الباب الأول

الرياضيات المالية

- الفصل الأول: العمليات الحسابية على التواريخ والفترات
- الفصل الثاني: العمليات الحسابية على الفائدة البسيطة
- الفصل الثالث: العمليات الحسابية على الفائدة المركبة
- الفصل الرابع: الدفعات الدورية(الأقساط)
- الفصل الخامس: القروض
- الفصل السادس: استهلاك الأصول الثابتة

الفصل الأول

العمليات الحسابية على التواريخ والفترات

Calculs de dates et de durées

لمعرفة مبلغ الفائدة على الاستثمار يجب تحديد مدة هذا الاستثمار، تبدأ المرحلة الأولى في الرياضيات المالية والأكتوارية، بـ "حساب" التواريخ والفترات، وإذا كانت بعض البرامج الحاسوبية تستخدم **السنة البسيطة** (365 يوماً) في حساب المدد، فإن بعضها يستخدم **السنة التجارية** (360 يوماً) كما هو الحال عند عديد المؤسسات البنكية.

(1.1) عدد الأيام الفاصلة بين تاريخين

في الأسواق المالية توجد اتفاقية وحيدة محددة للمدد الفاصلة بين التواريخ؛ حيث يتم بموجبها حساب اليوم الأول (تاريخ البدء)، بينما يتم استبعاد اليوم الأخير (تاريخ النهاية أو تاريخ وصول الأجل).

مثال: عدد الأيام الفاصلة بين 15 يوليو و25 يوليو هو 10 أيام.

أهم القواعد الأساسية التي تحكم عمليات حساب الأيام الفاصلة بين التواريخ:

• أساس صحيح/صحيح: الفترة على هذا الأساس توافق عدد الأيام الصحيحة للعملية حسب التقويم. عدد أيام السنة هنا يساوي 365 أو 366 إذا كان

يوم 29 فبراير من بين الأيام المدرجة في السنة. هذه الأساس تسمي كذلك، أساس حالي/ حالي أو أساس أكتواري.

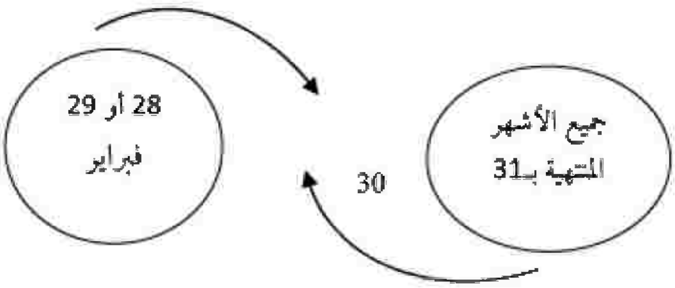
• أساس 360/ صحيح: الفترة في هذا الأساس توافق عدد الأيام الصحيحة للعملية حسب التقويم، عدد أيام السنة هنا يساوي دائما 360 يوما، وهو أساس فرنسي الاستخدام.

• أساس صحيح / 365: في هذه الحالة عدد أيام السنة يساوي دائما 365 بما في ذلك السنة الكبيسة، وهي طريقة حساب مستخدمة بالخصوص عند الدول الأنجلو ساكسوني، وهو بذلك أساس إنجليزي الاستخدام.

• أساس 360/ 30: جميع الأشهر حسب هذا الأساس مكونة من 30 يوما، وجميعها تنتهي بيوم 30. السنة تتكون من 360 يوما و12 شهرا. هذا الأساس يسمى كذلك سنوي 30/ 360. وهو أساس مستخدم كثيرا في العمليات الحسابية المالية. ويوجد لهذا الأساس عدة أشكال نوجزها فيما يلي:

(1.1.1) أساس 360/30: الطريقة الألمانية

وهي لا تتعلق إلا بشهر فبراير، ويفترض أن يكون اليوم الأخير من كل شهر هو الثلاثين ما عدا يوم 28 فبراير في السنة الكبيسة. هذه القاعدة مستخدمة خاصة في ألمانيا وسويسرا وبعض الدول الإسكندينافية.



مثال رقم (1): أوجد عدد الأيام الفاصلة بين يومي 29 فبراير 2004 و 15 أبريل 2004.

الحل

من 29 إلى 30 فبراير	0
مارس 2004	30 يوما
أبريل 2004	15 يوما

0+30+15=45 يوم

مثال رقم (2): أوجد عدد الأيام الفاصلة بين يومي 25 و28 فبراير 2005.

الحل

28 فبراير يعتبر في السنة العادية 30 فبراير لذلك:

30 − 25 = 5 أيام

(1.1.2) أساس 360/30: الطريقة الأوروبية

تواريخ البداية والنهاية الموافقة لـ31 من الشهر تصبح 30 من الشهر ذاته، وهي الطريقة المستخدمة في إكسل.

مثال رقم (1): أوجد عدد الأيام الفاصلة بين يومي 29 فبراير 2004 و 15 أبريل 2004.

الحل

من 29 إلى 30 فبراير	1 يوم
مارس 2004	30 يوما
أبريل 2004	15 يوما

1+30+15=46 يوم

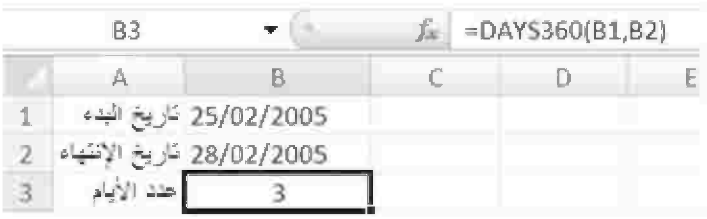
مثال رقم (2): احسب عدد الأيام الفاصلة بين يومي 25 و28 فبراير 2005.

الحل

28 − 25 = 3 أيام

إكسل:

توجد في إكسل دالة () DAYS360



(1.1.3) أساس 360/30 : الطريقة الأمريكية

إذا كان تاريخ البدء هو يوم 31 من الشهر فإن تاريخ البدء يصبح 30 من نفس الشهر. إذا كان تاريخ الانتهاء هو يوم 31 من الشهر فإن تاريخ الانتهاء يصبح يوم 1 من الشهر اللاحق، في المقابل فإن تاريخ الانتهاء يكون يوم 30 من نفس الشهر.

إكسل:

في إكسل توجد دالة () DAYS360، لكن بعد إدخال قيمة 0 في المربع الثالث:

مثال: استخدم إكسل لإيجاد عدد الأيام الفاصلة بين 25 فبراير 2004 و15 أبريل 2004.

الحل

B3 | =DAYS360(B1,B2,0)

	A	B	C	D
1	تاريخ البدء	29/02/2004		
2	تاريخ الإنتهاء	15/04/2004		
3	عدد الأيام	45		

45 يوما

(1.1.4) أساس 360/30: قاعدة الحساب

القاعدة العامة لحساب عدد الأيام (N_j) الفاصلة بين تاريخين على أساس 30/ 360 هي التالية:

$$N_j= (D_2-D_1)+30x\ (M_2-M_1)+360x\ (Y_2-Y_1) \qquad (1.1)$$

حيث: $D_1/M_1/Y_1$ تاريخ البدء و$D_2/M_2/Y_2$:تاريخ الانتهاء

مثال: احسب باستخدام الطريقتين الألمانية والأوروبية عدد الأيام الفاصلة بين يوم 29 فبراير 2004 و28 فبراير 2005

الحل

تـواريخ البـدء والانتهـاء يجـب أن تعـدل لتتفـق مـع الطريقـة الـتي تم اختيارها:

	المعطيات	الألمانية	الأوروبية
D_1	29	30	29
M_1	02	02	02
Y_1	2004	2004	2004
D_2	28	30	28
M_2	02	02	02
Y_2	2005	2005	2005

الطريقة الألمانية:

$N_j = (30-30)+30\text{x}\ (02-02)+360\text{x}\ (2005-2004) =$ 360يوما

الطريقة الأوروبية:

$N_j = (28-29)+30\text{x}\ (02-02)+360\text{x}\ (2005-2004) =$ 359 يوما

(1.1.5) أساس صحيح: السنة=365 يوم (السنة البسيطة)

وهو النظام الحسابي المستخدم الأكثر طبيعية ودقة؛ لأنه يعتمد الشهر بـ28 و29 و30 و31 يوما.

إكسل

لا يحتوي إكسل على دالة حسابية مباشرة؛ لذلك نقوم بما يلي:

ندخل في إحدى الخانات تاريخ البدء وفي خانة أخرى تاريخ الانتهاء. ثم نحسب الفرق بين التاريخين. النتيجة تظهر – إذا – في شكل تاريخ.

الأمر الآتي يمكن من إظهار النتيجة في شكل أيام: **تنسيق/خلايا/نمطي** (عندما نستخدم أوفيس 2007 لا نحتاج إلى هذا الأمر لنحصل على النتيجة بعدد الأيام مباشرة)

مثال: استخدم إكسل لحساب الفرق بين 9 فبراير 1967 و15 أبريل 2003.

الحل

يجب إدخال التواريخ على شكل تاريخ (على سبيل المثال: 9.2.1967 أو 9/ 2/ 1967). سوف يقوم إكسل بتحويل التواريخ أعلاه إلى الشكل: 09.02.1967.

نكتب في الخليةB3 القاعدة:B2-B1. ثم نقوم بعمل التنسيق اللازم على الخلية B3 باستخدام الأمر: **تنسيق/خلايا/نمطي**. النتيجة تعطي:13580 يوما.

B3 | fx =B2-B1

	A	B	C	D
1	تاريخ البدء	09/02/1967		
2	تاريخ الانتهاء	05/04/2004		
3	الأيام	24/02/1937		

B3 | fx =B2-B1

	A	B	C	D
1	تاريخ البدء	09/02/1967		
2	تاريخ الإنتهاء	15/04/2004		
3	الأيام	13580		

الآلة الحاسبة TI-83

يوجد في هذه الآلة الدالة dbd (begin date, finish date) وتظهر بالشكل dbd (DDMM.YY,DDMM.Yy) ونجدها في القائمة APPS/ Finance/ D

مثال: احسب عدد الأيام الفاصلة بين الواحد والثلاثين من ديسمبر 2004 والواحد والثلاثين من ديسمبر 2006.

الحل

يكفي أن نستدعي الدالة dbd () ونتبع التنسيق التالي:

730=dbd (12.3104,12.3106) يوم

(1.1.6) أساس صحيح: قاعدة الحساب

القاعدة التالية تمكّن من حساب صحيح لعدد الأيام الفاصلة بين تاريخين.

لكل تاريخ نرمز بـD' لليوم، "M" للشهر و "Y"للسنة. نربط بين هذا التاريخ والرمز 'd' الذي يمثل عدد الأيام الفاصلة بين هذا التاريخ ومصدر معين.

عدد الأيام الفاصلة بين التاريخين 1 و2 هو إذا :d_2-d_1.

الرقم 'd' يمكن الحصول عليه من خلال القاعدة:

إذا كانت M≤2

$$d = 365(Y-1) + INT\left(\frac{Y-1}{4}\right) - INT\left(\frac{Y-1}{100}\right) + INT\left(\frac{Y-1}{400}\right) + 31(M-1) + D \qquad (1.2)$$

إذا كانت M>2

$$d = 365(Y-1) + INT\left(\frac{Y}{4}\right) - INT\left(\frac{Y}{100}\right) + INT\left(\frac{Y}{400}\right) + 31(M-1) + D + INT\,(0{,}4M + 2{,}2) \qquad (1.3)$$

حيث *INT (x)* تمثل في هذه العبارات أقرب عدد صحيح أصغر من *x*.

(1.2) نظام تحويل الأزمنة

في هذه الفقرة نذكّر بأهم قواعد تحويل التواريخ.

تحويل السنوات والأشهر والأيام إلى سنوات

ليكن لدينا التاريخ التالي:D/M/Y حيث ترمز Y: للسنوات وM: للأشهر وD: للأيام.التحويل إلى سنوات يتم عن طريق القاعدة التالية:

$$\boxed{Year = Y + \frac{M}{12} + \frac{D}{360}} \tag{1.4}$$

تحويل السنوات والأشهر والأيام إلى أشهر

ليكن لدينا التاريخ التالي:D/M/Y حيث ترمز Y: للسنوات وM: للأشهر وD: للأيام.التحويل إلى أشهر يتم عن طريق القاعدة التالية:

$$\boxed{Month = Y \times 12 + M + D} \tag{1.5}$$

تحويل السنوات والأشهر والأيام إلى أيام

ليكن لدينا التاريخ التالي:D/M/Y حيث ترمز Y للسنوات وM للأشهر وD للأيام. التحويل إلى أيام يتم عن طريق القاعدة التالية:

$$\boxed{Days = Y \times 360 + M \times 30 + D} \tag{1.6}$$

تحويل عدد سنوات إلى سنوات، أشهر وأيام

ليكن لدينا عدد N من السنوات مكتوب في صورة عشرية وINT (x) العدد الصحيح الأقرب والأصغر من x. التحويل إلى Y سنوات و M أشهر وD أيام يتم عن طريق القاعدة التالية:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Year: & INT(N) \\ Month: & M = INT[12(N-Y)] \\ Days: & D = INT\{30[12(N-Y)-M]\} \end{array}} \tag{1.7}$$

مثال رقم (1): قم بتحويل 4 سنوات و3 أشهر و2 أيام إلى سنوات ثم إلى أشهر وأخيرا إلى أيام.

الحل

(أ) التحويل إلى سنوات: $4+\frac{3}{12}+\frac{2}{360}=4.2556$ سنوات

(ب) التحويل إلى أشهر: $4\times 12+3+\frac{2}{30}=51.0667$ أشهر

(جـ) التحويل إلى أيام: 360x4+ 30x3+ 2=1532 يوما

مثال رقم (2): قم بتحويل **4.2556** سنوات إلى سنوات/ أشهر/ أيام.

الحل

السنوات: Y = INT (4.2556) = 4

الأشهر: M = INT{12 (4.2556-4)} = INT (12x0.2556) = INT (3.0672) = 3

الأيام: D = INT{30 (12 (4.2556-4)-3)} = INT (30x0.0672) = INT (2.016) = 2

(1.3) حساب العمر

تحسب شركات التأمين أعمار المؤمن لهم حسب عدة طرق، نذكر من أهمها:

حساب العمر باليوم:

نحدد الفترة الزمنية المنقضية (أساس 360/30 أو أساس صحيح 365) بين تاريخ ميلاد المؤمن له وتاريخ التعاقد.

حساب العمر بالشهر المكتمل:

نحسب الفترة المنقضية (أساس 360/30 أو أساس صحيح 365) بين تاريخ ميلاد المؤمن له وتاريخ التعاقد.ثم نحول النتيجة إلى أشهر ونأخذ العدد الصحيح الأقرب والأصغر.

حساب العمر بالشهر الأقرب:

وهي صيغة أخرى من الطريقة السابقة، حيث يتم اختزال الفترة بالأشهر إلى الوحدة.

حساب العمر بالسنة المكتملة:

نحسب الفترة المنقضية (أساس 30/360 أو أساس صحيح 365) بين تاريخ ميلاد المؤمن له وتاريخ التعاقد. ثم نحوّل النتيجة إلى سنوات ونأخذ العدد الصحيح الأقرب والأصغر.

حساب العمر بالسنة الأقرب:

وهي صيغة أخرى من الطريقة السابقة، حيث يتم اختزال الفترة بالسنوات إلى الوحدة.

مثال: استخدم طريقة الأشهر المكتملة لحساب الفترة المنقضية بين تاريخ ميلاد مؤمن له في 31.01.1980 وتاريخ تعاقده مع شركة التأمين في 08.08.2005

الحل

نستطيع استخدام الدالة() Days360 في إكسل التي سبق الإشارة إليها في الصفحة 7 التي تعطينا عدد 16388 يوما. وعند استخدام القاعدة (1.5) نحول عدد الأيام هذه إلى أشهر، ثم نأخذ العدد الصحيح الأقرب والأصغر من الناتج، وبذلك نحصل على 546 =(546.266) INT شهرا. وأخيرا بالاستعانة بالقاعدة (1.4) نحول عدد الأشهر إلى سنوات أي 45.5 سنة.

(1.3.1) ملاحظات حول الاختزال

نستطيع اختزال عدد x إلى أقرب منه بـ $\frac{1}{n}$ وذلك باستخدام القاعدة التالية:

$$\boxed{f(x,n) = \frac{INT\ (nx + 0,5)}{n}} \qquad (1.8)$$

حيث () INT العدد الصحيح الأصغر والأقرب من x

وحيث:

- اختزال x للوحدة: $\Leftarrow f(x;1)$
- اختزال x إلى رقمين بعد الفاصل (إلى 1/100) : $\Leftarrow f(x;100)$
- اختزال x إلى الخمس (إلى 1/20) : $\Leftarrow$ f (x; 20)
- اختزال x إلى العشر (إلى 1/0.1): $\Leftarrow f(x;0;1)$

إكسل

يتضمن إكسل الدوال الثلاث الآتية التي تمكن من حساب الاختزالات:

- ROUND (number;num_digits)
- ROUNDUP (number;num_digits)
- ROUNDDOWN (number;num_digits)

تي- آي 83 (TI-83)

تتضمن الآلة الحاسبة تي-آي 83 الدالة التالية التي تمكن من احتساب الاختزالات:

- ROUND (number;num_Decimals)

(1.4) التمارين

1- استخدم قاعدة الحساب الألمانية (أساس 360/30) لإيجاد عدد الأيام الفاصلة بين التواريخ الآتية:

أ) 7 يناير 2005 و 27 فبراير 2005.

ب) 1 مايو 2006 و 1 نوفمبر 2006.

جـ) 27 فبراير 2006 و 13 يونيو 2006.

د) 15 يناير 2004 و29 فبراير 2004.

هـ) 20 فبراير 2005 و28 فبراير 2005.

2- استخدم طريقة الحساب الأوروبية (أساس 30/ 360) لإيجاد عدد الأيام الفاصلة بين التواريخ التالية:

أ) 30 يونيو 2005 و31 أغسطس 2005.

ب) 1 أبريل 2004 و12 أكتوبر 2004.

جـ) 1 يناير 2008 و29 فبراير 2008.

د) 29 فبراير 2004 و18 يونيو 2004.

هـ) 30 يناير 2006 و 28 فبراير 2006.

3- احسب عدد الأيام الفاصلة بين التواريخ التالية مستخدما القواعد (1.2) و(1.3):

أ) 15 يناير 2008 و29 فبراير 2008.

ب) 30 يناير 2006 و28 فبراير 2006.

جـ) 27 فبراير 2006 و 13 يونيو 2006.

د) 15 فبراير 2004 و 29 يونيو 2008.

4- استخدم برنامج إكسل لحساب عدد الأيام الصحيحة الفاصلة بين التواريخ التالية:

أ) 15 يناير 2008 و 29 فبراير 2008.

ب) 30 يوميو 2006 و 28 فبراير 2006.

جـ) 27 فبراير 2006 و13 يونيو 2006.

د) 15 فبراير 2004 و29 يونيو 2008.

5- استخدم الآلة الحاسبة تي- آي 83 لحساب عدد الأيام الصحيحة الفاصلة بين التواريخ التالية:

أ) 15 يناير 2008 و 29 فبراير 2008.

ب) 30 يوميو 2006 و 28 فبراير 2006.

جـ) 27 فبراير 2006 و13 يونيو 2006.

د) 15 فبراير 2004 و29 يونيو 2008.

6- حول إلى أشهر: 6 أعوام و6 أشهر و6 أيام.

7- حول إلى أيام: 6 أعوام و6 أشهر و6 أيام.

8- حول إلى سنوات: 3 أعوام و4 أشهر و15 يوما.

9- حول إلى أشهر: 46 نصف سنة.

10- حول إلى سنوات: 46 ربع سنة.

11- اكتب السنوات التالية في صورة سنوات/ أشهر/ أيام:

أ) 3.14 سنة.

ب) 12.175 سنة.

جـ) 17.22 سنة.

12- أبرم مؤمن له ولد في 15 أبريل 1963 عقدا بتاريخ 13 يونيو 2005. استخدم الطريقة الأوروبية (أساس 30/ 360) لحساب عمر المؤمن له:

أ) بحساب اليوم.

ب) بالشهر المكتمل.

جـ) بالسنة المكتملة.

د) بأقرب سنة.

13- ■ تستخدم التعاونيات المهنية في سويسرا القاعدة التالية لحساب مجموع المعدلات المستقبلية لمنح الشيخوخة:

$$B_{\ddot{x},s} = \sum_{u=\ddot{x}}^{s-1} b_u + b_s \frac{m}{12}$$

حيث:

s 65 سنة (سن التقاعد).

$\ddot{x}$ عمر المؤمن له (سنة مدنية – سنة الميلاد).

$b_{\ddot{x}}$ معدل منحة الشيخوخة عند بلوغ السن $\ddot{}$ ($b_{\ddot{x}} = 18\%$ عندما تكون $\ddot{x} \geq 55$).

m عدد الأشهر منذ بداية السنة البسيطة إلى أول يوم من الشهر الذي يلحق شهر الميلاد.

احسب $_{\ddot{x},s}$ لمؤمن له ولد في 10 مارس 1943 علما بأن تاريخ حساب العملية هو 4 يونيو 2005.

الفصل الثاني

العمليات الحسابية على الفائدة البسيطة
Opèrations à intérêt simple

الفائدة هي المكافأة التي يحصل عليها من رأس المال (مبلغ معين من المال) حين يتم اقراضه لفترة محددة من الزمن، وهي تسدد مرة واحدة أو على عدة مرات إذا كانت المدة الزمنية التي يقترض فيها طويلة. الفائدة يمكن كذلك تسديدها مسبقا (في بداية الفترة) أو في نهايتها. والفائدة تحدد حسب مدة القرض، المبلغ المقرض ونسبة الفائدة المعتمدة. المدة التي تحسب على أساسها الفائدة هي في أغلب الأحيان السنة، ويمكن استخدام مدد أخرى أقصر من السنة: نصف السنة أو ربع السنة أو حتى الشهر. عندما نتحدث عن الفائدة في النصوص نستعمل رمز النسبة المئوية % بينما في العمليات المالية نستعمل عادة الأرقام العشرية حيث 3.55% تكتب 0.0355.

دون الأخذ في الحسبان أي اعتبارات أخرى سوف نعتمد نظام الحساب أساس 30/ 360.

الرموز:

n فترة القرض

i نسبة الفائدة

I مجموع الفوائد

C_0 رأس المال الأصلي

C_n رأس المال النهائي أو حاصل رأس المال في نهاية الفترة n

مثال: حول نسبة الفائدة التالية $2\frac{3}{4}\%$ إلى الصورة العشرية؟

الحل

$$2\frac{3}{4}\% = 2,75\% = 0,0275$$

(2.1) قواعد الفائدة البسيطة

تطبق الفائدة البسيطة عادة على العمليات المالية التي تكون المدة فيها أقل من سنة.

عمليا يتم تطبيق نسبة الفائدة على مدة سنة، فعندما نقرأ نسبة فائدة تساوي 5% فالمقصود هو نسبة فائدة سنوية تساوي 5%. المدة يجب أن تكون إذاً سنوية.

مثال رقم (1): نسبة الفائدة = 4%،مدة القرض=30 شهر. أوجدn ؟

الحل

نحول الأشهر إلى سنوات: $\frac{30}{12} = 2,5$

وبالتالي فإن: $i = 0,04, n = 2,5$

مثال رقم (2): نسبة الفائدة = 4%، مدة القرض=45 يوما. أوجد n ؟ (أساس 30/ 360).

الحل

نحول الأيام إلى سنوات:$\frac{45}{360} = 0,125$

نبحث أولا عن مقدار الفائدة (I) الذي ينتجه رأس مال (C_0) لاستثمار مدته n فترة.

$$\boxed{I = C_0 \times n \times i = C_0 ni} \qquad (2.1)$$

نستطيع التعرف على مقدار رأس المال النهائي المستثمر خلال المدة n والذي يساوي:

$$\boxed{C_n = C_0 + I} \qquad (2.2)$$

وبما أن $I = C_0 in$ فإنه بإمكاننا وضع علاقة مباشرة بين رأس المال الأصلي والنهائي كالآتي:$C_n = C_0 + C_0 ni = C_0\,(1 + ni)$

$$\boxed{C_n = C_0\,(1 + ni)} \qquad (2.3)$$

(2.1.1) العلاقات بين المعامل

هذه العلاقات يمكن الحصول عليها بسهولة بعد القيام ببعض التحويرات:

عندما نبحث عن رأس المال الأصليC_0

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{1 + ni}} \qquad (2.4)$$

عندما نبحث عن المدة n

$$\boxed{n = \frac{C_n - C_0}{iC_0}} \qquad (2.5)$$

عندما نبحث عن نسبة الفائدة i

$$\boxed{i = \frac{C_n - C_0}{nC_0}} \qquad (2.6)$$

مثال رقم (1): نستثمر مبلغ 6000 € في حساب يوفر 3%. أوجد رأس المال النهائي بعد 3 أشهر؟

الحل

$C_0 = 5000$ $i = 0{,}03$ $n = {}^{3}/_{12}$ البحث عن n ؟

$C_n = 5000\,(1 + \frac{3}{12}0{,}03) = 5037{,}50€$

مثال رقم (2): استثمرنا مبلغ 2500 € لمدة طولها n شهر في حساب يوفر 5%. ما هي مدة هذا الاستثمار إذا كان رأس المال النهائي يقدر بـ 2531,25 ؟

الحل

$C_0 = 2500$ $i = 0{,}05\,;$ $C_n = 2531{,}25$ البحث عنn؟

$n = \frac{C_n - C_0}{iC_0} = \frac{2531{,}25 - 2500}{0{,}05 \times 2500} = 0{,}25$ سنة

الإجابة: 0,25 x 12=3 أشهر

مثال رقم (3): أودعنا 2500 € في حساب توفير لمدة 3 أشهر. أوجد نسبة الفائدة إذا كان رأس المال النهائي يبلغ 2531,25 €؟

الحل

$C_0 = 2500$ $n = \frac{3}{12} = 0{,}25\,;$ $C_n = 2531{,}25$ البحث عنi؟

$i = \frac{C_n - C_0}{nC_0} = \frac{2531{,}25 - 2500}{0{,}25 \times 2500} = 0{,}05$

الإجابة: 0,05=5%

(2.2) المعدل التناسبي

تمتاز الفائدة البسيطة بكونها تناسبية مع مدة الاستثمار. إذا كانت نسبة الفائدة 12% سنويا فهي مساوية لـ1% شهريا. لكن هذه الخاصية لن تحقق بالنسبة للفائدة المركبة.

المعدل التناسبي هو-إذن- المعدل الذي يحقق نفس العائد (الفائدة البسيطة) لمبلغ محدد خلال مدة محددة.

الرموز:

i_m نسبة الفائدة التي تسدد في الفترة m

الجدول التالي يبين رموز نسب الفوائد حسب الفترة التي يطبق فيها:

i_m	m	الفترة
i	1	سنوية
i_2	2	نصف سنوية
i_4	4	ربع سنوية
i_{12}	12	شهرية

من خلال الجدول المبين أعلاه نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$$\underbrace{C_o(1 + i_m m)}_{\text{الفوائد البسيطة المدفوعة على عدد } m \text{ مرات}} = \underbrace{C_0(1 + i)}_{\text{الفائدة البسيطة السنوية}}$$

وهذا يمكّننا من كتابة العلاقة التي تربط بين m و i :

$$\boxed{i_m = \frac{i}{m}} \qquad (2.7)$$

$$\boxed{i = i_m m} \qquad (2.8)$$

مثال رقم (1): أوجد نسبة الفائدة الشهرية التي تعادل نسبة فائدة سنوية بـ12%؟

الحل

$i = 12\%$ إذا $_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0,12}{12} = 0,01 = 1\%$

مثال رقم (2): أوجد نسبة الفائدة الشهرية التي تعادل نسبة فائدة نصف سنوية بـ3%؟

الحل

لدينا $_2 = 0,03$ ونبحث عن i_{12}. نتحول أولا إلى النسبة السنوية ثم تحولها إلى نسبة شهرية: $i = 2\,i_2 = 0.06$ ثم نتحول إلى النسبة الشهرية:

$$i_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005 = 0,5\%$$

(2.3) متوسط معدل الفائدة لعدد من الاستثمارات

لنفترض أنه تم استثمار مجموعة من المبالغ على فترات مختلفة وبنسب فوائد مختلفة أيضا، في هذه الحالة يمكن حساب نسبة الفائدة المتوسطة لمجموع الاستثمارات الذي يرمز له بـT .

C_t : المبلغ المستثمر رقم t.

i_t : نسبة الفائدة المستخدمة رقم t.

n_t : طول فترة الاستثمار رقم t.

k : عدد المبالغ المستثمرة.

T: نسبة الفائدة المتوسطة لجميع المبالغ المستثمرة.

القاعدة التالية تمثل قاعدة المتوسط الحسابي البسيط المرجح:

$$T = \frac{C_1 i_1 n_1 + C_2 i_2 n_2 + \cdots + C_k i_k n_k}{C_1 n_1 + C_2 n_2 + \cdots + C_k n_k}$$

$$\boxed{T = \frac{\sum_{t=1}^{k} C_t i_t n_t}{\sum_{t=1}^{k} C_t n_t}} \qquad (2.9)$$

مثال: أوجد النسبة المتوسطة لمجموعة الاستثمارات التالية:

المبلغ المستثمر	الفترة	النسبة
€ 1000	90 يوما	%3
€ 2000	120 يوما	%4
€ 3000	170 يوما	%5

الحل

$$T = \frac{1000\times0{,}03\times\frac{90}{360}+2000\times0{,}04\times\frac{120}{360}+3000\times0{,}05\times\frac{170}{360}}{1000\times\frac{90}{360}+2000\times\frac{120}{360}+3000\times\frac{170}{360}}$$

$$T = \frac{105}{2333{,}33} = 0{,}045 = 4{,}5\%$$

(2.4 طريقة الأعداد والمقامات الثابتة

نستخدم هذه الطريقة في حال البحث عن مقدار الفائدة الكلية المستخرجة من مجموعة من المبالغ المستثمرة بنسب فوائد متساوية.

الرموز:

C_t : المبلغ المستثمر رقم t.

n_t : طول فترة الاستثمار رقم t.

i :نسبة الفائدة المشتركة بين جميع الاستثمارات.

k : عدد المبالغ المستثمرة.

I_{TOT}: مقدار الفائدة الكلية لجميع الاستثمارات.

يحسب مقدار الفائدة الكلية على النحو التالي:

$$\begin{aligned} I_{TOT} &= C_1 i n_1 + C_2 i n_2 + \cdots + C_k i n_k \\ &= i(C_1 n_1 + C_2 n_2 + \cdots + C_k n_k) \\ &= i \sum_{t=1}^{k} C_t n_t \end{aligned}$$

$$\boxed{I_{TOT} = i \underbrace{\sum_{t=1}^{k} C_t n_t}_{\text{الأعداد}}} \qquad (2.10)$$

مثال: أوجد نسبة الفائدة الكلية لثلاثة مبالغ مستثمرة على النحو التالي:

المبلغ المستثمر	الفترة	النسبة
€ 1000 € 2000 € 3000	90 يوما 120 يوما 170 يوما	%3 %3 %3

الحل

$$I_{TOT} = 0{,}03 \times \left(1000 \times \frac{90}{360} + 2000 \times \frac{120}{360} + 3000 \times \frac{170}{360}\right)$$

$$I_{TOT} = 0{,}03 \times 2333{,}33 = 70\ €$$

ملاحظة: هذه الطريقة تستخدم عادة الفترات بالأيام وهو ما مكن – كما يبين المثال– من كتابة الكسر: $\frac{1}{360}$ وبذلك نحصل على:

$$I_{TOT} = \frac{0{,}03}{360} \times 840000 = 70\ €$$

في هذه العملية الحسابية سمي الكسر $\frac{0{,}03}{360}$ بالمقام الثابت وهي التسمية التي وصفت بها الطريقة المبينة.

(2.5) الخصم التجاري

يهدف الخصم التجاري الذي يمنحه البائع للمشتري إلى تشجيع هذا الأخير إلى تسديد التزاماته بأسرع وقت. ويمكن أن نشاهد خصومات تتراوح بين 2% و 5% لتسديد الفواتير في آجال لا تتعدى العشرة أيام أو صافي 30 يوما.

يجب على المشتري أن يستفيد من هذه الخصومات. وفي حال عدم الاستفادة منها فهو بطريقة مباشرة يتحول إلى مقترض بنسبة فائدة عالية طيلة 20 يوما.

الرموز:

C_0 : المبلغ بما في ذلك الخصم.

C_n : المبلغ دون الخصم.

n : المدة دون الاستفادة من الخصم.

t: معدل الخصم.

i : نسبة الفائدة في حال التخلي عن الخصم.

المبلغ بما في ذلك الخصم هو:

$$C_0 = C_n + tC_n = (1-t)C_n$$

مع استخدام القاعدة (3.4) يمكن أن نحصل على:

$$i = \frac{C_n - C_n\,(1-t)}{nC_n\,(1-t)} = \frac{1-(1-t)}{n\,(1-t)}$$

أي:

$$\boxed{i = \frac{t}{n\,(1-t)}} \qquad (2.11)$$

من خلال هذه المعادلة يتبين أن نسبة الفائدة الضمنية (i) يحددها معدل الخصم نفسه وكذلك المدة الزمنية التي انقضت دون الاستفادة من الخصم.

مثال: أوجد نسبة الفائدة الضمنية المتعلقة بخصم يساوي 1% لمدة زمنية لا تتعدى 10 أيام أو صافي 30 يوما.

الحل

$n = \frac{20}{360} = 20$ و يوما دون خصم $t = 0{,}01$

وهكذا فإن: $i = \frac{0{,}01}{20/360 \times (1-0{,}01)} = \frac{0{,}01}{0{,}055} = 0{,}1818 \simeq 18\%$

(2.6) التمارين

1- استثمرنا مبلغ 2000 € خلال الفترة الممتدة من 10 يناير إلى 8 سبتمبر 2005 في حساب يوفر 3% سنويا. أوجد مقدار الفائدة التي حصلنا عليها في هذه العملية مستخدما أساس 30/ 360 وأساس صحيح/ 365؟

2- استثمرنا مبلغ 5000 € خلال الفترة الممتدة من 5 مارس إلى 15 أغسطس 2005 في حساب يوفر 2% نصف سنويا. أوجد المبلغ (رأس المال) النهائي الذي حصلنا عليه في هذه العملية مستخدما أساس 30/ 360 وأساس صحيح/ 365؟

3- استثمرنا مبلغ 3000 frs (فرنك سويسري) بنسبة فائدة 3% كل نصف سنة فحصلنا في نهاية المطاف على مبلغ قدره 3035 frs. ما هي المدة المنقضية على استثمار المبلغ المذكور بالأشهر والأيام؟ (استخدم أساس 30/ 360).

4- استثمر مبلغ 5000 € من الفترة المتراوحة بين 1 يناير و14 سبتمبر 2005 فأنتج مبلغا آخر قدره 5140 €.أوجد نسبة الفائدة السنوية المستخدمة في هذه العملية؟ (أساس 30/ 360).

5- اقترضنا مبلغ 6000 frs بنسبة فائدة 4.5% في 1 أبريل. إذا رغبنا في تسديد مقدار فائدة لا يتعدى 100 frs فما هو تاريخ إرجاع القرض؟ (أساس 30/ 360).

6- ما هي نسبة الفائدة الربع سنوية المعادلة لنسبة الفائدة الشهرية المقدرة بـ1%؟

7- استثمر مبلغ 1000€ لمدة 3 أشهر فأنتج فائدة مقدارها 36 €. ما نسبة الفائدة الشهرية لهذه العملية؟ (أساس 30/ 360).

8- اشترينا آلة ودفعنا 30% من سعرها عند التسليم أما الباقي فقد تقرر تسديده بعد 3 أشهر بفائدة تأخير تقدر بـ210€ .أوجد نسبة الفائدة الموظفة إذا سددنا مبلغ 2400€ عند التسليم؟

9- يمتلك شخص مبلغا كبيرا في حساب يوفر له 4% . إذا كان الشخص يقوم بسحب مبلغ شهري بـ4000€ دون أي تأثير في مقدار هذا المبلغ. فما هي قيمة المبلغ الموجود في الحساب؟ (أساس 30/ 360).

10- استثمر شخص مبلغ 3000 frs بنسبة فائدة 3%.بعد فترة سحب المبلغ المستثمر بفوائده. إذا علمت أن البنك أخذ عمولة تقدر بـ frs30 وأن المبلغ الإضافي الذي سحب يعادل المبلغ المستثمر في بداية الفترة. احسب فترة الاستثمار؟ (أساس 30/ 360).

11- احسب نسبة الفائدة المتوسطة للمبالغ المستثمرة التالية المودعة في سنة 2004 (أساس 30/ 360):

مبلغ الاستثمار	الفترة	النسبة
frs 8000	من 1 يناير إلى 31 مارس	%3
frs 6000	من 1 يناير إلى 30 يونيو	%3,5
frs 4000	من 1 يونيو إلى 30 سبتمبر	%4

12- احسب نسبة الفائدة المتوسطة للمبالغ المستثمرة التالية:

مبلغ الاستثمار	الفترة	النسبة
X	N2	I
X2	N	i2

13- استخدم طريقة الأعداد أساس 30/ 360 لإيجاد مقدار الفائدة الإجمالية لمجموعة الاستثمارات التالية المودعة بنسبة 3,75%:

مبلغ الاستثمار	الفترة
frs 4000	من 01.02.05 إلى 15.03.05
frs 4400	من 01.02.05 إلى 31.10.05
frs 4800	من 01.02.05 إلى 31.12.05

14- استثمر رأس مال بنسبة فائدة 4% فأنتج 3080 frs. واستثمر نفس المبلغ بنسبة فائدة 5% فأنتج 3100 frs.أوجد كلاً من مدة الاستثمار ومقدار رأس المال المستثمر؟ (أساس 30/ 360).

15- ■ استثمر مبلغان يقدر إجماليهما بـ10000 € الأول بنسبة فائدة x% والثاني بنسبة فائدة $(x + 1)$%. وتقدر أرباح الفائدة من الاستثمار الأول بـ240 € بينما تقدر بالنسبة للاستثمار الثاني بـ200 € فقط. أوجد هاتين النسبتين وكذلك مقداري الاستثمارين. (أساس 30/ 260).

16- ■نودع مبلغ x عند بداية كل شهر في حساب توفير بنكي يوفر لنا 4%. (أساس 30/ 360).

(أ) ما هو المبلغ المتحصل عليه في نهاية الشهر الرابع؟

(ب) ما هو المبلغ المتحصل عليه في نهاية الشهر n؟

نصيحة: مجموع الأعداد الصحيحة التي تنتهي في n تساوي $\frac{(n+1)}{2}$

17- احسب النسبة الضمنية i المتعلقة بخصم يساوي 2% على تأخير تسديد يقدر بـ 10 أيام أو 60 يوما صافيا.

الفصل الثالث

العمليات الحسابية على الفائدة المركبة

Opérations à intérêt composé

عندما يستثمر رأس مال بنسبة فائدة مركبة فذلك معناه أن كل مقدار فائدة يحصل عليه بعد كل فترة يتم إضافته إلى مقدار رأس المال الأصلي ليصبح بدوره مصدرا لأرباح الفائدة. هذا المبدأ الأساسي في الرياضيات المالية يسمى "تحويل الفوائد إلى رأس مال".

وعلى عكس الفوائد البسيطة فإن الفوائد المركبة تنطبق على الفترات الزمنية التي تزيد عن السنة.

كقاعدة عامة يتم صرف (استخلاص) الفوائد إثر نهاية فترة الاستثمار.

إذا لم يتم تحديد الفترة الزمنية فهي تساوي ضمنيا السنة، حيث يمكن القول إن استثمارا حقق 5% ونعني بذلك أن الفائدة المحققة هي سنوية.

في كل المواضيع التي سنتناولها لاحقا في هذا الكتاب سوف نتعامل مع العمليات الحسابية على الفائدة المركبة.

الرموز:

جميع الرموز المستخدمة في الفصل السابق تبقى صالحة لهذا الفصل:

n فترة القرض.

i نسبة الفائدة.

C_0 رأس المال الأصلي.

C_n رأس المال النهائي أو رأس المال المتحصل عليه عند نهاية الفترة n.

(3.1) قواعد الفائدة المركبة

عند كل فترة تحسب الفائدة على رأس المال المتراكم النهائي. وبذلك نستطيع تركيب العلاقة بين رأس المال الأصلي والنهائي على النحو التالي:

رأس المال المتحصل عليه بعد نهاية السنة الأولى:

$$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0\,(1+i)$$

رأس المال المتحصل عليه بعد نهاية السنة الثانية:

$$C_2 = C_1 + C_1 i = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$$

رأس المال المتحصل عليه بعد نهاية السنة n:

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} i = C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^n$$

وهو ما يعطينا القاعدة العامة للفائدة المركبة:

$$\boxed{C_n = C_0(1+i)^{n-1}} \qquad (3.1)$$

مثال رقم (1): استثمرنا مبلغ 5000 € لمدة 20 سنة في حساب يوفر لنا 2%. ما مقدار رأس المال في نهاية المدة المذكورة؟

الحل

$C_0 = 5'000$ $i = 0,02$ $n = 20$ البحث عن n ؟

$$C_n = 5'000\,(1+0,02)^{20} = 5'000 \times 1,02^{20} = 7'429,74€$$

مثال رقم (2): نستثمر مبلغ 12000 € لمدة 5 سنوات و3 أشهر و6 أيام في حساب يوفر 5%. ما مقدار رأس المال في نهاية المدة المذكورة؟

الحل

$C_0 = 12'000$ $i = 0{,}05$ $n = 5 + \frac{3}{12} + \frac{6}{360} = 5{,}2666$ البحث عن n ؟

$$C_n = 12'000\,(1 + 0{,}05)^{5{,}2666} = 15'515{,}94€$$

(3.1.1) العلاقات بين المعامل

هذه العلاقات لحصل عليها بسهولة من خلال عمليات التحويل البسيطة. ومعرفة مسبقة ببعض القواعد المستخدمة في اللوغاريتمات هي ضرورية للبحث عن الفترات والمدد:

البحث عن رأس المال الأصلي:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}} \quad (3.2)$$

البحث عن المدة n

$$\boxed{n = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln(1+i)}} \quad (3.3)$$

البحث عن نسبة الفائدة i

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1} \quad (3.4)$$

مثال رقم (1): لدينا مبلغ قدره 3582,15 € حصلنا عليه بعد إيداع مبلغ قبل 6 سنوات في حساب توفير بنسبة 3%. ما هو المبلغ الذي تم إيداعه؟

الحل

$n = 6\ i = 0{,}03\ C_n = 3'582{,}15$ البحث عن C_0؟

$$C_0 = \frac{3'582{,}15}{(1{,}03)^6} = 3'000€$$

مثال رقم (2): أودعنا رأس مال في حساب توفير لمدة 20 سنة فحصلنا على ضعف المبلغ المودع. ما هي نسبة الفائدة الموظفة على رأس المال؟

الحل

$n = 20, C_n = 2C_0, C_0 = C_0$ البحث عن i؟

$$i = \sqrt[20]{\frac{2C_0}{C_0}} - 1 = \sqrt[3]{2}\text{-}1{=}0{,}0526{=}3{,}526\%$$

مثال رقم (3): أودع مستثمر مبلغ 50000 frs في حساب يوفر له 2,5 %. ثم سحب المبلغ المستثمر بعد أن وصلت قيمته إلى 53000 frs. أوجد مدة الاستثمار؟

الحل

$i = 0{,}025, C_n = 53'000, C_0 = 50'000$ البحث عن n؟

$$n = \frac{ln\,(\frac{53000}{50000})}{ln\,(1{,}025)} = 2{,}35977$$ سنوات

إكسل

يجب أخذ الحيطة اللازمة عند التعامل مع الدوال المالية في إكسل. وفيما يلي القواعد التي يتضمنها الكتاب والمرادف لها في برنامج إكسل.

$$C_n = FV(i; n; 0; -C_0; 0) \;\Leftrightarrow\; C_n = C_0(1+i)^n$$

$$i = RATE(n; 0; -C_0; C_n; 0) \Leftrightarrow\; i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$n = NPER(i; 0; -C_0; C_n; 0) \;\Leftrightarrow\; n = \frac{\ln(\frac{C_n}{C_0})}{\ln(1+i)}$$

$$C_n = PV(1; n; 0; C_n; 0) \;\Leftrightarrow\; C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

مثال: أودع مستثمر مبلغ frs 50000 في حساب يوفر 3% سنويا.ثم سحب رأس ماله عندما بلغ frs 53000. ما هي المدة التي بقي فيها المبلغ المستثمر في الحساب المذكور؟

الحل

$i = 0{,}025, C_n = 53000, C_0 = 50000$ البحث عن n؟

$n = NPER(0{,}025; 0; -50000; 53000; 0) = 2{,}35977$ سنوات

الآلة الحاسبة TI-83

تتضمن الآلة الحاسبة تي-83 برنامجا للحلول المالية. يكفي أن نضغط على APPS 1 Finance: ثم TVM Solver بعد ذلك نقوم بإدخال العوامل التالية حسب متطلبات المسألة:

N=n
1%=i × 1001
PV=$-C_0$
PMT=0
FV=C_n
P/Y=1
C/Y=1
PMT:END

ثم نضع المؤشر بعد ذلك على الرمز الذي نرغب في البحث عن قيمة له، ثم نضغط على: ALPHA ، SOLVE

مثال: أودع مستثمر مبلغ frs 50000 في حساب يوفر 3% سنويا.ثم سحب رأس ماله عندما بلغ frs 53000. ما هي المدة التي بقي فيها المبلغ المستثمر في الحساب المذكور؟

الحل

نقوم بإدخال القيم التالية كمعامل ثم نضع المؤشر على مستوى N=1 ونضغط على $\boxed{\text{ALPHA}}$ ، $\boxed{\text{SOLVE}}$ وهو ما يعطينا النتائج الآتية:

N=1
1%=2,5
PV=−50000
PMT=0
FV=53000
P/Y=1
C/Y=1
PMT:END

(3.2) عامل تحويل رأس المال والخصم

يوجد في الرياضيات المالية أو الأكتوارية مفهومان أساسيان هما: القيمة الحالية والقيمة المستقبلية أو القيمة المتحصل عليها من خلال رأس مال.

عندما نجيب على السؤال: "ما هو المبلغ المتحصل عليه بعد إيداع – لمدة محددة – مبلغ X في حساب توفير" فنحن قصدنا البحث عن القيمة المستقبلية أو المتحصل عليها لرأس مال. نتحدث إذاً عن عملية تحويل لرأس مال.

في المقابل عندما نجيب على السؤال: "ما هو رأس المال الذي وجب إيداعه اليوم في حساب توفير لكي نحصل – بعد مرور فترة من الزمن – على رأس مال X؟ فنحن قصدنا البحث عن القيمة الحالية لرأس مال. نتحدث إذا عن عملية خصم.

تعريفات:

نرمز لعامل تحويل رأس المال بالحرف r ولعامل الخصم بالحرف v، والعلاقة التي تربط هذين العاملين هي:

$$\boxed{r = 1 + i} \qquad (3.5)$$

و

$$\boxed{v = \frac{1}{1+i}} \tag{3.6}$$

وهذه العلاقة تكتب كذلك: $v = \frac{1}{r} = r^{-1}$

كما يمكننا كتابة قاعدة تحويل رأس المال المرقمة (3.1) كما يلي:

$$\boxed{C_n = C_0 r^n} \tag{3.7}$$

كذلك يمكننا كتابة رأس المال الأصلي باستخدام عامل الخصم v حيث:

$$C_n = \frac{C_0}{r^n} = C_0 \frac{1}{r^n} = C_0 \left(\frac{1}{r}\right)^n = C_0 v^n$$

أي:

$$\boxed{C_n = C_0 v^n} \tag{3.8}$$

وهذا يجعل حساب القيمة الحالية أو القيمة المستقبلية سهلة حيث يكفي أن نضرب رأس المال النهائي أو الأصلي بعامل الخصم أو بعامل تحويل رأس المال مرفوع إلى n.

مثال رقم (1): حول رأس المال المقدر بـ frs 6000 مستخدما نسبة الفائدة المركبة 3.2% ومدة 4 سنوات ونصف؟

الحل

$$n = 4{,}5, r = 1 + i = 1 + 0{,}032, C_0 = 6'000$$

$$C_n = 6'000 \times 1{,}032^{4{,}5} = 6'913{,}69\ frs$$

مثال رقم (2): أوجد القيمة الحالية لرأس مال يبلغ 10000 € مدفوع بعد 20 سنة بنسبة فائدة تقدر بـ4%؟

الحل

$v=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1,04}=0,96153846\ C_n=10000\ n=20\ C_n=?$

$C_0=10000\times 0,96153846^{20}=4563,87\ €$

مثال رقم (3): حساب مبلغ قبل توظيف الضريبة على القيمة المضافة هي عملية مرادفة لحساب تحديث رأس المال على سنة. أوجد المبلغ قبل توظيف الضريبة على القيمة المضافة لسيارة ثمنها 24748 €-ضريبة القيمة المضافة مضمنة له- إذا كانت نسبة الضريبة على القيمة المضافة هي 7,6 %

الحل

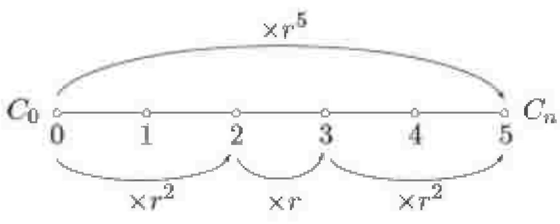
$v=\frac{1}{1+0,076}=\frac{1}{1,076}$ المبلغ دون الضريبة على القيمة المضافة هو إذاً:

$\frac{24748}{1,076}=23000\ \text{frs}$

(3.3) العمليات المتسلسلة

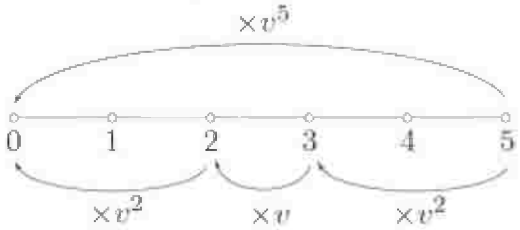
عند تطبيق قاعدة جمع الأسس الجبرية $x^a x^b=x^{a+b}$ على عوامل الخصم أو على عوامل تحويل رأس المال، يصبح بالإمكان عمل تسلسل للعمليات، وهذا يرجع إلى عمل خصومات أو تحويل رأس مال على مراحل.

كمثال على ذلك عملية تحويل رأس مال على فترة 5 سنوات توافق عملية تحويله على سنتين ثم على سنة ثم على سنتين والرسم التالي يوضح ذلك:



وبذلك فإن: $C_0 r^5\ C_n=C_0 r^2 r r^2$

وهذا ينطبق أيضا على حساب الخصم على 5 سنوات:



وبذلك فإن: $C_0 = C_n v^5 = C_n v^2 v v^2$

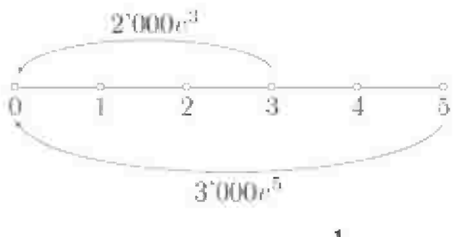
كذلك سوف يتم عرض تسلسل العمليات وخاصة عند حساب القيم الحالية للدخل عند دراستنا لهذه الفقرة في الفصل القادم.

مثال: ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه الآن في حساب ادخار يوفر 3%، إذا كنا نرغب في سحب كامل المبلغ المودع في الحساب على مرحلتين:المرحلة الأولى نسحب فيها بعد 3 سنوات مبلغ 3000 frs والمرحلة الثانية نسحب فيها مبلغ frs2000 بعد 5 سنوات؟ استخدم طرق مختلفة لإيجاد الحل.

الحل رقم (1):

كل مبلغ مسحوب هو مبلغ مخصوم فرديا على 3 ثم على 5 سنوات. حيث:

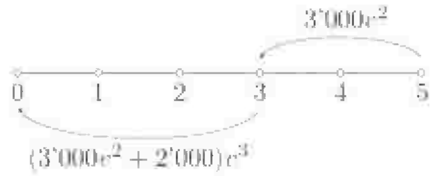
$$C_o = 2000v^3 + 3000v^5$$



$v = \frac{1}{1,03} = 0,9708738$ C_0 تصبح $C_0 = 4418,1$

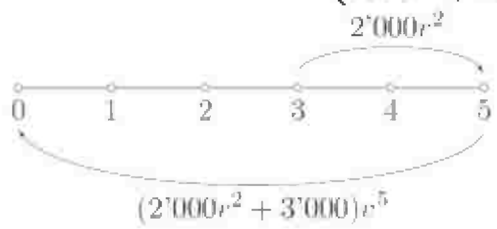
الحل رقم (2):

المبلغ الثاني المقدر بـ 3000 *frs* هو مبلغ مخصوم على سنتين ثم يتم خصم المبلغ الإجمالي على 3 سنوات: $C_0 = (3000v^2+2'000)v^3 = 4418,1$



الحل رقم (3):

طريقة الحل الثالث غير شائعة كثيرا لكنها توضح جيدا العمليات المتسلسلة؛ فالمبلغ الأول المقدر بـ 2000 frs يتم رسملته (الاستفادة من تحويله إلى رأس مال) على سنتين. ثم يتم خصم الإجمالي على 5 سنوات. وبذلك نحصل على: $C_0 = (3000r^2 + 2000)r^{-5} = 4418,1$



(3.4) النسبة المعادلة

تطبق النسب المعادلة في حساب فوائد النسب المركبة. النسبة المعادلة هي نسبة نحصل من خلالها على نفس الأرباح (الفوائد) التي ينتجها رأس مال مماثل استثمر خلال مدة مماثلة.

الرموز:

i_m نسبة الفائدة المسددة في الفترة m

الجدول الآتي يبين النسبة المعادلة حسب الفترة المحددة:

الفترة	m	i_m
سنوية	1	i
نصف سنوية	2	i_2
ربع سنوية	4	i_4
شهرية	12	i_{12}

التعريف أعلاه يؤدي إلى بيان العلاقة التالية:

$$\underbrace{C_0 i_m}_{\text{فوائد مركبة مدفوعة سنويا}} = \underbrace{C_0\,(1+i_m)^m}_{\text{فوائد مركبة مدفوعة } m \text{ مرات في السنة}}$$

وهذا يمكن من وضع العلاقة بين i وi_m :

$$\boxed{i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1} \qquad (3.9)$$

$$\boxed{i = (1+i_m)^m - 1} \qquad (3.10)$$

مثال رقم (1): أوجد النسبة الشهرية المعادلة للنسبة السنوية المقدرة بـ 12%؟

الحل

$i = 0{,}12$ إذا $_{12} = (1+0{,}12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}009488$ أي $0{,}949\%$

مثال رقم (2): أوجد النسبة ربع السنوية المعادلة للنسبة الشهرية المقدرة بـ 1%؟

الحل

$i_{12} = 0{,}01$ نبحث عن $_4$ ؟ نحول النسبة أولا إلى سنوية ثم نحولها إلى ربع سنوية.

ثم $i = (1+0{,}01)^{12} - 1 = 0{,}126825$

$i_4 = (1+0{,}126825)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}0303$ أو $3{,}03\%$

(3.5) النسبة الفعلية والاسمية

هذه النسب تظهر من حين لآخر في حساب القروض وخاصة القروض الصغيرة، وهي تعطي المؤسسة الممولة إمكانية إعلان نسب تبدو في ظاهرها صغيرة عما هي عليه فعليا.

لنفترض أن شروط الإقراض هي كالآتي: فوائد سنوية تقدر بـ 12% تدفع شهريا بنسبة 1%. والقارئ المتبه يمكنه ملاحظة أن نسبة 12% السنوية لا تعادل النسبة الشهرية بـ 1% بل تعادل نسبة: $i = (1 + 0,01)^{12} = 12,682\%$ سنويا. ولكي يكون إعلان المؤسسة المالية دقيقا يجب أن يتضمن ما يلي: "نسبة فائدة سنوية بـ 12,682% سنويا يدفع شهريا بنسبة 1%".

هذا التوضيح ينطوي على مفهومين أساسيين:

النسبة الفعلية (12,682%) والنسبة الاسمية (12%) المدفوعة شهريا بمقدار 1%.

الرموز:

لنرمز إلى $^{(m)}$ نسبة الفائدة الاسمية التي تدفع على أجزاء متساوية $\frac{i^{(m)}}{m}$ و i نسبة الفائدة السنوية الفعلية.

بالرجوع إلى القاعدة (3.9) نستطيع كتابة العلاقة: $i^{(m)} = mi_m$ وهذا ما يؤدي إلى تحرير العلاقة بين i و $i^{(m)}$:

$$\boxed{i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]} \qquad (3.11)$$

و

$$\boxed{i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1} \qquad (3.12)$$

مثال: أوجد نسبة الفائدة السنوية الفعلية المماثلة لنسبة فائدة اسمية بـ 8% مدفوعة على أجزاء شهرية تقدر بـ2%.

الحل

$i^{(4)} = 0,08$ لذلك فإن: $i = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^4 - 1 = 8,243\%$

الآلة الحاسبة تي آي–83

تحتوي الآلة الحاسبة تي آي–83 من خلال القائمة: $\boxed{\text{APPS}}$ ، $\boxed{\text{Finance}}$ على دالتين نتمكن بفضلهما من حساب:

(أ) النسبة الفعلية حسب النسبة الاسمية:

C▶Eff ($i^{(m)}$ في صورة نسبة مئوية $, m$)

(ب) النسبة الاسمية حسب النسبة الفعلية

C▶Nom (i في صورة نسبة مئوية $, m$)

مثال: أوجد النسبة السنوية الفعلية المماثلة لنسبة اسمية تقدر بـ 6% مدفوعة بتجزئة على فترات ربع سنوية تساوي 1,5%.

الحل

Eff (6,4%) = 6,136%

(3.6) نسبة فائدة حينية وتحويل رأس مال مستمر

(3.6.1) نسبة فائدة حينية

باسترجاع القاعدة:

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

يمكن أن نتساءل عن التغييرات التي ستطرأ على نسبة الفائدة الفعلية إذا كانت الفائدة لا تسدد شهريا ولا يوميا بل تسدد بشكل مستمر (متواصل).

كنتيجة تحليلية لهذه العملية نحصل على:

$$lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

وبتطبيق هذه المعادلة هنا نحصل على:

$$lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{i^{(m)}}$$

نرمز لـ $\delta = i^{(m)}$ ونعرف النسبة الفعلية حسب النسبة الحينية كما يلي:

$$\boxed{i = e^{\delta} - 1} \qquad (3.13)$$

مثال: أوجد النسبة السنوية الفعلية المماثلة للنسبة الحينية المقدرة بـ 8%؟

الحل

$$\delta = e^{0,08} - 1 = 8,329\%$$

(3.6.2) تحويل رأس مال مستمر

في حالة تحويل رأس مال مستمر، نكتب دالة تحويل رأس المال على النحو التالي:

$$\boxed{C_n = C_0 e^{\delta n}} \qquad (3.14)$$

مثال: بنسبة فائدة مستمرة تقدر بـ 10% سنويا أوجد عدد السنوات اللازمة لرأس مال يبلغ 6000 € لكي يصل إلى 15000 €؟

الحل

$C_0 = 6'000, C_n = 15'000, \delta = 0,1$ البحث عن n؟

من خلال: $C_n = C_0 e^{\delta n}$ نستنتج:

$$n = \frac{ln\ (C_n/C_0)}{\delta} = \frac{ln\ (2,5)}{0,1} = 9,1629 \text{ سنوات}$$

(3.7) النسبة المتوسطة لعدد من الاستثمارات

إذا تم استثمار مجموعة من المبالغ خلال فترات مختلفة وبنسب فائدة مختلفة كذلك فإنه بالإمكان إيجاد نسبة الفائدة المتوسطة لهذه الاستثمارات.

الرموز:

C_t رأس المال (الاستثمار) رقم t.

i_t نسبة الفائدة رقم t.

r_t عامل تحويل رأس المال رقم t.

n_t مدة الاستثمار رقم t.

k عدد الاستثمارات.

T النسبة المتوسطة لإجمالي الاستثمارات.

يتم البحث عن القيمة النهائية التي أفرزتها مجموعة الاستثمارات التي أدخلت في بداية العملية. وهذه الحالة تبدو أكثر تعقيدا من البحث عن النسبة المتوسطة لمجموعة استثمارات بنسب فائدة بسيطة (انظر الفقرة (2.3)). حيث ليس بالإمكان وضع قاعدة نحصل من خلالها على النسبة المتوسطة. لذلك فاستخدام الحلال هو إجباري في هذه الحالة.

علاقة التوازن تحرر على النحو التالي:

$$C_1 r_1^{n_1} + C_2 r_2^{n_2} + \cdots + C_k r_k^{n_k} = C_1\ (1+T)^{n_1} + C_2\ (1+T)^{n_2} + \cdots + C_k\ (1+T)^{n_k}$$

مثال: أوجد نسبة الفائدة المتوسطة للاستثمارات التالية:

الاستثمار	المدة	نسبة الفائدة
€ 1000	سنة	%3
€ 2000	سنتين	%4
€ 3000	3 سنوات	%5

الحل

باستخدام برنامج إكسل أو الآلة الحاسبة تي آي -83 (انظر الفقرة 17.4.3). والمطلوب هنا هو حل المعادلة التالية بعد تعويض $T+1$ بـx :

$$1'000x + 2'000x^2 + 3'000x^3 - 1'000 \times 1,03 - 2'000 \times 1,04^2 - 3'000 \times 1,05^3 = 0$$

من خلال برنامج إكسل أو الآلة الحاسبة تي آي-83 نجد: $x = 1,0459$ أو $T =$ 4,59%.

(3.8) تمارين

1- احسب رأس المال النهائي (بما في ذلك أرباح الفوائد) لرأس مال أصلي يساوي 13000frs استثمر بنسبة 4,2% لمدة 8 سنوات وأشهر و3 أيام.

2- أوجد القيمة الحالية لقيمة مستقبلية تقدر بـ100000 € تصرف بعد 6 سنوات ونصف. احسب ذلك مستخدما الفرضيات التالية ومقارنا بينها:

(أ) نسبة الفائدة السنوية تساوي 3,5%.

(ب) نسبة الفائدة نصف السنوية التي تتناسب مع نسبة الفائدة السنوية 3,5%.

(ج) نسبة الفائدة نصف السنوية التي تعادل نسبة الفائدة السنوية 3,5%.

3- كم عدد السنوات اللازمة لتحويل رأس مال يبلغ 3000 € إلى 5000 € علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 3%؟

4- استثمر مبلغ 2500 € لمد 13 سنة إلى حين بلغ 3234 €. أوجد نسبة الفائدة السنوية المناسبة لهذه العملية.

5- استثمر رأس مال أصلي يقدر بـ2000 € بنسبة 12% مجزأة بنسبة 3% لكل ربع سنة. أوجد رأس المال المتحصل عليه بعد سنة.

6- ★إثر وفاة أحد الفلاسفة الكبار ترك في حساب بنكي يوفر نسبة فائدة سنوية 4% رأس مال يقدر بـ1 *frs* . وفي عيد ميلادها بتاريخ 11 مايو 2002 اكتشفت 'سيليا' عبر بنك 'بكسو' أنها صاحبة الحظ السعيد بعد إعلامها أنها المستفيدة بدفتر ادخار تبلغ قيمته مليون *frs* . المطلوب تحديد تاريخ إيداع المبلغ الأصلي؟ (أساس 30/ 360)

7- استثمر رأس مال في حساب يوفر فائدة نسبتها 4% لمدة 3 أشهر (فائدة بسيطة). المبلغ المتحصل عليه استثمر مرة ثانية في حساب يوفر 1% لمدة 5 سنوات (فائدة مركبة). أوجد القيمة النهائية بدلالة القيمة الحالية (رأس المال الأصلي) المستثمرة.

8- نودع في البنك مبلغ 5000 *frs* في حساب توفير يستخدم الفائدة المركبة. بعد سنة سحبنا المبلغ الذي تم إيداعه وتركنا الباقي لمدة سنة فحصلنا في آخر السنة على مبلغ 208 *frs* . أوجد نسبة الفائدة المستخدمة في هذه العملية.

9- مقداري رأس مال مجموعهما 5000 € استثمرا على النحو التالي:

(أ) الأول بنسبة فائدة بسيطة سنوية تساوي 10%.

(ب) الثاني بنسبة فائدة مركبة سنوية تساوي 8%.

بعد 9 سنوات حصلنا على نفس الأرباح للمبلغين. أوجد مقدار كل رأس مال.

10- أوجد نسبة الفائدة النصف سنوية المعادلة لنسبة فائدة شهرية بـ1%.

11- ما هي نسبة الفائدة الشهرية المعادلة لنسبة فائدة سنوية بـ9%؟

12- حدد ثمن البضاعة المرفع بنسبة 50% بـ379,50 €. أوجد الثمن قبل الترفيع.

13- بنسبة فائدة سنوية بـ 5% أجريت عملية خصم على مبلغ 40000 € في مدة 5 سنوات و3 أشهر. احسب مقدار الخصم:

(أ) مباشرة.

(ب) إذا افترضنا أن عملية تحويل رأس مال لمدة 3 سنوات و9 أشهر تسبق عملية خصم على الناتج لمدة 9 سنوات.

14- أجريت عملية خصم على مبلغ 1000 *frs* على 3 سنوات: السنة الأولى بنسبة خصم تقدر بـ1% والسنة الثانية بنسبة خصم تقدر بـ0% والسنة الثالثة بنسبة خصم تقدر بـ9%. أوجد نسبة الفائدة السنوية المتوسطة الموظفة على هذه العملية.

15- مبلغين مقدارهما 1000 € و2000 € تم استثمارهما في حسابين مختلفين، الأول يوفر نسبة فائدة 3% والثاني نسبة فائدة 5%. استخدم قاعدة رياضية جبرية لإيجاد نسبة المردود المتوسط لهذين الاستثمارين.

16- نرغب في تسديد 4 مبالغ مستحقة في المستقبل بمبلغ وحيد نستطيع تسديده خلال 5 سنوات. أوجد المبلغ الوحيد إذا علمت أن نسبة الخصم على المبالغ الأربعة تساوي 10% وأن الآجال الممنوحة على المبالغ كانت على النحو التالي:

المبلغ	الآجال
frs 2000	سنة
frs 3000	3 سنوات
frs 1000	4 سنوات
frs 4000	7 سنوات

17- محتوى إحدى الإعلانات يقول: "نعطيكم 13% فوائد: إذا أودعتم لدينا مبلغ 100 *frs* نرجع لكم 204 *frs* بعد 8 سنوات". هل تستطيع تفسير هذا الإعلان؟

18- باستخدام برنامج إكسل أوجد النسبة المتوسطة لمجموعة الاستثمارات التالية:

المبلغ	المدة	نسبة الفائدة
8000 *frs*	سنتين ونصف	%3
6000 *frs*	3 سنوات	%3,5
4000 *frs*	3 سنوات	%4

19- شروط أحد القروض كانت على النحو التالي:المبلغ المقرض 52000 € بنسبة فائدة 10% سنويا.الفائدة تدفع كل 3 أشهر بمقدار 1300 €. ما هي نسبة الفائدة الفعلية التي يستخدمها البنك؟

20- ■ نرغب في إسناد جائزة قيمتها تساوي P وسوف تمنح الجائزة أول مرة بعد خمس سنوات من الآن ثم تمنح نفس القيمة بعد 10 سنوات. لدينا الآن مبلغ 20000 € نستطيع إيداعه في حساب يوفر لنا 2.5% سنويا. أوجد قيمة P.

21- مبلغ من المال قدره X وضع في حساب فوائده مركبة.بعد سنتين قدر المبلغ الإجمالي المتحصل عليه بـ 242000 *frs* وبعد 5 سنوات قدر بـ 322102 *frs*.

(أ) أوجد القيمة الجبرية لمقدار رأس المال النهائي ومقدار رأس المال الأصلي بعد الأربع سنوات الأولى.

(ب) أوجد باستخدام الحل الجبري مقدار رأس المال النهائي بعد 6 سنوات.

(جـ) أوجد باستخدام طريقة الاستيفاء الخطي مقدار رأس المال النهائي بعد الأربع سنوات الأولى.

22- تم إيداع مبلغ 35000 € في حساب ادخار بنسبة فائدة مركبة مستمرة تقدر بـ 105 سنويا.

(أ) متى يبلغ حساب الادخار مقدار 100000 € ؟

(ب) كم مدة تستلزم ليصل المبلغ إلى الضعف؟

23- في سنة 1980 بلغ عدد سكان إحدى الدول 200 مليون ساكن. وقد سجلت هذه الدولة معدل نمو سكاني مستمر بلغ 0,7% سنويا. قدر عدد السكان في سنة 2010 إذا افترضنا أن نسبة النمو بقيت ثابتة.

الفصل الرابع

الدفعات الدورية (الأقساط)

Les Rentes

في الفصل السابق درسنا القيمة الحالية أو النهائية لرأس مال وحيد. الفصل الحالي يعتبر أكثر شمولية من الفصل السابق حيث يهتم بالقيم الحالية والمستقبلية لمجموعة من رؤوس الأموال المدفوعة.

ملاحظة: هذا الفصل يجب أن يقرأ بالتوازي مع الفصل التاسع المخصص لتأمين الأقساط. ولدراسة هذا الفصل يحتاج القارئ إلى التعرف على رمز الجمع Σ الذي تم شرحه في الفصل 17.

(4.1) تعريفات

القسط أو السنوية هي سلسلة من الدفوعات الدورية بفترات ثابتة ومدة محددة ومعروفة مسبقا. لإيجاد القيمة الحالية للقسط نستخدم القاعدة $C_0 = v^n C_n$ لكل قسط مسدد.

في المقابل إذا أردنا حساب القيمة المستقبلية للقسط نستعمل القاعدة $_n = C_0 \quad ^n$ لكل قسط مسدد.

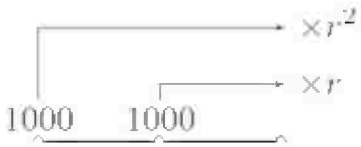
مثال: نقوم بإيداع المبالغ التالية في حساب ادخار يوفر 5%:

المبلغ	تاريخ الإيداع
frs1000	اليوم
frs1000	بعد سنة

ما هو المبلغ الذي نحصل عليه بعد سنتين؟

الحل

المطلوب حساب القيمة النهائية (المستقبلية) لقسط قدره 1000 frs يدفع لمدة سنتين باستخدام القاعدة (3.1):



وهكذا فإن القيمة النهائية لهذا القسط تبلغ بعد سنتين:

$$1'000r^2 + 1'000r = 2'152{,}50\, frs$$

تمكّن دراسة هذا الفصل من تسهيل هذا النوع من العمليات وخاصة إذا كان عدد الأقساط كبيرا.

نتحدث عن قسط بمقادير ثابتة إذا كانت جميع الأقساط متساوية كما هو مبين في المثال السابق. في المقابل نتحدث عن قسط بمقادير متغيرة.

إذا كان القسط يدفع في نهاية الفترة فهو يسمى "ما بعد العدد" postnumerando أما إذا دفع القسط في بداية الفترة فهو يسمى "ما قبل العدد" preanumerando وهي الحالة في المثال الأخير.

في الرياضيات المالية ندرس الأقساط التي تسدد دائما (أقساط مؤكدة) والتي تكون مدتها محددة مسبقا (أقساط مؤقتة). نتحدث - إذن - عن أقساط مؤكدة ومؤقتة. في الرياضيات الأكتوارية تدفع الأقساط فقط في صورة بقاء المؤمن

له على قيد الحياة. نتحدث - إذن - عن أقساط عمرية (مرتبطة بالعمر). وهذه الأخيرة سوف نتناولها بتفصيل أكثر في الفقرات القادمة.

الرموز:

$a_{\overline{n|}}$: القيمة الحالية لقسط مقداره 1 € يدفع في نهاية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

$\ddot{a}_{\overline{n|}}$: القيمة الحالية لقسط مقداره 1 € يدفع في بداية الفترة (مسبقة) لعدد من الفترات يساوي n.

$s_{\overline{n|}}$: القيمة المستقبلية (النهائية) لقسط مقداره 1 € يدفع في نهاية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

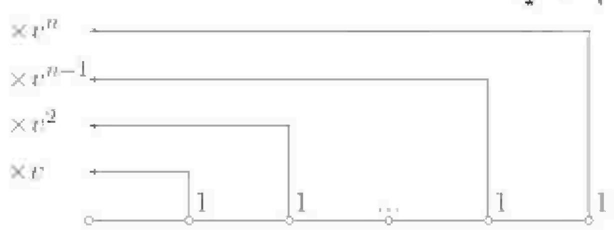
$\ddot{s}_{\overline{n|}}$: القيمة المستقبلية (النهائية) لقسط مقداره 1 € يدفع في بداية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

القواعد المبينة أدناه يمكن استنتاجها بسهولة بمساعدة القواعد عن المتواليات الهندسية التي تم عرضها في الفصل السادس عشر من هذا الكتاب.

(4.2) أقساط مؤخرة

(4.2.1) القيمة الحالية

الرسم البياني



القاعدة

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n} \quad (4.1)$$

القاعدة المختصرة

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^2} \quad (4.2)$$

القاعدة المبسطة

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i}} \quad (4.3)$$

مثال: احسب القيمة الحالية لقسط مؤخر يبلغ $frs3500$ مدفوع طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية 6%؟

الحل

نستخدم القاعدة المبسطة التي تمكن من إيجاد الحل مباشرة. نحسب أولا:

$$i = 0{,}06 \; v = \frac{1}{1{,}06} \quad a_{\overline{10|}} = \frac{1-v^{10}}{i} = \frac{1-0{,}9433962^{10}}{0{,}06} = 7{,}360087$$

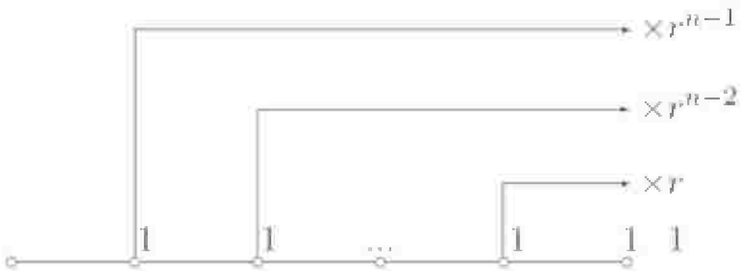
هذا المقدار يمثل القيمة الحالية لـ1 frs مدفوع طيلة عشر سنوات، والدفعة الأولى تكون في نهاية السنة. بالنسبة لقسط يبلغ 3500 frs نضرب هذا الرقم بـ7,360087 وهو ما يعطينا:

القيمة الحالية= $3'500a_{\overline{10|}} = 3'500 \times 7{,}360087 = 25'670{,}30\ frs$

هذه القيمة تناسب المبلغ الذي يجب إيداعه في دفتر ادخار بعائد نسبته 6% لكي يكون بالإمكان سحب مبلغ قدره 3500 frs طيلة عشر سنوات إلى حين استنفاذ كافة المبلغ الموجود في دفتر الادخار.

(4.2.2) القيمة النهائية (المستقبلية)

الرسم البياني



القاعدة

$$\boxed{s_{\overline{n|}} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}} \tag{4.4}$$

القاعدة المختصرة

$$\boxed{s_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} r^t} \tag{4.5}$$

القاعدة المبسطة

$$\boxed{s_{\overline{n|}} = \frac{r^n - 1}{i}} \tag{4.6}$$

مثال: أوجد القيمة المستقبلية لقسط مؤخر يبلغ 3500 *frs* مدفوع طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ 6%

الحل

نستخدم القاعدة المبسطة التي تعطي الحل مباشرة. نسحب أولا:

$$i = 0{,}06 \; r = 1 + i = 1{,}06 \; s_{\overline{10|}} = \frac{r^{n-1}}{i} = \frac{1{,}06^{10}}{0{,}06} = 13{,}180795$$

هذا المبلغ يمثل القيمة المستقبلية لمقدار $frs1$ يدفع طيلة عشر سنوات. الدفعة الأولى تتم في نهاية السنة. بالنسبة لقسط يبلغ 3500 frs نضرب هذا الرقم بـ13,180795 وهو ما يعطينا:

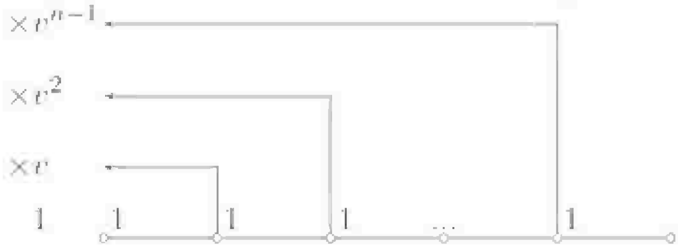
القيمة المستقبلية= $3'500 s_{\overline{10}|} = 3'500 \times 13,18079546'132,80\ frs$

هذه القيمة تمثل- إذن - مقدار رأس المال الذي نحصل عليه بعد مرور عشر سنوات.

(4.3) القسط المسبق

(4.3.1) القيمة الحالية

الرسم البياني



القاعدة

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} \quad (4.7)$$

القاعدة المختصرة

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ (4.8) \quad (4.8)$$

القاعدة المبسطة

$$s_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d} \quad (4.9)$$

حيث:

$$d = \frac{i}{1+i} = iv \quad (4.10)$$

مثال: أوجد القيمة الحالية لقسط مدفوع مسبقا يبلغ 3500 *frs* طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ6%.

الحل

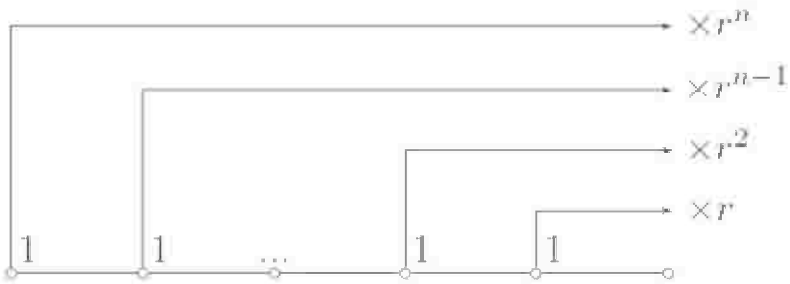
$i = 0{,}06$ $v = \frac{1}{1{,}06}$ $d = \frac{0{,}06}{1{,}06} = 0{,}0566037$ ثم لحسب

$$3'500\ddot{a}_{\overline{n|}} = 3'500\frac{1-0{,}9433962^{10}}{0{,}0566037} = 27'305{,}92\,frs$$

ملاحظة: الرمز الجديد الذي تم إدراجه يمثل نسبة الخصم على سنة لنسبة الفائدة i

(4.3.2) القيمة المستقبلية

الرسم البياني



القاعدة

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n|}} = r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n} \tag{4.11}$$

القاعدة المختصرة

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} r^t} \tag{4.12}$$

القاعدة المبسطة

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n|}} = \frac{r^n - 1}{d}} \tag{4.13}$$

حيث: $d = \frac{i}{1+i}$

مثال: أوجد القيمة المستقبلية لقسط مدفوع مسبقا يبلغ 3500 *frs* طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ6%.

الحل

$i = 0,06\ r = 1,06\ d = \frac{i}{1+i} = 0,0566037$ ثم نحسب

$$3'500\ddot{s}_{\overline{n|}} = 3'500\frac{1,06^{10}}{0,0566037} = 48'900,80\ frs$$

نحسب هذه القيمة المستقبلية لمعرفة القيمة المستقبلية لدفتر ادخار يتم تمويله بشكل دوري بمبالغ ثابتة علما بأن المبلغ الأول قد تم إيداعه مباشرة بعد فتح الدفتر.

إكسل

يمكن استخدام برنامج إكسل لحساب القيم الحالية والمستقبلية بكل سهولة وذلك من خلال الدوال المالية التالية التي توجد في البرنامج:

$$a_{\overline{n|}} = PV(i;n;-1;0;0) \iff a_{\overline{n|}}$$

$$s_{\overline{n|}} = FV(i;n;-1;0;0) \iff s_{\overline{n|}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = PV(i;n;-1;0;1) \iff \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = FV(i;n;-1;0;1) \iff \ddot{s}_{\overline{n|}}$$

مثال: أودع مستثمر مبلغ 5000 € في حساب ينمو بنسبة 2,5%. كم كان المبلغ بعد نهاية السنة الرابعة؟

الحل

نبحث هنا عن القيمة المستقبلية لقسط يبلغ 5000 € يدفع مسبقا:

$$5'000\ddot{s}_{\overline{n|}} = 5'000 \times FV(0,025;4;-1;01) = 21'281,64\ €$$

الآلة الحاسبة TI-83

نستخدم برنامج الحل المالي الموجود بداخل الآلة تي-83. لذلك نقوم بالضغط فوق $\boxed{\text{APPS}}$ ، $\boxed{\text{:Finance1}}$ ثم $\boxed{\text{TVM Solver}}$. بعد ذلك يتم إدخال المعطيات حسب متطلبات المسألة:

$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil}$
$N = n$	$N = n$	$N = n$	$N = n$
$1\% = i \times 100$	$1\% = i \times 100$	$1\% = i \times 100$	$1\% = i \times 100$
PV =?	PV = 0	PV =?	PV = 0
PMT = 1	PMT = −1	PMT = 1	PMT = −1
FV = 0	FV =?	FV = 0	FV =?
P/Y = 1	P/Y = 1	P/Y = 1	P/Y = 1
C/Y = 1	C/Y = 1	C/Y = 1	C/Y = 1
PMT: END	PMT: END	PMT: BEGIN	PMT: BEGIN

مثال: أودع مستثمر مبلغ 5000 € في حساب ينمو بنسبة 2,5%. كم كان المبلغ بعد نهاية السنة الرابعة؟

الحل

نبحث هنا عن القيمة المستقبلية لقسط قدره 5000 € يدفع مسبقا: $5'000\,\ddot{s}_{\overline{n}\rceil}$. ندخل القيم المبينة أدناه في صورة معامل ثم نضع المؤشر على مستوى FV حيث نقوم بإدخال قيمة عشوائية (مثال FV = 5) ثم نضغط على $\boxed{\text{ALPHA}}$ ، $\boxed{\text{SOLVE}}$ وهو ما يعطينا القيمة التالية: FV = 4,256328516

يعني: $5'000 \times 4,256328516 = 21'281,64$ €

N = 4
I%=2,5
PV=0
PMT=5000
FV = 5
P/Y = 1
C/Y = 1
PMT: BEGIN

(4.4) العلاقة بين المتغيرات

(4.4.1) العلاقات بين المسبق/المؤخر المستقبيلة/الحالية

يمكن بسهولة أن نثبت رياضيا مضمون العلاقات التالية:

العلاقة بين $a_{\overline{n|}}$ و $\ddot{a}_{\overline{n|}}$

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = v\ddot{a}_{\overline{n|}}} \tag{4.14}$$

العلاقة بين $s_{\overline{n|}}$ و $\ddot{s}_{\overline{n|}}$

$$\boxed{s_{\overline{n|}} = v\ddot{s}_{\overline{n|}}} \tag{4.15}$$

العلاقة بين $a_{\overline{n|}}$ و $s_{\overline{n|}}$

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = v^n s_{\overline{n|}}} \tag{4.16}$$

العلاقة بين $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ و $\ddot{s}_{\overline{n|}}$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^n \ddot{s}_{\overline{n|}}} \tag{4.17}$$

مثال: نعلم القيمة الحالية لقسط مدفوع مسبقا:33, 21088 €. لو تم حسابها مؤخرا لكانت 33, 20088 €. أوجد نسبة الفائدة السنوية المستخدمة؟

الحل

باستخدام القاعدة (4.14) نجد:

$$v = \frac{20'277,24}{21'088,33} = 0,961538462$$

وبالتالي فإن: $i = \frac{1}{0,961538462} - 1 = 0,04$

(4.4.2) العمليات المتسلسلة

نسطيع التعبير عن أي قيمة حالية أو مستقبلية كمجموع عدد من القيم الحالية:

$$\boxed{a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{n}|} + v^n a_{\overline{k}|}} \quad (4.18)$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n+k}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n \ddot{a}_{\overline{k}|}} \quad (4.19)$$

$$\boxed{s_{\overline{n+k}|} = r^n a_{\overline{n}|} + a_{\overline{k}|}} \quad (4.20)$$

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n+k}|} = r^n \ddot{s}_{\overline{n}|} + \ddot{s}_{\overline{k}|}} \quad (4.21)$$

(4.4.3) العلاقات بين المعامل n و i

الإشكالية تتمثل في الآتي:

من خلال القاعدة $a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$ نبحث عن n بمعرفة $a_{\overline{n}|}$ و i أو نبحث عن i بمعرفة $a_{\overline{n}|}$ و n.

البحث عن قيمة i

هذه العملية هي صعبة للغاية لأنه لا يمكن كتابة i بدلالة بقية المعاملات. نستطيع - إذن - استخدام طريقة لتكرار العمليات (طريقة التصنيف أو طريقة النقطة الثابتة المعروضتين في الفصل السابع عشر) أو استخدام الدوال المضمنة لبرنامج إكسل أو للآلة الحاسبة تي-83.

إكسل

نعرض فيما يلي كيفية استخدام الدوال المالية في إكسل لإيجاد نسبة الفائدة في الحالات التالية:

$$i = RATE\left(n; -1; a_{\overline{n}|}; 0; 0\right) \Leftrightarrow a_{\overline{n}|}$$
$$i = RATE\left(n; -1; 0; s_{\overline{n}|}; 0\right) \Leftrightarrow s_{\overline{n}|}$$
$$i = RATE\left(n; -1; \ddot{a}_{\overline{n}|}; 0; 1\right) \Leftrightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|}$$
$$i = RATE\left(n; -1; 0; \ddot{s}_{\overline{n}|}; 1\right) \Leftrightarrow \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

مثال: لدينا اليوم مبلغ قدره 17572,22 € يمكننا من تسديد قسط سنوي يبلغ 2000 € طيلة عشر سنوات. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة في هذه العملية؟

الحل

نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$2'000\ddot{a}_{\overline{10}|} = 17'572,22,$ أي $\ddot{a}_{\overline{10}|} = \frac{17'572,22}{2'000} = 8,786109$

باستخدام دالة الإكسل نجد: $RATE(10; -1; 8.786109; 0; 0) = 3\%$

الآلة الحاسبة TI-83

نستخدم الحل المالي للآلة تي-83. لذلك نضغط على $\boxed{\text{APPS}}$ ، $\boxed{\text{Finance 1:}}$ ثم $\boxed{\text{TVM Solver}}$

مثال: يقوم مستثمر بإيداع مبلغ 5000 € سنويا في حساب توفير. وقد بلغ رأس المال عند نهاية السنة الرابعة مقدارا قدره. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة؟

الحل

نبحث عن i التي تحقق المعادلة التالية: $5'000 \;\ddot{}_{\overline{4}|} = 21'281,64$

أي: $\ddot{a}_{\overline{4}|} = \frac{21'281,64}{5'000} = 4,256328516$. ندخل القيم المبينة أدناه في صورة معامل ثم نضع المؤشر على مستوى 1%، حيث نقوم بإدخال قيمة عشوائية (مثال 1% = 5) ثم نضغط على $\boxed{\text{ALPHA}}$ ، $\boxed{\text{SOLVE}}$ وهذا ما يعطينا القيمة التالية: 1% = 2.5%.

N=4
1% = 5
PV=0
PMT=-1
FV = 5
P/Y = 1
C/Y = 1
PMT: BEGIN

البحث عن قيمة n

سوف يقتصر موضوع الفقرة على القسط المؤخر (الذي يدفع في نهاية الفترة). بالنسبة للقيم الأخرى، يتم تطبيق القواعد بشكل مماثل.

عند البحث عن قيمة n بمعرفة $a_{\overline{n|}}$ و i يمكن أن نحصل على عدد غير صحيح. نبدأ بعزل n داخل القاعدة $a_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i}$ وهو ما يعطي:

$$\boxed{n = \frac{\ln(1 - i a_{\overline{n|}})}{\ln v}} \qquad (4.22)$$

نسمي N العدد الصحيح الأصغر والأقرب من n و F الجزء العشري من n. من خلال المعادلة (4.18)، يمكن أن نكتب: $a_{\overline{n|}} = a_{\overline{N+F|}} = a_{\overline{N|}} + v^N \; a_{\overline{F|}}$

وبذلك فإن عدد الدفوعات المساوية لـ1 يبلغ N، إضافة إلى جزء آخر من القسط يقدر بـ$a_{\overline{F|}}$ ويدفع في آخر قسط.

لنفترض أن عقدا ينص على وجوب دفع الجزء من القسط سنة بعد نهاية السنة N، المطلوب – إذن – هو تسديد تكملة القسط البالغة $a_{\overline{F|}}$. وبالتالي فإن قاعدة تساوي القيم الحالية تكون قد تحققت: $a_{\overline{n|}} = a_{\overline{N+F|}} = a_{\overline{N|}} + v^{N+1} \; r a_{\overline{F|}}$

مثال: قرض يبلغ 1000 frs يتم تسديده على أقساط سنوية لفترة زمنية قدرها n. أوجد هذه الفترة الزمنية علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 10%؟

الحل

نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$400a_{\overline{n}|} = 1'000$ حيث $_{\overline{n}|} = \frac{1'000}{400} = 2,5$ يمكننا أن نحسب n على النحو التالي: $n = \frac{\ln(1-ia_{\overline{n}|})}{\ln v} = \frac{\ln(1-0,1\times 2,5)}{\ln v} = 3,018377187$

أي : N=3 و F=0,018377187 ثم نحسب القيمة $a_{\overline{F}|}$ بالاستعانة بالقاعدة (4.1)، وهو ما يعطينا: $a_{\overline{F}|} = 0,0175$. وبذلك يضاف إلى القسط الثالث البالغ 400 الجزء من القسط البالغ $400a_{\overline{F}|} = 400 \times 0,0175 = 7\ frs$ وذلك عند بلوغ أجل دفع هذا القسط.

يمكن أن ينص العقد كذلك على دفع الجزء من القسط بعد سنة. وفي هذه الحالة فإن القسط الأخير يساوي: $400ra_{\overline{F}|} = 400 \times 1,1 \times 0,0175 = 7,7\ frs$.

إكسل

تمكن الدوال المالية الموجودة في إكسل من حساب الفترة الزمنية من خلال القاعدة (4.22) ولكنها لا تمكن من حساب الجزء من القسط المدفوع مع آخر قسط:

$$n = NPER\left(i; -1; a_{\overline{n}|}; 0; 0\right) \Leftrightarrow a_{\overline{n}|}$$
$$n = NPER\left(i; -1; 0; s_{\overline{n}|}; 0\right) \Leftrightarrow s_{\overline{n}|}$$
$$n = NPER\left(i; -1; \ddot{a}_{\overline{n}|}; 0; 1\right) \Leftrightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|}$$
$$n = NPER\left(i; -1; 0; \ddot{s}_{\overline{n}|}; 1\right) \Leftrightarrow \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

مثال: نمتلك اليوم مبلغا قدره 17000 € يمكن من تسديد مقدار قسط بـ2000 € سنويا. كم الفترة الزمنية التي تسمح بمواصلة دفع هذا القسط علما بأن نسبة الفائدة هي 3%؟

الحل

يمكن كتابة العلاقة التالية:

$17'000 = 2'000\ \ddot{a}_{\overline{n}|}$ أي $\ddot{a}_{\overline{10}|} = \frac{17'000}{2'000} = 8,5$ باستخدام دالة الإكسل: $NPE(0.03;-1;8.5;0;0) = 9,958829123$ أي 9 أقساط بـ2000 € وجزء من القسط يبلغ: $2'000\ \ddot{a}_{\overline{0,958829123}|} = 1'918,82$ €

الآلة الحاسبة TI-83

في الآلة تي-83 نستخدم الحل المالي بوضع المؤشر على القيمة المجهولة N .

مثال: نمتلك اليوم مبلغا قدره 17000 € يمكن من تسديد مقدار قسط بـ2000 € سنويا. كم الفترة الزمنية التي تسمح بمواصلة دفع هذا القسط علما بأن نسبة الفائدة هي 3%؟

الحل

حسب المثال السابق المطلوب هو حساب القيمة: $\ddot{a}_{\overline{10}|} = \frac{17'000}{2'000} = 8,5$

وهو ما يؤدي إلى إدخال القيم التالية ثم نضغط على $\boxed{\text{ALPHA}}$ ، $\boxed{\text{SOLVE}}$ كي نحصل على القيمة التالية: N = 9,958829123

N =1

1% = 3

PV=8.5

PMT=-1

FV = 0

P/Y = 1

C/Y = 1

PMT: BEGIN

(4.5) الأقساط المخصصة

(4.5.1) القسط الأبدي

هذا القسط الأبدي هو متوالية هندسية لا نهائية.

الرموز:

$a_{\overline{\infty|}}$: القيمة الحالية لقسط لا نهائي مؤخر (يدفع في نهاية الفترة)

$\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$: القيمة الحالية لقسط لا نهائي مسبق (يدفع في بداية الفترة)

القاعدة المستخدمة لـ$a_{\overline{\infty|}}$

$$a_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \tag{4.23}$$

القاعدة المبسطة (انظر الفصل السادس عشر)

$$a_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i} \tag{4.24}$$

القاعدة المستخدمة لـ$\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \tag{4.25}$$

القاعدة المبسطة

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d} \tag{4.26}$$

مثال: نرغب في إحداث جائزة نوبل للرياضيات المالية. نمتلك رأس مال قدره 500000 €. ما هو مقدار الجائزة التي نستطيع منحها كل سنة دون توقف إذا أمكن لرأس المال أن ينمو بنسبة 2,5% سنويا؟

الحل

هذه الحالة هي لقسط أبدي حيث الفائدة فقط هي التي يتم صرفها (على الجائزة) في صورة قسط. والمبلغ الأصلي لن يتم استخدامه أبدا. وبالتالي من خلال القاعدة (4.24) ومعرفة كل من $_{\overline{\infty|}}$ و i نحصل على:

القسط السنوي = $ia_{\overline{\infty|}} = 0,025 \times 500'000 = 12'500€$ تدفع للمرة الأولى في نهاية السنة.

(4.5.2) القسط المؤجل

التعريف:

القسط المؤجل هو القسط الذي يبدأ نفاذه بعد فترة زمنية محددة تسمى الزمن المؤجل. قاعدة التحيين تنجز على مرحلتين: يتم تحيين القسط إثر تسديده ثم يتم تحيين إجمالي الفترة الزمنية المؤجلة.

الرموز:

$_{k|}a_{\overline{n|}}$: القيمة الحالية لقسط مؤخر (يدفع في نهاية الفترة) ومؤجل بعدد k من السنوات.

$_{k|}\ddot{a}_{\overline{n|}}$: القيمة الحالية لقسط مسبق (يدفع في بداية الفترة) ومؤجل بعدد k من السنوات.

نستلهم القواعد من التعريف ونكتبها على النحو التالي:

$$\boxed{_{k|}a_{\overline{n|}} = v^k a_{\overline{n|}}} \qquad (4.27)$$

$$\boxed{_{k|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^k \ddot{a}_{\overline{n|}}} \qquad (4.28)$$

ملاحظة:

القسط السنوي المؤخر والمؤجل يبدأ فعليا نفاذه سنة بعد الزمن المؤجل. في المقابل فإن القسط السنوي المسبق والمؤجل يبدأ مع نهاية الزمن المؤجل. وهذا ما يمكن من كتابة المعادلة التالية:

$$\boxed{{}_{k|}a_{\overline{n}|} = {}_{k+1|}\ddot{a}_{\overline{n}|}} \tag{4.29}$$

مثال: احسب القيمة الحالية لقسط قيمته frs 4000 سنويا لمدة 5 سنوات ومؤجل بفترة زمنية قدرها 3 سنوات ونصف. هذا القسط سيتم تسديده عند نهاية الفترة الزمنية المؤجلة مباشرة. نسبة الفائدة المستخدمة :3%

الحل

بما أن : $n = 5$ $k = 3,5$ $i = 0,03$ و $d = 0,029126213$

فإن: $\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\mathrm{d}} = \frac{1-0,97087378^5}{0,029126213} = 4,717098403$

وبذلك نحصل على: $4'000\,{}_{3,5|}\ddot{a}_{\overline{5}|} = 4'000 v^{3,5}\ddot{a}_{\overline{5}|} = 17'013,90\ frs$

(4.5.3) القسط المجزأ على فترات

يحدث في الواقع أن يتم دفع الأقساط التي حان أجلها بصورة مجزأة على عدد من الدفوعات. مثال: يمكن لقسط سنوي يبلغ frs 12000 أن يتم تجزئته إلى أقساط جزئية تدفع شهريا بحساب frs 1000 للشهر الواحد. في هذه الحالة نتحدث عن أقساط بقيم مجزأة.

تعريف:

نعرف الرمز $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ بأنه القيمة الحالية لقسط مسبق قدره 1 € يدفع جزئيا بنسبة $\frac{1}{m}$. القسط الأول الذي يبلغ $\frac{1}{m}$ يدفع بعد فترة زمنية قدرها $\frac{1}{m}$.

وبذلك فإن $12'000 a_{\overline{n}|}^{(12)}$ تمثل القيمة الحالية لقسط سنوي يبلغ 12'000 frs، مدفوع شهريا بمقدار frs 1000، المرة الأولى يدفع في نهاية الشهر.

طريقة الحساب:

الطريقة الأسهل هي استخدام مقياس زمني آخر ويتم ذلك من خلال كتابة نسبة الفائدة السنوية i بدلالة m.

وهذا ما يؤدي إلى تحويل القواعد المبسطة لـ $a_{\overline{n|}}, \ddot{a}_{\overline{n|}}, s_{\overline{n|}}, \ddot{s}_{\overline{n|}}$ باستخدام الفترة الزمنية المحولة إلى m أي nm.

إذا كانت X تمثل القسط السنوي فإن قاعدة التحويل تكتب كالآتي:

$$\boxed{Xa_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{X}{m} a_{\overline{nm|}i_m}} \tag{4.30}$$

وحيث إن فهم القواعد الأكتوارية للأقساط (الفصل التاسع) يتطلب كتابة القواعد المتضمنة للقيم الحالية المؤخرة والمسبقة وبصورتها العادية والمختصرة نورد هذه القواعد في الآتي:

القسط المؤخر (يدفع في نهاية الفترة):

$$\boxed{a_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{1}{m} v^{\frac{nm}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} v^{\frac{t}{m}}} \tag{4.31}$$

القسط المسبق (يدفع في بداية الفترة):

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \cdots + \frac{1}{m} v^{\frac{nm-1}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} v^{\frac{t}{m}}} \tag{4.32}$$

مثال: أوجد القيمة الحالية لقسط سنوي يبلغ 12000 € يدفع على خمس سنوات بأقساط مجزأة شهريا بحساب 1000 € القسط الواحد. نسبة الفائدة السنوية المستخدمة تساوي 10%؟

الحل

نبدأ بحساب النسبة المعادلة i_{12} :

$$i_{12} = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{12}} = 0{,}00797414$$

نكتب بعد ذلك الفترة بالأشهر: شهر $nm = 5 \times 12 = 60$

يبقى أن نحسب: $1000a_{\overline{60|}}$ حيث $v = \frac{1}{1+i_{12}} = 0{,}9920889435$ وبذلك نحصل على: $1000a_{\overline{60|}} = 47'538{,}50$ €

(4.5.4) القسط "أي كان"

هذه الفقرة تعتبر أكثر شمولية من الفقرات السابقة في دراسة الأقساط، حيث سيتم حساب القيمة الحالية لأقساط مختلفة في المقادير ونسب فوائدها مختلفة كذلك من فترة زمنية إلى أخرى.

الرموز:

i_t : نسبة الفائدة في الزمن t.

v_t : نسبة الخصم في الزمن t.

R_t : المبلغ المدفوع في الزمن t.

n : فترات الدفوعات بالسنوات.

نحصل على القيمة الحالية لقسط من خلال القاعدة التالية:

$$\boxed{\text{القيمة الحالية} = \sum_{t=0}^{n-1} v_t^t R_t} \qquad (4.33)$$

مثال: نقوم بإيداع المبالغ التالية: 300€ حالا، 2000€ بعد سنة و1000€ بعد سنتين. احسب القيمة الحالية لهذه المبالغ المودعة. نسبة الفائدة في السنة الأولى 3%، في السنة الثانية 2% وفي السنة الثالثة 1,5%.

الحل

يمكن تصميم الجدول التالي لتوضيح الحالة:

الزمن t	R_t	i_t	v_t^t	$v_t^t R_t$
0	300	0,03	1	300
1	2000	0,02	0,98039216	1960,78
2	1000	0,015	0,97066175	970,66

وبذلك تكون القيمة الحالية كالتالي: $\sum_{t=0}^{2} \ {}^{t}_{t}R_t = 3'231,44€$

(4.6) التمارين

1- احسب القيم التالية باستخدام نسبة فائدة 10%:

(أ) $800\ddot{a}_{\overline{10|}}$ (ب) $400a_{\overline{10|}}$ (جـ) $100\,s_{\overline{3|}}$

(د) $50\ddot{s}_{\overline{3|}}$ (هـ) $800a_{\overline{10|}}^{(12)}$ (و) $600s_{\overline{5|}}^{(4)}$

(ز) $50a_{\overline{\infty|}}$ (ح) $100_{8|}\ddot{a}_{\overline{9|}}$ (ط) $100\,{}_{8|}s_{\overline{9|}}^{(12)}$

2- ■ احسب $\sum_{t=1}^{50} s_{\overline{2t|}}$

3- اختزل العبارة التالية:

$$\frac{a_{\overline{40|}}}{a_{\overline{20|}}\,(2-ia_{\overline{20|}})}$$

4- ما هي القيمة الحالية لقسط مؤخر يقدر بـ10000 € يدفع كل سنتين طيلة عشر سنوات بنسبة فائدة 3%؟

5- اقترض شخص مبلغ 50000 *frs* من أحد المؤسسات البنكية. وقد تم الاتفاق بأن يسدد نفس المبلغ طيلة عشر سنوات. كم يقدر المبلغ المقرض إذا كان البنك يستخدم نسبة فائدة 10%؟

6- يقول المسؤول في البنك لسيليا: " بإمكانك سحب مبلغ 4870,75 € سنويا طيلة 15 سنة لكي تستنفذي رصيدك في الحساب". ما هو المبلغ الذي تمتلكه سيليا في حسابها إذا كان الحساب ينمو بنسبة 3%؟

7- يرغب أحد المدخرين في جمع مبلغ من المال عبر إيداع 100 *frs* في نهاية كل شهر في حساب ادخار ينمو بنسبة 4% طيلة 15 سنة. يتساءل المدخر عن الفرق في نهاية الأمر بين ادخاره بهذه الطريقة أو إيداعه لمبلغ 1200 *frs* في نهاية كل سنة؟

8- كم تحصل في نهاية السنة الثالثة إذا استثمرنا 2000 € عن كل سنة بنسبة فائدة 4% علما بأن القسط الأول تم إيداعه حالا؟

9- كم يبلغ رأس المال الذي وجب امتلاكه اليوم لكي نستطيع تمويل أقساط بـ3000 *frs* في نهاية كل شهر ولمدة خمسة سنوات وكذلك قسطا نهائيا يقدر بـ60000 *frs* يدفع في الشهر الذي يلي آخر شهر في الأقساط؟ نسبة الفائدة المستخدمة: 2%.

10- يعرض أحد البنوك اليوم شروطا للاقتراض لفائدة الخواص بنسبة فائدة سنوية تساوي 9%. أوجد مبلغ القسط المطلوب تسديده شهريا للحصول على قرض يقدر بـ60000 € يسدد على 60 شهرا.

11- إذا دفعنا اليوم مبلغ 12988 € فذلك يغطي مجموع 3 أقساط بـ3000 € للقسط الواحد علما بأن القسط الأول يدفع بعد سنة. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة في هذه العملية؟

12- يبلغ القسط السنوي لقرض يقدر بـ 100000 *frs* مقدار 12500 *frs* حيث يسدد القسط الأول سنة بعد الحصول على المبلغ المقرض. إذا كانت نسبة الفائدة تساوي 5,75 % سنويا، كم عدد الأقساط المطلوب سدادها وما هو مقدار القسط الأخير؟

13- يبلغ دخل (قسط) أحد المؤمن لهم البالغ من العمر 43 سنة، 5000 € يدفع شهريا لمدة خمس سنوات. هذا الدخل سوف يصرف للمؤمن له في نهاية كل فترة وحين يبلغ الستين من عمره. ما هو مقدار العلاوة (مبلغ الاشتراك) المطلوب سداده الآن لتمويل هذا الدخل العمري علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 3,3%؟

14- ■ ترغب إحدى الجمعيات الخيرية في تقديم الجائزة التالية من خلال منحة حصلت عليها اليوم تقدر بـ 100000 *frs* :

- جائزة تقدر بـ 1000 *frs* تصرف بداية من السنة القادمة ولمدى الحياة.
- جائزة قدرها 5000 *frs* تصرف كل خمس سنوات.
- الرصيد المتبقي يصرف كعلاوة نهاية السنة إلى إجمالي موظفي الجمعية طيلة عشرين سنة.

أوجد مقدار العلاوة الإجمالية المطلوب صرفها إلى الموظفين إذا علمت أن رأس المال ينمو سنويا بنسبة 2,5%؟

15- ■ يدفع أحد الأقساط البالغ 1000 € طيلة خمس سنوات، والقسط الأول يدفع آخر السنة. بداية من السنة الثانية تم توظيف نسبة جديدة على القسط تقدر بـ 2% سنويا مصدرها غلاء المعيشة. أوجد القيمة الحالية لهذا القسط إذا كانت نسبة الفائدة تساوي 5%؟

16- أوجد القيمة الحالية للدفوعات التالية مستخدما عددا من القواعد:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6	7
المبلغ		10	20	20	20		50	50

17- أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو):

(أ) بنسبة فائدة 0% . (ب) بنسبة فائدة 5%.

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	1000	1000	1000	1000	1000	1000

18- أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو) وبنسبة فائدة 5%:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	P	P	P	1000	1000	1000

19- ■ أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو) وبنسبة فائدة 5%:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	P	1000	2000	2000	6000	6000

20- ■ ولد السيد X بتاريخ 15.12.1942 وهو بإمكانه تحسين وضعه المالي من خلال إيداع مبالغ مالية غير موجبة في صندوق المعاشات الذي اختاره. وهذه الإيداعات ترصد في حساب ادخار.

في تاريخ 1/1/1993 أودع لأول مرة مبلغ 15000 *frs*. وبداية من شهر يناير التالي لعيد ميلاده الثالث والخمسين قام بإيداع مبلغ 2000 *frs* في بداية كل سنة. في شهر ديسمبر 2002، أعلمه صندوق المعاشات بأن حسابه لم يعد ينمو بأكثر من 2,5% وهو ما أدى بالسيد X إلى التوقف عن إيداع مبالغ في حسابه.

(أ) كم يبلغ رصيد الحساب في تاريخ 1.1.1993 بعد أن كان ينمو إلى حد هذا التاريخ بنسبة 4,5%؟

(ب) ما هو المبلغ الذي يفترض أن يودعه السيد X بتاريخ 1.1.1993 بدلا عن المقدار 15000 *frs* ليحصل على نفس الرصيد دون إيداع مبالغ سنوية إلى تاريخ 1.1.2003.

(جـ) ما هو رصيد حساب السيد X في 1 يناير الموالي لعيد ميلاده الثالث والستين.

الفصل الخامس

القروض
Les Emprunts

يلجأ الأشخاص والمؤسسات في كثير من الأحيان إلى الاقتراض كوسيلة للتمويل. هذا الفصل يعرف أهم أنواع القروض التي نعترضها في الحياة العملية والقواعد التي تميزها.

ينتهي الفصل بالقروض السندية التي نعرض من خلالها العمليات الحسابية على السندات.

(5.1) التعريفات والرموز

في هذه الفقرة نهتم بالقروض غير المجزأة أي القروض الصادرة عن مقرض واحد وهو عادة المؤسسة المالية، أما الفقرة الأخيرة فهي مخصصة لقروض السندات حيث يتدخل مجموعة من المقرضين.

أهم الأسئلة المتعلقة بالقروض هي:

- معرفة وضع الدين في كل لحظة.
- معرفة المبلغ المطلوب سداده في كل فترة.
- معرفة الفائدة الموجبة عند كل فترة.

المبالغ التي يتم إرجاعها في إطار التمتع بالقروض تسمى أقساط. يشمل القسط الجزء المتعلق بالسداد (يسمى كذلك الاستهلاك المالي) والجزء المتعلق بالفائدة.

$$\boxed{\text{القسط= الاستهلاك+الفوائد}} \qquad (5.1)$$

تعتبر عملية تجزئة القسط إلى جزئين هما: الاستهلاك والفوائد من أهم المفاهيم المستخدمة في الإدارة المالية وكذلك في المحاسبة. حيث يعتبر الجزء من القسط والمتعلق بالاستهلاك سداداً للدين، وهذا يميزه عن الجزء الثاني المتعلق بالفائدة والتي تعتبر تكلفة مالية.

يتم تدوين القسط في الدفاتر المحاسبية على النحو التالي:

الاستهلاك *دين وفرات مقداره X*

الفوائد *تكاليف مالية وفرات*

سوف ندرس في الفقرة التالية ثلاثة أنواع من القروض:

- القروض التي يتم سدادها في آجال محددة.
- القروض التي يتم سدادها باستهلاك ثابت.
- القروض التي يتم سدادها بأقساط ثابتة (الأكثر استخداما).

الرموز:

i نسبة الفائدة السنوية للقرض.

C المبلغ المقرض.

n مدة القرض بالسنوات.

C_k المبلغ المتبقي من القرض في بداية السنة k.

R_k المبلغ الذي تم سداده (الاستهلاك) في نهاية السنة k.

I_k مقدار الفائدة التي تم سدادها في نهاية السنة k.

S_k الاستهلاك التراكمي في نهاية السنة k.

A_k القسط المسدد في نهاية السنة (k $A_k = R_k + I_k$).

ملاحظات:

نتعامل هنا مع القروض السنوية. أما إذا أردنا التعامل مع قروض تسدد بأقساط مدتها m، فيكفي أن نغير نسبة الفائدة السنوية إلى النسبة المعادلة باستخدام القاعدة (3.9) وهي: $i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$. ثم نكتب الفترة السنوية بدلالة m أي mn.

الأقساط الشهرية الثابتة تسمى "الشهرية". اصطلاحا نعرف في حساب القروض الفترة وليس العصر أو العهد، حيث إن القرض يبدأ في الفترة الأولى وهذا ما يمكن من التعبير عن رأس المال الأصلي بالرمز $_1$ وليس C_0.

(5.2) القروض ذات الآجال الثابتة

في السنة الأولى من القرض يتضمن القسط الجزء المتعلق بالفائدة فقط. وفي السنة الثانية يتضمن الفائدة مع إجمالي المبالغ المطلوبة لسداد القرض.هذا النموذج من استهلاك القرض يستخدم خاصة في السندات التي سندرسها لاحقا.

القواعد التالية تمكن من إيجاد جميع العناصر المكونة لجدول الاستهلاك:

$$\boxed{C_k = C\ \forall k} \tag{5.2}$$

$$\boxed{R_k = S_k = \begin{cases} 0 & k < n \\ C & k = n \end{cases}} \tag{5.3}$$

$$\boxed{I_k = iC_k} \tag{5.4}$$

$$\boxed{A_k = R_k + I_k} \qquad (5.5)$$

مثال: قرض بمبلغ 1000 € وبنسبة فائدة 10% يسدد في أجله بعد أربع سنوات.
المطلوب إعداد جدول الاستهلاك وحساب تكلفة القرض

الحل

الفترة k	حالة الدين C_k	الاستهلاك R_k	الاستهلاك المتراكم S_k	الفائدة I_k	القسط A_k
1	1000	0	0	100	100
2	1000	0	0	100	100
3	1000	0	0	100	100
4	1000	1000	1000	100	1100

تكلفة القرض تمثل مجموع الفوائد أي 400 €

(5.3) القروض ذات الاستهلاكات الثابتة

المبلغ المسدد ثابت؛ أي أن المبلغ هو نفسه من سنة إلى أخرى ، القواعد التالية تمكن من إيجاد أي عنصر من عناصر جدول الاستهلاك:

$$\boxed{C_k = (n-k+1)\frac{C}{n}} \qquad (5.6)$$

$$\boxed{R_k = R = \frac{C}{n}} \qquad (5.7)$$

$$\boxed{S_k = k\frac{C}{n}} \qquad (5.8)$$

$$\boxed{I_k = iC_k} \qquad (5.9)$$

$$\boxed{A_k = R_k + I_k} \qquad (5.10)$$

مثال: قرض بمبلغ 1000 € وبنسبة فائدة 10% يسدد في أجله بعد أربع سنوات. المطلوب إعداد جدول الاستهلاك وحساب تكلفة القرض.

الحل

الفترة k	حالة الدين C_k	الاستهلاك R_k	الاستهلاك المتراكم S_k	الفائدة I_k	القسط A_k
1	1000	250	250	100	350
2	750	250	500	75	325
3	500	250	750	50	300
4	250	250	1000	25	275

تكلفة القرض تمثل مجموع الفوائد أي 250 €

(5.4) القروض ذات الأقساط الثابتة

وهي الحالة الأكثر شيوعا. وتستخدم هذه الحالة من قبل غالبية المؤسسات المانحة للقروض الصغيرة والإيجار المالي، فالشخص المقرض يعلم مسبقا مقدار المبالغ التي عليه تسديدها من سنة إلى أخرى. هذا المقدار هو في الواقع حاصل المعادلة الأكتوارية التالية: $C = Aa_{\overline{n|}}$ والتي سندرسها في الفصل القادم.القواعد التالية تمكن من إيجاد أي عنصر من عناصر جدول الاستهلاك:

$$\boxed{A_k = A = \frac{C}{a_{\overline{n|}}}} \tag{5.11}$$

$$\boxed{C_k = Aa_{\overline{n-k+1|}}} \tag{5.12}$$

$$\boxed{R_k = A - iC_k} \tag{5.13}$$

$$\boxed{S_k = Av^n s_{\overline{n|}}} \tag{5.14}$$

$$\boxed{I_k = iC_k} \tag{5.15}$$

مثال رقم (1): قرض بمبلغ 1000 € وبنسبة فائدة 10% يسدد في أجله بعد أربع سنوات. المطلوب إعداد جدول الاستهلاك وحساب تكلفة القرض

الحل

تم اختزال المنازل العشرية لجميع الأرقام:

القسط A_k	الفائدة I_k	الاستهلاك المتراكم S_k	الاستهلاك R_k	حالة الدين C_k	الفترة k
315	100	215	215	1000	1
315	78	452	237	785	2
315	55	713	261	548	3
315	29	1000	287	287	4

تكلفة القرض تمثل مجموع الفوائد؛ أي 262 €. وهذه النتيجة يمكن أن نحصل عليها من خلال: $nA - C$

مثال رقم (2): عرضت مؤسسة مالية الشروط التالية للحصول على قرض: نسبة الفائدة: 9%، المبلغ المقرض: 90000 frs مدة القرض: 5 سنوات والأقساط تسدد شهريا.

أوجد القسط الشهري وكذلك جميع العناصر المدرجة بالسطر رقم 13 من جدول الاستهلاك

الحل

نبدأ أولا بحساب: $i_{12} = (1+0{,}09)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}007207323$ والمدة بالأشهر نكتبها كالآتي شهرا $n = 5 \times 12 = 60$ ثم يتم حساب $a_{\overline{60|}}$ بنسبة فائدة 0,007207323 وهو ما يعطي: $a_{\overline{60|}} = 48{,}57123807$

القسط المطلوب هو – إذن –: $A = \frac{50'000}{a_{\overline{60|}}} = \frac{50'000}{48{,}57123807} = 1'029{,}40\, frs$

السطر الثالث عشر لجدول الاستهلاك (القسط الأول في السنة الثانية) يكتب على النحو التالي:

$$C_{13} = Aa_{\overline{60-13+1|}} = 1029{,}4158 a_{\overline{48|}} = 41'645{,}40\, frs$$

$$S_{13} = Av^n s_{\overline{13|}} = 9083,90\ frs$$
$$I_{13} = iC_{13} = 300,15\ frs$$
$$A_{13} = A = 1029,40\ frs$$

إكسل

في برنامج إكسل لا توجد قواعد تمكن من الحصول على القيم المختلفة لجدول الاستهلاك. في المقابل يمكن بسهولة إعداد جداول الاستهلاكات باتباع الخطوات التالية:

(أ) القرض ذو الاستهلاك الثابت

نبدأ بحساب القيمة: $R = \frac{C}{n}$ والتي نقوم بنسخها لجميع الفترات، بالنسبة للفترة الأولى نستخدم المعادلة: $C_1 = C$. وبالنسبة لبقية الفترات نسحب رأس المال المتبقي باستخدام المعادلة: $C_k = C_{k-1} - R_{k-1}$. ثم نستعمل الرمز iC_k لملء العمود المخصص للفائدة. أما عمود القسط A_k فيمكن إيجاده من خلال القاعدة: $A_k = R_k + I_k$. بالنسبة للسنة الأولى الاستهلاك المتراكم يساوي استهلاك الفترة ($S_1 = R_1$). أما بالنسبة للفترات الأخرى يمكن استخدام المعادلة التالية: $S_k = S_{k-1} + R_k$

(ب) القرض ذو القسط الثابت

نبدأ بحساب القيمة $A = \frac{C}{a_{\overline{n|}}}$ التي نقوم بنسخها لجميع الفترات. بالنسبة للفترة الأولى نجد: $C_1 = C$. أما الفترات اللاحقة الأخرى فنحسب رأس المال المتبقي من خلال العلاقة: $C_k = C_{k-1} - R_{k-1}$ ثم نستخدم القاعدة iC_k لحساب الفوائد. أما الحقل الذي يحتوي على الاستهلاك A_k فهو حاصل العلاقة التالية: $R_k = A_k - I_K$. كذلك بالنسبة للفترة الأولى، الاستهلاك المتراكم يساوي استهلاك الفترة ($C_1 = R_1$) وبالنسبة لبقية الفترات نستخدم العلاقة: $S_k = S_{k-1} + R_k$.

(5.5) القروض السندية

على عكس القروض الشخصية أو الفردية فإن السندات تستدعي مجموعة كبيرة من المقرضين نسميهم المساهمين، وهؤلاء المساهمون يحصلون مقابل المبالغ التي أقرضوها على شهادات تسمى سندات. كل سند هو ممثل بجزء نسبي من القرض ويتم إدراجه في السوق المالية (البورصة). يقتصر طرح مثل هذه القروض على الشركات الكبرى حيث يمكن من جمع مبالغ مالية ضخمة.

السند هو أداة دين مالية قابلة للتفاوض تصدرها هيئة عمومية (الدولة، منظمة حكومية أو أهلية) ويمثل جزء من قرض طويل الأجل وتعطي هذه الأداة صاحبها أحقية استلام الأرباح (الفوائد) التي تصرف في الغالب سنويا كما تعطيه أحقية استرجاع المبلغ المقرض عند انقضاء الأجل.

أهم خصائص السندات

القيمة الاسمية للسند وهي القيمة التي تحسب على أساسها الفوائد.

العائد الاسمي وهي نسبة الفائدة الاسمية التي تمكن من حساب الفائدة الموظفة على القيمة الاسمية لسند والتي يتم صرفها للمساهمين.

كذلك نسمي الفائدة الموظفة على سند "عائد الكوبون Coupon Interest".

سعر الطرح أو سعر الاكتتاب هو السعر الفعلي المدفوع من المساهم ليصبح متملكا لسند. غالبا يتم طرح السند بحسب القيمة الاسمية أو أقل.

عائد الاستحقاق Yield to Maturity هو المبلغ الفعلي الذي يتم صرفه للمقرض عندما يحين موعد استحقاق السند. هذا الاستحقاق من المتوقع أن يكون مساوياً للقيمة الاسمية أو أكثر.

يتم صرف الاستحقاق لجميع السندات في أغلب الحالات مرة واحدة على إثر انتهاء عملية الاقتراض. ونسمي عملية الاسترداد هذه إن فاين "in fine" .

وهو ما يرجعنا إلى القرض ذي الأجل الثابت فقرة (5.2). في كل سنة يتم دفع الكوبون فقط. وهذا يمثل بالنسبة للمقرض تكاليف مالية مهمة في نهاية آخر أجل. بسبب التعقيدات الإدارية فإن استحقاق الأقساط الثابتة لم يعد مستخدما، وبالتالي لن يتم التطرق إليه.

الرموز:

C القيمة الاسمية لسند.

N عدد السندات التي تم طرحها.

n المدة المتبقية للاستحقاق.

i نسبة الفائدة الاسمية للسند.

c الكوبون $(c = iC)$.

E سعر الطرح أو المساهمة.

R سعر الاستحقاق.

x معدل العائد الأكتواري (ARR).

P السعر الحالي للسند.

مثال: أصدرت إحدى الشركات سندات في شهر يونيو 2004 تنتهي بعد 10 أعوام بقيمة 3000000 يورو و300 سند أي بحساب 10000 يورو كقيمة اسمية للسند الواحد. نسبة التغطية: 99.5%. الاستحقاق بالقيمة الاسمية عند الأجل. العائد الاسمي: 4.5%. أوجد مختلف الرموز.

الحل

القيم المطلوبة هي التالية:

$$C = 10000 \; N = 300 \; CN = 3000000 \; n = 10 \; i = 0{,}045$$
$$E = 0{,}995 \times 10'000 = 9950 \; R = 10000 \; c = 450$$

(5.5.1) سعر السند عند الاستحقاق

في كل لحظة، يمكن حساب سعر السند الذي يساوي القيمة الحالية للكوبونات زائد عائد الاستحقاق على السند. ويتم تحديد القيمة الحالية على حسب نسبة الفائدة الحالية المستخدمة في سوق السندات لسندات مماثلة وبنفس المدة. وبالتالي إذا كانت المدة المتبقية n سنة فإن السعر الحالي للسند بنسبة فائدة i تساوي:

$$\boxed{P = ca_{\overline{n|}} + Rv^n} \tag{5.16}$$

أي أن السعر الحالي للسند هو مجموع القيمة الحالية للكوبونات المستقبلية زائد القيمة الحالية لعائد الاستحقاق إن فاين *in fine*

مثال: احسب السعر الحالي للسند إذا توفر لديك المعلومات التالية:

نسبة الفائدة السوقية:4% الكوبونات السنوية تساوي 450 *frs*. الاستحقاق على القيمة الاسمية بعد 5 سنوات: 10000 *frs*.

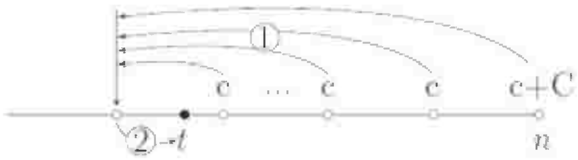
الحل

السعر الحالي للسند يتم تحديده من خلال القاعدة:

$$P = 450a_{\overline{5|}} + 10'000v^5 = 10'222,60\, frs$$

(5.5.2) سعر السند في تاريخ معين

إذا كنا نبحث عن سعر السند في تاريخ مختلف عن تاريخ صرف الكوبون، فإن أسهل طريقة لعمل ذلك تتمثل في حساب الخصم على سعر السند قبل سنة من صرف الكوبون القادم 1 ثم حساب العائد على رأس المال للقيمة المتحصل عليها إلى حين تاريخ صرف الكوبون 2. الرسم البياني التالي يوضح هذه الطريقة:



مثال: أوجد السعر الحالي للسند إذا توفر لديك المعلومات التالية:

نسبة الفائدة السوقية:7 % الكوبونات السنوية تساوي 400 € لقيمة اسمية تساوي 5000 €. متبقي 6 كوبونات على السند والكوبون القادم يحل أجله بعد 3 أشهر.

الحل

نبدأ بحساب:

1 $400a_{\overline{5|}} + 5000v^6 = 5'238{,}33$

2 نحسب العائد على رأس المال لهذه القيمة بعد فترة 9 أشهر:

$$5'238{,}33 \times 1{,}07^{9/12} = 5511{,}00\ €$$

(5.5.3) معدل العائد الأكتواري

معدل العائد الأكتواري x يعرف بأنه العائد الذي يحقق المعادلة التالية بدلالة المدة المتبقية للاستحقاق n:

عند الطرح:

$$\boxed{E = ca_{\overline{n|}} + Rv^n} \qquad (5.17)$$

في تاريخ معين:

$$\boxed{P = ca_{\overline{n|}} + Rv^n} \qquad (5.18)$$

وهذه القاعدة يمكن كتابتها على الشكل:

$$E = \underbrace{\frac{c}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} + \frac{c}{(1+x)^3} + \cdots + \frac{c}{(1+x)^n}}_{\text{القيمة الحالية للكوبونات المستقبلية}} + \underbrace{\frac{R}{(1+x)^n}}_{\text{القيمة الحالية للاستحقاق } in\ fine} \quad (5.19)$$

مثال: أوجد معدل العائد الأكتواري عند الطرح لسند معرف من خلال البيانات التالية:

الكوبونات السنوية: 450 € القيمة الاسمية 10000€، سعر الطرح 9950 € وتاريخ الاستحقاق بالقيمة الاسمية بعد عشر سنوات.

الحل رقم (1): طريقة التصنيف

باستخدام طريقة التصنيف المبينة في الفقرة 17.4.1 يجب إبراز هذه المعادلة على الصورة الجبرية التالية:

$$f(i) = 450\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{i} + 10'000\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10} - 9'950 = 0$$

نضع أولا كقيم مبدئية مثلا: $a = 0{,}01$ $b = 0{,}1$ ؛ حيث $f(a)f(b) < 0$

الجدول التالي يؤدي في نهاية العملية رقم عشرين إلى الحل:

$f(m)f(b)$	m	b	n
>0	,0550	,10	,010
<0	,03250	,0550	,010
<0	,043750	,0550	,03250
…	…	…	….
>0	**0,045633984**	,0456341550	,0456338120

الحل هو إذاً: $i = 4{,}5634\%$

الحل رقم (2): طريقة النقطة الثابتة

لكي نتمكن من استخدام هذه الطريقة يجب تحويل المعادلة (5.18) لتأخذ الصورة: $i = f\ (i)$ وهذا الأسلوب الذي يمكن اتباعه:

$P = ca_{\overline{n|}} + Rv^n$ المعادلة الأصلية.

$P = ca_{\overline{n|}} + R\,(1 - ia_{\overline{n|}})$ حساب ^{n} بدلالة $a_{\overline{n|}}$.

$P = R +\ (c - Ri)\ a_{\overline{n|}}$ تجميع وإظهار العبارة $_{\overline{n|}}$.

$i = \frac{c}{R} - \frac{P-R}{Ra_{\overline{n|}}}$ عزل i للحصول على العلاقة $i = f\ (i)$.

وهكذا فإن العلاقة المطلوبة هي:

$$i = \frac{450}{10000} - \frac{9950-10000}{10000a_{\overline{10|}}}$$

والتي يمكن كتابتها أيضا:

$$i = 0{,}045 + \frac{0{,}005}{a_{\overline{10|}}}$$

انطلاقا من قيمة معينة لـ i مثلا: $i = 0{,}1$ نتجه بسرعة إلى الحل النهائي على النحو التالي:

$f\ (i)$	i	n
,0458137270	,10	0
,0456344250	,0458137270	1
,0456338670	,04456344250	2
,0456338650	,04563388670	3
0,045633865	,0456338650	4

الحل هو إذا: $i = 4{,}5634\%$

الحل رقم (3): استخدام إكسل

لاستخدام هذه الطريقة المبينة في الفقرة رقم (17.4.3) نكتب القاعدة القاعدة التالية ثم نستخدم الأمر أستهداف Goal Seek:

	A	B	C	D
1	i	السعر		
2	0,1	=450*PV(A2,10,-1,0,0)+10000*(1+A2)^-10-9950		
3				

وهو ما يعطينا الحل الآتي: $i = 4{,}5634\%$

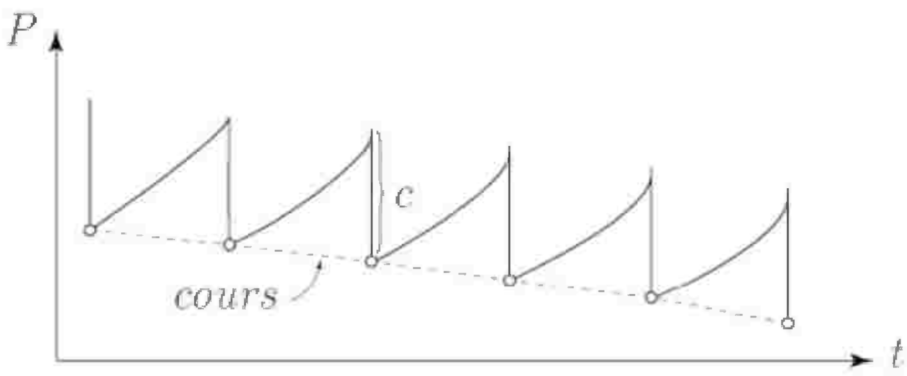
الحل رقم (4): استخدام الالة الحاسبة تي آي-83

لاستخدام هذه الطريقة المبينة في الفقرة (17.4.3)، نكتب القاعدة التالية في محرر الحلال Solver editor:

بالضغط على $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{SOLVER}}$ نحصل على نسبة الفائدة السوقية التي نبحث عنها: $i = 4{,}5634\%$

(5.5.4) سعر التداول

يتغير سعر التداول للسند بتغير الزمن على النحو التالي:



نلاحظ نموا للسعر في الفترة الموجودة بين تسديد قيمة الكوبونات ثم تراجعا للسعر عند صرف قيمة الكوبونات. وهذا التذبذب في سعر السند لديه بلا شك تأثير غير مرغوب فيه لدى المستثمرين. لذلك فإن عبارة سعر التداول يقصد بها أن السعر يتغير من فترة إلى أخرى.

هذا السعر المبين من خلال السطر المنقط في الرسم يمكن من إظهار تطور منتظم لسعر السند. ويعرف السعر من خلال المعادلة التالية التي تكتب بدلالة الجزء f من السنوات المنقضية على السند: $0 < f < 1$

$$\boxed{\text{السعر} = P - fc} \qquad (5.20)$$

العبارة fc ترمز إلى الفوائد الجارية.

يكتب سعر السند كذلك وفي أغلب الأحيان في صورة نسبة مئوية (%) للقيمة الاسمية C للسند وهو ما يمكن بيانه على الشكل التالي:

$$\boxed{\text{السعر} (\%) = \frac{\text{السعر}}{C} \times 100} \qquad (5.21)$$

مثال: احسب سعر التداول لسند في صورة نسبة مئوية إذا علمت أن القيمة الاسمية للسند تساوي 2000 € والكوبونات السنوية تبلغ 150 €. السعر الحالي للسند يبلغ 2180 € والكوبون القادم يصرف بعد شهرين.

الحل

مرت 10 أشهر على صرف آخر كوبون، وبالتالي:

$$\text{السعر} = 2180 - \frac{10}{12} \times 150 = 2055\ €$$

يكتب سعر التداول في صورة نسبة مئوية إذا تمت قسمة السعر على القيمة الاسمية للسند: $\frac{2055}{2000} \times 100 = 102{,}75\ \%$

(5.5.5) القيم الحالية للفوائد المستقبلية ولعائد الاستحقاق:

القيمة الحالية للفوائد المستقبلية تتغير تبعا لتغير نسبة الفائدة السوقية. وهو ما يؤثر بدوره على القيمة الحالية للاستحقاق.

القيمة الحالية (أو الحاضرة) للسند هي مجموع القيم الحالية للفوائد الناتجة عن امتلاك السند زائد قيمة الحالية للاستحقاق.

مثال: احسب القيمة الحالية لسند مجزأ بين القيمة الحالية للفوائد المستحقة واستحقاق القيمة الاسمية معتمدا على البيانات التالية:

نسبة الفائدة السوقية: 4%. الكوبونات السنوية: 450 *frs* الاستحقاق على القيمة الاسمية بعد خمس سنوات يبلغ: 10000 *frs*

الحل

نستخدم القاعدة التالية لحساب سعر السند:

$P = 450a_{\overline{10|}} + 10000v^5 = 10222{,}60\ frs$ القيمة الحالية للاستحقاق تساوي:

$$10000v^5 = 8219{,}27\ frs$$

القيمة الحالية للفوائد المستقبلية هي: $450a_{\overline{10|}} = 2003{,}33\ frs$

تجد مثل هذه المفاهيم (القيم الحالية للفوائد المستقبلية والاستحقاق) في مجال التوثيق وخصوصا في العمليات المتعلقة بتقسيم الإرث ميدانا خصبا للتطبيق.

حيث إن كل ممتلك أو رأس مال يمكن تقسيمه إلى قسمين: حق الانتفاع (القيمة الحالية للفوائد المستقبلية) والقيمة الصافية للممتلك (القيمة الحالية للاستحقاق). عند وفاة صاحب الحق في الانتفاع فإن مالك القيمة الصافية

للممتلك يسترجع كامل حقوقه. مثلا: في حالة العقار صاحب الحق في الانتفاع له حق استغلال العقار بفوائده وغلته بينما صاحب القيمة الصافية للعقار ليس إلا مالكا له.

مثال: باعت أم في عمر 70 عاما (بمعدل حياة يقدر بـ 15 سنة) وولدها مسكناً بلغت قيمته 800000 *frs*. الأم تعتبر صاحبة حق الانتفاع بينما الولد هو في حقيقة الأمر صاحب الاستحقاق (مالك المسكن). إذا عملت أن قيمة المسكن الاستئجارية تساوي 5%، ما هو نصيب كل من الأم والولد في المبلغ المتحصل عليه من عملية البيع علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 3%؟

الحل

لنرمز إلى X نصيب الولد (صاحب قيمة الاستحقاق). نستطيع وضع المعادلة التالية: $800000 = 40000a_{\overline{15|}} + Xv^{15}$

وبالتالي: $X = 502417{,}37$

نصيب الولد:

$$502417{,}37v^{15} = 322482{,}00\, frs$$

نصيب الأم:

$$40000a_{\overline{15|}} = 477517{,}40\, frs$$

(5.6) التمارين

1- قرض يقدر بـ 100000 € يسترجع بمبلغ واحد يساوي 110000 € خلال أربع سنوات. أوجد نسبة الفائدة المستخدمة.

2- قرض بمبلغ 6000 *frs* يسترجع عبر قسطين: الأول بقيمة 3000 *frs* بعد سنة والثاني بقيمة 4000 *frs* بعد سنتين.

(أ) احسب نسبة الفائدة السنوية للقرض.

(ب) أوجد جدول الاستهلاك لهذا القرض.

3- أوجد السطر الخامس لجدول الاستهلاك لقرض باستهلاك ثابت يبلغ 12000 *frs* علما بأن مدة القرض 5 سنوات ونسبة الفائدة السنوية 9.5%. الأقساط تسدد كل ثلاثة أشهر.

4- لدينا مقدار القسط الخامس الذي بلغ 222 € لقرض يسدد باستهلاكات ثابتة، أما القسط السادس فقد بلغ 210 € كما بلغت نسبة الفائدة: 8%. أوجد المدة وكذلك مقدار المبلغ المقرض؟

5- ■بين أن عملية استرداد القرض بأقساط ثابتة تمثل رياضيا متوالية هندسية أساسها $r = 1 + i$.

6- يسدد دين قيمته 40000€ على 10 أقساط سنوية ثابتة بمقدار X. أول قسط يتم دفعه بعد عشر سنوات.

(أ) أوجد معادلة التوازن الأكتواري.

(ب) أوجد القيمة X إذا كانت نسبة الفائدة السنوية تساوي 7%.

7- يسدد قرض في مدة عشر سنوات بأقساط ثابتة وبمعدل قسط واحد كل سنتين. أوجد السطر الثالث من جدول الاستهلاك إذا كانت نسبة الفائدة المستخدمة تقدر بـ8% ومبلغ الدين يقدر بـ15000 €.

8- قرض يتم تسديده بأقساط ثابتة عددها 10. يبلغ الاستهلاك الثالث 782 €. والاستهلاك السادس يبلغ 1012,7 €.

(أ) أوجد نسبة الفائدة السنوية.

(ب) أوجد مقدار القرض.

(جـ) أوجد مقدار المبلغ المتبقي من القرض بعد تسديد القسط السابع.

(د) أوجد السطرين الأخيرين من جدول الاستهلاك.

9- قرض مقداره 100000 € ونسبة فائدته 4,30%، بينما بلغت الأقساط الشهرية 750,64€. احسب نسبة الفائدة الفعلية التي يتحملها المقرض إذا أخذنا في الاعتبار تكلفة 800 € مقابل مصاريف إدارية موظفة من قبل المؤسسة المالية.

10- أوجد السطر الثاني عشر من جدول الاستهلاك لقرض مقداره 35000 *frs* يتم استرجاعه بأقساط ثابتة مدتها 5 سنوات. نسبة الفائدة السنوية للقرض: 9,5%.

11- ■ قرض يبلغ 100000 € بنسبة فائدة 9% يسترجع في مدة 15 سنة بأقساط ثابتة. بعد تسديد القسط السادس، قرر المقرض خفض نسبة الفائدة إلى 8% لبقية الاقساط.

(أ) ما هو مقدار القسط الجديد؟

(ب) كم عدد الأقساط المتبقية إذا واصلنا تسديد نفس مقدار القسط الأول وكم يبلغ مقدار القسط الأخير؟

12- ■ عجز أحد العملاء عن دفع القسط الشهري الخامس عشر لقرض يبلغ 30000 € (أقساط ثابتة لمدة خمس سنوات). يرغب العميل في تمديد مبلغ الدين المتخلد بذمته على فترة 10 سنوات. احسب القسط الشهري الجديد إذا كانت نسبة الفائدة السنوية تبلغ 9,5%.

13- عجز أحد العملاء عن دفع القسط الشهري الخامس عشر لقرض يبلغ 30000 € (أقساط ثابتة لمدة خمس سنوات). في المقابل فهو قادر على دفع 60% مما يدفعه الآن. وافق المسؤول البنكي على إعادة جدولة الدين لهذا العميل

يمنحه مدة تسديد أطول. إذا علمت ان نسبة الفائدة السنوية تبلغ 9,5%. أوجد عدد الأقساط وكذلك مقدار القسط النهائي الجزئي.

14- ★ شاهدا نيكولا وسيبستيان الإعلان التالي: يمنحك بنك "قروسو" يقترح عليكم قرضا لمدة أربع سنوات بنسبة فائدة سنوية 9,85% وبأقساط أو استهلاكات ثابتة. فقام الرجلان باقتراض نفس المبلغ من البنك. نيكولا اختار نظام الاقتراض باستهلاكات ثابتة بينما اختار سيبستيان نظام القسط الثابت. بعد فترة قال نيكولا لسيبستيان: لقد سددت الآن نفس القسط الذي تقوم أنت بتسديده. هل تستطيع تحديد تاريخ بداية الاقتراض عند الطرفين؟

15- ★ أقرضت إحدى المؤسسات البنكية رجلا يدعى "دونيس" مبلغا وطلبت منه إرجاعه في مدة عشر سنوات بدون فوائد وبالطريقة التالية:

- في نهاية السنة الأولى يرجع نصف المبلغ.
- في نهاية السنة الثانية يرجع ثلث المبلغ المتبقي.
- في نهاية السنة الثالثة يرجع ربع المبلغ المتبقي.
- . ...
- في نهاية السنة التاسعة يرجع عشر المبلغ المتبقي.
- في نهاية السنة العاشرة يرجع المبلغ المتبقي وهو 300 €.

إذا علمت أن جميع العمليات تتم بأرقام صحيحة وباليورو. ما هو المبلغ المقرض لـ"دونيس"؟

16- يحصل مالك أحد السندات على مبلغ 80 € في نهاية السنوات 2005 و2006 و2007 و2008 و2009 وعلى مبلغ نهائي يقدر بـ2080€ في نهاية السنة

2010. ما هو سعر هذا السند بتاريخ 1.1.2005 الذي يمكن من تحقيق معدل عائد يساوي 6%؟

17- تبلغ القيمة الاسمية أحد السندات *frs* 5000 وتحقق نسبة فائدة سنوية تقدر بـ7%.وهي مستحقة بالقيمة الاسمية خلال أربع سنوات. سعر السند الحالي هو *frs* 5220 . أوجد معدل عائد الاستحقاق لهذا السند؟

18- نشتري سند قيمته 10000€ بمبلغ 9900 € بنسبة فائدة 4,5% تسترجع بآجال ثابتة خلال خمس سنوات. الفائدة الاسمية تدفع بأجزاء نصف سنوية. ما هو معدل عائد الاستحقاق لهذا السند؟

19- سند قيمته *frs* 5000 بكوبونات سنوية تقدر بـ6% تم شراءه بعد 15 يوما من الحصول على الكوبون المتداول بسعر *frs* 92,50 . أوجد سعر السند؟

20- سند بقيمة اسمية بلغت 1000 € ومتبقي له 8 كوبونات نسبة الفائدة المستحقة لها 3% سنويا. أوجد سعر التداول للسند بنسبة تقييم 5%:

(أ) 5 سنوات قبل انتهاء الأجل.

(ب) 4 سنوات وشهرين قبل انتهاء الأجل.

(جـ) 3 سنوات و3 أشهر قبل انتهاء الأجل.

21- تقدر قيمة أحد الممتلكات العقارية بـ 500000 € كما تقدر قيمته الاستئجارية السنوية بـ5%. ما هو نصيب استحقاق الملكية الراجع للسيدة "مارتان" البالغة من العمر 77 سنة والتي يقدر توقع عمرها 11 سنة. نسبة الفائدة المستخدمة: 3%.

الفصل السادس

استهلاك الأصول الثابتة

Les Biens D'èquipement

يستعرض الفصل أهم الطرق الرياضية المتعلقة باستهلاك الأصول الثابتة والمفاضلة بين مختلف الاستثمارات، وهذه المفاضلة سوف يتم تحليلها من خلال عدة معايير، من بينها القيمة الصافية الحالية، معدل العائد الداخلي أو سعر الربحية.

(6.1) الاستهلاكات

تخضع التجهيزات والمعدات إلى تهالك تدريجي ناتج عن التلف والتقادم.هذا الانخفاض في قيمة المعدات يتم تدوينه في المحاسبة كتكلفة ويسمى الاستهلاك المحاسبي. يجب التمييز بين الاستهلاك المالي الذي يمثل سداد الدين والاستهلاك المحاسبي الذي ينطوي على انخفاض في قيمة وسائل الإنتاج.

بعض المعدات تسجل خسارة شبه منتظمة في قيمتها على عكس معدات أخرى التي تتهالك بسرعة أكبر في السنوات الأولى. سوف نتعرض هنا إلى الطرق المستخدمة عمليا لوصف مختلف هذه الظواهر.

فيما يلي نستعرض القواعد الموجودة في مايكروسوفت إكسل ونعرض الصيغة التي تكتب على أساسها هذه القواعد. ولمزيد من المعلومات يمكن الاستعانة بالدعم المتوفر في البرنامج حول استخدام هذه الدوال.

الرموز:

V_0 القيمة الأولية للأصل الثابت.

V_k قيمة الأصل الثابت بعد الاستهلاك رقم k.

V_n القيمة التخريدية للأصل الثابت.

A_k مقدار الاستهلاك للفترة k $k \in \{1; 2; \dots; n\}$.

n عدد سنوات الاستهلاك.

i معدل الاستهلاك.

(6.1.1) طريقة القسط الثابت

المبدأ

قيمة الأصول الثابتة تنقص بمبلغ سنوي ثابت طيلة سنوات عمرها الإنتاجي.

$A_k = A \; \forall \, k \in \{1; 2; \dots; n\}$ وهذا يمكن من:

قيمة الأصل الثابت بعد سنة: $V_1 = V_0 - A$.

قيمة الأصل الثابت بعد سنتين: $V_2 = V_1 - A = V_0 - 2A$.

قيمة الأصل الثابت بعد 3 سنوات: $V_3 = V_2 - A = V_0 - 3A$ وهكذا...

قيمة الأصل الثابت بعد n سنة: $V_n = V_0 - nA$.

نستطيع أن نستنتج:

$$\boxed{A = \frac{V_0 - V_n}{n}} \quad (6.1)$$

مثال: فقدت آلة تم اقتناؤها بمبلغ 1000 €، 90% من قيمتها خلال 5 سنوات. أوجد الاستهلاك السنوية المسجل باستخدام طريقة القسط الثابت. ثم أوجد جدول الاستهلاك.

الحل رقم (1)

لدينا القيم التالية: $V_0 = 10000, V_n = 100, n = 5$ إذا:

$$A = \frac{1'000-100}{5} = \frac{900}{5} = 180\ €$$

جدول الاستهلاك:

الفترة	الاستهلاك	القيمة
0		1000
1	180	820
2	180	640
3	180	460
4	180	280
5	180	100

الحل رقم (2): استخدام إكسل

في إكسل يجب استخدام الدالة $SLN\ (V_0; V_n; n)$

$$A = SLN(1000; 100; 5) = 180\ €$$

ملاحظة: تناسب هذه الطريقة خصوصا المعدات التي تسجل تهالكا ثابتا، كالأثاث المكتبي مثلا.

(6.1.2) طريقة مجموع أرقام السنين

المبدأ

تتناقص قيمة الأصل الثابت بطريقة طردية معاكسة لترتيب السنوات. مثلا، إذا كان أصل يقدر عمره الإنتاجي بـ4 سنوات فإن استهلاكه السنة الأولى

يبلغ $^4/_{10}$ والسنة الثانية $^3/_{10}$ والسنة الثالثة $^2/_{10}$ والسنة الأخيرة $^1/_{10}$.
الأساس المشترك هو الرقم 10 الذي يساوي مجموع الأرقام: 1+2+3+4.

هذه الطريقة توصف رياضيا على النحو التالي:

$$A_k = \frac{V_0 - V_n}{S_n}\,(n-k+1)$$

حيث $_n$ تساوي مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى n

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

وهو ما يمكن من كتابة ما يلي: $\forall\, k \in \{1; 2; \dots; n\}$

$$\boxed{A_k = \frac{2\,(V_0 - V_n)}{n\,(n+1)}\,(n-k+1)} \tag{6.2}$$

مثال: تبلغ القيمة الأولية لأحد الأصول frs 75000 وسوف يتم استهلاكه في مدة خمسة سنوات بطريقة مجموع أرقام السنين.

أوجد جدول الاستهلاكات

الحل رقم (1): الطريقة العادية

نبـــدأ أولا بإيجـــاد $S_5 = 1+2+3+4+5 = 15$؛ وبالتـــالي فـــإن الاستهلاكات تحسب كالآتي:

$$A_1 = {}^5/_{15} \times 75'000 = 25'000\ €$$

$$A_2 = {}^4/_{15} \times 75'000 = 20'000\ €$$

$$A_3 = {}^3/_{15} \times 75'000 = 15'000\ €$$

$$A_4 = {}^2/_{15} \times 75'000 = 10'000\ €$$

$$A_5 = {}^1/_{15} \times 75'000 = 5'000\ €$$

جدول الاستهلاك:

الفترة	الاستهلاك	القيمة
0		'00075
1	'00025	'00050
2	'00020	'00030
3	'00015	'00015
4	'00010	'0005
5	'0005	0

الحل رقم (2): استخدام القاعدة (6.2)

لكل قيمة من القيم التالية للمؤشر k $\forall k \in \{1;2;\dots;n\}$ نوجد جميع القيم A_k حيث تساوي هذه القيمة لـ $k=3$ مثلا:

$$A_3 = \frac{2(75'000-0)}{5\times6}(5-3+1) = 15'000\ €$$

الحل رقم (3): استخدام إكسل

في برنامج إكسل يجب استخدام الدالة $SYD(V_0;V_n;n;k)$

$$A = SYD(75000;0;5;3) = 15'000€$$

ملاحظة: يناسب هذا النوع من الاستهلاك المعدات والممتلكات التي تستهلك بقوة في السنوات الأولى من استخدامها كالسيارات مثلا.

(6.1.3) طريقة القسط المتناقص

المبدأ

نطبق على قيمة الخردة معدل استهلاك ثابت، وعمليا يعد هذا النموذج من أكثر النماذج استخداما.

قيمة الأصل بعد سنة : $V_1 = V_0 - V_0 i = V_0\,(1-i)$.

قيمة الأصل بعد سنتين : $V_2 = V_1 - V_1 i = V_0\,(1-i)^2$.

. ...

قيمة الأصل بعد n سنة : $V_n = V_0\,(1-i)^n$.

وهذا ما يؤدي إلى حساب ما يلي:

$$\boxed{i = 1 - \sqrt[n]{\frac{V_n}{V_0}}} \qquad (6.3)$$

علما بأن: $A_k = V_{k-1}\,i$ (مبدأ طريقة القسط المتناقص)، أي:

$$\boxed{A_k = V_0\,(1-i)^{k-1} i} \qquad (6.4)$$

نستنتج أن هذه الطريقة لن تؤدي إلى قيمة خردة مساوية للصفر $(V_n \neq 0)$

بالتعويض عن قيمة (6.3) في القاعدة (6.4) نستطيع أن نكتب k على النحو التالي:

$$\boxed{A_k = V_0 \left\{ \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{\frac{k-1}{n}} - \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{\frac{k}{n}} \right\}} \qquad (6.5)$$

مثال: أصل بقيمة أولية تقدر بـ1000 € وجب استهلاكه في مدة خمس سنوات باستخدام طريقة القسط المتناقص. قيمة الخردة تقدر بـ200 €. أوجد جدول الاستهلاك.

الحل (1): الطريقة العادية

نبدا أولا بإيجاد معدل الاستهلاك i:

$$i = 1 - \sqrt[4]{\frac{200}{1{,}000}} \approx 0{,}33126$$

نطبق بعد ذلك ولكل سنة هذا المعدل على القيمة في بداية السنة، وهذا ما يمكن - بعد الاستعانة ببرنامج الجداول الإلكترونية - من حساب جدول الاستهلاك التالي:

جدول الاستهلاك:

الفترة	الاستهلاك	القيمة
0		'0001
1	,26331	,74668
2	,52221	,22447
3	,14148	,07299
4	,0799	200

الحل رقم (2): استخدام القاعدة (6.2).

لكل قيمة من القيم التالية للمؤشر k $\forall k \in \{1; 2; \dots; n\}$ نوجد جميع القيم A_k حيث تساوي هذه القيمة لـ $k = 3$ مثلا:

$$A_3 = 1'000\ (1 - 0{,}33126)^2 \times 0{,}33126 = 148{,}14\ €$$

الحل رقم (3): استخدام إكسل

في إكسل يجب استخدام الدالة المدرجة في البرنامج $DB\ (V_0; V_n; n; k)$

$$A = DB(1000; 200; 4; 3) = 148{,}14\ €$$

ملاحظة: طريقة القسط المتناقص تناسب الأصول التي تسجل اهستلاكا قويا جدا في السنوات الأولى من الاستخدام مثل الحواسيب الآلية. وهذه الأصول تسجل انخفاضا في قيمتها أكثر حدة في السنوات الأولى من الأصول التي تحسب حسب طريقة مجموع أرقام السنين.

طرق القسط المتناقص ومجموع أرقام السنين يمكن أن تقرأ استهلاكاتها بطريقة تصاعدية إذا عكسنا ترتيب هذه الاستهلاكات. وهو ما يتم فعليا أحيانا

عندما نريد حساب استهلاك الأصول التي تنقص قيمتها بنسب ضعيفة في السنوات الأولى، وبنسب قوية في السنوات الأخيرة. وهي الحالة التي نجدها عند خيول السباقات.

(6.2) تقييم الاستثمارات الرأسمالية

الاستثمار هو عملية تملك آلة إنتاج من قبل المؤسسة. ينطوي الاستثمار على تكلفة فورية تسدد بشكل كامل أو على مراحل تلحقها إيرادات مستقبلية تُسمى تدفقات نقدية. وكما شاهدنا في الفقرات المخصصة للاستهلاك أن الأصول الرأسمالية يمكن أن تكون لها قيمة نهائية تسمى خردة عند انتهاء مدة صلاحيتها.

يوجد عدة معايير نوردها في الفقرة التالية التي تمكن من المفاضلة بين استثمارين A و B: معيار صافي القيمة الحالية (NPV) ومعيار معدل العائد الداخلي (IRR) وكذلك مدة استرجاع الاستثمار.

الرموز:

V_0 : القيمة الأولية أو قيمة التملك.

V_n : القيمة النهائية أو قيمة الخردة.

C_k : التدفقات النقدية أو الإيرادات في السنة k حيث $k \in \{1; 2; \dots; n\}$.

i : معدل الخصم أو معدل تكلفة رأس المال.

(6.2.1) صافي القيمة الحالية

تعريف

صافي القيمة الحالية (NPV) هو الفارق بين القيم الحالية للتدفقات النقدية الداخلة والقيم الحالية للتدفقات النقدية الخارجة. ومن المهم أن نستوعب هذا المفهوم. يقول "La Palice": "يصبح الاستثمار مفيدا إذا حصلنا على إيرادات تفوق المصروفات". هذه الحقيقة المفسرة بمصطلحات مالية نعبر عنها كالآتي: يكون

الاستثمار مفيدا إذا كانت إيراداته أعلى من مصاريفه بالقيمة الحالية. ورياضيا يعبر عنه كالتالي:

$$NPV = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0 \qquad (6.6)$$

أو:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0 \qquad (6.7)$$

ملاحظة: إذا كانت التدفقات النقدية ثابتة $(C_k = C)$ فهذا يعود بنا إلى قاعدة الدخل المؤكد في نهاية الفترة:

$$NPV = C_k a_{\overline{n|}} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0$$

يعتبر الاستثمار مربحا إذا كانت *NPV* موجبة. ومن وجهة نظر مالية بحتة، يستحق الاستثمار العمل به.

في حالة المفاضلة بين استثمارات متعددة، نختار الاستثمار ذا أعلى صافي قيمة حالية.

مثال رقم (1): ترغب مؤسسة في امتلاك آلة جديدة تقدر قيمتها بـ6000 *frs* وهو ما يمكن من خفض تكلفة الإنتاج بـ1000 *frs* سنويا لمدة خمس سنوات. نقدر قيمة هذه الآلة بعد خمس سنوات (الخردة) بـ3000 *frs*.

هل يجب شراء هذه الآلة إذا علمت أن هذا الاستثمار سوف يتم تمويله بقرض مالي نسبة فائدته تساوي 10%؟

الحل رقم (1):

بحساب "ص ق ح" (صافي القيمة الحالية) باعتبار $i = 0{,}1$ نجد:

$$NPV = 1'000a_{\overline{5|}} + 3'000v^5 - 6'000 = -346,4\ frs$$

ص ق ح هو عدد سالب لذلك لا توجد فائدة –حسب هذا المعيار– لشراء الآلة.

الحل رقم (2): استخدام إكسل

توجد في برنامج إكسل الدالة: $NPV\ (i; C_1; C_2; \dots)$

يجب الانتباه عند استخدام هذه الدالة إلى كونها لا تأخذ في الاعتبار القيمة الأولية $_0$.

نكتب الدالة على النحو التالي:

	A	B	C	D
1	=-6000+NPV(0,1:1000:1000:1000:1000:4000)			
2				

مثال رقم (2): ترغب مؤسسة صيدلانية في تطوير دواء جديد. يمكنها أن تختار بين الإستراتيجيتين التاليتين:

(أ) استثمار مبلغ مليار فرنك (سويسري) وبيع الدواء مباشرة. في هذه الحالة تقدر الإيرادات في نهاية السنة الأولى بـ500 مليون *frs*، و400 مليون *frs* بعد سنتين و 300 مليون *frs* بعد ثلاث سنوات.

(ب) تطوير الدواء في مدة أطول وذلك باستثمار 200 مليون الآن و200 مليون بعد سنة ثم الحصول على 300 مليون في نهاية السنتين الثانية والثالثة.

ما هي الإستراتيجية المناسبة للشركة إذا كان بإمكانها الحصول على تمويل بنسبة فائدة 5% سنويا؟

الحل رقم (1):

بحساب ص ق ح (NPV) للمشروع a – باعتبار $i = 0,05$ و $V_0 = -1'000$ $C_1 = 500$ $C_2 = 400$ $C_3 = 300$ نجد:

$$NPV_a = \frac{500}{1,05} + \frac{400}{(1,05)^2} + \frac{300}{(1,05)^3} - 1'000 = 98,15$$ مليون frs

أما ص ق ح (NPV) للمشروع b –باعتبار $i = 0,05$ و $V_0 = 200 + -\frac{200}{1,05}$ $C_1 = 200$ $C_2 = 300$ $C_3 = 300$ فهي تساوي:

$$\mathrm{NPV}_b = \frac{300}{(1,05)^2} + \frac{300}{(1,05)^3} - 200 - \frac{200}{1,05} = 140,78 \text{ M frs}$$

حسب معيار صافي القيمة الحالية الإستراتيجية b تعتبر أكثر أهمية.

الحل رقم (2): استخدام إكسل

نكتب داخل إكسل القاعدة التالية:

	A	B	C
1	=-6000+NPV(0.05,-200,300,300)		
2			

والنتيجة هي: *NPV=140,78 M frs*

(6.2.2) معدل العائد الداخلي

تعريف

معدل العائد الداخلي هو نسبة التحديث التي تجعل صافي القيمة الحالية للمشروع مساوية للصفر. يجب إذاً إيجاد النسبة i التي تحقق المعادلة التالية:

$$\boxed{V_0 = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n}} \qquad (6.8)$$

أي:

$$\boxed{V_0 = C_k a_{\overline{n|}} + \frac{V_n}{(1+i)^n}} \qquad (6.9)$$

ملاحظات:

- حل هذه المعادلة يمكن التوصل إليه باستخدام طريقة الاستيفاء التي تم عرضها في الفقرة 17.4.1 من هذا الكتاب أو باستخدام برنامج إكسل.
- هذه المعادلة من الدرجة n يمكن أن يكون لها حلول متعددة حسب قيم الحدود الأولية المختارة لحساب الجذور.
- إذا كان معدل العائد الداخلي للاستثمار أقل من نسبة الفائدة الموجودة في السوق المالية فإن من صالح المستثمر أن يستثمر أمواله في هذه السوق بدلا من هذا الاستثمار.
- للمفاضلة بين استثمارين نختار الاستثمار الذي يحقق أعلى معدل عائد داخلي.

مثال رقم (1): أوجد معدل العائد الداخلي لمشروع تقدر تدفقاته النقدية على النحو التالي:

السنة	0	1	2	3	4
التدفق النقدي	960–	950	1000	500–	500–

الحل رقم (1): طريقة الاستيفاء

لدينا القيم التالية:

$$C_4 = -500 \; V_0 = 960 \; C_1 = 950 \; C_2 = 1000 \; C_3 = -500$$

يجب حل المعادلة:

$$960 = \frac{950}{1+i} + \frac{1000}{(1+i)^2} - \frac{500}{(1+i)^3} - \frac{500}{(1+i)^4}$$

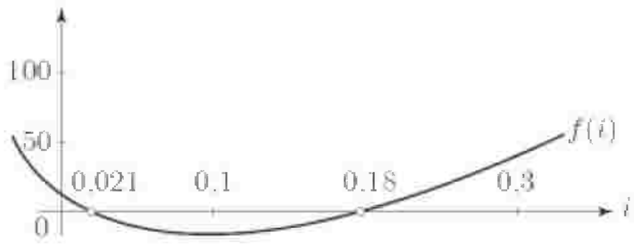
باستخدام طريق الاستيفاء التي تم شرحها في الفقرة 17.4.1 يتطلب حل هذه المعادلة حساب:

$$f(i) = 960 - \frac{950}{1+i} - \frac{1000}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} = 0$$

حسب المجال الأول الذي تم تحديده، نحصل من خلال طريقة الاستيفاء على حلين مختلفين. حيث:

- داخل المجال [0,0.1] مثلا نحصل باستخدام هذه الطريقة على النتيجة: $i = 2.13\%$
- داخل المجال [0.1,0.5] مثلا نحصل باستخدام هذه الطريقة على النتيجة: $i = 18.4\%$

يمكن تفسير الغاية من النتيجتين الحاصلتين أعلاه من خلال الرسم البياني التالي. نلاحظ أن المعادلة $f(i) = 0$ لها جذران داخل المجال [0,0.5].



الحل رقم (2): استخدام إكسل

توجد في برنامج إكسل الدالة: $IRR\ (V_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, [Guess])$ ، ثم نكتب القاعدة على النحو التالي باعتبار أن القيمة المقدرة تقترب من قيمة الجذر الأول %2.13:

	A	B	C	
1	-960			
2	950			
3	1000		=IRR(A1:A5,0.01)	
4	-500			
5	-500			

والنتيجة تكون إذاً: $i = 2.13\%$.

الحل رقم (3): استخدام الآلة تي آي–83

باستخدام الآلة تي آي –83 تتطلب العملية استدعاء المعالج وإدخال الدالة التالية:

```
EQUATION SOLVER
eqn:0=960-950/(1
+X)-1000/(1+X)^2
+500/(1+X)^3+500
/(1+X)^4
```

نلاحظ أن الحل هو: $i = 2.13\%$ ويمكن إعادة تعريف حدود البحث بين $0,1$ و$0,3$ مثلا وهو ما يعطي الحل الثاني: $i = 18.4\%$.

مثال رقم (2): تبلغ قيمة إحدى الآلات 10000 € ويمكن الحصول على تدفقات نقدية سنوية بـ 1500 € باستعمال هذه الآلة لمدة 14 سنة، تبلغ على إثرها قيمة الخردة لهذه الآلة صفر. احسب معدل العائد الداخلي لهذا الاستثمار.

الحل

نحسب المعدل i الذي يحقق:

$$NPV = 1'500a_{\overline{14|}} - 10'000 = 0$$

أي:

$$a_{\overline{14|}} = \frac{10'000}{1'500} = 6{,}666666$$

أو:

$$f(i) = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{14}}{i} - 6{,}666666 = 0$$

استخدام إكسل

$$IRR\left(\begin{Bmatrix} -10'000,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500, \\ 1'500,1'500,1'500,1'500,1'500 \end{Bmatrix}\right)$$

الحل: 11,89%

استخدام المعالج في الآلة تي آي–83

$eqn: 0 = (1 - (1/(1+X))^\wedge 14)/X - 6.666666$ الحل 11.89%

ملاحظة: إذا كانت نسبة الفائدة في سوق المال أقل من 11.89% وجب شراء الآلة حسب هذا المعيار.

(6.2.3) فترة الاسترداد والاستهلاك:

تعرف فترة الاسترداد (p) على أنها الفترة اللازمة لتغطية الاستثمار الأولي من قبل مجموع التدفقات النقدية.

$$\boxed{V_0 \leq C_1 + C_2 + \cdots + C_p} \tag{6.10}$$

أي:

$$\boxed{V_0 \leq \sum_{k=1}^{p} C_k} \tag{6.11}$$

فترة الاستهلاك (q) تحسن بشكل ملحوظ النتيجة، حيث تأخذ في الاعتبار التدفقات النقدية المحدثة، وبالتالي فإننا نبحث عن أصغر عدد صحيح q يحقق:

$$\boxed{V_0 \leq \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_q}{(1+i)^q}} \qquad (6.12)$$

أي:

$$\boxed{V_0 \leq \sum_{k=1}^{q} \frac{C_k}{(1+i)^k}} \qquad (6.13)$$

عندما نقارن بين مشروعين فإن المشروع الذي يحقق أقل فترة استرداد هو المشروع المفضل.

مثال: المطلوب تحليل المشروعين التاليين من خلال أسلوب فترة الاسترداد وباستخدام نسبة تحديث (تكلفة رأس المال) 10%.

المبالغ	V_0	C_1	C_2	C_3	C_4
المشروع A	40	15	15	15	15
المشروع B	60	15	20	20	20

الحل

المشروع A: $C_1 < V_0, C_1 + C_2 = 30 < V_0, C_1 + C_2 + C_3 = 45 > V_0,$

إذاً يستلزم هذا المشروع ثلاث سنوات لاسترداد مبلغ الاستثمار.

المشروع B: $C_1 + C_2 = 35 < V_0, C_1 + C_2 + C_3 = 55 < V_0,$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 75 > V_0$$

إذا يستلزم هذا المشروع أربع سنوات لاسترداد مبلغ الاستثمار.

حسب هذا المعيار فإن المشروع A يعد أفضل من المشروع B.

(6.2.4) مؤشر الربحية

إذا تطلب مشروعان مبالغ استثمارية مختلفة فيجب أن نأخذ ذلك في الاعتبار عند التحليل. يتمثل معيار مؤشر الربحية (π) في قياس القيمة الحالية للتدفقات النقدية لمشروع ما مقارنة بمبلغ الاستثمار الأولي V_0. وهذا يمكن من عمل مقارنة بين مشروعات مختلفة. المشروع المفضل هو الذي يحقق أعلى مؤشر ربحية. وهذا المؤشر نحسبه كالتالي:

$$\pi = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k} + \frac{V_n}{(1+i)^n}}{V_0} \qquad (6.14)$$

إذا استعملنا القاعدة 6,7 يمكن أن نستنتج:

$$\pi = \frac{NPV}{V_0} + 1 \qquad (6.15)$$

مثال: باستخدام تكلفة رأس مال مساوية لـ 5%. احسب مؤشر الربحية للمشروعين التاليين:

المبالغ	V_0	C_1	C_2	C_3	V_3
المشروع A	50	20	20	20	0
المشروع B	80	30	30	30	0

الحل

المشروع A: $NPV = \frac{20}{1,05} + \frac{20}{(1,05)^2} + \frac{20}{(1,05)^3} - 50 = 4,46$

وبالتالي: $\pi_A = \frac{4,46}{50} + 1 = 1,089$

المشروع B: $NPV = \frac{30}{1,05} + \frac{30}{(1,05)^2} + \frac{30}{(1,05)^3} - 80 = 1,69$

وبالتالي: $\pi_A = \frac{1,69}{80} + 1 = 1,0211$

على أساس معيار مؤشر الربحية فقط يمكن القول إنه من الأفضل أن نختار المشروع A.

ملاحظة: دراسة المفاضلة بين المشروعات تتضمن في أغلب الأحيان استخدام أكثر من معيار في التحليل وكذلك معايير أخرى لم نتطرق إليها في هذا الكتاب.

(6.3) تمارين

1- أوجد جدول الاستهلاك لإحدى المعدات التي تبلغ قيمته 1500 € والمستهلك في مدة أربع سنوات والبالغة قيمة خردتها: 500 €. الطريقة: الاستهلاك المنتظم.

2- آلة قيمتها 3000 frs وجب استهلاكها كليا في مدة 5 سنوات. ما هو مقدار الاستهلاك الأخير المحقق باستخدام طريقة الاستهلاك العددي المتناقص.

3- بلغت قيمة شراء إحدى الآلات frs75000 ووجب استهلاكها كليا في مدة قدرها n باستخدام طريقة الاستهلاك العددي المتناقص. أوجد قيمة n علما بأن مقدار الاستهلاك الثالث يساوي 15000 frs.

4- أوجد جدول الاستهلاك لإحدى المعدات البالغ قيمتها 5000 € والتي سيتم استهلاكها في مدة 4 سنوات والمقدرة خردتها بـ 500 €. الطريقة: الاستهلاك الهندسي المتناقص.

5- إحدى المعدات بقيمة 40000 frs تفقد 80% من قيمتها في مدة 10سنوات. ما هو مقدار الاستهلاك الخامس مفترضا الآتي:

(أ) الاستهلاك المنتظم.

(ب) الاستهلاك العددي المتناقص.

(جـ) الاستهلاك الهندسي المتناقص.

6- إحدى المعدات بقيمة 20000 € تستهلك كليا في مدة 4 سنوات باستهلاكات نصف سنوية. ما هو مقدار الاستهلاك الخامس مفترضا الآتي:

(أ) الاستهلاك المنتظم.

(ب) الاستهلاك العددي المتناقص.

(جـ) الاستهلاك الهندسي المتناقص.

7- تتناقص قيمة أرض بنسبة 2.5% سنويا من قيمتها في بداية كل سنة.

(أ) أوجد قيمة الأرض بعد 30 سنة إذا كانت قد اشتريت بقيمة أولية تبلغ 300000 €.

(ب) ما مقدار الاستهلاك السنوي الثابت بعد 30 سنة الذي يؤدي إلى عدم تغير قيمة الأرض.

8- ■ إحدى طرق الاستهلاك تتمثل في تناقص المعدات سنويا بنسبة تساوي $A_k = \frac{2}{n}\ (1-\frac{2}{n})^{k-1}\ \forall k = 1,2,3,\dots,n$ من قيمتها الأولية.

(أ) إذاعلمت أن $n = 5$ أوجد $A_1, A_2, \dots, A_5$.

(ب) أثبت أن السلسلة في (أ) هي متوالية هندسية ثم أوجد مجموع الحدود الخمس الأولى لهذه المتوالية.

(جـ) إذا علمت أن القيمة الأولية للمستهلك تقدر بـ25000 € كم يبلغ الاستهلاك التراكمي بعد سنتين.

9- استثمار بقيمة 823000 frs أدى إلى إيرادات قدرت بـ500000 frs بعد سنتين و600000 frs بعد 4 سنوات. استخدم العمليات الجبرية فقط لإيجاد معدل العائد لهذا الاستثمار.

10- آلة تقدر قيمتها بـ75000 € تسجل سنويا فائض إيرادات يبلغ 12000 € لمدة 14 سنة يتم على إثرها استهلاك الآلة كليا دون أن تكون لها أي قيمة خردة. بفرضية تكلفة رأس مال تساوي 10% احسب صافي القيمة الحالية (NPV) ومعدل العائد الداخلي (IRR). ما هو تعليقك على النتائج.

11- احسب معدل العائد الداخلي لسلسلة المصروفات التالية:

الفترة	0	1	1,5	2	3
صافي التدفق	-5000 €	1500 €	1200 €	1300 €	2100 €

12- ليكن لدينا مشروعان A وB مدة كل منهما 3 سنوات بتكلفة 400000 frs وبمقدار خردة يساوي الصفر وقد بلغت التدفقات النقدية للمشروعين في آخر كل سنة:

السنة	المشروع A	المشروع B
1	frs 225000	frs 50000
2	frs 205000	frs 200000
3	frs 40000	frs 250000

(أ) قارن بين المشروعين باستخدام معيار صافي القيمة الحالية (7%) ومعدل العائد الداخلي. ماذا تستنتج؟

(ب) احسب مؤشر الربحية للمشروعين.

13- خريج جديد من معهد الإدارة العليا قدر تكاليف دراسته أثناء حصوله على الشهادة بمبلغ 28000 frs آخذا في الاعتبار زيادة مصاريفه وعدم حصوله على رواتب طيلة فترة دراسته. وقد قدر إيراداته المستقبلية السنوية الإضافية اعتمادا على مستوى تكوينه بـ:

(أ) 1000 frs سنويا زيادة عن راتبه الحالي ولفترة العشر سنوات القادمة.

(ب) 3000 frs سنويا زيادة عن راتبه الحالي ولفترة العشر سنوات القادمة.

(جـ) frs 6000 سنويا زيادة عن راتبه الحالي ولفترة العشرين سنة القادمة.

هل كان اختيار الطالب صائبا عندما قرر التسجيل في معهد الإدارة العليا علما أنه قدر معدل عائده بنسبة لا تقل عن 5%؟

14- تفاوض لاعب كرة قدم أوروبي على عقد مدته 5 سنوات. عرض مستشاره المالي على الهيئة المديرة للنادي خيارين هما:

إما صرف 200000 € سنويا للاعب لمدة التعاقد البالغة 5 سنوات، وإما صرف 105000 € لمدة عشر سنوات وهو ما يوفر مزايا جبائية للاعب. إذا كان بإمكان النادي استثمار رأس المال بنسبة فائدة 10% فما العرض الذي وجب قبوله من النادي؟

15- من المنتظر أن يتم تاسيس نظام مخصص للمعالجة داخل مصنع بتكلفة إجمالية تقدر بـ10000 frs. ويقدر انخفاض التكاليف الذي يمكن أن يوفره هذا النظام بـ800 frs في السنة الأولى، 1000 frs في السنة الثانية و1500 frs سنويا لبقية السنوات. ما هو العدد الصحيح من السنوات اللازمة لهذا النظام لكي يبرر مبلغ الاستثمار الذي تطلبه؟ صاحب المصنع يرغب في تحقيق معدل عائد لا يقل عن 8% سنويا؟

16- ترغبون في شراء آلة بتكلفة 20000 € وبمدة صلاحية محتملة تقدر بـ15 عاما علما بأن قيمة الخردة تساوي صفر. وتكلف هذه الآلة سنويا 7000 € كمصروفات صيانة. عرضت الشركة المصنعة عليكم إمكانية استئجارها بدلاً من شراء الآلة، عرض عليكم استئجارها بمبلغ 1000 € لكل نصف سنة يدفع في نهاية الفترة النصف سنوية. في المقابل أنتم مطالبون بتقبل تكاليف العمالة والصيانة. ما هو الاختيار الأفضل لكم (الإيجار أم الشراء) وعلى أساس أي معيار؟