الفصل السادس

مقدمة في الاستدلال الإحصائي: عينة واحدة

Introduction to Statistical Inference: one Sample

في علم الإحصاء نتعامل غالباً مع العينات، على الرغم أن اهتمامنا المبدئي متعلق بالمجتمع الذي تم اختيار هذه العينات منه. ويتمثل الهدف في إيجاد أو تقدير بعض قيم متغيرات المجتمع اعتماداً على نتائج العينة. وكما تمت الإشارة إليه سابقاً، فإن العينة العشوائية هي في الحقيقة مجموعة جزئية عشوائية من المجتمع ويتركز اهتمامنا في عمل استدلال حول المجتمع. ولكن المشكلة تكمن في عدم التأكد من صحة الاستدلال؛ نظراً للتباين في البيانات المعتمد عليها علاوة على التباين بين العينات المختارة. ولتقليل تلك الأخطاء، فإننا نستخدم نظرية الاحتمال كقاعدة للاستدلال. ولذلك فإنه يمكن تعريف الاستدلال الاحصائي بأنه تقدير لبعض المتغيرات في المجتمع بناء على نظرية الاحتمال وبيانات العينة.

يشتمل الاستدلال الإحصائي على تقدير متغيرات المجتمع واختبارات الفروض حول تلك الظواهر. وتسمى متغيرات المجتمع معالم parameters ومتغيرات العينة تسمى إحصاءات Statistics. وبذلك، فإنه غالباً يتم حساب الإحصاءات من بيانات العينة ثم نستخدمها كقاعدة لتقدير معالم المجتمع. وبصفة عامة، فإن المتغيرات العشوائيه التي تم

اختيارها لتقدير معالم المجتمع تسمى مقدرات estimators ، في حين أن القيم المحددة لهذه المتغيرات العشوائية تسمى تقدير estimates لمعالم المجتمع. ويمكن عرض هذه التقديرات بطريقتين مختلفتين هما التقدير بنقطه والتقدير بفترة. حيث إن التقدير بنقطة عبارة عن قيمة واحدة حيث يمكن تقدير متوسط المجتمع من بيانات العينة ويساوي مثلاً ٢. في حين أن التقدير بفترة يساوي مثلاً ١-٣ بحيث إن متوسط المجتمع يقع داخل هذه الفتره. ويعتمد اختيار أحد هذه الطريقتين على الحالة موضع الدراسة علاوة على تقدير الاحتمال المصاحب لها.

خصائص المقدرات Properties of Estimators

متوسط وتباين المجتمع هي المعالم التي يتم تقديرها غالباً ؛ لأنها تحدد التوزيعات الاحتماليه. فعند الحاجة لتقدير متوسط المجتمع فإن السؤال يتمثل في اختيار الاحصاءت المناسبة للتقدير. على الرغم من أن هناك العديد من المقدرات الممكن الاختيار منها الاّ أن أفضلها هو متوسط العينة $\overline{X}$. وذلك نظراً لتحقيقها لمجموعة من الخصائص التي يجب أن يتميز بها المقدر الجيّد والتي يمكن عرضها كالتالي :

عدم التحيز Unbiasedness

يكون المقدر غير متحيز إذا كانت القيمة المتوقعه لمتوسط العينة مساوية لمعلمة المجتمع ، $E(\overline{X}) = \mu$. أو بصفه عامه، إذا كانت $\hat{\eta}$ [الحرف الإغريقي η مضاف له ^ (هات)] وتقرأ (إيتا هات) تمثل المقدر أو إحصاء العينة و η هي معلمة المجتمع فإن $\hat{\eta}$ مقدر غير متحيز إذا كانت $E(\hat{\eta}) = \eta$ ، مثلاً إذا كان توزيع المعاينة لها يتمركز مباشرةً على η. ولذلك فإن $\hat{\eta}$ تكون متحيزة إذا كانت قيمتها المتوقعه تختلف عن η.

ويمكن تعريف التحيز B بمعادلة رياضيه كالتالي :

$$B \equiv E(\hat{\eta}) - \eta \tag{6.1}$$

هذا يعني أن المقدر الجيد يجب أن يكون غير متحيز، ويشار إلى أن $\overline{X}$ (متوسط العينة) غير متحيز؛ لأننا سبق وأن عرفنا أن متوسط توزيع المعاينة $\overline{X}$ مساوٍ لمتوسط المجتمع μ عند مناقشة توزيع المعاينة للمتوسط.

الكفاءة Efficiency

كما أننا نهدف لأن يكون المتوسط ذو كفاءة فنحن أيضاً نرغب بأن يكون لتوزيع المعاينة للمقدر أقل تباين وهذا يحقق الكفاءة. وبذلك إذا كان لدينا مقدرين $\hat{\eta}$ ، η' (إيتا برايم) للمتوسط η فإن المقدر $\hat{\eta}$ أكبر كفاءة من المقدر η' إذا كان التباين لتوزيع المعاينة لـ $\hat{\eta}$ أقل. أي أن توزيع المعاينه لها أكثر تدبباً. وعليه فإن المقدره $\hat{\eta}$ الأكثر كفاءة سوف تعطي تقدير نقطة قريب من هدفنا المتمثل في القيمة الصحيحة للمقدر η. أو أننا سنعطي فتره أصغر في حالة تقدير الفتره ولذلك تكون أكثر دقة لنفس الحجم من العينة.

وبالطبع فإن زيادة حجم العينة n سيؤدي لتقليل التباين لبعض المقدرات. وعليه فإن الطريقه الأخرى للحصول على كفاءة أعلى لـ $\hat{\eta}$ هي معرفة أن العينات الكبيره سوف تحقق ذلك سواء على مستوى تقدير النقطه أو الفتره وعليه فإن استخدام $\hat{\eta}$ يحقق كفاءة أكثر نظراً لأن تكاليف العينة صغيره. من جهة أخرى فإنه يمكن إيجاد مقياس نسبي مناسب للكفاءة لمقدرين غير متحيزة بحساب نسبة التباين لهما، كما في المعادلة التالية :

الكفاءة النسبية لـ $\hat{\eta}$ مقارنة بـ η' = $var(\eta') / var(\hat{\eta})$ (6.2)

الكفاية Sufficiency

خاصيتي عدم التميز والكفاءة مهمة للمقدرات خاصة في حالة العينات الصغيرة.

الخاصيه الأخرى المرغوبة هي الكفايه حيث إن المقدر الذي يحقق الكفاية $\hat{\eta}$ يستخدم جميع المعلومات المتاحة حول معلمة المجتمع η المشمولة في بيانات العينة. وعليه فإن المقدر الكافي يستخدم جميع مشاهدات العينة في الحسابات. فمثلاً الوسيط Md لايحقق شرط الكفاية حيث إنه يستخدم ترتيب المشاهدات وليس قيمها، ولكن المتوسط $\overline{X}$ والتباين S^2 عبارة عن مقدرات تحقق الكفاية. ولذا فإن الكفاية شرط ضروري لتحقيق الكفاءة.

الاتساق Consistency

المقدر المتسق $\hat{\eta}$ هو الذي ينطبق تماماً على مقدر المجتمع كلما زاد حجم العينه ليصل إلى مالا نهاية. ولذلك عندما يقترب حجم العينة لما لانهاية فإن المقدر المتسق $\hat{\eta}$ يعطي تقدير نقطه مطابق تماماً لمقدر المجتمع η. وكما أن التباين يعتبر مقياساً جيّداً لانتشار التوزيع حول متوسطه فإن متوسط مربع الخطأ (MSE) مقياس جيد لانتشار المقدر $\hat{\eta}$ حول القيمة الحقيقيه η في توزيع المعاينة. ولذلك فإن الاتساق يعني أن متوسط مربعات الخطأ يساوي صفر عندما يصل حجم العينة لما لانهاية والذي يمكن إيضاحه من خلال المعادلة التالية:

$$MSE \equiv E(\hat{\eta} - \eta)^2 \tag{6.3}$$

و $\hat{\eta}$ متسق كلما اقتربت حجم العينه من ما لانهايه $n \to \infty$ و $MSE \to 0$

وتوضح المعادلة رقم (6.4) العلاقة بين متوسط مربع الخطأ (MSE) والتحيز والتباين. ولذلك فإن $\hat{\eta}$ مقدر متسق إذا فقط كان تحيزه وتباينه تؤول للصفر كلما اقترب حجم العينة من ما لانهاية.

$$MSE \equiv E(\hat{\eta} - \eta)^2 = \left[Bias\ \hat{\eta}\right]^2 + var(\hat{\eta}) \qquad (6.4)$$

وفي حالة أن التحيز، اقترب من الصفر فإن المقدر يدعى مقدر غير متحيز تقريباً بحيث إنه حقق الشرط الأضعف للاتساق.

وبصفه عامة فإن خاصية الاتساق للمقدر لا تضمن أن المقدر هو الأفضل. فمثلاً، في حالة المقدر μ في مجتمع طبيعي، يكون وسيط العينه Md متسقاً؛ نظراً لأنه غير متحيز وتباينه يقترب من الصفر كلما زاد حجم العينة يقترب من ما لانهاية ولكن ليس بنفس كفاءة متوسط العينة $\bar{X}$ لأن متوسط العينه $\bar{X}$ يحقق الاتساق والكفاءة معاً، فمثلاً تباين المتوسط دائماً أقل من تباين الوسيط. ولذلك فإننا نهدف لايجاد مقدر يحقق جميع تلك الخصائص، والتي تتحقــق في حالة متوسط العينه $\bar{X}$ وتباينها S^2. وعليه فإن هذين المقدرين هما المقدرات المعتاد استخدامها كتقدير نقطه لمتوسط المجتمع وتباينه μ ، σ^2.

تقدير الفترة Interval Estimation

ليس بالضرورة أن يكون تقدير معالم المجتمع قيمة واحدة، حيث يمكن أن يكون عبارة عن مدى من القيم. وتسمى التقديرات التي تشتمل على مدى من القيم بتقديرات الفتره أو فترات الثقة.

ويتم بناء فترات الثقة لمعالم المجتمع مثل المتوسط μ بناءً على توزيع معاينة صحيح للمقدر مثل توزيع المعاينه لمتوسط العينه $\bar{X}$. فمثلاً في حالة استخدام متوسط العينه $\bar{X}$ لعمل استدلال لمتوسط المجتمع μ فإنه يجب إضافة مقياس احتمالي للفتره وهذا يعني أنه يمكن القول بأنه عند الرغبة في بناء فتره ثقة لقيم المتوسط $\bar{X}$ المتحصل عليها من عينات مكررة حجمها n مسحوبة من المجتمع فإننا متأكدين بنسبة

$(1-\alpha)100$ أنها تحتوي على متوسط المجتمع μ.

وقد تم استخدام مقياس احتمالي ($1-\alpha$) حيث α (تشير إلى حرف إغريقي) عبارة عن قيم صغيره جداً وفي العادة تكون قيمته أقل من ٠.١ ويتم اختياره بناء على مقدار تكاليف الاختيار الخاطئ. فكلما كانت التكلفه أكبر كان الرقم أصغر. ولذلك فعند اختيار $\alpha = 0.05$ فإن فتره الثقة هي ٩٥٪.

ويجب ملاحظة أنه في تفسيرنا لفتره الثقة، تمت الاشارة إلى عينات مكررة بحجم n. ولكن في التطبيق العملي يتم اختيار عينة واحدة ونحسب قيمة المقدر (مثل $\overline{X}$) ثم نختار درجة الثقة (اختيار $1-\alpha$) ، ثم يتم بناء فتره الثقة ويتم ذلك على اعتبار أن متوسط المجتمع μ مشمول في العينة المختارة. وفي الحقيقه فإن ذلك منطقي ويكون المقدر ضمن الفتره ما لم تكن القيمة المختارة واقعة في أحد النهايات الطرفية لتوزيع المعاينة. وكما هو معلوم فإن احتمال الحصول على قيمة تقع في أحد الأطراف لتوزيع المعاينة يساوي α والتي تم اختيارها لتكون قمية صغيرة.

من جهة أخرى فإن طول فترة الثقة يعتمد على القيم المختارة لحجم العينة n و مستوى المعنوية α . وكلما كان بحجم العينة صغير كانت الفترة أطول نظراً لأن تغيرات توزيع المعاينة مرتبط بحجم العينة n $(\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n})$. وكلما كانت الاختلافات في توزيع المعاينة كبيره كلما كان التوزيع أوسع انتشاراً، ومن ثمّ فتره ثقة أطول. أيضاً فإن اختيار قيمه صغيره لمستوى المعنوية α يعطي فترة ثقة أطول. وكلما كانت الفترة أطول، كان هناك مجال أكبر للمقدرات. وعليه فإنه يجب الموازنة بين تكاليف مشاهدات العينة الإضافيه وتكاليف الحصول على فترة ثقة واسعة.

والعامل الأخير المؤثر في حجم فترة ثقة معيّنة هو توزيع المعاينة للإحصاء المستخدم لتقدير المعلمه. وعموماً فإن طريقة الحصول على فتره الثقة للمعلمة η هو

إيجاد تقدير نقطه أولاً للمعلمة وهو $\hat{\eta}$. ثم بعد ذلك بناء فترة الثقة بإيجاد قيم الفترة حول $\hat{\eta}$ المبنية على توزيع المعاينة، وبالتالي الحصول على درجه الثقة المرغوبه. ونظراً لاستخدامنا لتوزيعات معاينة مختلفة لتقدير متوسط المجتمع، مقدرة ذي الحدين p، وتباين المجتمع فإننا سنقوم بوصف طريقه بناء فترات الثقة لكل منهما في الموضوع التالي.

فترات الثقة لمتوسط مجتمع μ انحرافه المعياري σ معلوم

Confidence Intervals for μ with σ Known

لبناء فترة الثقة لمتوسط المجتمع، نفترض أننا سحبنا عينة عشوائية من مجتمع يتوزع طبيعياً له انحراف معياري σ معلوم. وعليه فإن إحصاء العينة للمتوسط المقدر μ هو $\overline{X}$؛ نظراً لشمولها لجميع الخصائص المرغوبة للمقدر التي تمت مناقشتها سابقاً. وتوزيع المعاينة للمتوسط $\overline{X}$ يتوزع طبيعياً بمتوسط $E(\overline{X})=\mu$ وخطأ معياري $\sigma_{\overline{x}}=\sigma/\sqrt{n}$.

والمتغير z والموضح في المعادله رقم (6.5) عبارة عن توزيع طبيعي قياسي له متوسط يساوي الصفر وانحراف معياري يساوي الواحد $Z \sim N(0,1)$ ويمكن إيجاد الاحتمالات للتوزيع Z باستخدام الجدول رقم (٧) المرفق في الملاحق.

$$z=(\overline{X}-\mu)/\sigma_{\overline{X}} \qquad (6.5)$$

الآن نفترض أننا عرفنا Z_α بحيث تعبّر عن قيمة z الواقعة في الطرف الأيمن للتوزيع بحيث أن احتمال ملاحظة قيم لـ z أكبر من z_α يساوي α، أي $P(Z>Z_\alpha)=\alpha$. وأيضاً $-z_\alpha$ عبارة عن مكان في الطرف الأيسر في التوزيع بحيث $P(Z<-Z_\alpha)=\alpha$ كما هو موضح في الشكل رقم (٦،١). وبدلاً من ايجاد موقعين

لتحديد مكان α في طرف التوزيع الطبيعي القياسي كان من المناسب ايجادها لـ $\alpha/2$ في كل طرف (بحيث يكون مجموع المساحة مساوٍ لـ α). ويمكن إيضاح ذلك بحيث أن $Z_{\alpha/2}$ تمثل القيمة الاحتمالية $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ و $Z_{\alpha/2}$ - تمثل القيمة الاحتماليه $P(Z < -Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$. فمثلاً إذا كانت $\alpha = 0.05$ فإن $\alpha/2 = 0.025$ وبذلك قيمة $Z_{\alpha/2}$ والتي تكون المساحة الواقعه على يمينها مساوية 0.025 هي ١,٩٦ (من الجدول ٧ في الملحق) ونظراً لأن التوزيع الطبيعي متماثل فإن قميه $Z_{\alpha/2}$ - يجب أن تساوي - ١,٩٦ ولذلك تكون قيمة الاحتمال أن Z تقع بين القيمة ±١,٩٦ تساوي :

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = (1.0 - 0.05) = 0.95$$

وهي التي نرغبها لفترة ثقة ٩٥٪. ولذا، بصفه عامه فإن الاحتمال $(1-\alpha)$ معطى بالمعادلة (6.6) وهو يمثل $100(1-\alpha)$ لفترة ثقة لـ Z .

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = (1-\alpha) \qquad (6.6)$$

ولكن المطلوب هو إيجاد فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ وليس لـ Z . ويمكننا عمل ذلك عن طريق معالجة المعادلة رقم (6.6) رياضياً. حيث نعوّض عن قيمة Z في المعادلة بقيمة Z الموضحة في المعادلة رقم (6.5) ونعيد ترتيب المعادلة للحصول على فترة الثقة للمعلمة μ ويمكن إيضاح ذلك كالتالي :

$$P(-Z_{\alpha/2} < (\overline{X} - \mu) / \sigma_{\overline{X}} < Z_{\alpha/2}) = (1-\alpha)$$

وبالضرب في $\sigma_{\overline{X}}$ نحصل على :

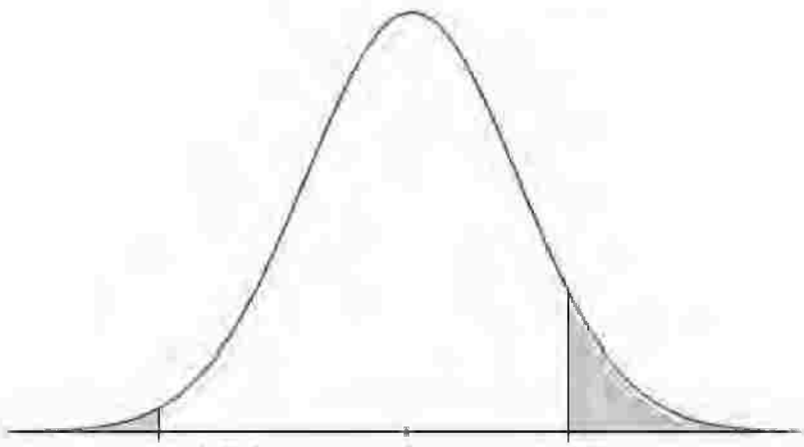
$$P(-Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}} < (\overline{X} - \mu) < Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}}) = (1-\alpha)$$

بإضافة $(\overline{X}-)$ للمعادلة آنفاً نحصل على:

$$P(-\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}} < -\mu < -\overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}}) = (1-\alpha)$$

وبالضرب في (−١) نحصل على المعادلة التاليه والتي تمثل فتره الثقه لمتوسط المجتمع μ :

$$P(\overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}} > \mu > \overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}}) = (1-\alpha) \qquad (6.7)$$



الشكل رقم (٦.١). توزيع المعاينة للمتوسط.

ولإيضاح كيفية استخدام المعادلة رقم (6.7) ، نفترض أن مجتمع إنتاجية الذرة لمزارع منطقه ما يتوزع طبيعياً بانحراف معياري يساوي (٦,٢) رطل؛ وتم أخذ عينة عشوائية حجمها n يساوي ٣٦ مزرعة وحسبنا متوسط الإنتاجية $(\overline{X})$ والذي يساوي ١٣٢ رطل. المطلوب إيجاد فترة ثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط المجتمع μ ، المتوسط الحقيقي

لإنتاجية الذرة للمنطقة.

نظراً لأن درجة الثقة المطلوبة بنسبه ٩٥٪ فإن قيم Z المناسبة هي $Z_{\alpha/2} = 1.96$ و$-Z_{\alpha/2} = -1.96$ ولذلك يمكن حساب:

$$\sigma_{\overline{X}} = \sigma / \sqrt{n} = \frac{6.2}{\sqrt{36}} = \frac{6.2}{6} = 1.033$$

وبالتعويض عن القيم في المعادله رقم (6.7) نحصل على:

$$P(\overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}} > \mu > \overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}}) = (1-\alpha)$$

$$P(132 + (1.96)(1.033) > \mu > 132 - (1.96)(1.033) = 0.95$$

أو $$P(132 + 2.03) > \mu > 132 - 2.03) = 0.95$$

وبالتقريب نحصل على :

$$134 > \mu > 130$$

وعليه فإن متوسط إنتاجيه الذرة بين ١٣٠ و ١٣٤ رطلاً لأننا إذا كررنا سحب عينات بحجم ٣٦ من المجتمع وحسبنا فتره الثقة لمتوسط كل عينة، فإن ٩٥ عينة من أصل ١٠٠ عينة سوف تعطي متوسط قريب من متوسط المجتمع μ ، وعليه فإن الفترات تشتمل على متوسط المجتمع. وليس لدينا دلالة لاعتقاد ان العينة التي تم اختيارها تختلف عن الـ ٩٥ عينة. وبالطبع فقد نكون غير محظوظين وتكون العينة المختارة ليست من الـ ٩٥ ولكن احتمال ذلك منخفض جداً. ومع ذلك، فقد تمت الإشارة للاحتمال

المصاحب لفترة الثقة حتى تكون واضحة.

ولفترة الثقة التي تم حسابها في المثال السابق كان احتمال نسبة الخطأ بافتراض أن متوسط المجتمع μ مشمول بالفتره هو α تساوي ٥٪ . وعند الرغبة في تقليل المخاطرة وتخفيض نسبة الخطأ، فإنه يجب استخدام فتره ثقه أوسع. فمثلاً، إذا رغبنا أن تكون نسبة الخطأ تساوي ٠,٠١ ، أو تكون فتره الثقة بنسبه ٩٩٪، فإن قيم Z في هذه الحالة تختلف عن السابقه ويمكن إيجادها من جدول (٧) في الملحق حيث $Z_{\alpha/2}$ تساوي ٢,٥٧ وقيمة $Z_{\alpha/2}$ - تساوي -٢,٥٧ (لـ $(\alpha / 2 = 0.005$. وباستخدام معادله (٦,٧) فإن فتره ثقه ٩٩٪ هي.

$$P(\overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}} > \mu > \overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X}}) = (1-\alpha)$$

$$132 + (2.57)(1.033) > \mu > 132 - (2.57)(1.033)$$

$$132 + 2.65 > \mu > 132 - 2.65$$

$$134.6 > \mu > 129.4$$

ويلاحظ أن فترة الثقة هذه أوسع من فترة الثقة السابقة وبذلك فإن لدينا ثقة أكبر باحتواء الفترة على المعلمة μ.

وفي حالة المجتمعات غير الطبيعيه non-normal population والتي لها انحراف معياري σ معلوم وحجم صغير n (أقل من ٣٠) فإن توزيع $Z = (\overline{X} - \mu) / \sigma_{\overline{X}}$ غير طبيعي ولذلك لا توجد لدينا طريقه مناسبة لإيجاد فترة الثقة. ولكن، إذا كان حجم المجتمع n (أكبر من أو يساوي ٣٠) فإن نظريه النهايه المركزيه تشير إلى أن توزيع المعاينة لـ Z يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي. وبذلك يمكن استخدام صيغة فترة الثقة التي تم استخدامها سابقاً.

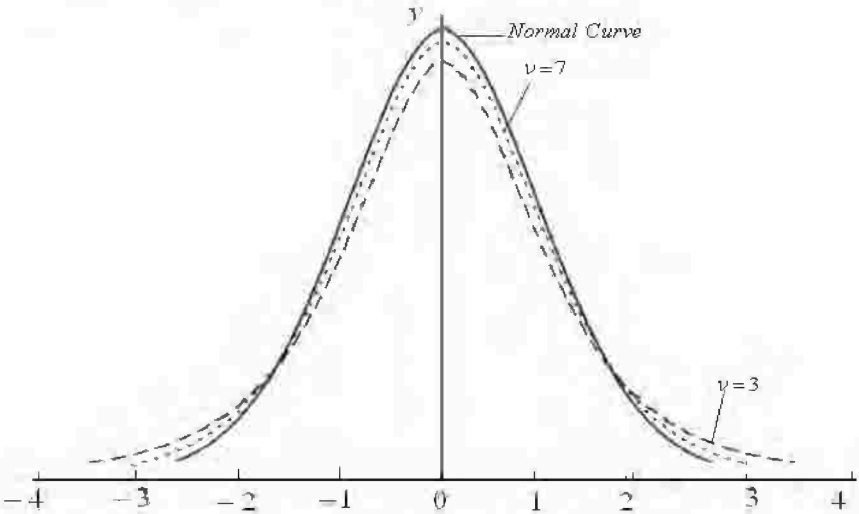
فترات الثقة لمتوسط مجتمع μ وانحرافه المعياري σ مجهول

Confidence Intervals for μ with Unknown σ

في النص السابق افترضنا معلومية الانحراف المعياري للمجتمع وذلك لتقدير متوسط المجتمع باستخدام بيانات العينة. ولكن في الغالب إذا كان الهدف هو تقدير المتوسط فإنه يجب أيضاً تقدير الانحراف المعياري من بيانات العينة. ووفقاً لهذه الظروف، فإننا نستخدم الانحراف المعياري للعينة S كتقريب للانحراف المعياري للمجتمع σ، ولذلك يتم استخدام توزيع t والموضح بالمعادلة رقم (6.8) :

$$t = (\bar{X} - \mu)/\ (S / \sqrt{n}) \qquad (6.8)$$

بدرجة حرية $\nu = (n - 1)$ (وبافتراض أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي) وتوزيع t عبارة عن عائلة من دوال الكثافة الاحتمالية والتي يعتمد شكلها على درجة الحريه ν (ν عبارة عن حرف أغريقي يستخدم للتعبير عن درجة الحرية) وليس على الانحراف المعياري للمجتمع σ. ويتميز توزيع t بأن له شكل يشبه الجرس مقارب للتوزيع الطبيعي ولكنه ليس مدبب تماماً مثله، ولذلك فهو أكثر اتساعاً في الأطراف (الشكل رقم ٦،٢) .



الشكل رقم (٦.٢). توزيع t لقيم مختارة لـدرجات الحرية.

ونظراً لأن درجة الحرية ν تحدد شكل توزيع t وهي تزيد بزيادة حجم العينة، فإن توزيع t يصبح أكثر تدبياً كلما زاد حجم العينة. وعندما تؤول قيمة درجات الحرية إلى ما لانهاية فإن توزيع t يصبح متقارباً مع التوزيع الطبيعي. وفي الحقيقة فإن قيم t (من الملحق جدول رقم ٨) عندما تكون درجة الحرية مالا نهاية تكون هي نفسها قيمه z . أما في حالة العينات الصغيرة فإن قيم t تكون أكبر من قيم z للتوزيع الطبيعي لنفس المستوى من المعنويه α . والسؤال الآن متى يكون التوزيعين متقاربين نسبياً بحيث يكون الخطأ الناتج من استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع t غير حرج ؟ والإجابة التي قررها معظم الإحصائين هي عندما يكون حجم العينه n مساوٍ لـ ٣٠. وعليه، فإنه للعينات الصغيره $(n < 30)$ يتم استخدام توزيع t عادة كقاعدة لايجاد فترات الثقة واختبارها بالنسبة لـ μ ، وفي حالة العينات الكبيره يستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب. للعينات الصغيرة (حجم العينه n أقل من ٣٠) يمكن الحصول على فترة الثقة لمتوسط

المجتمع μ باستخدام توزيع t كالتالي : يمثل التعبير $t_{(\alpha / 2, v)}$ قيمة توزيع t بدرجة حريه $v = n - 1$ والتي تحدد قيمة الاحتمال عند $\alpha/2$ في الطرف العلوي أي أن $P(t > t_{(\alpha/2, v)}) = \alpha/2$ وبصفة مماثله فإن $P(t < -t_{(\alpha / 2, v)}) = \alpha/2$ للطرف السفلي ؛ ولذلك يمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالمعادلة التالية :

$$P(-t_{(\alpha/2,v)} < t < t_{(\alpha/2,v)}) = (1-\alpha) \tag{6.9}$$

وحيث إن t قد تم تعريفها في المعادلة رقم (6.9) سابقاً فإنه يمكن التعويض بقيمتها في المعادله آنفاً وحل المعادلة لإيجاد فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ بدرجه ثقه $100 (1 - \alpha)$ والتي يمكن التعبير عنها رياضياً كالتالي :

$$\overline{X} - t_{(\alpha/2,v)} \cdot S/\sqrt{n} < \mu < \overline{X} + t_{(\alpha/2,v)} \cdot S/\sqrt{n} \tag{6.10}$$

ويمكن إيضاح تطبيق الصياغة آنفاً من خلال المثال التالي :

نفترض أن أحد علماء الانتاج الحيواني يرغب في تقدير متوسط الوزن عند الفطام بعد ٢٠٥ أيام من الرضاعة لمجموعة عجول لها نفس الأب. حيث قام بسحب عينة عشوائية حجمها ٩ عجول من القطيع وتحصّل على البيانات التالية :

550, 525, 570, 600, 485, 535, 580, 520, 540

والمطلوب إيجاد فتره ثقه بدرجة ٩٥٪ لمتوسط الوزن عند الفطام.

ولعمل ذلك فإننا نقوم أولاً بحساب قيم متوسط العينه $\overline{X}$ والانحراف المعياري S ، ثم بعد ذلك نستخدم جدول رقم (٨) في الملحق للحصول على قيم $\pm \; t_{(\alpha / 2,v)}$. وأخيراً نعوض بتلك القيم في قانون فترة الثقة للحصول على النتيجة. ويوضح الجدول رقم (٦،١) الحسابات اللازمه لإيجاد المتوسط والتباين لبيانات الوزن عند الفطام.

الجدول رقم (٦.١). حساب المتوسط والتباين لبيانات الوزن المكتسب.

$(X - \overline{X})^2$	$X - \overline{X}$	X (الوزن)
٢٥	٥	٥٥٠
٤٠٠	٢٠ -	٥٢٥
٦٢٥	٢٥	٥٧٠
٣٠٢٥	٥٥	٦٠٠
٣٦٠٠	٦٠ -	٤٨٥
١٠٠	١٠ -	٥٣٥
١٢٢٥	٣٥	٥٨٠
٦٢٥	٢٥ -	٥٢٠
٢٥	٥ -	٥٤٠
٩٦٥٠	٠	٤٩٠٥

ومن البيانات آنفاً فإن :

$$\overline{X} = \sum X/n = 4905/9 = 545$$
$$S^2 = \sum(X - \overline{X})^2/n - 1 =$$
$$9650/(9-1) = 9650/8 = 1{,}206.25$$
$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1{,}206.25} = 34.73$$
$$v = (n - 1) = (9 - 1) = 8$$

وحيث إن $\alpha = 0.05$ وعليه فإن $t_{(\alpha/2,v)} = t_{(0.05/2,8} = t_{(0.025,8)} = 2.306$

وبالتعويض بالقيم سابقاً في المعادله رقم (6.10) نحصل على :

$$\overline{X} - t_{(\alpha/2,v)} \cdot S/\sqrt{n} < \mu < \overline{X} + t_{(\alpha/2,v)} \cdot S/\sqrt{n}$$
$$545 - 2.306 \cdot 34.73/\sqrt{9} < \mu < 545 + 2.306 \cdot 34.73/\sqrt{9}$$
$$545 - 2.306(11.58) < \mu < 545 + 2.306(11.58)$$
$$545 - 26.7 < \mu < 545 + 26.7$$
$$518.3 < \mu < 571.7$$

الفترة من ٥١٨,٣ إلى ٥٧١,٧ تمثل فترة الثقة بدرجة ٩٥٪ لمتوسط الوزن للعجول ذات العمر ٢٠٥ يوم التي لها نفس الأب. ونظراً لأنها كبيرة نوعاً ما فإن الأمر يتطلب زيادة حجم العينة. ولكننا في الغالب لانتعامل مع العينات ذات الحجم الكبير في جميع الحالات ؛ لأننا نختار بعض العينات لإجراء الاختبارات على بيانات العينة ونحاول معرفة التكاليف المصاحبة للعينات الكبيرة.

وفي حالات أخرى ، فإن بعض العوامل مثل تكاليف الحصول على العينة أو مجموعة الخبراء اللازمين لاجراء المعاينة تجعل العينات الصغيره الحل العملي المناسب لتقدير المعالم.

للعينات الكبيرة حجم العينة أكبر من أو يساوي ٣٠ ، $(n \geq 30)$ يستخدم تقريب التوزيع الطبيعي لتوزيع t كقاعدة لتحديد فترة الثقة للمتوسط μ بدرجة ثقة $100(1-\alpha)$. وبعبارة أخرى نستخدم S (الانحراف المعياري للعينة) كمؤشر للانحراف المعياري للمجتمع σ في إيجاد فترة الثقة كما تم عرضه سابقاً أي :

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = (1-\alpha) \qquad (6.11)$$

ومن الجدول آنفاً و بمعلومية :

$$z = (\overline{X} - \mu) / (S / \sqrt{n})$$

فإنه يمكن إيجاد فترة الثقة باستخدام المعادلة التالية :

$$\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot (S/\sqrt{n} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot (S/\sqrt{n}) \qquad (6.12)$$

وبافتراض أننا نرغب في زيادة حجم العينه في مثال العجول السابق فقد تمت زيادة حجم العينه من ٩ عجول إلى ٣٦ عجلاً وحسبنا المتوسط فوجد أنه يساوي $\overline{X} = 548$

والانحراف المعياري $S = 20.5$ رطل ، وبذلك يمكن استخدام المعادلة رقم (6.12) لإيجاد فتره الثقه لمتوسط المجتمع μ بدرجه ثقة ٩٥٪ كالتالي :

$$\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot (S/\sqrt{n} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot (S/\sqrt{n})$$
$$548 - 1.96 \cdot (20.5/\sqrt{36}) < \mu < 548 + 1.96 \cdot (20.5/\sqrt{36})$$
$$548 - 1.96(3.42) < \mu < 548 + 1.96(3.42)$$
$$548 - 6.7 < \mu < 548 + 6.7$$
$$541.3 < \mu < 554.7$$

ويلاحظ من النتائج أن الفرق بين الحد الأعلى والحد الأدنى للثقة بعد زيادة حجم العينه يساوي ١٣.٤ رطل وهو أقل بكثير من الفرق في حالة العينة الصغيرة. وقد حدث هذا نتيجة لمجموعة من العوامل أولها أنه في حالة العينات الكبيره فإننا نستخدم قيم جدول التوزيع الطبيعي القياسي لايجاد قيم $Z_{\alpha/2}$ والتي نوعاً ما أقل من قيم t . والعامل الثاني أنه في حالة العينات الكبيرة فإننا نحصل على قيم أقل للانحراف المعياري للعينه S والذي يحصل عادة. وأخيراً فإن العينات الكبيره ينتج عنها قيم أقل لـ $S_{\overline{X}}$ ؛ لأننا نقسم الانحراف المعياري للعينة على الجذر التربيعي للعدد ٣٦ بدلاً من قسمته على الجذر التربيعي للعدد ٩ في حالة العينات الصغيره.

فترات الثقة لـــ P من التوزيع ثنائي الحدين

Confidence Intervals for *p* from The Binomial Distribution

المتغير العشوائي ثنائي الحدين r يعبّر عن عدد مرات النجاح في عدد n من المحاولات للتجربه ، وكما هو معلوم من الفصول السابقة فإن متوسط وتباين ثنائي الحدين يعبّر عنه بالمعادله التالية :

$$E(r) = np \text{ ، } Var(r) = npq, \tag{6.13}$$

في بعض الأحيان قد يكون الاهتمام منصب على متغير آخر، $\hat{p}$ ، والذي يمثل نسبة النجاح في عدد n من المحاولات حيث تعبر n عن العينة المختارة من مجتمع يتبع للتوزيع ثنائي الحدين. ويتم الحصول على $\hat{p}$ بقسمة r على n ، كما هو موضح في المعادلة التالية:

$$\hat{p} = (1/n).r \quad \text{أو} \quad \hat{p} = r/n \tag{6.14}$$

وحيث إن (1/n) قيمة ثابتة فإن القيمة المتوقعة لـ $\hat{p}$ تساوي:

$$E(\hat{p}) = (1/n).E(r) = (1/n).np = p$$

وكذلك التباين يمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية:

$$Var(\hat{p}) = (1/n)^2.Var(r) = (1/n)^2.npq = pq/n$$

وعليه فإن $\hat{p}$ عبارة عن مقدّر لنسبة النجاح في المجتمع ، p. ويمكننا ببساطة إيجاد فترة ثقة بنسبة $100(1-\alpha)$ وذلك باستخدام تقريب التوزيع الطبيعي لثنائي الحدين. ويتم ذلك باعتبار أن متوسط التوزيع ثنائي الحدين مساوٍ لمتوسط التوزيع الطبيعي وأن الانحراف المعياري لثنائي الحدين مساوٍ للانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي واستخدام صياغة التوزيع Z. وبناء على ذلك فإن $E(\hat{p}) = p$ و الانحراف المعياري لـ $\hat{p}$ يساوي $\sqrt{pq/n}$. ونظراً لوجود مقدر مجهول p نهدف لتقديره فإنه يتعذر استخدام توزيع Z لذلك نستخدم $\hat{p}$ بدلاً من p و $(1-\hat{p})$ بدلاً من q ليصبح الانحراف المعياري $\sqrt{[(\hat{p})(1-\hat{p})/n]}$ وتصبح معادلة توزيع z على النحو التالي:

$$Z = (\hat{p} - p)/\sqrt{[(\hat{p})(1-\hat{p})/n]} \qquad (6.15)$$

وبالتعويض بالمعادلة السابقة في المعادلة رقم (6.11) وإعادة ترتيب الحدود نحصل على فترة الثقة للمقدر p والتي يمكن التعبير عنها رياضياً كالتالي :

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}.\sqrt{[(\hat{p})(1-\hat{p})/n]} < p < \hat{p} + Z_{\alpha/2}.\sqrt{[(\hat{p})(1-\hat{p})/n]}. \qquad (6.16)$$

ولتوضيح ذلك نفترض أن أحد علماء الحيوان والذي قام باختيار عينة حجمها ١٠٠ بقرة من قطيع كبير تم تلقيحه صناعياً. وخلال الاختبار حدد أن ٥٩ تم تلقيحها ومن ثم حملها. المطلوب إيجاد فترة ثقة ٩٥٪ لـ p والتي تعبر عن نسبة الأبقار في القطيع التي حملت. ولحل مثل هذه المسألة فإننا نوجد قيمة $Z_{\alpha/2}$ الجدولية باستخدام الجدول رقم (٧) في الملحق حيث نجد أن قيمة $Z_{0.025}$ تساوي ١,٩٦ وبحساب قيمة $\hat{p} = r/n$ نجد أنها تساوي ٥٩/١٠٠=٠,٥٩ ثم التعويض بتلك القيم في المعادلة رقم (6.16) كالتالي :

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{[(\hat{p})(1-\hat{p}/n]} < p < \hat{p} + Z_{\alpha/2}.\sqrt{[(\hat{p})(1-\hat{p})/n]}$$
$$0.59 - 1.96.\sqrt{[(0.59)(1-0.59)/100]} < p < 0.59 + 1.96.\sqrt{[(0.59)(1-0.59/100]}$$
$$0.59 - 1.96.\sqrt{0.002419} < p < 0.59 + 1.96.\sqrt{0.002419}$$
$$0.59 - 1.96\ .0.049 < p < 0.59 + 1.96\ .0.049$$
$$0.59 - 0.096 < p < 0.59 + 0.096$$
$$0.494 < p < 0.686$$

ولذلك تقدير النسبة الفعلية للأبقار التي تم حملها تتراوح ضمن المدى من ٠,٤٩ إلى ٠,٦٩ للقطيع وذلك بعد القيام بتلقيح القطيع صناعياً وبدرجة ثقة ٩٥٪.

فترة الثقة للتباين σ^2

Confidence Interval for σ^2

في بعض الحالات، قد نحتاج لإيجاد تقدير لتباين مجتمع غير معلوم. فعلى سبيل المثال، الأدوات العلمية يجب أن تعطي قراءات غير متحيزة بأخطاء قياس قليلة جداً. فمثلاً منظار التربة والذي يعطي متوسط قراءات صحيحة يقل استخدامه إذا كان الاختلاف في القراءات كبيراً وبذلك انعدام الاتساق من عينة لعينة من نفس التربة. وكذلك في مصانع الآلات الزراعية، لا يقتصر الأمر على صحة متوسط حجم الأجزاء المنتجة بل يجب أن يكون الاختلاف في الحجم قليل ويمكن التحكم به أو لن تكون مطابقة للمقاييس وعليه تكون الأجزاء غير قابلة للبيع. من جهة أخرى فإن الاقتصاديين الزراعيين يهتمون بتقلبات الأسعار عند إعداد الخطط التسويقية للخضروات والفواكه للمجموعات المنتجة. وتباين العينة والممكن حسابه باستخدام المعادلة رقم (6.17)، عبارة عن مقدّر غير متحيز لتباين المجتمع σ^2 .

$$S^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n - 1} \tag{6.17}$$

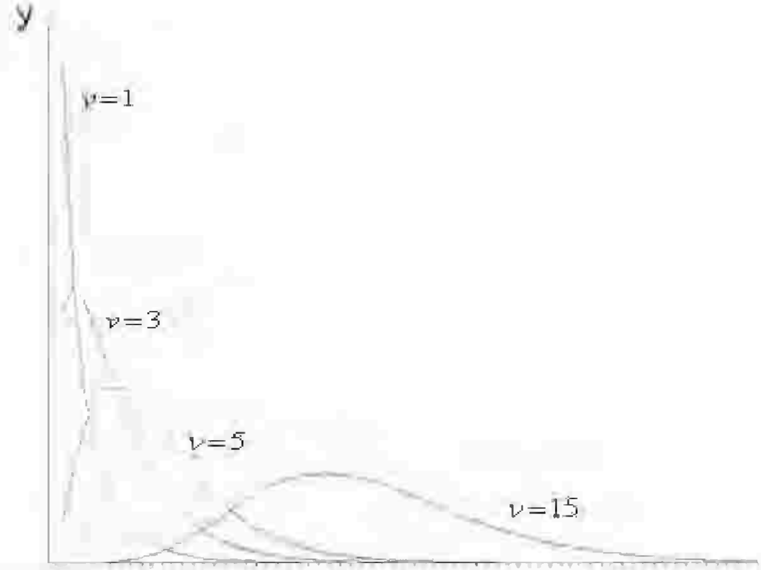
ويتم الحصول على تباين العينة باستخدام عينات تنتمي لدوال الكثافة الاحتمالية pdfs لمربع كاي. وقد تم قياس (معايرة) تباين العينة S^2 بطريقة مشابهة للمتغير z. وينتمي المتغير العشوائي القياسي χ^2 والمعرَّف بالمعادلة رقم (٦,١٨) لتوزيع مربع كاي إذا كان مجتمع المتغير العشوائي x والذي حسب منه تباين العينة S^2 يتوزع طبيعياً.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2} \tag{6.18}$$

ويوضح الجدول رقم (٩) بالملاحق احتمالات الأطراف لتوزيع مربع كاي. ويختلف توزيع تباين العينة S^2 عن توزيع المتوسط $\bar{X}$ بأنه غير متماثل؛ نظراً لأن S^2

لا يمكن أن يأخذ قيمة سالبة. تم فصل احتمالات كل طرف من توزيع مربع كاي. وقد تم التعبير عن قيم احتمالات الطرف الأيمن بالرمز χ^2_α و قيم احتمالات الطرف الأيسر بالرمز $\chi^2_{1-\alpha}$ لهذا التوزيع.

ويعتمد شكل هذا التوزيع ، مثل توزيع t، على درجات الحرية ν المرتبطة بالتباين S^2. لذا فإن تغيير حجم العينة سيؤدي لتغير درجات الحرية وعليه تغير دوال الكثافة الاحتمالية لمربع كاي (الشكل رقم ٦،٣). ومن ثمّ كلما زاد حجم العينة فإن شكل توزيع مربع كاي يصبح مقارب للتوزيع الطبيعي. ولذلك عندما تكون درجة الحرية كبيرة ، مثلاً ١٠٠فإن مربع كاي يبدو مقارب جداً لشكل التوزيع الطبيعي مقارنة بدرجات الحرية الصغيرة ،٦ درجات مثلاً.



الشكل رقم (٦،٣). توزيع مربع كاي لمجموعة مختارة من درجات الحرية.

ولإيجاد فترة الثقة بنسبة $100(1-\alpha)$ لتباين المجتمع σ^2 عندما تكون العينة من مجتمع طبيعي يتم تكوين التعبير الموضح في المعادلة رقم (6.19).

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2,v} < \chi^2 < \chi^2_{(\alpha/2,v)}) = (1-\alpha) \qquad (6.19)$$

ثم نستخدم تعبير مربع كاي الموضح في المعادلة رقم (6.18) ونعوض به في التعبير الاحتمالي ، معادلة رقم (6.20)، ونرتب الحدود لنحصل على فترة الثقة المطلوبة معادلة رقم (6.21).

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

$$\chi^2_{(1-\alpha/2,v)} < (n-1)S^2/\sigma^2 < \chi^2_{(\alpha/2,v)} \qquad (6.20)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/2,v)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2,v)}} \qquad (6.21)$$

ولإيجاد المعادلة رقم (6.21)، تم تغيير مفهوم اللامساوة بحيث أصبحت قيم مربع كاي الكبيرة الجدولية جزء من طرف المعادلة الأيسر وقيم الجدول الصغيرة جزء من طرف المعادلة الأيمن. ويمكن توضيح استخدام تلك المفاهيم من خلال المثال التالي :

ترغب إحدى تعاونيات الألبان بشراء آلة لتعبئة و تغليف الحليب في عبوات سعة نصف جالون. وقام مندوب مبيعات شركه Sur-Fil بعرض للمنتج وأفاد بأن مدى الاختلاف بين العبوات لايتجاوز ٠,٤ أوقيه وللتحقق من ذلك قام المدير المسئول بأخذ عينه من خط الإنتاج حجمها ٨ عبوات سعة نصف جالون وحسب المتوسط والتباين للعينه فوجدهما ٦٤,١ و ٠,٠١٨ على التوالي. المطلوب إيجاد فتره ثقه ٩٠٪ للتباين σ^2.

الحل :

نبدأ أولاً بإيجاد درجة الحريه والتي يمكن حسابها كالتالي $v = (n - 1) = (8 - 1) = 7$. ومن الجدول رقم (٩) في الملحق نجد أن قيم $\chi^2_{0.05}$ و $\chi^2_{0.95}$ عند درجه حرية ٧ هي ١٤,٠٧ و ٢,١٧ على التوالي.

وباستخدام المعادلة رقم (6.21) يمكن إيجاد فتره الثقه كالتالي :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/2,v)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2,v)}}$$

$$(7)(0.018)/14.07 < \sigma^2 < (7)(0.018)/2.17$$
$$0.009 < \sigma^2 < 0.058$$

ويمكن تفسير ذلك بأن التباين بين العبوات يبدو صغيراً ولكن إذا نظرنا للحد الأعلى للعينة وأخذنا الجذر التربيعي لها للحصول على الانحراف المعياري نجد أنه يساوي ٠,٢٤ أوقية ولذلك فعند إنشاء مدى يساوي ضعف الانحراف المعياري فإن المدى المذكور بواسطة مندوب المبيعات يصبح محل تساؤل. وعليه فقبل اتخاذ قرار الشراء ربما يتطلب الأمر حصول المدير على معلومات إضافية.

تمارين Exercises

١- سحبت عينة عشوائية بسيطة حجمها ٤٠٠ من مزارع القطن فوجد أن متوسط المساحة يساوي ٦١٥ بانحراف معياري يساوي ١٠٠. أوجد فترة ثقة بنسبة ٩٠٪ لمتوسط المجتمع ثم فسّرها.

٢- في محاولة لدراسة مدى مطابقة أصواف الأغنام والماعز للمواصفات الجديدة الخاصة بالصوف سحبت عينة عشوائية بسيطة حجمها ١٠٠٠ من مربين للماعز والأغنام فوجد أن ٦٠٠ منها مطابقة للمواصفات في حين أن ٤٠٠ لم تطابق المواصفات. اوجد فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ للنسبة الحقيقية لجميع مربي الأغنام

والماعز وفقاً للمواصفات الجديـــدة.

٣- قام مصنع الآلات الزراعية بإعداد طلبيه كبيرة من مسامير المحاريث. وعند وصولها أخذ قسم التحكم بالجودة بالمصنع عينة عشوائية منها حجمها ٣٠٠ مسمار فوجد أن ٣٦ منها معيبة. أوجد فترة ثقة بنسبة ٩٩٪ لنسبة المسامير المعيبة في الشحنة.

٤- وجد أن متوسط محيط الخصيتين للثيران الرضيعة لعينة عشوائية حجمها ١٠٠ مأخوذة من قطيع الأبقار يساوي ٣١,٥سم بانحراف معياري ١٠ سم. أوجد فترة الثقة بنسبة ٩٥,٥٪ لمتوسط محيط الخصيتين لتلك الثيران.

٥- في دراسة لتقييم المني للثيران الرضيعة لقطيع معين أخذت عينة حجمها ٩ فوجد أن متوسط النسبة للحيوانات المنوية الأولية الغير طبيعية يساوي ١٨ بانحراف معياري ٢,٧. أوجد فترة الثقة لمتوسط النسبة الحقيقية للحيوانات المنوية الأولية غير الطبيعية في هذا القطيع.

٦- أخذت عينة من نباتات القطن لبعض الأصناف الخاصة عددها ٢٥ لدراسة الإثمار. وجد أن متوسط عدد اللوزات الناضجة للنبات يساوي ٢٠ بانحراف معياري ١٠. أوجد فترة الثقة بدرجة ٩٩٪ لعدد اللوزات الناضجة الحقيقي للنبات لهذا الصنف.

٧- في دراسة لإنبات نباتات مستوردة من المهم المحافظة على مستوى الرطوبة النسبية في الحدود التي يتحملها النبات لتجنب فشل عملية الإنبات. قام البستاني بأخذ عدد ٥٠ قراءة ووجد أن التباين في الرطوبة النسبية يساوي ٠,٦ ٪ . أوجد فترة الثقة بنسبة ٩٩٪ للاختلاف الحقيقي للرطوبة داخل البيت المحمي.

٨- قام ستة محكمين بتقييم مجموعة حظائر للثروة الحيوانية من حيث شكلها الحديث. ووجد أن التباين في مستوى التحكيم يساوي ١٠. أوجد فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ للاختلاف الحقيقي في مستوى التحكيم.