مقسوماً على إجمالي النتائج الممكنة للتجربة. وتتيح لنا النظرية حساب الاحتمالات دون إجراء عملية الرمي للعملة حيث يمكن تحديد الاحتمالات باستخدام النظرية ،

أوالحكم الحدسي وتسمى الاحتمالات المسبقة. وقبل تطبيق فكرة نتائج ذات احتمالات متساوية يجب الحصول على احتمالات مثل أن يكون لدينا أوراق لعب متساوية أو حجرة نرد سليمة، وبذلك فإننا لا نحتاج لتجربة في مثل هذه الحالات.

ولكن عند إجراء تجربة في ظروف متماثلة فإن النتائج المتحصل عليها من المحاولات تكون بتكرارات مختلفة. وفي حالات أخرى لا يمكن معرفة الاحتمالات المسبقة ببساطة ولهذا تم ابتكار طريقة للحصول على الاحتمالات تحت هذه الشروط تسمى التكرار النسبي والذي يعبّر عن عدد مرات وقوع حدث مؤكد في n محاولة للتجربة ومن ثم الحصول على تقدير عددي لاحتمال الحدث. ولسوء الحظ فإن التقدير يعتمد على عدد المحاولات في التجربة. ولكن وجد أنه عند إجراء عدد كبير من المحاولات في التجارب التي تعرف فيها الاحتمالات المسبقة فإن التكرار النسبي يقترب من القيمة الأولية. وهذا يعطينا يقين باستخدام التكرار النسبي لقياس الاحتمالات، ولذلك يمكن تعريف احتمال الحدث A ، $P(A)$ بالمعادلة التالية (3.5) :

$$P(A) = \frac{\text{عدد النواتج المحققة للحادث A}}{\text{عدد النواتج الكلية في التجربة}} \qquad (3.5)$$

خصائص الاحتمال الأساسية

تتصف الاحتمالات بثلاث خصائص أساسيه هي :

١ - إذا كان الحدث A أحد الأحداث المتنافية أو الشاملة لتجربة معينه فإن قيمة الاحتمال $P(A)$ والتي تعبّر عن نسبة عدد مرات وقوع الحدث A إلى عدد مرات إجراء التجربة يجب أن تقع بين الصفر والواحد . أي أن :

$$0 \le P(A) \le 1$$

٢- نظراً لأن الحوادث تجميعية (شاملة) فإن أحد الحوادث الأولية يجب أن تقع عند إجراء محاولة ولذلك فإن احتمال وقوع حدث غير الحدث A (الحدث المكمل) يساوي $P(A') = 1 - P(A)$. وعليه فإن مجموع الاحتمالات لجميع الحوادث يساوي واحد.

٣- يعبّر الحدث A' عن مجموعة من الحوادث المركبة متنافية الحدوث غير الحدث A ولذلك تسمى الحوادث المركبة. وعليه فإن احتمال الحدث A' ، $P(A')$ ، عبارة عن مجموع الاحتمالات لجميع الحوادث الأولية غير الحدث A .

وعلى سبيل المثال ، وجد أحد مصانع الآيس كريم أنه في المتوسط ٦٠٪ من عملائه يشترون فانيليا، ٢٠٪ يشترون شوكولاته ، ١٠٪ يشترون فراوله و١٠ ٪ يشترون باقي النكهات الأخرى. ولذلك فإن احتمال أن يشتري مستهلك تم اختياره عشوائياً فانليا هو$P(V)=0.6$ واحتمال اختيار المستهلك لنكهة أخرى غير الفانليا $P(V')$ عبارة عن مجموع احتمال باقي الحوادث.

$$P(C) + P(S) + P(O) = 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.4$$

وعليه فإن احتمال الحدث المركب، غير الفانليا $P(V') = 0.4$ أو

$$1 - P(v') = 1 - 0.6 = 0.4$$

وأي حدث يساوي احتماله صفر فإنه يعني أنه لا يتوقع حدوثه بشكل كبير جداً ولكن لا يعني استحالة وقوعه ، وبالمقابل فإن احتمال $P(A)=1$ لا تعني أن الحدث مؤكد وقوعه ولكن هناك احتمال كبير جداً بوقوعه.

وتتميز إجراءات التكرار النسبي للاحتمالات بأربع ميزات أساسية هي :

١- عدد كبير من المحاولات.

٢- تقترب قيمة التكرار النسبي من القيمة الأولية في حالة وجودها.

٣- استخدام المعلومات التجريبية المكتسبة من الخبره.

٤- استخدام التكرار النسبي لتقدير الاحتمال.

وفي بعض الحالات يكون هناك محددات للخاصيتين الأول ؛ نظراً لأنه يجب تحديد الاحتمالات قبل إجراء التجربة وفي هذه الحالة يستخدم التقدير الشخصي بناء على الخبرة ولكن بشكل عام استخدام التكرار النسبي واسع الانتشار.

المجموعات Sets

المجموعة عبارة عن مجموعة من الأشياء المعرّفة الموضوعة سوياً وقد تكون حقيقية أو تخيلية. ولذلك فإن موظفي مصاعد الحبوب يشكلون مجموعة. وبنفس الطريقة فإن المجموعة يمكن أن تتألف من النظريات المتعلقة بالبحث عن أصل العالم، أو مجموعة المزارعين الذين لديهم تأمين على محاصيلهم، أو مجموعة النتائج المتحصل عليها من تجربة معينه. والأمثلة السابقة عبارة عن مجموعات منفصلة والتي تتكون من عدد من العناصر المنتهية.

والنقاش التالي يهتم بالمجموعات المنفصلة والتي يمكن وصفها بطريقتين :

١- تحديد جميع عناصر المجموعة.

٢- تحديد مدى انتماء شيء معين للمجموعة بتطبيق القاعدة.

وعند تحديد عناصر المجموعة تتم كتابتها باستخدام قوسين { } وشمول جميع العناصر فيها ، فعلى سبيل المثال يمكن تحديد مجموعة أوراق اللعب كعناصر للمجموعة في الشكل التالي {شرياء ، سبيت ، ديمن ، هاص} = S ومجموعة جميع الأحداث المقترنة بتجربه تسمى المجموعة الشاملة ، S .

العمليات على المجموعة Set Operations

في معظم الحالات يكون الاهتمام بجزء (أو مجموعة جزئية) من عناصر المجموعة الكلية. أي حدث عبارة عن مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة للتجربة[١] والأحداث يمكن أن تحتوي على مجموعة من العناصر كما في المثال التالي . نفترض أنه تم رمي زهرتي نرد معاً ولذلك فإن هناك ست وثلاثين نتيجة محتملة للتجربة ويكون الناتج عبارة عن عدد النقاط التي ظهرت على وجهي الحجرين في الرمية. فإذا تم تعريف الحدث بأنه عبارة عن مجموعة النتائج التي يكون مجموعها ٧ يمكن إيجاد المجموعة الجزئية التالية :

$$S_1=\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

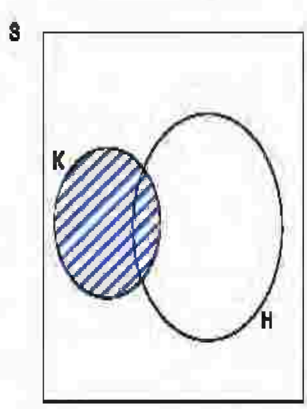
عند وجود طريقه لتميز كل زهره عن الأخرى مثل استخدام حجرين بلونين مختلفين.

وفي بعض الأحيان فإنه يمكن تحديد المجموعات الجزئية بسهولة من المجموعة الشاملة عند استخدام الرسم. ويعتبر شكل فن Venn Diagram أحد الطرق لعرض المجموعة الشاملة بمستطيل والمجموعة الجزئية بدائرة داخل المستطيل. فمثلاً لو اعتبرنا أن المجموعة S هي مجموعة أوراق اللعب (عدد ٥٢) يمكن تعريف مجموعتين جزئيتين منهما المجموعة الجزئية الأولى H وهي تمثل الأوراق التي تحتوي على الأوراق التي على شكل القلب H والمجموعة الجزئية الثانية هي التي تحتوي على الأوراق التي عليها صورة الملك K .

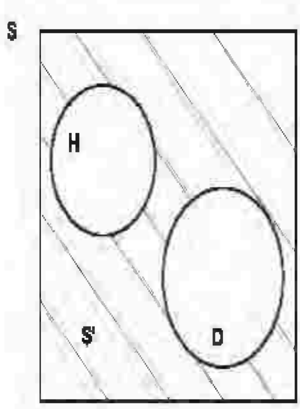
في هذه الحالة يمكن عرض المجموعة الكلية S باستخدام المستطيل كما في الشكل رقم (٣،٢)[٢] والمجموعات الجزئية H أو K يمكن عرضها باستخدام الدوائر داخل المستطيل . المساحات المظللة و/ أو المساحات غير المظللة في الشكل تعبّر عن عناصر

المجموعات الجزئية سواء في المجموعة H أو المجموعة K والتي تمثل اتحاد المجموعتين H و K وتكتب $H \cup K$ وتقرأ H أو K أو H اتحاد K. بينما المساحة الناتجة عن تداخل الدائرتين تعبّر عن العناصر المشتركة في المجموعتين الجزئيتين، أي التي يكون فيها الملك والقلب معاً. وتعّرف بأنها عبارة عن تقاطع المجموعة H و K وتكتب $H \cap K$ وتقرأ H و K ، أو H تقاطع K . وتسمى المجموعة الجزئية التي تحتوي على عنصر واحد مثل $H \cap K$ بمجموعة الوحدة.

ويمكن أن يتم اختيار مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة لا تحتوي على عناصر مشتركة. وعند التمثيل البياني لتلك المجموعات فإنها لا تتقاطع ؛ حيث إن العنصر في أحد المجموعات لا يمكن أن يكون عنصر في المجموعة الجزئية الأخرى ؛ لأنها منفصلة عن بعضها ، وتعبّر المساحة المتبقية من الشكل عن المجموعة الشاملة S وغير المشمولة في أي من المجموعات الجزئية عن المجموعة المكملة للمجموعة S . ويعبر عنها بالرمز S' .كمثال لذلك :



الشكل رقم (٣,٢). الرسم التوضيحي للملوك والقلوب.



الشكل رقم (٣,٣). الرسم التوضيحي للفئات المنفصلة والمكملة.

يوضح الشكل رقم (٣,٣) شكل فن لمجموعة أوراق اللعب S وتم اختيار مجموعتين جزئيتين الأوراق التي تحمل القلب H والأوراق التي تحتوي الديمن D حيث عبر عنها بالدائرتين H ، D. وكما يلاحظ ليس هناك تداخل بين المجموعتين الجزئيتين H ، D؛ لأنه لا يوجد عنصر مشترك بينهما ولذلك فإن باقي أوراق اللعب التي لا يتضمنها الديمن D أو القلب H ، $S\text{-}(HUD)$ ، تشكل المجموعة المكملة S' والتي تم توضيحها بالشكل المخطط الباقي من المستطيل وتجدر الإشارة بأنه سيتم التطرق للمجموعات وخصائصها، الاتحاد والتقاطع والتكامل لاحقاً.

المتغيرات العشوائية Random Variables

نتذكر بأن المتغير عبارة عن شيء يأخذ مدى معين من القيم . وفي دراسة الاحتمالات تمت الإشارة لفكرة المتغير عندما نهتم بملاحظة القيم عند رمي زهرتي نرد أو الاختيار العشوائي للمزارعين من الإطار. في هذه الحالات، نحن لا نعرف مسبقاً النتيجة للتجربة ولكن لدينا بعض المعلومات عن التكرار النسبي للنتيجة.

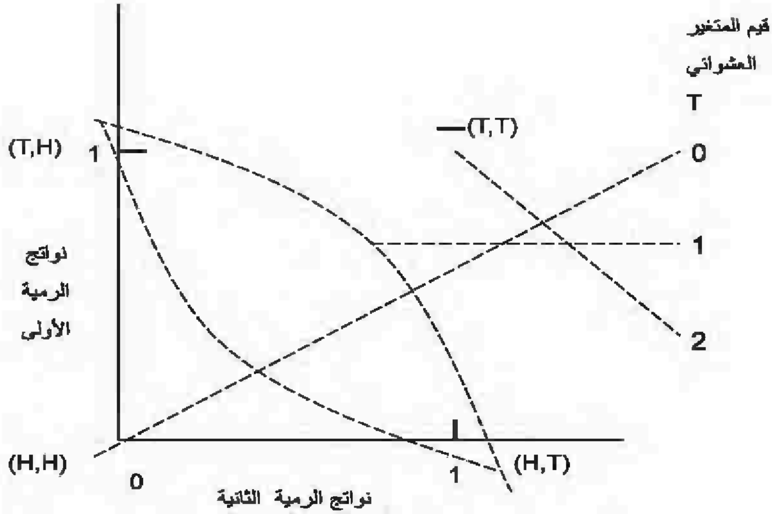
وعندما تكون الحوادث غير متشابهه أو لا يمكن التنبؤ بها فردياً بدرجة من الثقة فإنها توصف بالعشوائية أو الصدفة. وبإعادة المحاولات لتجربة عشوائية نحصل على نتائج أو حوادث. المتغير العشوائي يعبر عن قيمه مؤكده أو خاصية معيّنه لكل حدث فردي موضع الدراسة (ويدعى كذلك متغير الصدفة). وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين، متغير عشوائي متصل ومتغير عشوائي منفصل. وسيتم التطرق للمتغير العشوائي المنفصل أولاً.

باستخدام نظرية المعاينة نستطيع تحديد الأحداث الأولية أو نقاط العينة من أي بيانات تم جمعها. فراغ العينة لأي تجربه عبارة عن جميع نقاط العينة. وكل نقطة مرتبطة

بحدث واحد محتمل في التجربة. وعلى سبيل المثال، بافتراض أنه تم رمي عمله معدنية سليمة مرتين كتجربة عشوائية. في كل رميه يمكن الحصول على نتيجة واحدة من النتيجتين المحتملة إما صورة H أو كتابة T وبذلك فإن فراغ العينة لتلك التجربة هو :

$$S = \{(H,H), (H,T), (T,H)\ (T,T)\}$$

وعليه فإن عدد وجوه الكتابة الممكن الحصول عليها T هي { ٠، ١، ٢} وهو عبارة عن متغير عشوائي منفصل. ويمكن تمييز عناصر فراغ العينة بالقيم المختلفة للكتابة في المجموعة الجزئية $\{(H,H), (H,T), (T,H)\ (T,T)\}$. وعليه فإن الأرقام المحتملة للكتابة في تجربة رمي العملة مرتين مشمولة في المجموعة الجزئية للأحداث في فراغ العينة. ويمكن توضيح فراغ العينة للتجربة بيانياً، الشكل رقم (٣,٤)، مع عرض قيم المتغير العشوائية في عمود مجاور للرسم. الخطوط في الرسم تشير للدالة أو قاعدة العدّ.



الشكل رقم (٣,٤). التمثيل البياني للفراغ العيني للمتغير العشوائي T عند رمي عملة متزنة مرتين.

وعلى أية حال فإن أكثر الاهتمام يتعلق بمعرفة الدالة التي تربط قيم المتغير العشوائي بالاحتمالات المصاحبة. ويمكن تقييم هذه الدالة بمقارنة عدد المرات للنتائج التي تظهر فيها الكتابة $T=1$ أي ظهور الصورة مرة واحدة يساوي $\frac{2}{4}$ أو $\frac{1}{2}$ ، عدم ظهور الصورة، أو $T = 0$ عبارة عن $\frac{1}{4}$ ، وعدد مرات ظهور الصورة مرتين هي مرة واحدة أو $\frac{1}{4}$ ويمكن بناء على ذلك كتابة صيغة تلك الدالة رياضياً بالمعادلة رقم (3.6) والتي تعبّر عن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين والتي سيتم التطرق له بالتفصيل لاحقاً.

$$P(r) = {}_nC_r\, P^r\, q^{n-r} \qquad (3.6)$$

ويمكن التعبير عن العلاقة بين المجموعة الجزئية لفراغ العينة لأي تجربة وقيم المتغير العشوائي باختيار المعادلة المناسبة. وفي الحقيقة فإن محاولة إيجاد أو تحديد الدالة المناسبة لفراغ العينة مهمة صعبة في علم الإحصاء.

قواعد الاحتمال Rules of Probability

القواعد الثلاثة التي تمت الإشارة إليها سابقاً تساعدنا في تفسير القياسات للاحتمالات ولكنها ليست شاملة لدراسة جميع مشكلات الاحتمالات التي يمكن أن تواجهنا في القطاع الزراعي. لذلك سيتم اعتبار بعض قواعد الاحتمالات الإضافية. القواعد الثلاث السابقة يمكن الإشارة إليها بهدف التذكير وهي :

١- $0 \le P(A) \le 1$

٢- $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$

٣- $P(A') = 1 - P(A)$

القاعدة الرابعة هي :

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2)$$

وهذه قاعدة خاصة للجمع والتي تستخدم فقط في حالة الحوادث المتنافية فإذا كان لدينا عدد k أحداث متنافية يمكن تعميم هذه القاعدة كما في المعادلة رقم (3.7) :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) \tag{3.7}$$

على سبيل المثال، نفترض حظيرة بها عدد ٤٠٠ عجل ، بحيث إن ١٢٠ فقط أنجبت بواسطة ثور A، و٨٠ بواسطة الثور B و ٩٦ بواسطة الثور C و ١٠٤ بواسطة الثور D. وتم اختيار أحد العجول عشوائياً ، فإن احتمال أن أبوه الثور Aأو Bأو D هو:

$$P(A \cup B \cup D) = P(A) + P(B) + P(D) = \frac{120}{400} + \frac{80}{400} + \frac{104}{400} = \frac{304}{400} = 0.76$$

وباختيار العجل عشوائياً فإن جميع العجول في الحظيرة لها فرص متساوية في الاختيار باحتمال $\frac{1}{400}$. فإذا كان الهدف اختيار عجل تم إنجابه بواسطة الثور A يمكن حساب الاحتمال كالتالي :

$$P(A) = 120\left(\frac{1}{400}\right) = \frac{120}{400} = 0.30$$

وإذا كانت المجموعات الجزئية المزمع دراستها فيها عناصر مشتركة كما في الشكل رقم (٣,٢) فإنه في هذه الحالة الأحداث غير متنافية. فإذا كانت المجموعات متقاطعة

وغير منفصلة نطبق القاعدة العامة للجمع الموضحة في المعادلة رقم (3.8):

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \qquad (3.8)$$

وبالعودة للشكل رقم (٣,٢) فإنه من السهولة ملاحظة أنه يجب أن نطرح التقاطع ؛ لأننا أضفناه مرتين. والقاعدة العامة للجمع يمكن تطبيقها على الاحتمالات سواء أكانت متنافية أم غير متنافية. فعندما تكون الأحداث متنافية فإن المجموعات تكون منفصلة ولذلك فإن التقاطع يساوي صفراً، وعليه فإن القاعدة العامة للجمع في هذه الحالة تتحول إلى القاعدة الخاصة للجمع. وقواعد الجمع مفيدة في إيجاد احتمالات الحدث المركب . ولكن بعض مسائل الاحتمالات يتطلب الأمر فيها معرفة الاحتمال المشترك لمجموعة أحداث تقع معاً فإذا كانت الأحداث مستقلة، فإن احتمالها المشترك يمكن إيجاده باستخدام القاعدة الخاصة بالضرب ، والموضحة في المعادلة رقم (3.9) لعدد K من الأحداث المستقلة A_1 , A_2 , . . . , A_k

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_K) = P(A_1).P(A_2). \ldots .P(A_K) \qquad (3.9)$$

وكمثال لذلك ، إذا كانت سجلات الجامعة المحلية تشير إلى أن ثلث طلاب تخصصات الزراعة شقر ونصفهم طلبة دراسات عليا مستجدين وثلاثة أرباعهم حضروا المحاضرات أكثر من سنه. ولذلك فإن احتمال اختيار طالب تخصص من الكلية يكون أشقر وطالب دراسات عليا مستجد له في الجامعة أكثر من سنه بافتراض أنها أحداث مستقلة يكون:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = {}^{3}\!/_{24} = \frac{1}{8}$$

الأحداث المستقلة Independent Events

يكون الحدثان A ، B، مستقلان إذا تحقق الشرط في المعادلة رقم (3.10):

$$P(A|B) = P(A) \tag{3.10}$$

وتوضح أن فرصة وقوع الحدث A ، بمعرفة الحدث B ، مساوية لفرصة وقوع الحدث A بدون معرفة الحدث B . أو أن معرفتنا بالحدث B لا يغير احتمال وقوع الحدث A ، ولذلك فإن الحدث A مستقل إحصائياً عن الحدث B . ومن جهة أخرى ، إذا كان لدينا حدثين A ، B وكانت العلاقة بينهما كما هو موضح في المعادلة رقم (3.11) فإن الحدث A يعتمد على الحدث C .

$$P(A|C) \neq P(A) \tag{3.11}$$

حيث إن معرفة الحدث C تغيّر من احتمال الحدث A ويسمى $P(A|C)$ احتمال الحدث A المشروط بوقوع الحدث C .

الاحتمال الشرطي Conditional Probability

في بعض الأحيان نشاهد بعض المسائل التي يتم التعامل فيها بنسبة من فراغ العينة بدلاً من كامل فراغ العينة. وبذلك فإن احتمال الحدث يعتمد على الجزء من فراغ العينة الذي تم اختياره. على سبيل المثال، في حالة اختيار جميع الموظفين في مؤسسة أعمال زراعية كبيره الذين لديهم درجة جامعية يختلف عن الموظفين التجاريين ذوي الدرجات الجامعية الذين يتم اختيارهم من تلك المؤسسة. حيث إن الموظفين الإداريين عبارة عن مجتمع جزئي معرّف بشروط خاصة يتم اختيارهم من المجتمع . ويمكن تعريف الاحتمالات المرتبطة بتلك الحوادث في المجتمع الجزئي بالحوادث الشرطية. فمثلاً

نفترض أن تاجر السيارات المحلي لديه نوعان من السيارات سيدان وسيارات رياضية ومتوفرة كلا النوعين بناقل حركة عادي و أوتوماتيكي كما في الجدول رقم (٣,٢).

الجدول رقم (٣,٢). أعدد السيارات السيدان والسيارات الرياضية (SUVs) مصنفة حسب نوع ناقل الحركة.

نوع ناقل الحركة	سيارات سيدان Sedans	سيارات رياضية(SUVs)	الإجمالي
عادي	٢	١	٣
أوتوماتيكي	٤	٣	٧
الإجمالي	٦	٤	١٠

في حالة توفر جميع السيارات لدى التاجر فإن فراغ العينة S عبارة عن ١٠ خيارات يمكن اختيار أيٍّ منها بشكل عشوائي. فلو تم تعريف الحدث A بأنه اختيار سيارة بناقل حركة أوتوماتيكي يكون احتمال الحدث $P(A) = 0.7$ ويكون الاحتمال للحدث B والذي هو تفضيل عشوائي للسيارة الرياضية يساوي $P(B) = 0.4$. ولكن بافتراض أن المستهلك اختار شراء سيارة رياضية ، في هذه الحالة فإن فراغ العينة (s) انخفض من $S = 10$ إلى فراغ جزئي يساوي $B = 4$.

وبذلك فإن اختيار الحدث A والذي هو عبارة عن سيارة بناقل حركة أوتوماتيكي المشروط بأن تكون سيارة رياضية يمكن حسابه كالتالي :

$$P(A|B) = \frac{3}{4} = 0.75$$

ويمكن تأكيد صحة هذه النتيجة باعتبار أن الحدث المشروط $P(A|B)$ مساوٍ لـ $P(A \cap B)$ ، 3/10 ، والتي تعبّر عن نسبة السيارات ذات ناقل الحركة

الأوتوماتيكي ومن نوع السيارات الرياضية مقسوماً على $P(B)$ ، 4/10 ، والذي يعبّر عن نسبة جميع السيارات الرياضية كما في المعادلة رقم (3.12) :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/10}{4/10} = \frac{3}{4} = 0.75 \tag{3.12}$$

مع ملاحظة أن $P(B) \neq 0$.

القواعد العامة للضرب General Rule of Multiplication

إذا كان لدينا حدثان مستقلان A ، B يمكن التعبير عن احتمال وقوعهما أو احتمالها المشترك بأحد العلاقات الموضحة في المعادلة رقم (3.13) :

$$P(A \cap B) = P(B) \; . \; P(A \backslash B) \tag{3.13}$$

أو $$P(A \cap B) = P(A) \; . \; P(B \backslash A)$$

ويمكن اعتبار المثال التالي والذي يفترض أن أحد العاملين بمتجر لبيع الحفارات الكهربائية ويرغب في الاختيار من عدد ستة حفارات متشابهه وهذه الحفارات فيها أربعه صالحة واثنان غير صالحة وغير معروف لديه أي منها صالح أو غير صالح.

فإذا أختار العامل حفارين عشوائياً فما احتمال أن كلا الحفارين صالحة ؟ وحيث إن السحب من تلك العينة يكون بدون إرجاع للحفار المختار، فإن احتمال أن ذلك الحفار يعمل $P(w_1) = 4/6$ ويكون الاحتمال الشرطي أن الحفار المختار ثانياً يعمل إذا إن الحفار الأول الذي تم اختياره صالح يكون: $P(W_2 \backslash W_1) = 3/5$

وبذلك فإن الاحتمال المشترك للحفارين أنها صالحة يكون :

$$P(W_1 \cap W_2) = P(W_1) \,.\, P(W_2 \mid W_1) = (4/6)(3/5) = \frac{12}{30} = 2/5$$

التوقع الرياضي Mathematical Expectation

مفهوم التوقع الرياضي أحد المفاهيم التي سيتم التطرق لها في الفصول الأخيرة. ويمكن ربطه بفكرة الاحتمالات التي سبق مناقشتها . القيمة المتوقعة ، أو التوقع الرياضي للمتغير هي عبارة عن المتوسط الحسابي للمتغير مرجحاً بالاحتمالات. حيث إن الأوزان عبارة عن الاحتمالات المرتبطة بكل قيمه للمتغير العشوائي. فمثلاً نتذكر من العرض السابق لتجربة رمي عملة معدنية غير متحيزة مرتين عدد مرات ظهور الكتابة T ، كمتغير عشوائي تكون النتائج الممكنة هي ٠ ، ١ ، ٢ باحتمال $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{4}$ و $\frac{1}{4}$ على التوالي وبذلك تكون القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي عبارة عن مجموع حاصل ضرب كل قيمة للمتغير العشوائي باحتمالها كما في المعادلة رقم (3.14).

$$E(T) = \sum T_i \,.\, P(T_i) \tag{3.14}$$

وبتطبيق ذلك نحصل على القيمة المتوقعة لعدد مرات ظهور الكتابة :

$$E(T) = (0)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)\left(\frac{2}{4}\right) + (2)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$E(T) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

وعليه فإن القيمة المتوقعة تساوي واحد، أي أننا نتوقع في المتوسط ظهور الكتابة مرة واحدة في حالة رمي عمله معدنية غير متحيزة مرتين.

وقد تكون القيمة المتوقعة مساوية لأحد قيم المتغير العشوائي أو غير مساوية لها. حيث إن تفسيرها يعبّر عن المتوسط عند إجراء التجربة لعدد كبير من المرات، أو المتوسط المرجح بالاحتمالات لقيم المتغير العشوائي.

وبصفه عامة فإن فكرة التوقع الرياضي قد طوّرت واستخدمت في ألعاب الحظ ولكنها أصبحت الآن من الأدوات المتعارف عليها والتي تستخدم في كثير من المجالات لتقييم الخيارات المختلفة.

ملاحظة ختامية Endnote

١- لاحظ أن هذا غير مماثل للحدث الأولي، كما عرف سابقاً في مفهوم تحليل الاحتمالات. لسوء الحظ، كل من نظرية المجموعات ونظرية الاحتمال تحتوي على أحداث.

تمارين Exercises

١- نفترض أن لدينا ثلاث مجموعات A و B و C تحتوي على العناصر التالية:

$$B=\{4,5,6,7,8,9\}, \qquad C=\{4,6,8,10\} \qquad A=\{3,4,5\},$$

المطلوب :

أ) حدد المجموعات الجزئية من المجموعة A. ثم أوجد المجموعة المكملة للمجموعة الجزئية $\{4,5\}$.

ب) أوجد $A\cap B$ و $A\cup B$. ثم استخدم رسم شكل فين لعرض هذه المجموعات.

ج) أوجد $A\cup B\cup C$ و $A\cap B\cap C$ و $(A\cup B)\cap C$ ثم أعرض هذه المجموعات باستخدام شكل فن.

٢- افترض أن لديك فراغ العينة التالية :

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

والمجموعات الجزئية التالية :

$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$B = \{6, 8\}$$
$$C = \{4, 6, 8, 10\}$$

المطلوب إيجاد المجموعات التالية :

أ) $A \cap B$ (ب) $A \cup C$ (ج) $(A \cup C)' \cap B$ (د) $A \cap C'$

٣- إذا رمي حجر نرد ٣٠٠ مرة، كم عدد المرات التي تتوقع ظهور الرقم ٣ فيها ؟ ما هو احتمال الحصول على عدد أكبر من ٣ ؟

٤- إذا تم رمي حجرين نرد معاً فأوجد الاحتمالات التالية :

أ) ظهور العدد ٧.

ب) ظهور عدد زوجي.

ج) ظهور العدد٧ أو عدد زوجي.

د) ظهور العدد ٧ أو العدد ١١.

هـ) ظهور عدد أقل من ٧ .

و) تقاطع العدد أقل من ٧ وعدد زوجي.

٥- افترض وجود صندوق يحتوي على أربع رقائق تم ترتيبها من ١ إلى ٤ المطلوب :

أ) إذا تم اختيار رقيقتان مع الإرجاع، أوجد فراغ العينة.

ب) احتمال أن يكون مجموع الأرقام على العينة المسحوبة في المثال السابق أقل من ٥ .

ج) احتمال أن يكون مجموع الأرقام على العينة المسحوبة في المثال السابق أقل من ٥ إذا علمت أن الرقيقة الأولى هي التي تحمل الرقم ٢.

٦- افترض سحب ورقة لعب بدون إعادة من مجموعة أوراق لعب عددها ٥٢ ورقه مخلوطة بعناية المطلوب:

أ) احتمال أن تحصل على ملك وسبيت في سحبتين متتاليين.

ب) احتمال أن تحصل على خمس سبيت في خمس سحبات متتالية.

ج) في سحبتين متتاليتين ، ما احتمال الحصول على العدد ١٠ في السحبة الثانية إذا علمت أن العدد ١٠ أو الجوكر سحبت في السحبة الأولي.

د) في لعبة البوكر، ما احتمال الحصول على ٤ وحدات وبعض الأحداث الأخرى.

٧- أ) كم عدد الطرق الممكن استخدامها لعرض أربعة من العجول في صالة العرض من الأول إلى الرابع.

ب) كم عدد الطرق الممكن استخدامها لعرض ستة من العجول في صالة العرض من الأول إلى الرابع.

ج) كم عدد التوليفات الممكنة التي يمكن بها عرض أربعة عجول مختارة من مجموعه عددها ستة.

٨- موزع تجهيزات زراعيه لديه عدد آلتين لربط البالات الدائرية وأربع الآت لربط البالات المربعة. يرغب في عرض هذه الآلات في صف في المعرض، كم عدد الطرق المختلفة الممكن استخدامها لعرض هذه الآلات.

٩- يتكون نادي الطلاب من عشر طالبات واثنا عشر طالب، يرغب النادي في تشكيل مجموعة مكونه من ستة طلاب يتم اختيارهم عشوائياً . ما احتمال أن يكون أربعة أعضاء من المجموعة المختارة طالبات.

١٠- إذا كان احتمال ولادة الذكر والأنثى متساوي ، ما هو احتمال ولادة عدد اثنين من الذكور في مجموعه من الحيوانات عددها ثمانيه ؟ ما احتمال ولادة ذكرين على الأكثر ؟

١١- ارسم التوزيع الاحتمالات للمتغير العشوائي X ، عدد الصور في حالة رمي عمله متزنة ثلاث رميات، ثم كوّن جدول يحتوي على قيم المتغير العشوائي والاحتمالات المصاحبة لها. احسب القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X . ثم ارسم شجرة القرارات التي توضح جميع الاحتمالات الممكنة.

١٢- قرر نادي طلاب القيام بعملية اليانصيب لجمع النقود. تم طباعة ٥٠٠ تذكرة كتب عليها قيمة ٢ دولار مع احتمال الفوز ببندقية صيد قيمتها ٢٠٠دولار:

أ) ما هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، قيمة الربح لمشتري تذكره تم اختياره عشوائياً، إذا تم بيع جميع التذاكر المصدرة.

ب) احسب القيمة المتوقعة لـ X.

١٣- الجدول التالي يوضح إنتاج إحدى محطات التجارب الزراعية لزراعه الجزر والذي تم حصاده وتدريجه ثم فرزه حسب اللون.

	الدرجـــــــة			
اللون	الأولى	الثانية	الثالثة	المجموع
برتقالي	٩٠٠	٤٠٠	٢٠٠	١٥٠٠
أرجوان	٦٠٠	٣٠٠	١٠٠	١٠٠٠
المجموع	١٥٠٠	٧٠٠	٣٠٠	٢٥٠٠

احسب الاحتمالات التالية لمجموعة تم اختيارها عشوائياً :

أ) أن تكون لون برتقالي من الدرجة الثالثة.

ب) أن تكون من الدرجة الثانية.

ج) أن تكون من الدرجة الأولى إذا علمت أن لون الجزر أرجواني.

د) أن تكون من الدرجة الثانية أو لون أرجواني .

هـ) أن تكون لون ارجواني ، إذا علمت أنها من الدرجة الثانية.

١٤- إذا كان لدينا قطعه معدنية بها ثمانية وثلاثون فتحة معدّة لسقوط الكرة فيها وكانت تلك الفتحات مرقمه بـ ، ٠ ، ٠٠ ، وأرقام من ١- ٣٦ بحيث إن لون الفتحات المرقمة بالأصفار خضراء والأرقام الفردية لونها أحمر والأرقام الزوجية لونها أسود وتم رمي الكرة عشوائياً احسب الاحتمالات التالية :

أ) احتمال سقوط الكرة في الفتحات السوداء.

ب) احتمال سقوط الكرة في الفتحة رقم ١٠.

ج) احتمال سقوط الكره في فتحه سوداء أو الفتحة رقم ١٠ .

د) احتمال سقوطها في فتحه حمراء أو خضراء.

هـ) إذا كنت ترمي الكرة لمرات غير منتهية وترغب سقوطها في الفتحات الحمراء كم تتوقع أن يكون الاحتمال الممكن الوصول إليه.