الفصل الثامن

اختبار الفروض

Hypothesis Testing

توضح الخطوات التي تم عرضها في الفصل السابق التقدير بنقطة والتقدير بفترة لمعالم المجتمع، وذلك باستخدام فترة ثقة للتعبير عن درجه عدم التأكد حول القيمة الحقيقية للمعالم. وكذلك تساهم الفترات في اختبار القيم الحقيقية المفترضة لمعالم المجتمع. وفي الحقيقة فإننا مهتمون بهذه القيم والتي تسمى الفروض الإحصائية. تعرّف الفروض الإحصائية بأنها عبارة عن افتراض يتم عمله حول بعض معالم أو متغيرات المجتمع.

وفي الحقيقة فإنه من الصعوبة تصنيف كل الفروض إحصائياً. فمثلاً، العبارة التي تقول إن " ماشية البرانفيه Braunvieh هي أفضل لحوم البقر في الولايات المتحدة " ليست عبارة إحصائية.ولكن بتعديل بسيط يمكن تحويلها إلى فرض إحصائي. حيث إن العبارة " البرانفيه Braunvieh هي أفضل قطيع أبقار مفضل من قبل منتجي اللحوم بالولايات المتحدة " عبارة إحصائية؛ نظراً لأنها تعبّر عن فرض حول المعلمة التي تعبر عن نسبة مربي لحوم البقر في الولايات المتحدة والتي يمكن اختبارها باستخدام البيانات.

أنواع الاختبارات Types of Tests

لتحديد ما إذا كان الفرض الإحصائي صحيح بتأكد تام فإن ذلك ربما يتطلب منا اختبار كامل المجتمع. ونظراً لأن ذلك عموماً غير عملي لعدد من الأسباب، فإننا تقريباً نأخذ عينة ونجري اختبار الفرض الإحصائي باستخدام بيانات العينة. ونحن فعلاً نعلم من النقاش السابق بأن المعاينة تحتوي على أخطاء محتملة. لذا، فإنه عند اختبار الفرض الإحصائي فإنه يتم تحديد قيمه للخطأ التي يمكن السماح بها وعادة يتم تحديد تلك القيمة بحيث تكون أصغر ما يمكن. إضافة لما سبق، تختلف الفروض الإحصائية في درجة تعقيدها اعتماداً على نوعية الفرض هل هو بسيط أم مركب. فالفرض البسيط يكون عبارة عن اختبار قيمة واحدة للمعلمة، مثلاً $H_0 : \mu = 75$ فرض بسيط حول متوسط المجتمع. وفي العادة يتم استخدام الرمز H_0 للتعبير عن الفرض المراد اختباره. وتشير العبارة بعد النقطتين إلى الفرض الفعلي. وعلى العكس، فإن الفرض المركب يحتوي مدى من القيم للمعلمة المراد اختبارها. وذلك المدى ربما يتكون من رقم صغير أو تقريباً مجموعة لا نهائية من القيم. ولاختبار الفروض المركبة فإنه يجب تحديد ما إذا كانت المعلمة تأخذ أي من القيم المحتملة في المدى أم لا. ومن الأمثلة على الفروض المركبة $H_0 : u < 150$ و $H_0 : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

وعند صياغة الفرض الإحصائي فإننا نحدّد عبارتين ونقرر أي منهما يمكن اختياره. وهذه العبارتان أحداهما تدعى فرض العدم والأخرى تسمى الفرض البديل يرمز لفرض العدم بالرمز الرياضي H_0 ويشير هذا الفرض لعدم وجود اختلاف، أو عدم وجود أثر، أو لا شيء. بينما الفرض البديل يرمز له بالرمز $\boldsymbol{H_a}$ أو H_1 (حيث تستخدم في العادة كلا الرمزين) وهي تعبر عن العبارة الإحصائية لقيمة معلمه المجتمع التي نعتقد أنها صحيحة. ولذلك، عند اختبار الفروض فإننا نرغب في رفض

فرض العدم (ندعي عادة أنه فرض خاطئ ونقبل الفرض البديل كفرض صحيح)، وفي الحالات التي لا يمكن رفض فرض العدم، فإننا لا نقول إنها صحيحة ولكن نقول لا يمكن رفضها بسبب أنه يمكن رفضها عند إجراء بعض الاختبارات المستقبلية. وفي التحقيق العلمي، فإنه دائماً هناك احتمالية أن تسبب البيانات الجديدة رفض الفرض كفرض خاطئ والتي كنّا نعتقد بأنه صحيح.

فرض العدم والفرض البديل قد تكون بسيطة أو مركبه أو مزيج من الاثنين. فمثلاً يمكن اختبار فرض العدم البسيط $H_0 : P = 0.166$ مقابل الفرض البديل البسيط $H_a : P = 0.25$ أو مقابل الفرض البديل المركب $H_a : P \neq 0.166$. من جهة أخرى يمكن اختبار فرض العدم المركب $H_0 : \mu < 10$ مقابل فرض بديل بسيط مثل $H_1 : \mu = 10$ أو مقابل فرض بديل مركب $H_1 : \mu \geq 10$. وأياً كانت صياغة الفرض، فإن القيمة الصحيحة للمعلمة يجب أن تكون في المجموعة المحددة لـ H_0 أو المجموعة المعرّفة بـ H_a. أي أن فرض العدم والفرض البديل يجب أن تحتوي على كل القيم المحتملة التي يمكن أن تأخذها المعلمة. وبالتالي يمكن عمل ذلك بجعل المجموعتين متكاملتين فمثلاً إذا كان فرض العدم $H_0 : \mu > 50$ فإن الفرض المكمل له هو $H_a : \mu \leq 50$. فالفرض في المثال السابق يعني إجراء اختبار من طرف واحد؛ لأنه إذا كان فرض العدم غير صحيح فإن جميع القيم للفرض البديل تقع في طرف واحد منه (الطرف الأيسر في هذه الحالة)، ولذا فإن هناك اختبار طرف واحد للطرف الأيسر واختبار طرف واحد للطرف الأيمن اعتماداً على القيم المحدّدة في الفرض البديل هل هي أقل من أو أكبر من تلك القيم في فرض العدم.

أما في حالة استخدام فرض عدم بسيط وفرض بديل مركب فإن الاختلاف في قيم المعلمة يمكن أن يكون في أحد الطرفين من قيم فرض العدم وبذلك نستخدم اختبار الطرفين.

فمثلاً إذا كانت لدينا العبارة $H_0 : P = 0.125$ مقرونة بالفرض البديل $H_a : P \neq 0.125$ فهذا يعني استخدام اختبار من طرفين.

وتتمثل المشكلة في اختبار الفروض في كيفية استخدام بيانات العينة لعمل اختبار بين عبارتين متنافيتين حول قيمة المعلمة. وكما تمت الإشارة له سابقاً فإن مثل هذا القرار قد يشتمل على خطأ. وعلى وجه التحديد، فإن هناك نوعين من الأخطاء المحتملة. القرار بقبول الفرض البديل عندما يكون فرض العدم صحيح (خطأ النوع الأول)، أو القرار بقبول فرض العدم عندما يكون الفرض البديل صحيح (الخطأ من النوع الثاني).

أخطاء النوع الأول والنوع الثاني Type I and Type II Errors

لعرض أخطاء النوع الأول والثاني نفترض على سبيل المثال أن أحد المختصين في الاقتصاد الزراعي يرغب في اختبار متوسط إنفاق الأسرة السنوي على الفواكه والخضار الطازجة. قام الاقتصادي بصياغة الفرض الإحصائي بحيث إن فرض العدم يتمثل في أن متوسط الإنفاق أقل من أو يساوي ١٢٠٠دولار $H_0 : \mu \leq 1200$ مقابل الفرض البديل أن متوسط الإنفاق أكبر من ١٢٠٠دولار $H_a : \mu > 1200$ فيكون الباحث قد ارتكب خطأ من النوع الأول إذا أدت النتائج إلى قبول الفرض البديل عندما يكون الإنفاق الفعلي يساوي ١٢٠٠دولار أو أقل، أو خطأ من النوع الثاني إذا لم يرفض فرض العدم H_0 عندما يكون الإنفاق أكبر من ١٢٠٠دولار.

الجدول رقم (٨.١). أخطاء النوع الأول والنوع الثاني.

القرار	الحالة H_0 صحيح	H_a صحيح
قبول H_0	قرار سليم	خطأ من النوع الثاني باحتمال β
رفض H_0	خطأ من النوع الأول باحتمال α	قرار سليم

ونظراً لاحتماليه الوقوع في خطأ من النوع الأول أو النوع الثاني في معظم الاختبارات الإحصائية، فإننا نسعى لتصميم نموذج لأخذ تلك الأخطاء في الحسبان. ولعمل ذلك يجب الاهتمام باحتمالية وقوع تلك الأخطاء. في الفصل السابق كان الحرف الإغريقي α يشير إلى احتمالية عدم شمول فترة الثقة للقيمة الحقيقة لمعلمة المجتمع وقد تم اختيار تلك القيمة بحيث تكون صغيرة. أما في هذا الفصل فإننا نستخدم α لعرض أقل احتمال للوقوع في الخطأ الأول ويتم اختيارها أيضاً. من جهة أخرى فإن احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني يعبّر عنه بالحرف الإغريقي بيتا (β). ويوضح الجدول رقم (٨.١) عرض للحالات التي تؤدي للوقوع في تلك الأخطاء. ولعرض طريقه حساب α و β نفترض أننا نرغب في اختبار كفاءة حجر النرد. نفترض وجود حجر نرد غير سليم (مرجح) وقد علمنا أن احتمال ظهور الرقم واحد يساوي $P = 0.25$ وقد تم خلط حجر النرد المرجح من غير قصد مع مجموعة من أحجار النرد الأخرى السليمة. وحيث إنه لا يوجد علامة تحدد أو تعرّف ذلك الحجر، سيتم اختيار الحجر عشوائياً ورميه ١٠٠ مره $n = 100$ وملاحظة ظهور العدد رقم واحد والذي يمكن أن نرمز له بالرمز r ويمكن حساب نسبة ظهور العدد واحد من خلال المعادلة رقم (8.1).

$$\hat{P} = r/n \tag{8.1}$$

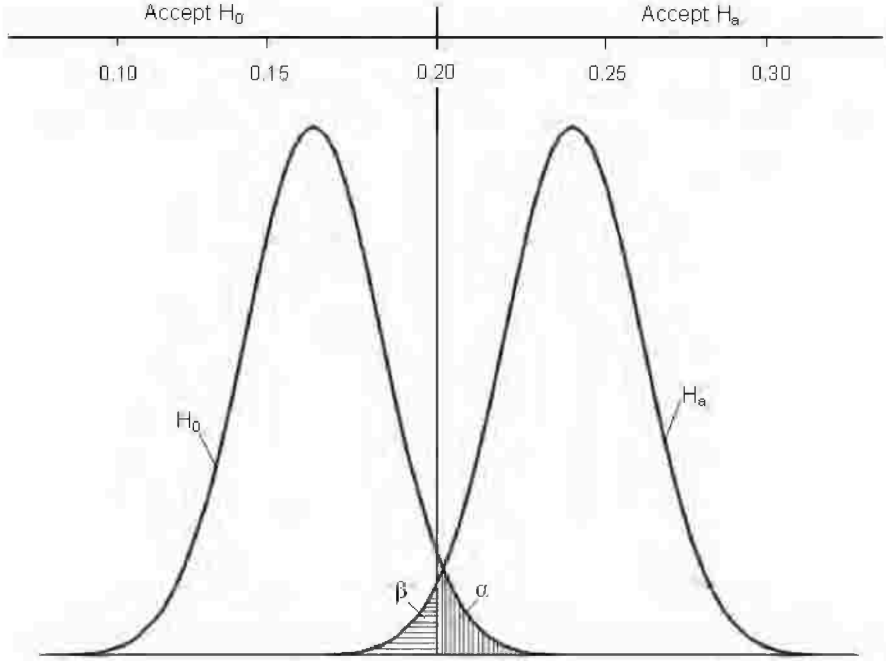
فإذا كانت قيمة $\hat{P}$ ليست أكبر من قيمه مناسبة تم تحديدها فإننا سوف نقبل نتيجة الاختبار بأن الحجر كفء أما إذا كانت قيمه $\hat{P}$ أكبر من قيمتنا، فإننا سنرفض الفرض القائل بكفاءة الحجر وسوف نحصل على حجر النرد المرجح. ولذلك فإن لدينا قاعدة لاتخاذ القرار للتحكم في الخطوات. والقيمة المناسبة التي تم اختيارها تدعى القيمة الحرجة. لنفترض أننا حددنا القيمة الحرجة بـ $P = 0.20$ مثلاً، فإذا لم نحصل على الرقم ١ عشرين مرة من ١٠٠ رمية للحجر، فإننا لن نرفض فرض العدم ونقبل بكفاءة الحجر ولكن إذا حصلنا على الرقم ١ أكثر من عشرين فإننا سوف نرفض فرض العدم مقابل الفرض البديل ونقول بعدم كفاءة الحجر. ولذلك فإن لدينا الفرض.

$$H_0 : P = 0.167$$

$$H_a : P = 0.250$$

وقاعدة اتخاذ القرار هي $P = 0.20$. وسيتم عرض ذلك باستخدام تقريب التوزيع الطبيعي لتوزيع ذي الحدين حيث إن المتوسط هو $\mu = p$ والانحراف المعياري يمكن حسابه من $\sigma = \sqrt{Pq/n}$. وفي الحقيقة فإن لدينا توزيعين أحدهما عندما يكون فرض العدم صحيح $(\mu = 0.167 , \sigma = 0.037)$ والآخر عندما يكون الفرض البديل صحيح $(\mu = 0.25 , \sigma = 0.043)$.

ويوضح الشكل رقم (٨،١) توزيعات المعاينة لفرض العدم والفرض البديل لتجربة حجر النرد.



الشكل رقم (٨.١). توزيعات المعاينة لفرض العدم والفرض البديل لحجر النرد.

حيث توضح المساحة المظللة الخطوط الرأسية وتحت التوزيع الأول قيمة α والتي تقع يمين قاعدة القرار $P = 0.20$ ، بينما توضح المساحة المظللة بالخطوط الأفقية تحت التوزيع الثاني قيمة β والتي تقع يسار قاعدة القرار $P = 0.20$. ويجب ملاحظة أنه لابد من تحديد قاعدة اتخاذ القرار قبل إجراء الاختبار وكذلك قبل معرفة قيم α ، β . والآن يمكننا استخدام الصيغة الرياضية لـ Z لحساب الاحتمالات الفعلية للخطأ الأول والثاني. ويمكن إعادة كتابة صيغة حساب الاحتمالات باستخدام z كالتالي:

$$Z = (\hat{P} - P) / \sqrt{Pq/n} \qquad (8.2)$$

وفي مثالنا الحالي فإن $\hat{P} = 0.2$ كقيمة لاتخاذ القرار. وبحساب قيمة Z_α

نستخدم القيم المصاحبة لتوزيع المعاينة عندما تكون H_0 صحيحة، أي $P = 0.167$ و $\sigma = 0.037$ لذا فإن Z_α تساوي :

$$Z_\alpha = (0.20 - 0.167) / 0.037 = 0.89$$

وباستخدام توزيع Z من الجدول رقم (٧) بالملحق نجد أن احتمال أن تزيد قيمة Z عن ٠٫٨٩ هي :

$$0 \cdot 500 - 0.3133 = 0.1687 = \alpha$$

ويمكن لهذا الاختبار أيضاً حساب احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني باستخدام صيغه Z بالقيم المصاحبة للتوزيع عندما تكون H_a صحيحة حيث :

$$Z_\beta = (0.20 - 0.25) / 0.043 = -1.16$$

وباستخدام توزيع Z من الجدول رقم (٧) بالملحق نجد أن احتمال أن تقل قيمة Z عن 1.16- هي

$$0.5000 - 0.3770 = 0.1230 = \beta$$

وحيث إن القيمة الحرجة في قاعدة القرار هي التي تحدد في النهاية حجم الخطأ الأول والخطأ الثاني عند صياغة فرض العدم والفرض البديل، لذا فإنه يمكننا تحريك قاعدة اتخاذ القرار لليمين بعيداً عن قيمة H_0 التي تساوي $P = 0.167$ إلى $P = 0.22$ ولذلك تخفض احتمال الخطأ الأول إذا كنا نعتقد أن قيمة α والتي تساوي ٠٫١٨٦٧ كبيره جداً بالنسبة لهذا الاختبار.

ولكن باتخاذ هذا الإجراء فإننا قد زدنا احتمال β ؛ نظراً لأن خط اتخاذ القرار

يؤثر على كلا الخطأين ولذلك هناك تبادل بينهما بحيث لا يمكن تقليل احتمال أحد الأخطاء دون زيادة احتمال الخطأ الآخر وستتم مناقشة ذلك لاحقاً.

والآن ما هو تفسير الخطأ الأول في مثال كفاءة حجر النرد السابق حيث إننا رمينا الحجر ١٠٠ مرة وكانت قيمة $\hat{P}$ التي تم حسابها من التجربة أكبر من ٠,٢٠ . ومن ثمَّ بناءً على قاعدة القرار فإننا سنرفض فرض العدم. وبناء على نتيجة هذا الاختبار فإننا حصلنا على أكثر من ٢٠٪ للرقم ١ ولذلك يمكننا القول بأن الحجر غير سليم. وفي الحقيقة فإن الخطأ من النوع الأول يحدث إذا كان الحجر سليماً. وبطريقه ما فإن التجربة أدت إلى قيمة مرتفعة لـ $\hat{P}$ على الرغم من أن الحجر كفء. وهذا يحدث بنسبة 100α وفقاً للطريقة التي تم بها إجراء الاختبار ، أو ١٨,٦٧٪ في المثال. ولذلك فإننا في هذه الحالة ، قد ارتكبنا خطأ من النوع الأول بالقول إن الحجر السليم معوجاً أو ملتوياً.

وبطريقة مشابهة ، فإن الخطأ من النوع الثاني يمكن أن يحدث. في هذه الحالة ، تم رمي الحجر ١٠٠ مرة وتم حساب قيمة $\hat{P}$ والتي ستكون صغيره ، أقل من ٠,٢ ، وبناء على قاعدة اتخاذ القرار فإننا لم نستطيع رفض فرض العدم ، أي أننا نستنتج أن الحجر سليم. وفي الحقيقة فإن الخطأ من النوع الثاني يقع إذا كان الحجر معطوب. وحيث إن الحجر تم ترجيحه فعلياً لذا فإنه في المتوسط سيكون نسبة ظهور الرقم١ هي $P = 0.25$ ، ولكن في هذا المثال حصلنا على بعض النسب القليلة لظهور الرقم١. وعليه فإن الاختبار يوضّح أن الحجر سليم باحتمال β ، والذي يساوي ٠,١٢٣٠ أو ١٢,٣٪ معظم الوقت. كما أن القيمة $1 - \beta$ والتي تساوي ٠,٨٧٧٠ تسمى قوة الاختبار.

التحكم بقيم α و β

Controlling Both β and α

نظراً لأن كلا الخطأين غير مرغوب فيه وقد تكون احتمالاتها كبيره، فإننا نحاول اختيار قاعدة القرار والتي يمكن أن توازنها. في مثال حجر النرد تم أولاً تحديد القيمة الحرجة لقاعدة اتخاذ القرار ثم حسبنا القيم المصاحبة لكل من α و β. وحيث إن تلك المخاطر مرتبطة بحجم العينة، وزيادة حجم العينة n يقلل من قيم α و β، لذا فإن اختيارنا للقيمة الحرجة يعتمد على حجم العينة. وعليه، فإننا في التطبيق نختار حجم α، والذي يحدد القيمة الحرجة، وحجم العينة ثم نحسب β لقيم الفرض البديل H_a المهمة. فإذا كانت قيمة β كبيره جداً فإننا نحسب حجم العينة والذي يعطي قيمة مقبولة وزيادة العينة إلى الحجم الناتج إذا كان ذلك ممكناً ويجب ملاحظة أنه يجب أن تتم تلك الحسابات في مرحلة التخطيط لاختبار الفرض.

اختبارات الفروض Tests of Hypotheses

الآن يمكننا مناقشة بعض من الاختبارات المعيارية للفروض لمجتمع أو مجتمعين. أما الاختبارات لثلاثة مجتمعات أو أكثر فستتم مناقشتها لاحقاً. وسنبدأ باختبار الفروض الأوسع انتشاراً وهو اختبار العينة الواحدة التي تحتوي على متوسط المجتمع μ.

ولنجاح الاختبار فإننا يجب أن نتبع خطوات معينة لإجراء اختبارات الفروض وسيتم ذكر تلك الخطوات مع العلم بأننا قد لا نتطرق لشرح تلك الخطوات جميعها، والخطوات هي:

١- صياغة فرض العدم والفرض البديل.

٢- تحديد توزيع المعاينة للاختبار، مثل توزيع Z، t، ... إلخ.

٣- اختيار قيمه α وتحديد القيمة الحرجة للاختبار وقاعدة القرار.

٤- حساب قيمة إحصاءة الاختبار باستخدام بيانات العينة المتاحة.

٥- اتخاذ القرار المناسب.

اختبار المتوسط μ لعينة واحدة بمعلومية الانحراف المعياري σ

One Sample Tests for μ with σ Known

إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع معلوم فإنه يمكننا اختبار فرض العدم $H_0 : \mu = \mu_0$ مقابل الفرض البديل والذي قد يكون طرف واحد ($H_a : \mu < \mu_0$ أو $H_a : \mu > \mu_0$) أو طرفين ($H_a : \mu \neq \mu_0$). وتوزيع المعاينة لهذا الاختبار هو التوزيع الطبيعي وإحصاءة الاختبار هي قيمة Z المحسوبة وكما في المعادلة (٨,٣) فإننا نقارن قيمة Z المحسوبة، مع Z الجدولية من الجدول رقم (٧) بالملحق:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad (8.3)$$

والتي تحدد قيمة الاحتمال لـ α في الطرف المناسب للتوزيع الطبيعي لـ $\overline{X}$.

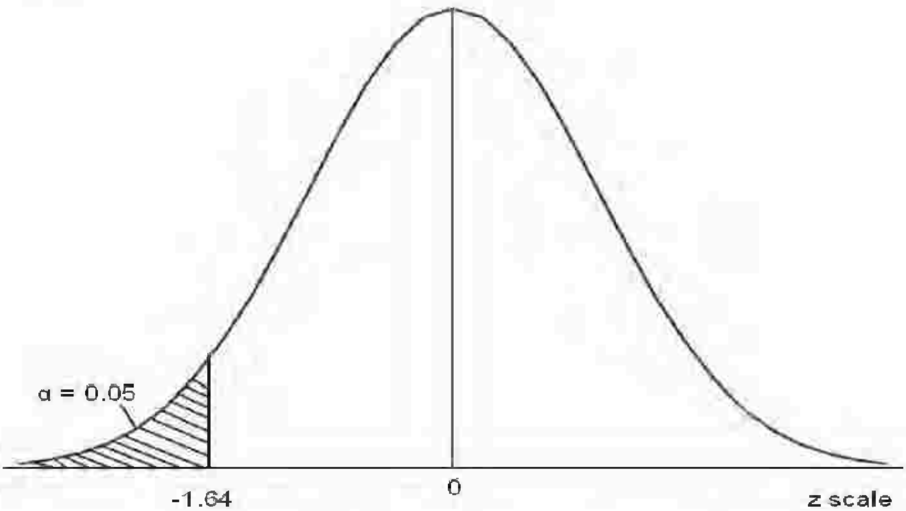
والسؤال كيف نحدد الطرف المناسب، والجواب يتم ذلك بالنظر إلى صياغة الفرض البديل. إذا كان $\mu < \mu_0$ ، فإن لدينا اختبار طرف واحد لليسار وأن الطرف الأيسر للتوزيع يحتوي على α وتكون قيمة Z المحسوبة سالبة وكذلك قيمة Z الجدوليه المستخرجة من الجدول رقم (٧) بالملحق سالبة أيضاً. وبطريقة مشابهة فإذا تمت صياغة الفرض البديل H_a بحيث $\mu > \mu_0$ فإن لدينا اختبار طرف واحد لليمين وتكون المنطقة الحرجة في الطرف الأيمن لتوزيع المعاينة وتكون كلا القيمتين لـ Z

المحسوبة والجدوليه موجبة. أو قد يكون لدينا اختبار الطرفين ناتج من صياغة الفرض البديل حيث $\mu \neq \mu_0$ والذي يتطلب في هذه الحالة تجزئة α إلى قسمين متساويين ووضع كل قسم في كل طرف من أطراف التوزيع ولذلك يكون لدينا منطقتين حرجتين وكذلك قيمتين جدوليتين لـ Z . و Z المحسوبة قد تكون موجبة أو سالبة ولكننا نقارنها بقيمة Z الجدولية لاتخاذ القرار برفض أو عدم رفض فرض العدم.

ولتوضيح النقاش السابق سيتم عرض مثالين أحدهما لاختبار الطرف الواحد والآخر لاختبار الطرفين. وسنبدأ أولاً باختبار الطرف الواحد حيث نفترض بأن الأجر اليومي للعمال الزراعيين يتوزع طبيعياً بمتوسط يساوي ٥٥ دولار (μ =55) وانحراف معياري يساوي ١٠ دولارات ($\sigma = 10$). وقد أدعى العمال في منطقه محددة بأن الأجر اليومي المدفوع لهم زهيد أو قليل. تم أخذ عينه عشوائية حجمها ٣٦ (n=36) من تلك المنطقة وحساب متوسط الأجر لهم فوجد أنه يساوي ٥٢ دولاراً $\overline{X} = 52$. فإذا اخترنا $\alpha = 0.05$ فهل المزارعين في هذه المنطقة يدفعون أجر زهيد للعمال ؟ لحل هذه المسألة فإننا أولاً نصيغ الفرض كالتالي :

$$H_o : \mu = 55$$
$$H_a : \mu < 55$$

حيث إن الفرض البديل عبارة عن اختبار طرف واحد من اليسار. وحيث إن $\alpha = 0.05$ فإن قيمة Z الجدوليه من الجدول (٧) بالملحق تساوي -١,٦٤ . ولذلك فإن المنطقة الحرجة تقع في الطرف الأيسر للتوزيع ومحددة بقيمه Z الحرجة والتي تساوي -١,٦٤ (الشكل رقم ٨,٢).



الشكل رقم (٨.٢). توزيع المعاينة والمنطقة الحرجة لاختبار الطرف الواحد للمتوسط μ .

فإذا كانت قيمة Z المحسوبة تقع لليسار من -١,٦٤ ، أي في المنطقة الحرجة ، فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونختم بالقول إن المزارعين في تلك المنطقة يدفعون أجراً زهيداً للعمال. ولكن إذا كانت قيمة Z المحسوبة تقع بين الصفر و -١,٦٤ فإنه لا يمكننا رفض فرض العدم. وباستخدام المعادلة رقم (8.3) يمكن حساب قيمة Z كالتالي :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{52 - 55}{\frac{10}{\sqrt{36}}} = -1.80$$

ويمكن اتخاذ القرار بمقارنة قيمة Z المحسوبة والتي تساوي -١,٨٠ بقيمة Z الجدوليه والتي تساوي -١,٦٤. وحيث إن القيمة - ١,٨٠ تقع في المنطقة الحرجة للاختبار فإننا نرفض فرض العدم ونختم القول بأن الأجر المدفوع من قبل المزارعين للعمال في تلك المنطقة أجر زهيد. ويجب ملاحظة أننا لو اخترنا قيمة صغيره لـ α ، ٠,٠١ مثلاً ، فإننا في هذه الحالة لن نرفض فرض العدم.

الآن سنعرض طريقة اختبار الطرفين. حدّد الوكيل المعتاد المسئول عن اختبار أداء آلة تطبيق المبيدات متوسط نقاط التقييم يساوي ٧٠ ($\mu = 70$) وانحراف معياري يساوي ١٥ ($\sigma = 15$). قام الوكيل بتطوير عرض إعلامي متعدد حديث وإعطائه لمجموعة عشوائية عددها ٤٩ من طالبي الترخيص الجدد لمعرفة هل هذا العرض يؤدي إلى أي اختلاف في متوسط النقاط. وقد وجد أن متوسط النقاط لهذه المجموعة يساوي ٧٢ $\overline{X} = 72$ والمطلوب اختبار ذلك باستخدام مستوى معنوية يساوي ٥٪ ($\alpha = 0.05$).

لحل هذا المثال فإننا نحدد أولاً فرض العدم والفرض البديل كالتالي:

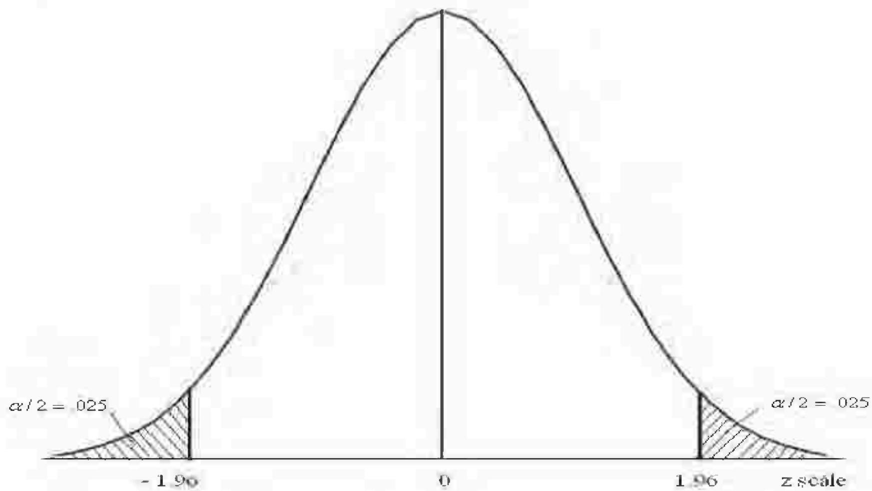
$$H_0 : \mu = 70$$

$$H_a : \mu \neq 70$$

ثم نقسم α على ٢ ونوجد قيم Z الجدوليه باستخدام الجدول رقم (٧) بالملحق المناظرة لقيم $\alpha/2 = 0.025$ والتي تساوي ± ١,٩٦ ثم نحسب قيم Z كالتالي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{72 - 70}{15 / \sqrt{49}} = 0.93$$

لذا عند مقارنة قيمة Z المحسوبة والتي تساوي ٠,٩٣ بقيمة Z الجدوليه ± ١,٩٦ نجد أن قيمة Z المحسوبة تقع بينهما وليست في المنطقة الحرجة (الشكل رقم ٨,٣) ولذا فإننا لا نستطيع رفض فرض العدم. وفي حالة مثالنا ، فإن العرض الإعلامي لن يغيّر متوسط النقاط في اختبار أداة تطبيق المبيدات. ومتوسط العينة الملاحظ كبير ويعود ذلك ببساطة إلى الاختلافات المعاينة.



الشكل رقم (٨.٣). توزيع المعاينة والمنطقة الحرجة لاختبار الطرفين للمتوسط μ .

اختبار المتوسط μ لعينة واحدة لها انحراف معياري σ غير معلوم

One Sample Tests for μ with σ Unknown

في هذا الجزء نهدف أيضاً لاختبار الفروض حول المتوسط μ ولكن في هذه الحالة فإننا لا نعرف أي معلومات عن الانحراف المعياري للمجتمع σ. لذا فإننا يجب أن نقدرها باستخدام الانحراف المعياري للعينة S. وتوزيع المعاينة المناسب في هذه الحالة لـ $\overline{X}$ هو توزيع t بدرجة حرية $(n - 1)$.

العينات الكبيرة Large Sample

إذا تم إجراء الاختبار باستخدام عينات كبيرة $(n \geq 30)$ فإنه يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع t وإجراء الاختبار بطريقة مشابهة لما تم عمله في الجزء السابق. والاختلاف البسيط أن معادلة z المحسوبة تحتوي في المقام على S بدلاً من σ ولذلك فإنه ليس بالضرورة شرح ذلك بمثال.

العينات الصغيرة Small Sample

عند استخدام عينات صغيرة $(n < 30)$ لاختبار الفروض حول المتوسط μ فإن التوزيع المناسب لإجراء هذا الاختبار هو توزيع t. ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي:

تحافظ علب الفواكه من الخوخ على متوسط ١٥,٣٣ أوقيه في الحاويات.تم اختيار عينة من ٨ علب وحسب المتوسط للعينة فوجد أنه يساوي ١٥,١٥ أونصه بانحراف معياري يساوي٠,٢ أونصه $(S = 0.2)$. هل بيانات هذه العينة تشير إلى أنه تم المحافظة على متوسط الوزن باستخدام مستوى معنوية يساوي ١٪ $(\alpha = 0.01)$.

ويمكن صياغة فرض العدم والفرض البديل لهذا الاختبار باستخدام اختبار الطرفين؛ نظراً لأن اختلاف الوزن يمكن أن يكون في أحد الاتجاهين من الوزن المعياري للخوخ:

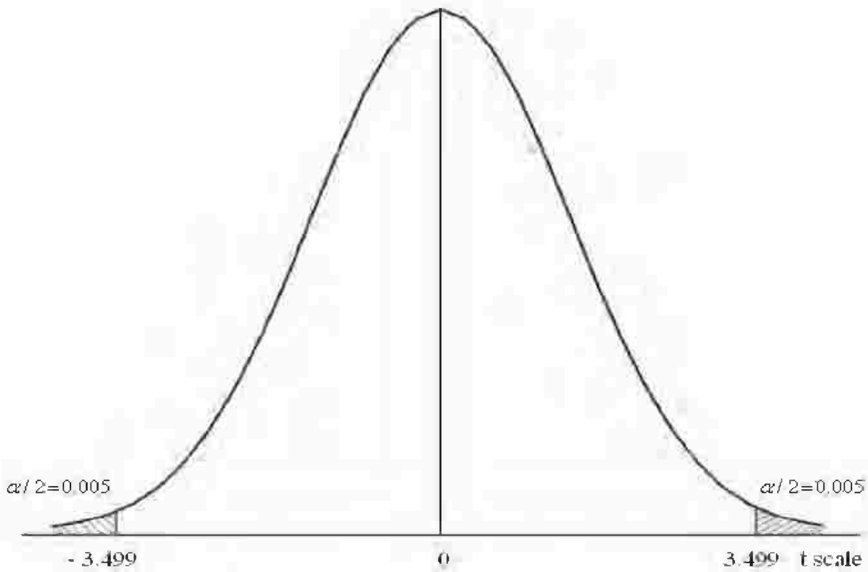
$$H_0 : \mu = 15.33$$

$$H_a : \mu \neq 15.33$$

باستخدام توزيع t (الجدول رقم ٨ بالملحق) وعند مستوى معنوية ١٪ ودرجه حرية ٧ $v = (n-1) = (8-1) = 7$ نجد أن قيم t للطرفين هي ±٣,٤٩٩، ومن ثمَّ يمكن عرض المناطق الحرجة للاختبار كما في الشكل رقم (٨,٤).

وباستخدام الصيغة الرياضية لـ t يمكننا حساب إحصاءة الاختبار كالتالي:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{15.15 - 15.33}{\frac{0.2}{\sqrt{8}}} = -2.54$$



الشكل رقم (٨.٤). المناطق الحرجة لاختبار الطرفين لتوزيع t للمتوسط μ .

ويمقارنة القيمة المحسوبة (-٢,٥٤) بالقيم الجدوليه لـ t نجد أنها لا تقع في المنطقة الحرجة. وعليه فإنه لا يمكننا رفض فرض العدم. وعليه فإن متوسط وزن العينة لا يختلف من الوزن المعياري ١٥,٣٣ أوقيه ماعدا في اختلافات العينة ولذلك فإن المنتج قد وضع الأوزان الصحيحة للخوخ في الحاويات.

اختبار النسبة *P* لعينة واحدة One-Sample Test for *P*

عندما نرغب في إجراء اختبار الفروض لمعلمه التوزيع ذي الحدين *P* ، فإننا نستخدم تقريب التوزيع الطبيعي لتوزيع ذي الحدين ونجري الاختبار بطريقة مشابهة لاختبار سلامة حجر النرد كما تم شرحه سابقاً في جزء الخطأ الأول والخطأ الثاني.

اختبار المتوسطات لعينتين لهما انحرافات معيارية معلومة σ_2 , σ_1

Two-Sample Tests for Means with σ_1 , σ_2 Known

عندما تكون العينات المختارة من مجتمعين لهما انحراف معياري معلوم فإنه يتم إجراء الاختبار باستخدام التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$. وتتم صياغة الاختبار بطريقه مماثلة لما تم عمله في حالة العينة الواحدة ما عدا احتواء الفرض على عبارة تمثل الفرق بين متوسطات المجتمع ويتم تعديل الصيغة الرياضية لـ Z المحسوبة لتحتوي على فرق المتوسطات والتي توضحها المعادلة رقم (8.4) التالية :

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}} \qquad (8.4)$$

وغالباً فإن فروض العدم لمعظم الاختبارات في حالة العينتين تصاغ بحيث تعبر عن عدم وجود فرق في متوسطات المجتمع أي $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ، ولذا فإنه يتم استخدام الصفر عموماً في حالة استخدام صيغه Z المحسوبة لحساب الفروق. ويمكن عرض المثال التالي لإيضاح كيفية استخدام هذه الطريقة.

أحد علماء محطات التجارب يعرف أن الانحراف المعياري لاستجابة القمح لتطبيق أحد حبيبات الأسمدة المعيارية في المنطقة يساوي ٠,٦ بوشل، وأن الانحراف المعياري لأي تطبيق إضافي يساوي ٠,٥ بوشل. وقد قام العالم باختبار نوع من القمح لتحديد استجابته لنوعي السماد وذلك بتقسيم حوض التجربة لخمسين مربعاً ومعاملة نصف كل مربع بالسماد المعياري والنصف الآخر بالسماد الإضافي. وفي نهاية الموسم كان متوسط إنتاجية القمح الذي تم تسميده بالسماد المعياري تساوي ٤٠ بوشل و٤٢ بوشل للسماد الإضافي. المطلوب باستخدام مستوى ٥٪ $(\alpha = 0.05)$ اختبر هل

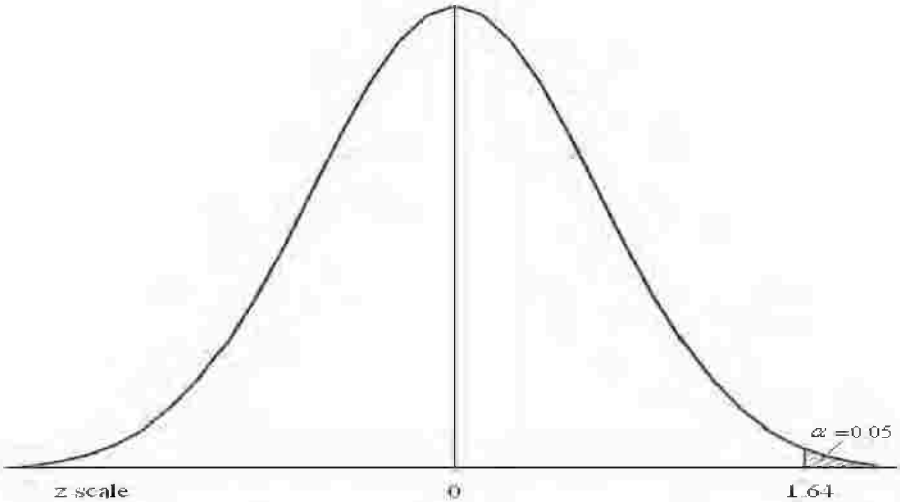
استخدام السماد الإضافي يزيد من متوسط الإنتاجية.

لحل هذه المسألة فإننا أولاً نصيغ الفرض الإحصائي كالتالي:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

ويمكن عمل هذا الاختبار من طرف واحد باتجاه اليمين باختيار العينة للسماد الإضافي كعينة واحدة. في هذه الحالة فإن القيمة الحرجة لـ Z (من الجدول رقم ٧ بالملحق) تساوي ١,٦٤ (الشكل رقم ٨,٥).

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}} = \frac{(42 - 40) - 0}{\sqrt{\frac{0.5^2}{25} + \frac{0.6^2}{25}}} = 12.8$$



الشكل رقم (٨.٥). المنطقة الحرجة لاختبار العينتين للمتوسط.

وحيث إن قيمة Z المحسوبة كبيره مقارنة بـ Z الجدولية وتقع خارج المنطقة الحرجة للاختبار، فإننا نرفض فرض العدم ونختم بالقول إن إنتاجية القمح لهذه النوعية من القمح تكون أكبر باستخدام السماد الإضافي .

اختبارات المتوسطات لعينتين لهما انحرافات معيارية غير معلومة σ_1 , σ_2

Two-Sample Tests for Means with σ_1 , σ_2 Unknown

في حالة عدم معرفة الانحراف المعياري لمجتمعات الدراسة فإن توزيع t هو التوزيع المناسب لدراسة الفرق بين متوسطات العينات. ولكن في حالة العينات الكبيرة يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع t واستخدام Z المحسوبة كإحصاء للاختبار. والصيغة الرياضية المستخدمة لحساب قيمه Z هي نفسها تقريباً الصيغة الموضحة في الجزء السابق ماعدا بعض الاختلاف البسيط حيث استبدلت σ_1^2 و σ_2^2 بتباين العينة S_1^2 و S_2^2 ولذلك تكون الصيغة كالتالي :

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2_1}{n_1} + \frac{S^2_2}{n_2}}} \qquad (8.5)$$

ويتم إجراء الاختبار بطريقه مشابهة لما تم عمله في الجزء السابق.

العينات الصغيرة المستقلة Small, Independent Samples

عندما تكون العينات صغيره أقل من ٣٠ $(n_1 , n_2 < 30)$ والمجتمعات مستقلة فإنه يتم إجراء اختبار الفروض باستخدام توزيع t بدرجه حرية $(n_1 + n_2 - 2)$ وحساب قيمه t باستخدام المعادلة رقم (8.6).

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}} \quad \text{حيث} \quad S^2 = \frac{(n_1 - 1)\,S_1^{\,2} + (n_2 - 1)S_2^{\,2}}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (8.6)$$

والمثال التالي يوضح ذلك، نفترض أن حظيرتين من العجول تمت تغذيتها بعلائق مختلفة لفترة من الزمن. تم إعطاء العجول والبالغ عددها ١٢ في الحظيرة الأولى عليقه بها بروتين مضاف جديد بينما العجول في الحظيرة الثانية والبالغ عددها ٧ عجول أعطيت العليقة العادية دون إضافة كما في الجدول رقم (٨,٢).

الجدول رقم (٨.٢). البيانات لاختبار علائق العجول.

البيان	العليقه المضاف لها البروتين	العليقه العادية
متوسط الوزن المكتسب $(\bar{X})$ رطل	١٢٠	١٠١
$\sum(X - \bar{X})^2$	٥٠٣٢	٢٥٥٢

والسؤال، هل العليقه التي تمت إضافة البروتين لها أكثر فعالية من العليقه العادية عند مستوى معنوية ٥٪.

ولإجراء هذا الاختبار يتم أولاً صياغة فرض العدم والفرض البديل كالتالي :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

ونحسب درجات الحرية والتي تساوي $17=(2-7+12)=(2-n_2+n_1)=v$.
وحيث إن هذا اختبار من طرف واحد باتجاه اليمين نجد من جدول t عند مستوى معنوية ٠,٠٥ (الجدول رقم ٨ بالملحق) أن قيمة t تساوي ١,٧٤. يمكن استخدام

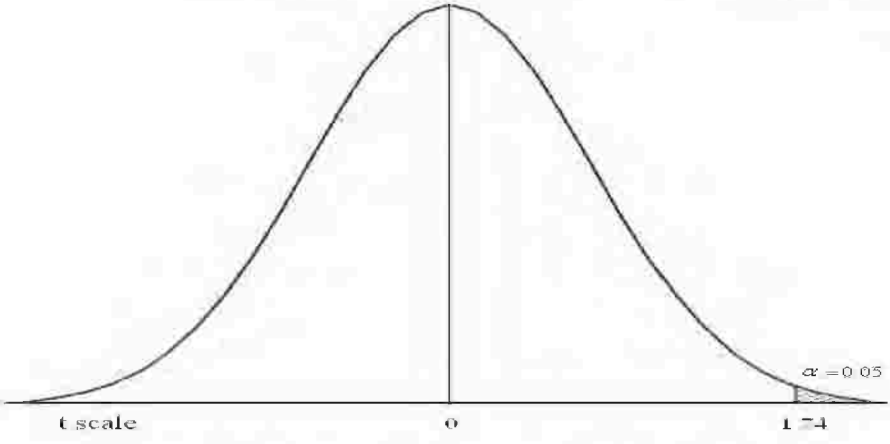
معادلة التباين $S^2 = \sum(X - \bar{X})^2 / n - 1$ والتي ويمكن إعادة صياغتها لتكون $\sum(X - \bar{X})^2 = (n - 1)\, S^2$. ولذلك يمكن إضافة هذه المجموعة (مجموع المربعات) وقسمة مجموعهما على درجة الحرية للحصول على تقدير للتباين المشترك المطلوب لحساب قيمة t .

$$S^2 = (5032 + 2552) / 17 = 446.12$$

وبالتعويض عن هذه القيمة والقيم الأخرى المحسوبة في معادله حساب t يمكن الحصول على قيمة t كالتالي :

$$t = \frac{(120 - 101) - 0}{\sqrt{\frac{446.12}{12} + \frac{446.12}{7}}} = 1.89$$

وحيث إن قيمة t المحسوبة تقع في المنطقة الحرجة للاختبار، فإن القرار يتمثل في رفض فرض العدم. وهذا يعني أن العليقة المضاف لها بروتين جديد تزيد من متوسط وزن العجول المكتسب مقارنة بالعليقة العادية (الشكل رقم ٨,٦).



الشكل رقم (٨.٦). المنطقة الحرجة لاختبار علائق العجول.

العينات الصغيرة المزدوجة Small, Paired Samples

عندما تكون العينات صغيره وغير مستقلة، فإننا نستخدم اختبار t المزدوج لاختبار الفروض بين متوسطين. درجة الحرية هي عدد الازواج مطروحاً منها الواحد (n - 1) وإحصاءة العينة هي متوسط الفروق بين العينات كما في المعادلة رقم (8.7).

$$\bar{d} = \sum d/n \qquad (8.7)$$

ويمكن إيضاح ذلك من خلال المثال التالي:

تمت تغذية مجموعة أزواج من صغار الحيوانات باستخدام علائق مختلفة، كما في الجدول التالي:

الجدول رقم (٨.٦). الوزن المكتسب بالرطل لصغار الحيوانات المغذاة بعليقتين مختلفتين.

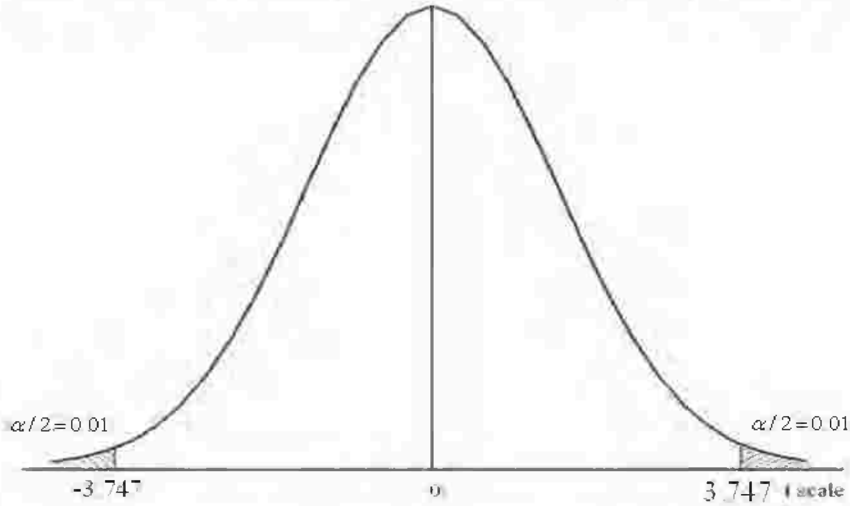
الزوج	عليقه ١	عليقه ٢
١	٢٥	١٩
٢	٣٠	٣٢
٣	٢٨	٢١
٤	٣٤	٣٤
٥	٢٣	١٩

والمطلوب باستخدام مستوى معنوية ٢٪ هل يمكن القول بأن أحد العينتين لها تأثير على الحيوانات يختلف عن الأخرى؟! لإجراء هذا الاختبار فإننا نصيغ فرض العدم والفرض البديل كالتالي:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

وبحساب درجه الحرية $4 = (1 - 5) = v$ وكذلك بإستخدام الجدول رقم (٨) بالملحق نجد أن قيمة t لمستوي معنوية ١٪ $(\alpha / 2)$ تساوي ±٣,٧٤٧ (الشكل رقم ٨,٧).



الشكل رقم (٨.٧). المناطق الحرجة لاختبار t المزدوج.

ويمكن حساب قيمة t حيث إن الفروق بين العينات تساوى (٦ ، -٢ ، ٧ ، ٠ ، ٤) ولذلك فإن $\bar{d} = 3$ وكذلك $S_d = 3.87$. وعليه فإنه بالتعويض في معادلة t يمكننا حساب قيمتها كالتالي:

$$t = \frac{\bar{d} - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{3 - 0}{\frac{3.87}{\sqrt{5}}} = 1.73$$

وحيث إن t المحسوبة لا تقع في المنطقة الحرجة للاختبار فإننا لا نستطيع رفض فرض العدم. ولذلك يمكن القول بعدم وجود فرق بين العلائق بالنسبة للوزن المكتسب للحيوانات في هذه التجربة.

اختبارات النسب لعينتين Two-Sample Tests for Proportions

عندما يكون لدينا عينتان ونرغب في إجراء اختبار الفرق بين النسب في المجتمع يمكننا باستخدام اختبار Z والذي يعتبر كتقريب لتوزيع ذي الحدين. حيث تتم صياغة فرض العدم والفرض البديل كما تم عمله في حالة المتوسطات.

فمثلا يتم طرح النسب من بعضها وتساوى بالصفر في حالة فرض العدم ولا تساوى بالصفر في حالة الفرض البديل وقيمة Z المحسوبة هي عبارة عن الفرق بين نسب العينتين مطروحاً منها الفرق في قيم المجتمع في فرض العدم (تساوي صفر) مقسومة على الخطأ المعياري للفرق في النسب. وبحساب قيمة الخطأ المعياري فإننا نستخدم جميع بيانات العينة ؛ نظراً لأنه في حالة كان فرض العدم صحيح ، فإن كلا العينتين تشمل معلومات من نفس المجتمع. ولذلك يمكن حساب تقديرنا لنسبة المجتمع باستخدام المعادلة رقم (8.8).

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} \qquad (8.8)$$

واستخدامها في حساب الخطأ المعياري للفرق في المعادلة رقم (8.9) كالتالي :

$$S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}} \qquad (8.9)$$

ويمكن كتابة Z المحسوبة كما في المعادلة التالية رقم (8.10) :

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{S_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} \qquad (8.10)$$

بينما يتم حساب قيم Z الحرجة باستخدام الجدول رقم (٧) بالملحق. ولتوضيح ذلك يمكن عرض المثال التالي :

يرغب أحد الباحثين في التسويق الذي يعمل في أحد شركات الأغذية في معرفة مدى تأثير الحملة الدعائية على تغيّر نسبة المستهلكين حول تفضيل عصير البرتقال. لذا قام بأخذ عينة مكونة من ٤٠٠ شخص في المدينة التي أقيمت بها الحملة الإعلانية فوجد أن ١٩٢ شخصاً يفضلون عصير البرتقال. وقام بأخذ عينة أخرى حجمها ٥٠٠ شخص من مدينة أخرى والتي لم تقام فيها الحملة فوجد أن ٢١٠ أشخاص يفضلون عصير البرتقال. والمطلوب إجراء اختبار لمعرفة مدى تأثير الحملة الإعلانية على تفضيل المستهلكين لعصير البرتقال باستخدام مستوى معنوية ٥٪.

يتم أولاً صياغة الفرض الإحصائي كالتالي :

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0$$
$$H_a : P_1 - P_2 > 0$$

وحيث إن هذا الاختبار هو من طرف واحد فإن قيمة Z الجدوليه (الجدول رقم ٧ بالملحق) تساوي ١.٦٤. ويمكن حساب تقدير نسبة المجتمع باستخدام المعادلة رقم (8.8) كالتالي: $\hat{P} = (192 + 210) / (400 + 500) = 0.447$. وبذلك يمكننا حساب الخطأ المعياري للفرق في النسبة باستخدام المعادلة رقم (8.7) كالتالي :

$$S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{(0.447)(0.553) / 400 + (0.447)(0.553) / 500} = 0.0333$$

وعليه فإن قيمة Z المحسوبة ستكون $Z = [(0.48 - 0.42) - 0] / 0.0333 = 1.80$

وحيث إن Z المحسوبة أكبر من الجدوليه والتي تساوي ١,٦٤ فإننا نرفض فرض

العدم ونختم القول بأن نسبة المستهلكين الذي يفضلون العصير أعلى في المدينة التي تمت إقامة الحملة الدعائية بها، وعليه فإن الإعلان مؤثر على الاستهلاك.

تحديد حجم العينة في المسح Determining Sample Size in Surveys

تمت مناقشة مميزات أخذ العينات واستخدامها كقاعدة للاستدلال الإحصائي. ولكن في معظم الحالات لا نعلم الحجم الأفضل للعينة المختارة. وفي مثل هذه الحالات فإننا نحدد قيمة الخطأ الممكن قبوله ومن ثم يتم حساب حجم العينة المناسب بناء على ذلك.

الاستدلال الإحصائي للمتوسط μ For Statistical inference on

عندما يكون الهدف هو الاستدلال حول متوسط المجتمع، μ، فإن قيمة الخطأ المتوقع معطى بالفرق $(\overline{X}-\mu)$ والذي يمثل بعد المتوسط المقدر $\overline{X}$ عن متوسط المجتمع μ ؛ نتيجة اختلافات العينة. فلو تم تحديد هذا الخطأ بقيمة معينة ولنقل E ، فإنه في هذه الحالة يمكننا معالجة الصيغة الرياضية لـ Z وذلك لتحديد حجم العينة الضروري والذي يمكن معه الوصول لهذا المقدار من الخطأ، وكذلك الحال يمكن تحديد مستوي فترة الثقة للاستدلال مثلا ٩٩٪، ٩٥٪ ، ... إلخ. ونحن نتذكر بأنه يمكن حساب قيمه Z كما في المعادلة رقم (8.11)) التالية :

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad (8.11)$$

فإذا كان مستوى الثقة المطلوب هو $(1-\alpha)$ فإنه يمكننا كتابة فترة الثقة، كما في المعادلة التالية رقم (8.12).

$$-Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n} \le \overline{X} - \mu \le Z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n} \tag{8.12}$$

وكون التوزيع الطبيعي توزيع متماثل فإنه يمكننا التركيز فقط على حالة اللامساواة في الطرف الأيمن والتي يمكن التعبير عنها بالمعادلة رقم (8.13) التالية :

$$\overline{X} - \mu \le Z_{\alpha/2} . \sigma/\sqrt{n} \tag{8.13}$$

والتي تتضمن أن أكبر قيمه يمكن افتراضها لـ $\overline{X} - \mu$ هي $Z_{\alpha/2} . \sigma/\sqrt{n}$ ولكن قد تم التعبير سابقاً عن أكبر خطأ نرغبه بالرمز $E = \overline{X} - \mu$. لذا يمكن إعادة كتابة المعادلة أعلاه للتعبير عن الخطأ المسموح به بالمعادلة رقم (8.14) التالية :

$$E = Z_{\propto/2}\, \sigma/\sqrt{n} \tag{8.14}$$

وبحل المعادلة رقم (8.14) يمكن إيجاد قيمه n وحجم العينة اللازم، والذي يضمن بمستوى معنوية $100(1-\alpha)$ أن $\overline{X} - \mu$ لن يزيد عن خطأ المعاينة E. وعليه فإن المعادلة التي تحدد حجم العينة الأمثل يمكن كتابتها بالشكل التالي (8.15).

$$n = \frac{Z^2{}_{\alpha/2}\, \sigma^2}{E^2} \tag{8.15}$$

ويمكننا تأمل المثال التالي لإيضاح ذلك. إحدى شركات البيوت المحمية والتي تستخدم هياكل للبيوت وتغطيها بالبلاستيك الشفاف ترغب في شراء تلك الهياكل من أحد شركات البلاستيك الجديدة والتي تقع بالقرب من مصنعها. وتعلم هذه الشركة من واقع خبرتها السابقة أن الانحراف المعياري لأطوال تلك الهياكل يساوي ٠,٢٠ قدم. المطلوب تحديد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط الطول لمجتمع الهياكل بخطأ مسموح يساوي ٠,٠٣ وبدرجة ثقة٩٥٪ للتقدير؟

لحل هذه المسألة فإن المعطيات هي $\sigma = 0.2$ ، $E = 0.03$ و $Z_{\alpha/2} = 1.96$

وبالتعويض عن هذه القيم في معادلة حساب حجم العينة الأمثل n نحصل على:

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\sigma^2}{E^2} = \frac{1.96^2\,(0.2^2)}{0.03^2} = 170.7$$

وعليه فإن شركة البيوت المحمية يجب أن تأخذ عينة حجمها١٧١هيكلاً من الشركة الجديدة لتقدير متوسط الطول بخطأ ٠.٠٣ ومستوى ثقة ٩٥٪ .

الاستدلال الإحصائي لـ P For Statistical Inference on

يمكن تحديد حجم العينة لمعلمة التوزيع ذي الحدين P إذا تم تحديد أكبر حجم للخطأ المسموح به مقدماً، $E = \hat{P} - P$ وكذلك مستوى المعنوية للاختبار. وفي أمثلة عديدة ، فإنه لا يوجد قيمة لـ $\hat{P}$ يمكن استخدامها لحساب σ_P ؛ نظراً لأن العينة لم تسحب حتى الآن. وفي مثل هذه الحالات فإننا نستخدم التقدير $P = \frac{1}{2}$ ؛ نظراً لأنه يمكننا إثبات أن قيمه σ_P ستصل إلى أكبر قيمة لها عندما تكون $P = \frac{1}{2}$. وعليه فإنه في حالة التعويض عن $P = \frac{1}{2}$ في معادله Z حيث $Z = (\hat{P} - P) / \sqrt{Pq/n}$ لنحصل على $Z = (\hat{P} - P) / \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)/n}$ وحل المعادلة لإيجاد قيمة n يمكن الوصول للمعادلة المطلوبة (8.16):

$$n = (p)(1-p)\frac{Z^2_{\alpha/2}}{E^2} = \frac{Z^2_{\alpha/2}}{4E^2} \qquad (8.16)$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي.

نفترض أن شركة البطيخ والتي تقوم بقطف المحصول ترغب في الحصول على

تقدير لنسبة البطيخ التالف والذي يذهب للمصنع بدرجه دقة ٣٪ ومستوى ثقة يساوي ٩٥٪ فكم حجم العينة الواجب أخذه.

في هذه الحالة فإن $E = 0.03$ وكذلك $Z_{\alpha/2} = 1.96$ ولذلك وبالتعويض في المعادلة آنفاً فإن $n = 1.96^2/(4)(0.03)^2 = 1067.1$ أو ١٠٦٨ بطيخة. ويمكن تقليل حجم العينة بطريقة ما إذا كان لدينا تقدير لـ P والتي تعبّر عن نسبة التالف من فترة زمنيه سابقه، ... إلخ.

حجم العينة اللازم للتحكم في α و β

Sample Size to control Both α and β

في اختبارات الفروض نرغب في الغالب في تحديد مستوي α عند مستوى معين مثلاً $\alpha = 0.05$ وكذلك نرغب أيضاً في تحديد قيمه β لقيمة معطاة للفرض البديل H_a. ويمكننا عمل ذلك شريطة حساب حجم العينة الذي يمكننا من التحكم في الأخطاء عند مستوياتها المرغوبة واستخدام هذا الحجم عند إجراء الاختبار.

وعند صياغتنا للفروض سابقاً، تم اختيار قاعدة القرار بناء على القيم الحرجة لـ Z والتي تحدد احتمالات α في أحد أطراف التوزيع الاحتمالي للفرض الإحصائي. ويعد تحديد قاعدة القرار يتم حساب قيمه β كنسبة من توزيع المعاينة للفرض البديل والتي تتقاطع مع خط قاعدة القرار في منطقه القبول لفرض العدم. لذا فإنه يمكن التعبير عن القيم الحرجة لقاعدة القرار بصيغتين (معادلة 8.17 و 8.18) إحداهما مبنية على توزيع المعاينة عندما تكون H_0 صحيحة والأخرى مبنية على توزيع المعاينة عندما يكون الفرض البديل H_a صحيح. وكلا الصيغتين تحتوي على حجم العينة n والتي يمكن حل تلك المعادلة عند تحديد قيمة β بقيمه محددة مسبقاً.

$$\overline{X}_c = \mu_0 - Z_\alpha.\sigma/\sqrt{n} \qquad (8.17)$$

$$\overline{X}_c = \mu_a + Z_\beta.\sigma/\sqrt{n} \qquad (8.18)$$

وكلا الصياغتين آنفاً تعبّر عن اختبار من طرف واحد (الأيسر). ولإجراء الاختبار باتجاه الطرف الأيمن يمكن عكس الإشارة الموجبة والسالبة في كلا التعبيرين بحيث تحتوي المعادلة الأولى على إشارة موجبة والمعادلة الثانية على إشارة سالبة ولإجراء اختبار الطرفين يتم استبدال Z_α بـ $Z_{\alpha/2}$ في المعادلة (8.17). ونظراً لأن كلا الصياغتين تحتوي على $\overline{X}_c$ يمكن مساواتهم ببعض وحلهما لإيجاد n التي نرغب في إيجادها (معادلة رقم 8.19).

$$n = \left[\frac{(Z_\alpha + Z_\beta)\sigma}{(\mu_0 - \mu_a)}\right]^2 \qquad (8.19)$$

ويجب ملاحظة أنه يتم استخدام القيم الموجبة لـ Z في المعادلة آنفاً رقم (8.19)؛ لأن الإشارات في المعادلات الخاصة بـ $\overline{X}_c$ تؤدي للحصول على القيم الصحيحة.

ويمكن إيضاح ذلك من خلال المثال التالي.

ترغب شركة أعمال زراعيه كبرى في دراسة السوق لمعرفة الحاجة لخريجي البكالوريوس في إدارة الأعمال الجدد. وتعتقد المؤسسة بأنه ليس هناك تغيراً في السوق وترغب في اختبار فرض العدم القائل بأن متوسط الراتب للخريجين الجدد يساوي ٢٢٥٠ دولاراً في الشهر بمستوى معنوية ٥٪ وأيضاً ترغب أن يكون الفرق مساوياً لـ ١٠٠ دولار شهرياً باحتمال $\beta = 0.03$. فإذا كان الانحراف المعياري لمجتمع الراتب للمعينين الجدد يساوي $\sigma = 300$ دولار، فكم حجم العينة الواجب أخذه؟

حيث إن هذا الاختبار عبارة عن اختبار طرفين والذي يمكن صياغة الفرض

كالتالي:

$$H_0 : \mu = 2250$$
$$H_a : \mu \neq 2250$$

لذا فإن α تقسم على ٢ وباستخدام جدول Z رقم (٧) بالملحق نجد أن قيمة Z تساوي١,٩٦ وحيث إن β تساوي ٠,٠٣ فإن Z_β تساوي ١,٨٨من نفس الجدول. ونهدف لمعرفة هل الراتب الابتدائي للخريجين يتغير بمعدل ١٠٠دولار شهرياً، لذا فإن القيمة المرتبطة بالفرض البديل تختلف بـ ١٠٠دولار أي، $(\mu_0 - \mu_a) = 100$. والآن يمكن التعويض بهذه القيم في الصيغة الرياضية ل n لإيجاد الحجم المناسب للعينة كالتالي:

$$n = \left[\frac{(Z_\alpha + Z_\beta)\sigma}{(\mu_0 - \mu_a)}\right]^2 = \left[\frac{(1.96+1.88)\,(300)\_}{(100)}\right]^2 = 132.7$$

وعليه فإن الشركة تحتاج لعينه حجمها ١٣٣ موظفاً جديداً من خريجي إدارة الأعمال المزرعية لإجراء الدراسة.

ملحق للفصل الثامن Appendix to Chapter 8

استخدام برنامج اكسل لإجراء اختبار العينتين للفروض
Using Excel to perform Two-Sample tests of Hypotheses

اختبار عينتين باستخدام Z Tow-Sample z test

يمكن إجراء الاختبار السابق باستخدام بعض البرامج الخاصة مثل برنامج اكسل ويتم ذلك بوضع المتوسط الأول في الخلية A1 والمتوسط الثاني في الخلية B1 ثم اختيار الأمر تحليل البيانات من قائمة الأدوات ثم اختيار Z لعينه للمتوسط. يظهر جدول بعد ذلك يتم إكماله بوضح المدى A1 للمتوسط الأول في المستطيل الأعلى والمدى B1 للمتوسط الثاني في المستطيل الثاني. نضع صفر في المستطيل الخاص بفرق المتوسطات، ثم نحسب التباين المعلوم σ^2/n للمتغيرين الأول والثاني ثم نضعهما في المستطيلات الخاصة بها. نغيّر قيمة α إذا لم تكن نفس المستوى المطلوب. وأخيراً نختار المكان الذي نرغب أن نظهر فيه النتيجة وليكن مثلاً D1 ثم نختار التنفيذ. سوف تظهر النتيجة في نفس ورقة العمل كما في الجدول رقم (٨,٤).

الجدول رقم (٨.٤). مخرجات ورقة العمل لاختبار Z للعينتين.

اختبار Z : عينتين للمتوسط		
	المتغير الأول	المتغير الثاني
المتوسط	٤٢	٤٠
التباين	٠,٠١	٠,٠١٤٤
عدد المشاهدات	١	١
الوسط الافتراضي	صفر	
الفرق		
Z	١٢,٨٠٣٦٩	
$P(Z \leq z)$ طرف واحد	صفر	
قيمة Z الحرجة لطرف واحد	١,٦٤٤٨٥٣	
$P(Z \leq z)$ طرفين	صفر	
قيمه Z الحرجة لطرفين	١,٩٥٩٩٦١	

ولقراءة العمود الأول يجب زيادة عرض العمود بحيث يكون ٢٠ أو أكثر. ويجب ملاحظة أن الإجراء يفترض أن البيانات الأولية في الأعمدة A و B من ورقة العمل. ويجب حساب التباين بنفس الطريقة المعتادة . ولو كان هناك قيم أوليه للبيانات في هذه الأعمدة فإنه يمكن وضع قيم التباين لها.

اختبار t للعينات المستقلة Independent t Test

يتطلب هذا الاختبار أن تكون لدينا البيانات الأولية بعكس ملخص البيانات التي تم استخدامها في المثال السابق. وعليه يمكن إيضاح ذلك من خلال المثال التالي .

تم زراعة عدد ٢٠حوضاً تجريبياً بمحصول الذرة وتم تسميد نصف هذه الأحواض باستخدام نوعية سماد جديدة عند المعدل الطبيعي بينما تم تسميد النصف الباقي بالسماد القديم عند نفس المعدل. وقد تم حساب الإنتاجية للايكر وكانت كالتالي :

السماد الجديد	٨٥	٩١	٨٦	١٠٢	٩٤	٩٨	٨٨	١٠٥	١١٢	٨٢
السماد القديم	٨٢	٩٥	٨٠	٩٧	٩١	٩٠	٨٧	١٠٠	١٠٣	٨٠

المطلوب هل يوجد علامات تبيّن أفضلية السماد الجديد باستخدام مستوى معنوية ١٪.

لعمل هذا التحليل باستخدام برنامج الإكسل نقوم بإدخال البيانات في ورقة عمل في البرنامج في العمودين A1 و B1 للمتغيرين مع وضع عنوان لهما ثم نختار من قائمة الأدوات الخيار تحليل البيانات ثم نختار اختبار t لعينتين بافتراض تساوي التباين لهما . يظهر لنا جدول ندخل المدى للمتغير الأول $A_1 : A_{11}$ والمدى للمتغير الثاني

$B_1 : B_{11}$ ونضع الرقم صفر في المستطيل الخاص بفرق المتوسط ثم نختار العلامة أمام العلامات ؛ نظراً لوجود أسماء للمتغيرات في الصف الأول من ورقة العمل، نغير قيم مستوى المعنوية α إلى ٠.٠١ ثم نختار مكان المخرجات لتكون في الخلية D_1 ثم ننفذ الأمر. تظهر لنا النتائج الموضحة في الجدول رقم (٨،٥).

الجدول رقم (٨.٥). مخرجات ورقة العمل لاختبار t لعينتين

اختبار t : حاله عينتين بافتراض تساوي التباين		
	السماد الجديد	السماد القديم
المتوسط	٩٤,٣	٩٠,٥
التباين	٩٥,٣٤٤٤٤٤٤٤	٦٨,٢٧٧٧٧٧٧٨
عدد المشاهدات	١٠	١٠
التباين التجميعي	٨١,٨١١١١١١١	
الوسط الافتراضي	صفر	
الفرق		
درجه الحريه df	١٨	
إحصاءة t	٠,٩٣٩٤٢٥٧٣٥	
P(T <= t) طرف واحد	٠,١٧٩٩٧٤٣١٩	
قيمة t الحرجه لطرف واحد	٢,٥٥٢٣٧٨٦٤٦	
P(T <= t) لطرفين	٠,٣٥٩٩٤٨٦٣٨	
قيمة t الحرجه لطرفين	٢,٨٧٨٤٤١٥٩٢	

ومن الجدول نلاحظ أن قيمة t المحسوبة تساوي ٠,٩٣٩٤ والتي تكون معنوية عند المستوى ٠,١٧ وليس ٠,٠١ والتي تم تحديدها من قبلنا، لذا فإننا لا نستطيع رفض

فرض العدم. والقيمة الحرجة لـ t تساوي ٢,٥٥ والتي قيمتها أكبر من قيمة t المحسوبة. درجه الحرية لهذا الاختبار تساوي ١٨. متوسط إنتاجيه القمح باستخدام السماد الجديد تساوي ٩٤,٣ بوشل /ايكر بينما المتوسط باستخدام السماد القديم يساوي ٩٠,٥ بوشل/ايكر. التباين التجميعي يساوي ٨١,٨١.

تمارين Exercises

١- ما الفرق بين المعلمة والإحصاءة؟

٢- حلل العبارة التالية: في اختبارات الفروض الإحصائية، يجب أن نحدد دائما مستوى المعنوية أو (α) بقيمة صغيره جداً مثلاً ٠,٠١ ، وعليه يمكننا تجنب الوقوع في كثير من الأخطاء.

٣- المطلوب صياغة فرض العدم والفرض البديل للحالات التالية:

أ) ترغب شركة لصناعة الحبوب في اختبار عملياتها الإنتاجية نظراً لشكوى تقدمت بها منظمه المستهلكين والمتضمنة أنها تضع حبوب وزنها أقل من ١٤ أوقية في صناديق مقاسها ١٤ أوقية.

ب) يدعى مجلس الإدارة للمزارعين بأن نسبة المزارعين المفضلين للقوانين الصارمة للتحكم البيئي متساوية في ولايتي أوكلاهوما ونيوجرسي.

ج) ادعت الشركة الصانعة بأن متوسط العرض لقفازات اللحام السوداء هو ٢ بوصة إلاّ أن صاحب المتجر الزراعي شك في ذلك.

د) يرغب أحد الاقتصاديين في معرفة هل نسبة البطالة في المناطق الريفية أقل منها العام الماضي علماً بأن الاقتصاد الكلي قد حقق نمواً هذه السنة.

هـ) يرغب مدير أحد محلات العرض الزراعية في اختبار الفرض القائل بأن

متوسط رصيد الحساب الائتماني لمؤسسته يساوي على الأقل ٧٠ دولاراً.

٤- انتقد العبارات التالية:

أ) نظراً لأهمية التحكم بالخطأ من النوع الأول مقارنة بالنوع الثاني، فإنه يجب صياغة اختباراتنا بحيث تكون حساسة لأخطاء النوع الأول فقط.

ب) نظراً لأن تقليل الخطأ من النوع الأول يزيد من أخطاء النوع الثاني، فإنه من المستحيل التحكم فيهما معاً.

ج) ما دام أننا اتخذنا قرار باختبار الفروض، فإنه من الممكن وقوع كلا النوعين من الأخطاء النوع الأول والنوع الثاني.

٥- المواصفات الخاصة بمكونات القطن المحصود تتطلب أن لا يقل متوسط الطول عن ١٠٠ بوصة بانحراف معياري ٨ بوصة. تم اختيار عينة عشوائية حجمها ٨١ من شحنه كبيره جداً وثم حساب متوسطها وانحرافها المعياري فوجدت ٩٨,٥ و ٨ بوصه على التوالي.

أ) بناء على تحليلك هل ستقبل تلك الشحنة؟ برّر إجابتك.

ب) بناء على القيمة الحرجة في الجزء (أ) ما هو احتمال الخطأ من النوع الثاني لمكونات الشحنة لمتوسط طول ٩٧ بوصة وانحراف معياري ٨ بوصة.

٦- تم إعطاء اختبار تحديد المهارات القياسي للمزارعين لعدة سنوات لطلاب الثانويات الزراعية. حيث كان المتوسط ٧٥ بانحراف معياري ٧. قرر المعلم زيادة معدلات الطلاب بزيادة التركيز على التعليم. لذا تم إعطاء التعليمات لمعلم الفصل المكون من ٢٥ طالباً بزيادة التركيز على التعليم وزاد المعدل إلى ٧٨ في الاختبار. هل يمكننا القول بمستوى معنوية ٥٪ بأن التعليمات لزيادة التركيز على التعليم أدت لزيادة متوسط درجه الاختبار؟

٧- عند حقن الدواجن بنوع معين من هرمونات النمو يؤدي ذلك لزيادة متوسط وزن الدجاج بـ ٠,٥ رطل. قام خبير التحكم في الجودة في مزارع هاووي بأخذ عينة عشوائية حجمها ٩ دجاجات ثم حقنها بالهرمون وحسب متوسط الوزن المكتسب فوجد أنه يساوي ٠,٦ رطل بانحراف معياري ٠,٢ إذا تم إجراء اختبار من طرفين عند مستوى معنوية ٥٪ فهل ذلك يؤكد أن متوسط زيادة الوزن تساوي ٠,٥ رطل.

٨- قام اثنان من المختصين في البساتين بتقييم الاختلافات في النباتات. كان التقييم الأول لعدد ١٢ نبات بمتوسط ٩٠ بينما كان التقييم الثاني لعدد ٨ نباتات بمتوسط ٨٥. تشير الخبرات السابقة أن التباين في التقييم يساوي ٤٠. المطلوب باستخدام مستوى معنوية ٥٪ اختبر مدى وجود اختلاف في تقييم الاثنين من عدمه.

٩- نرغب في اختبار مدى قابلية منتج الفواكه الجديد . فإذا كان نصف المستهلكين الذين ثم اختبارهم قرروا شراء المنتج سيتم تسويقه وإن كان غير ذلك فلن نقوم بتسويقه. تم اختيار عينه عشوائية حجمها ٦٤ مستهلكاً من٢٦ ولاية التي ستقوم بشراء المنتج. اختبر بمستوى معنوية ٥٪ هل يجب تسويق ذلك المنتج أم لا.

١٠- تم اختبار نوعين من المديا السائلة(وسط زراعة مائي) لزراعه الطماطم مائياً (بدون تربه) تمت زراعة عدد ١٠ نباتات في النوع الأول والتي أنتجت ٢٨ من الطماطم بانحراف معياري ٢ بينما تمت زراعة ١٥ نباتاً في النوع الثاني من نفس النوعية وأنتجت ١٨ من الطماطم بانحراف معياري يساوي ٩. أختبر هل النوع الأول (وسط الزراعة المائي) أفضل من الثاني عند مستوى معنوية٥٪.

١١- مستثمر زراعي لديه موقعين مفصولة ببضعة أميال وكذلك لديه قطيعين ماشية. في المكان الذي يقيم فيه المستثمر تتم إدارة القطيع بحيث يكون هناك إنتاج من العجول في فصل الخريف وفي المكان الآخر يكون الإنتاج من العجول في فصل الربيع. عدد

الحيوانات في الموقع الذي يقيم فيه ٤٢٠ بقره وقد أنتجت ٣٧٨ عجلاً في الخريف الماضي بينما عدد الأبقار في الموقع الآخر ١١٠بقره وقد أنتجت ٩٠ عجلاً في الربيع الماضي. اختبر بمستوى معنوية ٥٪ هل نسبة العجول في كلا الموقعين متساوية.

١٢- تم إجراء اختبار أولي لعدد ٨ طلاب من الزراعة ،ثم تم إعطاءهم تعليمات لطريقة التطعيم والتصفيف للنبات ثم أعيد اختبارهم مرة أخرى فكانت نتائجهم كالتالي :

الطالب	الدرجة قبل التدريب	الدرجة بعد التدريب
١	٣٧	٧٥
٢	٦٢	٨٧
٣	٧١	٩٥
٤	٤٥	٧٢
٥	٥٣	٧٨
٦	٢٤	٦٣
٧	٩٠	٩٨
٨	٨٦	٨٤

اختبر بمستوى معنوية ١٪ هل للتعليمات المعطاة لهم تأثير على الدرجة المتحصل عليها.

١٣- يرغب أحد الاقتصاديين الزراعيين في تحديد متوسط معدل الأجر لعمّال التبغ في منطقه الزراعة المسماة فلو-كورد في ولاية كارولينا، جورجيا وفلوريدا. وقد قام بدراسة استطلاعيه فوجد أن متوسط الأجر ٦,٨ دولار. فإذا كان يرغب في إيجاد فترة الثقة ٩٥,٥٪ لأقصى خطأ لتقدير للأجر بحيث لا يزيد عن ٠,١ دولار فكم حجم العينة المطلوب لإجراء الدراسة.

١٤- يتوقع وصول شحنة كبيره من الحبوب إلى صالة الحبوب ويجب أخذ عينة منها لتحديد محتوياتها من القش. كم يجب أن يكون حجم العينة اللازم أخذها إذا كنا نرغب أن تكون نسبة القش في العينة في حدود ١,٥٪ بدرجة ثقة ٩٩٪ ؟ وبافتراض أن نسبة محتويات القش لا تزيد عن ٠,١ بناء على دراسات سابقة لهذه الحبوب.

١٥- حل التمرين١٢ باستخدام برنامج اكسل.

١٦- حل التمرين التالي باستخدام برنامج اكسل.

يرغب أحد المزارعين في عزل محله التجاري ورغبة منه في تحديد المواد المستخدمة وجد دراسة بها بيانات عن قوة الأثر لنوعين من المواد كالتالي. ولكن لا يوجد تحليل لتلك البيانات. المطلوب اختبر بمستوى معنوية ٥٪ أي تلك المواد لها تأثير أكبر في العزل.

العازل ١	١,٥	١,٤١	١,٥٨	١,٤	١,٤٥	١,٥٨	١,٥٣	١,٤٦
العازل ٢	١,١٤	١,٢٢	١,٢	١,١٩	١,٢٧	١,٢٤	١,٣١	١,٢٣