الفصل الثالث

النماذج البسيطة

(٣,١) مقدمة

كما أشرنا في مطلع الفصل الثاني فإننا نواجه في الحياة العملية العديد من المسائل التي لا يمكن لمتغيراتها أن تأخذ قيماً غير صحيحة والتي أطلقنا عليها اسم مسائل "برمجة عددية Integer Programming اختصاراً IP". وتغطي مثل هذه المسائل عددا كبيرا من التطبيقات التي عادة ما نواجهها في حياتنا الفعلية. ومن أمثلة ذلك توزيع البضائع من المصانع إلى المستودعات أو العكس حيث لا يمكن الحديث عن جزء من وحدة من هذه البضائع ، مسائل إيجاد أقصر مسار في شبكة (Network) ما كشبكات الطرق والتي تكون طبيعة المتغيرات فيها أعدادا صحيحة ، مسائل إيجاد عدد الوحدات الواجب تصنيعها من أصناف معينة من المنتجات والتي تتصف بأنها غير قابلة للتجزئة ، وكذلك العديد من مسائل التسلسل والجدولة التي عادة ما نختار فيها التسلسل الأمثل لجدولة وتنفيذ الأعمال المختلفة. وكما أشرنا في الفصل الثاني أيضا فإننا نواجه العديد من المسائل الواقعية التي يتسم القرار فيها بنعم أو لا ، افعل أو لا تفعل ، خصص أو لا تخصص ، نفذ أو لا تنفذ... إلخ والتي نستخدم فيها ما أسميناه المتغيرات الثنائية القيم 1 و0. وسنستعرض في هذا الفصل بعض نماذج "البرمجة العددية البسيطة" وسيكون اهتمامنا فيه مركزا على صياغة هذه النماذج وفقا لطبيعة شروطها ومتغيراتها وقيودها.

(٣,٢) الصياغات الخاصة لبعض مسائل البرمجة العددية

سنتعرف في هذه الفقرة على كيفية الاستفادة من المتغيرات الثنائية القيم 1 و 0 في صياغة بعض مسائل البرمجة العددية وخاصة ذات الطبيعة الخاصة منها.

(٣,٢,١) استخدام المتغيرات الثنائية القيم في القيود المنطقية

كما سنرى لاحقاً يمكن في بعض الحالات استخدام المتغيرات الثنائية القيم للتعبير عن علاقات متداخلة بين واحد أو أكثر من المتغيرات الأساسية للمسألة الأصلية. وقبل أن نستعرض بعضا منها دعنا نقوم أولاَ بتعريف المتغيرات الثنائية القيم التالية كمجموعة جزئية من مجموعة متغيرات المسألة قيد الدراسة.

$$y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 0,1,\cdots,n$$

لنفرض أن k ثابت صحيح عندئذٍ نجد وبشكل عام أن كثيرا من متطلبات البرمجة الرياضية (ومنها البرمجة العددية) يمكن التعبير عنها كقيود باستخدام المتغيرات الثنائية القيم ومن الأمثلة التي تستخدم فيها مثل هذه المتغيرات ما يلي:

(٣,٢,١,١) القيود ذات الشروط

ومن أمثلتها ما يلي، لنفرض أن

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا اتخذ القرار } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ

- لو أردنا الإفادة بأن واحدا على الأكثر من n من القرارات هو الذي سيقع لأمكننا التعبير عن ذلك بالقيد التالي

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq 1$$

• لو أردنا الإفادة بأن k على الأكثر من n من القرارات هو الذي سيقع لأمكننا التعبير عن ذلك بالقيد التالي

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq k$$

• لو أردنا الإفادة بأن k على الأقل من n من القرارات هو الذي سيقع لأمكننا التعبير عن ذلك بالقيد التالي

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq k$$

• لو أردنا الإفادة بأن k بالضبط من n من القرارات هو الذي سيقع لأمكننا التعبير عن ذلك بالقيد

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k$$

(٣,٢,١,٢) القيود الإقتضائية بالمتغيرات الثنائية القيم

فيما يلي سنفترض أن w هو أحد المتغيرات الثنائية القيم التي تمثل قرارا يمكن أن يقع إذا وقعت بعض القرارات الأخرى ذات الصلة به.

• فلو أردنا القول بأن w سيقع إذا أخذ أي من المتغيرات الأخرى القيمة 1، عندئذ يمكن التعبير عن ذلك بالقيد التالي :

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq nw$$

• ولو أردنا القول بأن w سيقع إذا أخذ ت جميع المتغيرات الأخرى القيمة 1، عندئذ يمكن التعبير عن ذلك بالقيد التالي :

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq n - 1 + w$$

- ولو أردنا القول بأن w سيقع إذا أخذت k على الأقل من المتغيرات الأخرى القيمة 1 ، عندئذ يمكن التعبير عن ذلك بالقيد التالي :

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq (k-1) + [n-(k-1)]w$$

(٣,٢,١,٣) القيود الإقتضائية بالمتغيرات الحقيقية

لنفرض أن y هو أحد المتغيرات الثنائية القيم التي تمثل قرار بناء أو عدم بناء منشأة معينة و x هو عدد حقيقي يمثل عدد الوحدات التي يمكن أن تنتجها هذه المنشأة، عندئذ يمكن التعبير عن هذه الحالة بالقيد التالي :

$$y = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x > 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0 \end{cases}$$

وإذا أردنا أن نقصر قيم المتغير x لتكون 0 ما لم تكن قيمة y هي 1 لأمكن التعبير عن ذلك بالقيد التالي :

$$x \leq My$$

حيث تمثل M حداً أعلى للمتغير x .

(٣,٢,١,٤) القيود البديلة

نصادف أحيانا مسائل فيها نوع من التضاد (Dichotomy) في تحقق القيود، كأن تكون الحالة "إما أن يتحقق هذا القيد أو أن يتحقق ذاك القيد" والتي سنصفها بالحالة " إما – أو ". فمثلا لو كان x هو عدد الوحدات المنتجة من منتج معين و كانت ظروف شركة إنتاجية تقتضي إما أن تنتج مالا يزيد عن 100 وحدة أو مالا يقل عن 1000 وحدة من هذا المنتج لأمكن التعبير عن ذلك بالقيد إما $x \leq 100$ أو $x \geq 1000$. ويعبر هذا القيد عن حالة واضحة من التضاد حيث لا يمكن وقوع الحالتين معا. وكما نعلم فإن

وجود قيد من الشكل (إما – أو) سيخلق إشكالات كثيرة يتعلق بعضها بتحديد فضاء الحل ويتعلق بعضها الآخر بطرق الحل نفسها. لذا لابد لنا من الاستعاضة عن مثل هذا القيد بقيود يمكن التعامل معها. وفي حالتنا هذه نجد أنه يمكن الاستعاضة عن مثل هذا القيد بالقيود التالية:

$$x \leq My$$

$$x \leq 100y$$

$$x \geq 1000y$$

$$y = 1 \text{ أو } 0$$

حيث M قيمة كبيرة تمثل حداً أعلى لقيم x. و من الواضح هنا أنه إذا كان $y = 0$ فإن $x = 0$ أما إذا كان $y = 1$ فإن أحد القيدين $x \leq 100$ ، $x \geq 1000$ فقط يتحقق دون أن يتحقق الآخر.

أما لو أردنا أن نعبر عن حالة يمكن أن يتحقق فيها واحد على الأقل من القيدين التاليين:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0$$

لأمكن التعبير عن ذلك بالقيدين التاليين:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le My$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le M(1-y)$$

حيث y هو متغير ثنائي القيم و M هي عدد كبير بشكل كاف بحيث يسمح بتحقق القيدين التاليين معا :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le My \quad \text{و} \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le My$$

(٣,٢,١,٥) القيود المقتضية لقيود أخرى

نحتاج أحيانا للتعبير عن أن القيد $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ge 0$ يقتضي القيد $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ge 0$. ويمكننا التعبير عن مثل هذه الحالة كما يلي :

$$-g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le My$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le M(1-y)$$

حيث y هو متغير ثنائي القيم و M هو عدد كبير بشكل كاف بحيث يسمح بتحقق القيدين التاليين معا :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le -M \quad \text{و} \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le M$$

المثال التالي يوضح بعض المفاهيم التي ذكرت سابقاً.

مثال (٣,١)

يرغب أحد أقسام التغذية أن يصنع مزيجاً من الطعام مكون من أربع أنواع من العناصر الغذائية A,B,C,D التي تناسب الحمية لبعض المرضى المصابين بالبدانة. وقد

توافر لهذا القسم 6 منتجات مرشحة لأن تدخل في تركيبة هذا المزيج. ولأسباب تتعلق بتخفيض التكاليف فقد قرر القسم أن يستخدم 3 فقط من هذه المنتجات في صناعة هذا المزيج. الجدول رقم (٣,١) يبين كافة المعلومات المتعلقة بالمسألة.

الجدول رقم (٣,١). بيانات المثال (٣,١).

العناصر الغذائية	مقدار ما تحويه الأونصة من العنصر الغذائي من المنتجات						الحد الأدنى المطلوب (أونصة)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
A	.2	.1	.3	.1	.2	.3	10
B	.2	.3	.3	.1	.1	.1	12
C	.3	.3	.2	.2	.2	.4	15
D	.4	.3	.4	.2	.5	.3	20
تكلفة الأونصة (هللة)	10	9	11	7	9	12	

يهدف القسم إلى معرفة ما يجب استخدامه من كل من المنتجات الستة في صناعة الوحدة من المزيج والتي تؤدي إلى تخفيض تكلفة صناعة الوحدة من هذا المزيج والمطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الحل

من الواضح أن متغيرات القرار هي الكميات الواجب استخدامها من المنتجات الستة في كل المزيج. لنعرف هذه المتغيرات كما يلي:

$x_i =$ كمية المنتج i المستخدمة في المزيج

ولتحقيق المتطلب بأن 3 فقط من المنتجات الستة ستستخدم في المزيج لابد لنا من استخدام المتغيرات الثنائية القيم والتي نعرفها كما يلي:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا استخدم المنتج } i \text{ في المزيج} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة هو

صغر الدالة:

$$Z = 10x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 7x_4 + 9x_5 + 12x_6$$

وفقا للقيود:

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 + 0.2x_5 + 0.3x_6 \geq 10$$

$$0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 + 0.1x_5 + 0.1x_6 \geq 12$$

$$0.3x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.2x_4 + 0.2x_5 + 0.4x_6 \geq 15$$

$$0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4 + 0.5x_5 + 0.3x_6 \geq 20$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \leq 3$$

$$x_i \leq M_i y_i, \quad i = 1, \cdots 6$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, 6 \quad \text{أعداد صحيحة}$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, \cdots, 6$$

لاحظ أن القيود الأربعة الأولى تضمن استخدام الحد الأدنى من العناصر الغذائية A,B,C,D في المزيج ، ويعبر القيد الخامس عن أن 3 فقط من المنتجات الستة ستستخدم في صناعة المزيج وهذا القيد هو أحد القيود الاقتضائية التي سبق ذكرها أعلاه. أما القيد السادس فهو عبارة عن ستة قيود اقتضائية بالمتغيرات الحقيقية ، حيث $M_i \quad (i = 1,\cdots 6)$ هو عدد يتم اختياره كبيراً بشكل كاف بحيث يصبح القيد المقابل غير ذي صلة (Nonbinding) عندما يكون المتغير الثنائي القيم المقابل مساويا للواحد ، أي إذا كان $y_i = 1$ فإن $x_i \le M_i y_i$ والتي تعبر عن أن القيد المقابل يصبح غير ذي صلة ؛ لأن هذا القيد محقق دوما باعتبار أنه تم اختيار M_i المقابلة كبيرة بشكل كاف منذ البداية. أما عندما يكون $y_i = 0$ فإن $x_i = 0$ والذي يعني عدم استخدام المنتج i في صناعة المزيج. ولو عدنا إلى البيانات في الجدول رقم (٣,١) لاستطعنا أن نستنتج أنه من أجل المنتج (١) مثلاً فإن الكمية المستخدمة منه لا يمكن أن تتجاوز أكبر القيم 10/.2 ، 12/.2 ، 15/.3 ، 20/.4 والتي تساوي *60* . أي أن $M_1 = 60$. وبطريقة مماثلة نجد أن $M_2 = 100$ ، $M_3 = 75$ ، $M_4 = 120$ ، $M_5 = 120$ ، و $M_6 = 10$. ويمكننا التحقق (انظر الباب الثاني من الكتاب) أن الحل الأمثل لهذا النموذج هو:

$$x_1^* = 37.5, x_2^* = 10, x_3^* = 5, y_1^* = y_2^* = y_3^* = 1$$

وقيمته $Z^* = 520$. ويعني ذلك أن علينا أن نستخدم المنتجات (1) و(2) و(3) فقط في المزيج.

مثال (٣,٢)

لنفرض أن لدينا البرنامج التالي لجدولة الإنتاج في إحدى المنشئات الإنتاجية كبر الدالة :

$$Z = 7x_1 + 9x_2$$

وفقا للقيود:

$$10x_1 + 12x_2 \leq 10000$$

$$15x_1 + 12x_2 \leq 12000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ولو افترضنا أن x_2 يمثل عدد الوحدات الواجب إنتاجها من إحدى السلع وأن الجدوى الإقتصادية تقتضي أن يتم إنتاج هذه السلعة بكميات لا تقل عن 100 وحدة أو ألا يتم إنتاجها إطلاقا، عندئذ لابد من إدخال ما أسميناه القيد (إما – أو) وهو:

إما $x_2 = 0$ أو $x_2 \geq 100$

وهو قيد يتعارض في شقه الثاني ($x_2 \geq 100$) مع القيد الأول للمسألة. وكما أشرنا سابقاً فإنه يمكن الاستعاضة عن مثل هذا القيد بالقيود التالية:

$$x_2 \leq My$$

$$x_2 \geq 100y$$

$y = 1$ أو 0

حيث M هو مقدار كبير بشكل كاف. فإذا كان $y = 0$ فإن $x_2 = 0$ بموجب العلاقة الأولى وإذا كان $y = 1$ فإن x_2 يجب أن يأخذ قيمة لا تقل عن 100. وبذلك يصبح النموذج الرياضي للمثال كما يلي:

كبر الدالة :

$$Z = 7x_1 + 9x_2$$

وفقا للقيود :

$$10x_1 + 12x_2 \le 10000$$

$$15x_1 + 12x_2 \le 12000$$

$$x_2 \le My$$

$$x_2 \ge 100y$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$y = 1$ أو 0

مثال (٣,٣)

في مسألة القرار المتعلقة بافتتاح معمل ما أو عدم افتتاحه نعرف المتغيرات التالية

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم افتتاح المعمل } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولنفرض المعمل(2) يمكن افتتاحه إذا افتتح المعمل(5) عندئذ يكون لدينا القيد التالي :

$$y_2 \le y_5$$

ولو كان افتتاح المعملين (2) و(5) متلازما (أي أن أيا منهما لا يفتتح إلا بافتتاح الآخر) عندئذ يكون لدينا القيد التالي :

$$y_2 = y_5$$

(٣,٢,٢) التحويلات البسيطة

فيما يلي سنقدم بعض التحويلات البسيطة باستخدام المتغيرات الثنائية القيم.

(٣,٢,٢,١) تحويل مسألة برمجة خطية عددية إلى مسألة برمجة خطيـــة عدديـــة ذات متغيرات ثنائية القيم

مع أن وجود المتغيرات الثنائية القيم في المسألة قد يخلق مصاعب جمة في العمليات اللازمة لإتمام إيجاد الحل الأمثل للمسألة، إلا أنه (ومن الناحية النظرية على الأقل) يمكن استبدال أي متغير صحيح غير سالب x ومحدود من الأعلى بالعدد u (u ليس صحيحا بالضرورة) بمتغيرات ثنائية القيم كما يلي :

لنفرض أن t هو أصغر عدد صحيح يحقق القيد $2^{t+1} > u$ عندئذ يمكن إزالة x من المسألة بالتحويل التالي :

$$x = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \cdots + 2^t y_{t+1} = \sum_{j=0}^{t} 2^j y_{j+1} \le u \qquad (٣,١)$$

حيث

$$y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, 2, \cdots, t+1$$

$$2^t \le u < 2^{t+1}$$

(٣,٢,٢,٢) التعبير عن المتغيرات أو الدوال المنفصلة

إذا كان لدينا متغير x (أو دالة g) تأخذ قيما منفصلة غير متتابعة بالضرورة كأن يأخذ هذا المتغير (أو هذه الدالة) قيمه في المجموعة $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_r\}$ عندئذ يمكن استبدال هذا المتغير x (أو هذه الدالة g) بالعبارة التالية :

$$x(g)=d_1y_1+d_2y_2+\cdots+d_ry_r \qquad (٣,٢)$$

حيث

$$y_1+y_2+\cdots+y_r=1$$

وحيث

$$y_j=1 \text{ أو } 0, \quad j=1,2,\cdots,r$$

ويمكن هنا اعتبار $d_1,d_2,\cdots,d_r$ بمثابة أوزانٍ للمتغيرات الثنائية القيم $y_1,y_2,\cdots,y_r$ على الترتيب. لاحظ أنه عندما يكون $y_j=1$ فإن $x=d_j$. ولو كانت $D=\{0,1,2,\cdots,u\}$ لأمكن التعبير عن $x(g)$ بإحدى العلاقتين (٣,١) أو (٣,٢) مع أن العلاقة (٣,١) هي المفضلة في مثل هذه الحالة ؛ لأنها تملك عددا أقل من المتغيرات. ولإيضاح هذه الحالة لنفرض أن x محدود ب $u=15$ عندئذ $t=3$ ؛ لأن $2^3\le u<2^4$ والتحويل الخطي المناسب هو $x=y_1+2y_2+4y_3+8y_4$.

(٣,٢,٢,٣) استخدام المتغيرات المتممة

نحتاج في بعض الخوارزميات لظهور المتغيرات الثنائية القيم بإشارة موجبة في دالة الهدف. ويمكننا تحقيق ذلك باستبدال المتغير الثنائي القيم y الذي يظهر بإشارة سالبة في هذه الدالة بالمتغير $1-y'$. ولنوضح هذه الحالة بالمثال التالي :

مثال (٣,٤)

لدينا مسألة البرمجة الخطية العددية التالية :

صغر الدالة :

$$Z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 5$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, 4$$

المطلوب تحويلها بحيث تظهر جميع المتغيرات في دالة الهدف بأمثال موجبة.

الحل

نلاحظ أن المتغيرين x_1, x_4 فقط تظهر بأمثال سالبة ، لذا نستبدلهما بالمتغيرين $x_1' = 1 - x_1, x_4' = 1 - x_4$ على الترتيب ثم نعوض عنهما حيثما وردا فنحصل على المسألة التالية :

صغر الدالة :

$$Z = 2x_1' + 3x_2 + x_3 + x_4' - 3$$

وفقا للقيود :

$$-x_1' + 2x_2 - 3x_3 - x_4' \geq 5$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 2, 3$$

$$x'_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,4$$

حيث نلاحظ تحقق المطلوب.

(٣,٢,٢,٤) تحويل مسألة برمجة غير خطية إلى مسألة برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم

إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ غير خطية لكنها مكونة من عدد من القطع المستقيمة التي تتقاطع في النقاط $b_1, b_2, \cdots, b_k$. فإذا كانت $b_k \le x \le b_{k+1}$ حيث $k = 1, 2, \cdots, n-1$ وكان z_k عددا بحيث $0 \le z_k < 1$، لأمكن التعبير عن x بالعلاقة التالية:

$$x = z_k b_k + (1 - z_k) b_{k+1}$$

ونظرا لأن $f(x)$ دالة خطية على الفترة $b_k \le x \le b_{k+1}$ فإن:

$$f(x) = z_k f(b_k) + (1 - z_k) f(b_{k+1})$$

وعندئذ يمكن تحويل الدالة $f(x)$ عبر الخطوتين التاليتين

خطوة (١). حيثما وردت الدالة $f(x)$ قم باستبدالها ب:

$$z_1 f(b_1) + z_2 f(b_2) + \cdots + z_n f(b_n)$$

خطوة (٢). أضف القيود الخطية التالية:

$$z_1 \le y_1$$

$$z_2 \le y_1 + y_2$$

$$z_3 \le y_2 + y_3$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} \le y_{n-2} + y_{n-1}$$

$$z_n \le y_{n-1}$$

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1$$

$$x = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \cdots + z_n b_n$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$z_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ولنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (٣,٥)

كبر الدالة :

$$Z = 12x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 14x_4 - C(x)$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_3 \le x + 500$$

$$x_2 + x_4 \le 1000$$

$$x_1 - x_2 \ge 0$$

$$2x_3 - 3x_4 \ge 0$$

$$x \le 1500$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \cdots, 4$$

$$x \ge 0$$

حيث $C(x)$ هي دالة معرفة كما يلي :

$$C(x) = \begin{cases} 25x, & 0 \le x < 500, \\ 20x + 2500, & 500 \le x < 1000, \\ 15x + 7500, & 1000 \le x \le 1500. \end{cases}$$

المطلوب تحويل هذه المسألة إلى مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم.

الحل

لنلاحظ أولا أن دالة الهدف ليست خطية (مع أن ظاهرها خطي حسب تعريف الدالة $C(x)$). فبما أن $C(x)$ مؤلفة من ثلاث قطع مستقيمة بالنقاط الانكسارية 500 ، 0 ، 1000 ، فحسبما ورد سابقاً يمكن استبدال $C(x)$ بالعلاقة :

$$C(x) = z_1 C(0) + z_2 C(500) + z_3 C(1000) + z_4 C(1500)$$

وبالتالي تصبح مسألتنا كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = 12x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 14x_4 - z_1C(0) - z_2C(500) - z_3C(1000) - z_4C(1500)$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_3 \le x + 500$$

$$x_2 + x_4 \le 1000$$

$$x_1 - x_2 \ge 0$$

$$2x_3 - 3x_4 \ge 0$$

$$x \le 1500$$

$$x = 0z_1 + 500z_2 + 1000z_3 + 1500z_4$$

$$z_1 \le y_1$$

$$z_2 \le y_1 + y_2$$

$$z_3 \le y_2 + y_3$$

$$z_4 \le y_3$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1,2,3$$

$$z_i \ge 0, \quad i = 1,2,\cdots,4$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\cdots,4$$

$$x \ge 0$$

(٣,٣) تطبيقات: مسائل خاصة في البرمجة العددية

كما أشرنا في مطلع هذا الفصل فإن متغيرات القرار في الكثير من مسائل الواقع العملي لا تقبل أن تأخذ إلا قيما عددية صحيحة وعندها نكون أمام مسألة برمجة (خطية) عددية بصورتها العامة. والمثال التالي يقدم مزيدا من الإيضاح على هذا النوع من المسائل.

مثال (٣,٦)

تقوم شركة وطنية بصناعة نوعين من القمصان أحدهما قطني والآخر من الخيوط المتنوعة يحتاج نوع القميص القطني إلى 1.5 متر من القماش بينما يحتاج قميص النوع الآخر إلى متر واحد من القماش. يتوافر للشركة يوميا 250 متر من القماش القطني و125 متر من قماش الخيوط المتنوعة. كذلك فإن كل قميص قطني يحتاج إلى 3

ساعات عمل بينما يحتاج قميص النوع الأخر إلى 2 ساعة عمل في حين يتوافر للشركة 400 ساعة عمل في اليوم. إذا علمت أن كل قميص قطني يباع ب 15 ريال وأن كل قميص من النوع الأخر يباع ب 20 ريال وأن الشركة ترغب بمعرفة عدد القمصان التي ستصنعها يوميا بحيث تجعل مبيعاتها أكبر ما يمكن فالمطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

من الواضح أن متغيرات القرار في هذه المسألة هي ما يجب أن تصنعه الشركة يوميا من القمصان القطنية وليكن x_1 ومن القمصان ذات الخيوط المتنوعة وليكن x_2. ومن الواضح أيضا أن كلا من x_1 و x_2 لا يمكن أن يأخذ قيما غير صحيحة وبذلك فإن هذه المسألة هي من مسائل البرمجة العددية. وعلى ضوء البيانات المتوافرة فإن النموذج الرياضي للمسألة هو:

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 15x_2$$

وفقا للقيود:

$$x_1 \le 125$$

$$1.5x_2 \le 250$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 400$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ أعداد صحيحة}$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1^* = 125$ و $x_2^* = 50$ وقيمته $Z = 3250$ ريال في اليوم.

إضافة إلى مسائل البرمجة العددية العامة فإن هناك الكثير من المسائل التطبيقية الخاصة التي تصاغ كمسائل برمجة عددية ومنها ما يلي :

(٣,٣,١) مسألة حقيبة الظهر

من أحد المسائل التي لا يمكن لمتغيراتها أن تأخذ قيما عددية غير صحيحة هو ما يدعى مسألة " حقيبة الظهر Knapsack Problem".

وتصنف مسألة حقيبة الظهر إلى صنفين هما :

(٣,٣,١,١) مسألة حقيبة الظهر البسيطة Simple Knapsack Problem

لدينا حقيبة ذات سعة محدودة W ونرغب ملئها بعدد k ($0 \le k \le W$ و k عدد صحيح) من الأشياء من بين n من الأشياء كل وحدة منها لها وزنها v_j وقيمتها c_j بحيث لا نملأ أكثر من وحدة من كل من هذه الأشياء ولا نملأ جزءا من الوحدة من أي منها وبحيث يكون مجموع قيم الأشياء التي نملئها في هذه الحقيبة أكبر ما يمكن.

لمعرفة متغيرات القرار هنا نلاحظ أنه من أجل أي شيء من ال n شيئاً علينا أن نقرر فيما إذا كنا نرغب باختياره أم لا؟. لذا يمكن صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة باستخدام المتغيرات الثنائية القيم كما يلي : ليكن

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم وضع وحدة من الشيء } j \text{ في الحقيبة} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \le W$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وللتوضيح نسوق المثال التالي :

مثال (٣,٧)

يرغب أحد المستثمرين باستثمار مبلغ 200000 ريال في بعض من 6 محافظ استثمارية. يبين الجدول رقم (٣,٢) قيمة الوحدة في كل من هذه المحافظ والربح المتوقع منها (ألف ريال). يرغب المستثمر باختيار المحافظ الاستثمارية المناسبة من بين المحافظ الست المتوافرة له والتي تجعل مجموع الربح الكلي المتوقع منها أكبر ما يمكن علما بأن نظام هذه المحافظ لا يسمح باستثمار جزء من الوحدة في أي من هذه المحافظ ولا يسمح كذلك باستثمار أكثر من وحدة في أي منها.

الجدول رقم (٣,٢). بيانات المثال (٣,٧).

رقم المحفظة الاستثمارية	1	2	3	4	5	6
المبلغ المطلوب للوحدة	24	64	32	36	79	15
الربح المتوقع للوحدة	1.2	3.1	2.2	5.3	5.5	.9

الحل

وفقا لبيانات المسألة فمن الواضح أن القرار بالنسبة لأي من المحافظ الستة هو أن يختارها أو لا يختارها المستثمر ، ولذا فإن متغيرات القرار هي المتغيرات الثنائية القيم المعرفة كما يلي :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار المحفظة } j \text{ للاستثمار} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمسألة الناتجة هي مسألة "برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم" نموذجها الرياضي هو :

كبر الدالة:

$$Z = 1.2x_1 + 3.1x_2 + 2.2x_3 + 5.3x_4 + 5.5x_5 + 0.9x_6$$

وفقا للقيود:

$$24x_1 + 64x_2 + 32x_3 + 36x_4 + 79x_5 + 15x_6 \leq 200$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, 6$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1 = 1$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 1$ ، $x_5 = 1$ و $x_6 = 1$ ، والذي يعني أن على المستثمر أن يستثمر بوحدة واحدة في جميع المحافظ عدا الثانية منها، وقيمته $Z = 15.1$ ألف ريال.

(٣,٣,١,٢) مسألة حقيبة الظهر العامة General knapsack problem

تختلف هذه المسألة عن سابقتها في (٣,٣,١,١) بأنه يمكن اختيار أي عدد صحيح من الوحدات من أي من الأشياء ال n إلا أن هذا العدد محصور بحد أدنى من الوحدات وليكن L_j وحد أعلى من الوحدات وليكن M_j ، عندئذ تكون متغيرات القرار هي

x_j : هو عدد الوحدات (الصحيحة) التي نختارها من العنصر j

والنموذج الرياضي للمسألة هو:

كبر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq W$$

$$L_j \le x_j \le M_j, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$ أعداد صحيحة

ولتوضيح الحالة العامة لهذه المسألة نقدم المثال التالي:

مثال (٣,٨)

أعد صياغة مسألة المثال السابق (٣,٧) في كل من الحالتين التاليتين:

(أ) يمكن للمستثمر أن يستثمر أي عدد من الوحدات الصحيحة في أي من المحافظ الستة.

(ب) عدد الوحدات التي يمكن استثمارها في أي من المحافظ محدود بحد أدنى وحد أعلى من الوحدات الصحيحة كما هي معطاة في الجدول رقم (٣,٣).

الجدول رقم (٣,٣).

رقم المحفظة الاستثمارية	1	2	3	4	5	6
الحد الأدنى من الوحدات	1	0	1	0	1	0
الحد الأعلى من الوحدات	3	4	6	3	7	8

الحل

النموذج الرياضي لهذه المسألة هو:

(أ) هو نفس نموذج المثال (٣,٧) عدا أنه يجب استبدال القيد الأخير بالقيد

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$ عدد صحيح

حيث x_j هنا يمثل عدد الوحدات الواجب استثمارها في المحفظة j وهو عدد صحيح غير سالب. و الحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ ، $x_4 = 5$ ، $x_5 = 1$ و $x_6 = 1$ وقيمته $Z = 27.4$ ألف ريال.

(ب) هو نفس النموذج في (أ) مع إضافة القيود الست التالية والتي تعبر عن الحدود الدنيا والعليا لعدد الوحدات المستثمرة في كل محفظة استثمارية :

$1 \le x_1 \le 3$ ، $0 \le x_2 \le 4$ ، $1 \le x_3 \le 6$ ، $0 \le x_4 \le 3$ ، $1 \le x_5 \le 7$

و $0 \le x_6 \le 8$ ،

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1 = 2$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 1$ ، $x_5 = 1$ و $x_6 = 0$ وقيمته $Z = 15.4$ ألف ريال.

وإضافة إلى التطبيقين السابقين في المثالين (٣,٧) و(٣,٨) فإن مسألة حقيبة الظهر بشكليها البسيط والعام هي مسألة ذات تطبيقات كثيرة في الحياة العملية. فمثلا يمكن النظر إلى حقيبة الظهر بأنها مخزن أو مستودع أو مكان أو ثلاجة نرغب بملئها بأشياء متنوعة بحيث نحقق أكبر منفعة ممكنة. كذلك يمكن النظر إلى رأس المال المحدد والذي نرغب باستثماره في جهات استثمارية متنوعة كما لو أنه حقيبة الظهر ذات السعة المحددة.

(٣,٣,٢) مسألة اختيار المشاريع مع وجود موارد محدودة

من أكثر الصعوبات التي نواجهها في حياتنا العملية هو كون الموارد المتوافرة لدينا (مال، وقت، أجهزة، قوى بشرية، طاقة، ... إلخ) هي موارد محدودة، الأمر الذي يقف حجر عثرة أمام تنفيذ كل ما نرغب من مشاريع. فلو كان لدينا n مشروعاً و m من الموارد المتوافرة حيث يتوافر b_i وحدة من المورد i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ ولو فرضنا أن a_{ij} هي الكمية اللازمة من المورد i لتنفيذ المشروع j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ وأن العائد المتوقع من المشروع j هو c_j فإن الهدف يكون عندئذ هو: أي المشاريع يجب أن يتم اختيارها للتنفيذ بحيث يكون العائد الكلي منها أكبر ما يمكن؟ من الواضح أن القرار بالنسبة لآي مشروع هو: أن يتم اختيار المشروع للتنفيذ أو ألا يتم ذلك. ولذا فإن متغيرات القرار هي المتغيرات الثنائية القيم التالية :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار المشروع } j \text{ للتنفيذ} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والنموذج الرياضي لهذه المسألة يصبح عندئذ كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

لاحظ أن هذه المسألة تختلف عن مسألة "حقيبة الظهر العامة" بوجود عدة قيود بدلا من قيد واحد. وكتطبيق على هذه المسألة نسوق المثال التالي :

مثال (٣,٩)

رصدت شركة مبلغ 12 مليون ريال لتوسعة مساحة أربعة من مخازنها لحدود 10 ألاف قدم مربع في أحد المناطق التجارية الهامة لها. يبين الجدول رقم (٣,٤) المساحة (قدم مربع) التي ستتوسع بها لكل مخزن وتكلفة تلك التوسعة (بملايين الريالات).

الجدول رقم (٣,٤). بيانات المثال (٣,٩).

رقم المخزن	1	2	3	4
مساحة التوسعة (قدم مربع)	5.2	3.1	2.2	4.8
تكلفة التوسعة (مليون ريال)	7.2	6.4	1.5	2.9

ونظرا لمحدودية رأس المال المخصصة (12 مليون) ومحدودية المساحة المخصصة (10 ألاف قدم مربع) فإن الشركة ترغب بمعرفة أي المخازن ستختار للتوسعة بحيث يكون مجموع عدد المخازن التي ستقوم بتوسعتها أكبر ما يمكن . المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الحل

من الواضح أن متغيرات القرار لهذه المسألة هي :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار المخزن } j \text{ لتوسعته} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وحسب البيانات المعطاة فإن النموذج الرياضي لها يصبح كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

وفقا للقيود :

$$7.2x_1 + 6.4x_2 + 1.5x_3 + 2.9x_4 \le 1.2$$

$$5.2x_1 + 3.1x_2 + 2.2x_3 + 4.8x_4 \le 10$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, 4$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1^* = 0$ ، $x_2^* = 1$ ، $x_3^* = 0$ و $x_4^* = 1$ وقيمته $Z^* = 2$ ألف ريال.

(٣,٣,٣) مسألة التكلفة الثابتة للتجهيز

هناك الكثير من الإعدادات التي لابد من إجرائها عندما نرغب بتنفيذ مهمة معينة ولهذه الإعدادات تكاليفها الخاصة بها ، كأن نخصص أشخاصاً محددين لاستكمال هذه

الإعدادات ولمثل هذا التخصيص تكاليفه الخاصة كالرواتب والأجور والحوافز، ... إلخ. كذلك فإن عملية استكمال هذه الإعدادات قد يستلزم بعض النفقات مثل الهواتف والورق والأجهزة وتكاليف السفر ... إلخ. ومن أمثلة هذا النوع من التكاليف.

١- إن بناء منشأة ما له تكاليف إعداد خاصة مثل تكاليف استخراج التراخيص ودراسات الجدوى اللازمة وأجور المكلفين بهذه المهمات إضافة إلى تكاليف أخرى تتعلق بطبيعة المنشأة المراد بناؤها. وهذه التكاليف تكون في معظم الأحيان مستقلة عن حجم المنشأة المراد بناؤها.

٢- ومثل ذلك عمليات سحب أو إيداع مبالغ مالية حيث تنشأ تكاليف مشابهة لتلك التي وردت في (١) وأن هذه التكاليف مستقلة عن حجم المبالغ المودعة أو المسحوبة.

٣- عندما نقوم بإنتاج عدد من المنتجات المختلفة على جهاز أو أكثر لابد من إعادة تجهيز الأجهزة التي تمر عبرها المنتجات في كل عملية إنتاج جديدة. ولعملية التجهيز هذه تكاليفها الخاصة بها كتكاليف تعطل هذه الأجهزة عن العمل لحين إعادة تحضيرها وتعييرها لعملية إنتاج جديدة تتناسب مع طبيعة المنتج الجديد. وكما نلاحظ فإن مثل هذه التكاليف لا تتغير بتغير حجم الكمية المنتجة.

ويشار إلى مثل هذه الأنواع من التكاليف الثابتة (بشكل عام) باسم "تكاليف التجهيز" (Setup cost). ولصياغة هذا النوع من المسائل نستخدم متغيرات القرار التالية :

x_j : الكمية المنتجة من السلعة j

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x_j > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولو رغبنا بوضع حدود عليا على الكمية المنتجة من السلعة j مثل M_j لكان لدينا القيد التالي :

$$x_j \le M_j y_j$$

ولكان النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + K_j y_j$$

حيث K_j هي تكاليف التجهيز للمنتج j .

وكتطبيق على ذلك نقدم الأمثلة التالية.

مثال (٣,١٠) عروض أسعار مع تكلفة نقل ثابتة

تعتزم جامعة الملك سعود شراء 50000 جهاز كمبيوتر محمول لتوزيعها على أعضاء الهيئة التدريسية وبهذا الخصوص فقد تلقت الجامعة ثلاثة عروض من ثلاث شركات على النحو التالي:

- العرض الأول: سعر الجهاز 2500 ريال ولكن الشركة اشترطت ألا تقل الطلبية عن 20000 جهاز وألا تزيد عن 30000 جهاز وأن تتحمل الجامعة مبلغ 2000 ريال كتكاليف لنقل الأجهزة.
- العرض الثاني: سعر الجهاز 2750 ريال ولكن الشركة اشترطت ألا تقل الطلبية عن 10000 جهاز وأن تتحمل الجامعة مبلغ 3000 ريال كتكاليف لنقل الأجهزة.
- العرض الثالث: سعر الجهاز 2000 ريال ويمكن للشركة أن تزود الجامعة بأي عدد من الأجهزة ولغاية 30000 جهاز على أن تتحمل الجامعة مبلغ 2500 ريال كتكاليف لنقل الأجهزة.

ولتقليل مجموع تكاليف النقل والشراء فقد قررت الجامعة أن تتعامل مع شركتين فقط من الشركات الثلاث، المطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

لنلاحظ هنا أن تكاليف النقل تلعب دور التكاليف الثابتة لأنها فعلا تكاليف ثابتة كونها لا تعتمد على حجم الكمية المنقولة. أما متغيرات القرار لهذه المسألة فهي

عدد الأجهزة المشتراة من الشركة الأولى = x_1

عدد الأجهزة المشتراة من الشركة الثانية = x_2

عدد الأجهزة المشتراة من الشركة الثالثة = x_3

ومن الواضح أن كلا من x_1 ، x_2 ، x_3 هو عدد صحيح غير سالب. كذلك لابد من إدخال المتغيرات الثنائية القيم التالية :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x_j > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبذلك يكون النموذج الرياضي للمسألة كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = 2500x_1 + 2750x_2 + 2000x_3 + 200y_1 + 3000y_2 + 2500y_3$$

وفقا للقيود :

$$x_1 \leq 30000y_1$$

$$x_1 \geq 30000y_1$$

$$x_2 \leq My_2$$

$$x_2 \geq 10000y_2$$

$$x_3 \geq 30000 y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3 \text{ أعداد صحيحة}$$

$$y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1^* = 20000$ ، $x_2^* = 0$ ، $x_3^* = 30000$ ، $y_1^* = 1$ ، $y_2^* = 0$ ، $y_3^* = 1$ ، وقيمته $Z^* = 110004500$ ريال.

مثال (٣,١١) مسألة تصميم الشبكات

من المسائل التي نواجهها في الحياة العملية هو ما يسمى تصميم الشبكات التي تربط بين عدد من المنابع (Sources) وعدد من الغايات (Destinations) بطريقة نجعل فيها مجموع كل من تكلفة بناء الروابط بينها وتكلفة التدفق الكلي من المنابع إلى الغايات أقل ما يمكن. وكمثال على ذلك لنفرض أن لدينا الشبكة الممثلة بالشكل رقم (٣,١)، حيث $S = \{1,3,7\}$ تمثل مجموعة المنابع و $D = \{2,4,5,8\}$ تمثل مجموعة الغايات ولدينا عقدة انتقال (Transshipment) واحدة ممثلة بالمجموعة $T = \{6\}$. وفي هذا الشكل قمنا بتمثيل طرق الاتصال التي ينبغي انشاؤها بمتجهات منقطة وطرق الاتصال الموجوة مسبقا بمتجهات متصلة وكما هو ملاحظ فإن كافة طرق الاتصال تعطى بالمجموعة $A = \{1,\cdots,17\}$.

لنفرض أن لكل طريق اتصال حد أعلى من التدفق الشبكي وليكن u_k وبتكلفة قدرها c_k للوحدة من هذا التدفق كما هي موضحة على الشكل رقم (٣,١) ولتسهيل

المسألة فقد افترضنا أن المجموعة التي ينبغي انشاؤها من طرق الاتصال هي $R = \{1,2,3,4,5\}$ وبتكاليف قدرها $f_1 = 8$ ، $f_2 = 6$ ، $f_3 = 9$ ، $f_4 = 7$ ، $f_5 = 7$ ، فإن المسألة تصبح كما يلي :

ما هي طرق الاتصال الواجب انشاؤها وما هي طاقة التدفق الشبكي على كل طريق اتصال بحيث تصبح مجموع تكاليف التدفق والإنشاء اقل ما يمكن؟

الحل

لنفرض أن x_k تمثل التدفق على طريق الاتصال k من المجموعة R عندئذ تكون التكلفة الكلية للطريق k معطاة بالدالة التالية :

$$h_k(x_k) = \begin{cases} f_k + c_k x_k & \text{إذا كان } x_k > 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x_k = 0 \end{cases}$$

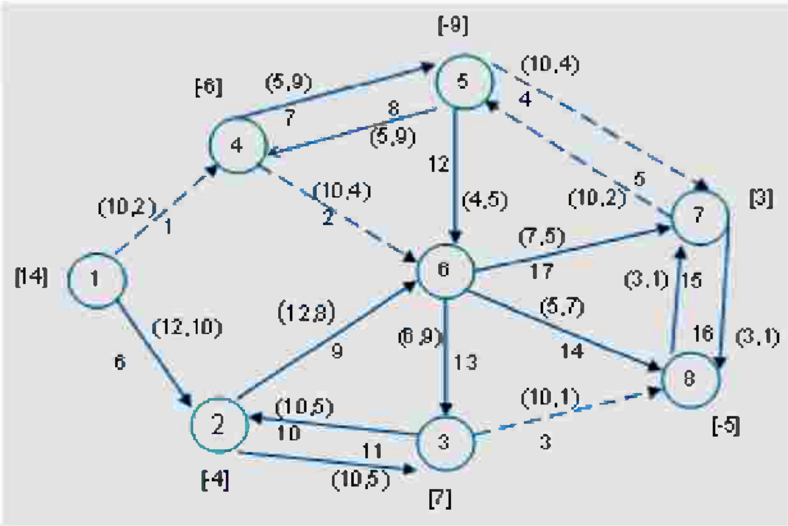
والتي يمكن تمثيلها بيانيا بالشكل رقم (٣,١). وكما هو ملاحظ فإن هذه الدالة هي دالة خطية عدا أنها تملك قفزة (Jump) أو انقطاع عند نقطة الأصل الأمر الذي يصعب معه التعامل معها كدالة خطية. ولتجاوز مثل هذه الصعوبة نقدم المتغيرات الثنائية القيم (التي تمثل تكاليف ثابتة) التالية : من أجل $k \in R$ ، فإننا نعرف y_k كما يلي :

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم إنشاء طريق الاتصال } k \\ 0 & \text{إذا كان } x_k = 0 \end{cases}$$

وبذلك يمكن التعبير عن الدالة $h_k(x_k)$ كما يلي :

$$h_k(x_k) = f_k y_k + c_k x_k$$

حيث $x_k \geq 0$ و $y_k = 1$ أو 0 .



الشكل رقم (٣,١).

ويمثل هذه المسائل علينا أن نلاحظ وجود نوع من القيود الضمنية وهي هنا:
التدفق في أي من طرق الاتصال يجب ألا يتجاوز طاقة تلك الطريق (الشكل رقم ٣,٢).
فلو رمزنا بالرمز $K_{O(i)}$ لمجموعة الطرق المنبثقة من العقدة i وبالرمز $K_{T(i)}$ لمجموعة الطرق التي تصب في العقدة i لكان النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:
صغر الدالة:

$$Z = \sum_{k \in R} f_k y_k + \sum_{k \in A} c_k x_k$$

وفقا للقيود:

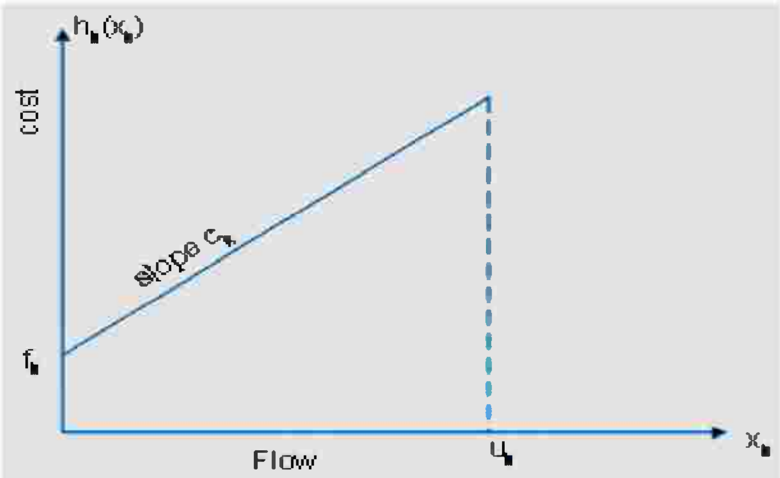
$$\sum_{k \in K_{O(i)}} x_k - \sum_{k \in T_{O(i)}} x_k = b_i, \quad i \in S \cup D \cup T$$

$$x_k \leq u_k y_k, \quad k \in R$$

$$x_k \le u_k, \quad k \in A$$

$$x_k \ge 0, \quad k \in A$$

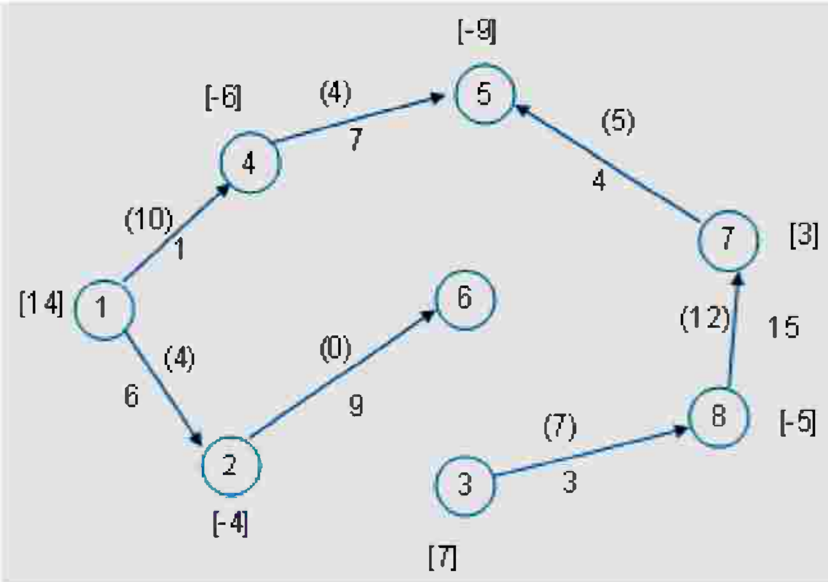
$$y_k = 1 \text{ أو } 0 \qquad , \quad k \in R$$



الشكل رقم (٣,٢).

لاحظ أن القيد الأول يعبر عما نطلق عليه قانون حفظ التدفق حيث يعبر المقدار الثابت b_i عن مقدار موجب بالنسبة لأي عقدة منبع ومقدار سالب بالنسبة لأي عقدة غاية وصفر بالنسبة لأي عقدة انتقال. ويفيد القيد الثاني بأن $y_k = 1$ إذا كان x_k أكبر من الصفر، ويفيد أيضا أن التكلفة الثابتة ستقع لا محالة إذا كان k هو طريق اتصال مستخدمة. ويلعب القيد الثالث (الرابع) الدور بوضع حد أعلى (حد أدنى) على

التدفقات في العقد المختلفة. أما القيد الخامس فيحدد طبيعة المتغيرات التي تساهم في إدخال التكلفة الثابتة وبأن هذه المتغيرات ثنائية القيم. ويعطي الشكل رقم (٣,٣) الحل الأمثل لهذه المسألة.



الشكل رقم (٣,٣).

(٣,٣,٤) مسألة التخصيص

تعالج هذه المسألة عملية تخصيص عدد من الموارد (عمال، موظفين، شركات، ... إلخ) لعدد من الأنشطة (أعمال، وظائف، مشاريع، ... إلخ) والهدف من عملية التخصيص هو جعل العائد الناتج منها أفضل ما يمكن (أكبر ما يمكن للأهداف التي تتضمن زيادة الأرباح وأقل ما يمكن للأهداف التي تتضمن تقليل التكاليف).

وهناك نوعان من مسائل التخصيص هما:

(٣,٣,٤,١) مسألة التخصيص البسيطة

هنا تكون عملية التخصيص n من الموارد ل n من الأنشطة بحيث يتم تخصيص كل مورد لنشاط واحد فقط وكل نشاط ينفذه مورد واحد فقط والتي نطلق عليها عملية تخصيص واحد لواحد. وأمثلة ذلك تخصيص عدد من المكائن لنفس العدد من الأعمال، وتخصيص عدد من الباعة لنفس العدد من مهمات البيع، وتخصيص عدد من العقود لنفس العدد من الشركات. ومن الواضح أن متغيرات القرار لهذا النوع من المسائل هي متغيرات ثنائية القيم يمكن تعريفها بشكل عام على النحو التالي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص المورد } i \text{ للنشاط } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولو كان الهدف هو تقليل التكاليف لكان النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

وكتطبيق على هذا النوع من المسائل نسوق المثال التالي:

مثال (٣,١٢)

لدى شركة أربعة أعمال مختلفة وترغب بإنجازها على أربع من المكائن التي تمتلكها بحيث تنجز كل عمل على واحدة من هذه المكائن. يبين الجدول رقم (٣,٥) الوقت اللازم لإنجاز كل من هذه الأعمال على كل من المكائن الأربعة. تهدف الشركة إلى إنجاز جميع الأعمال بأقل زمن ممكن والمطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

كما أوضحنا سابقاً فمتغيرات القرار في هذا المثال هي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص الماكينة } i \text{ لانجاز العمل } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ووفقا للبيانات المتعلقة بهذه المسألة يكون النموذج الرياضي لها كما يلي:

صغر الدالة:

$$\begin{aligned} Z \;=\; & 15x_{11} + 24x_{12} + 19x_{13} + 12x_{14} + 25x_{21} + 19x_{22} + 17x_{23} + 14x_{24} \\ & 18x_{31} + 15x_{32} + 23x_{33} + 18x_{34} + 22x_{41} + 20x_{42} + 14x_{43} + 16x_{44} \end{aligned}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad i, j = 1, \cdots, 4$$

وهذه المسألة هي مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم. وتعبر القيود الأربعة الأولى عن أن كل ماكينة قد خصصت لإنجاز عمل من الأعمال وتعبر القيود الأربعة التي تليها عن أن كل عمل قد تم إنجازه على أحد الكائن. وكما سنرى في الجزء الثاني من هذا الكتاب فإن الحل الأمثل لهذه المسألة هو $x^*_{ij} = 0$ عدا $x^*_{11} = x^*_{24} = x^*_{32} = x^*_{43} = 1$ وقيمته $Z^* = 58$.

الجدول رقم (٣,٥). بيانات المثال (٣,١٢).

المكائن	أزمنة التنفيذ (ساعة) للأعمال			
	1	2	3	4
1	15	24	19	12
2	25	19	17	14
3	18	15	23	18
4	22	20	14	16

(٣,٣,٤,٢) مسألة التخصيص العامة

وتختلف هذه المسألة عن سابقتها بأن التخصيص لا يكون واحد لواحد، ومثال ذلك أنه لو أردنا تخصيص عدد من الطلاب لعدد من الغرف في السكن الجامعي بحيث نسكن طالبين في كل غرفة لكانت هذه المسألة هي تخصيص $2n$ من الموارد ل n من الأنشطة. ويشكل عام لو فرضنا أن المورد i قد خصص لتنفيذ النشاط j مع إمكانية أن هذا المورد i قد يقوم بتنفيذ نشاط أو أكثر غير النشاط j. ولو فرضنا أن المتوافر من المورد i = b_i

تكلفة تخصيص المورد i لتنفيذ النشاط j = c_{ij}

عدد الوحدات اللازمة من المورد i لتنفيذ النشاط j = s_{ij}

عندئذ نطلق على عملية تخصيص كافة الموارد لتنفيذ كافة الأنشطة ضمن الشروط السابقة بأنها " مسألة تخصيص عامة " ومتغيرات القرار فيها هي المتغيرات الثنائية القيم x_{ij} المعرفة بطريقة مماثلة لمسألة التخصيص البسيطة هي :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص المورد } i \text{ للنشاط } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبذلك يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي :

صغر الدالة :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

وللتوضيح نسوق المثال التالي :

مثال (٣,١٣)

ترغب ست جامعات بالاستعانة بثلاثة علماء طب متميزين لإجراء أبحاث طبية تتعلق ببعض الأمراض الوراثية. ولدى تفاوض هذه الجامعات مع العلماء الثلاثة تبين أن أي منهم لا يستطيع أن يبقى في أي من الجامعات الست أكثر من مدة محددة كما أنه سيتقاضى على ذلك أجراً يتناسب مع مدة بقائه وعلى طبيعة الأبحاث الطبية التي سيجريها مع أن الحد الأقصى لإمكانية تواجد أي من العلماء في أي جامعة هو 50 أسبوعا. البيانات المتعلقة بهذه المسألة معطاة كما في الجدول رقم (٣,٦). الأجر(ألف دولار) والوقت (أسبوع).

فإذا كانت الجامعات الست تهدف لجعل عملية تخصيص العلماء الثلاث عليها بأقل قدر ممكن من التكاليف فالمطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

من الواضح أن القرار هنا هو أن يتم اختيار جامعة لعالم من العلماء الثلاث أو ألا يتم ذلك . فمتغيرات القرار هي المتغيرات الثنائية التالية :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار الجامعة } i \text{ للعالم } j \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الجدول رقم (٣,٦). بيانات المثال (٣,١٣).

العلماء	الأجر والوقت	الجامعات 1	2	3	4	5	6
1	الأجر	130	30	510	30	340	20
	الوقت	30	50	10	11	13	9
2	الأجر	460	150	20	40	30	450
	الوقت	10	20	60	10	10	17
3	الأجر	40	370	120	390	14	30
	الوقت	70	10	10	15	8	12

فالنموذج الرياضي لهذه المسألة هو:

صغر الدالة:

$$Z = 130x_{11} + 460x_{12} + 40x_{13} + 30x_{21} + 150x_{22} + 370x_{23} + 510x_{31} + 20x_{32} + 120x_{33} + 30x_{41} + 40x_{42} + 390x_{43} + 340x_{51} + 30x_{52} + 40x_{53} + 20x_{61} + 450x_{62} + 30x_{63}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$ (الجامعة 1)

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$ (الجامعة 2)

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$ (الجامعة 3)

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$ (الجامعة 4)

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1$$ (الجامعة 5)

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1$$ (الجامعة 6)

$$30x_{11} + 50x_{21} + 10x_{31} + 11x_{41} + 13x_{51} + 9x_{61} \le 50 \qquad \text{(العالم 1)}$$

$$10x_{12} + 20x_{22} + 60x_{32} + 10x_{42} + 10x_{52} + 17x_{62} \le 50 \qquad \text{(العالم 2)}$$

$$70x_{13} + 10x_{23} + 10x_{33} + 15x_{43} + 8x_{53} + 12x_{63} \le 50 \qquad \text{(العالم 3)}$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, \cdots, 6; \ j = 1, 2, 3$$

لاحظ أن القيود الستة الأولى تضمن تخصيص كل جامعة لواحد من العلماء الثلاث وأن القيود الثلاث الأخيرة تضمن عدم عمل أي من العلماء الثلاث لدى جميع الجامعات أكثر من خمسين أسبوعا. وهذه المسألة هي مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم، والحل الأمثل لهذه المسألة هو تخصيص الجامعات 1,4 و6 إلى العالم 1 والجامعات 2 و5 إلى العالم 2 والجامعة 3 إلى العالم 3 وستكون أقل تكلفة للتخصيص المقابل هي 480000 $.

(٣,٣,٥) مسألة الإيداعات البريدية المقيدة

تحتاج كثير من الشركات كالبنوك وشركات بطاقات الائتمان لاستلام بعض أنواع من المدفوعات بالبريد، ولذلك فعلى مثل هذا النوع من الشركات أن يقرر عدد المراكز التي ستستقبل فيها مثل هذه المدفوعات وأماكنها. ويكون الهدف في مثل هذه الحالة هو تحديد العدد والمكان الأمثل لهذه المراكز بحيث تكون التكاليف الكلية الناتجة أقل ما يمكن. ويشار لمثل هذا النوع من المسائل باسم "مسائل الإيداعات البريدية المقيدة". وتأتي كلمة مقيدة هنا لتشير إلى أن تقييد هذه المراكز بأمكنة (مدن، أحياء، ... إلخ) محددة وإلى تقييد مدفوعات الزبائن بحيث تكون إلى مراكز محددة حيث أن أي دفعة لاتصل إلى المكان المحدد لها ستؤدي إلى نوع من التأخير وبالتالي إلى الخسارة.

ولتوضيح هذا النوع من المسائل نسوق المثال التالي :

مثال (٣,١٤)

يتسلم البنك السعودي الفرنسي مدفوعات بطاقات الائتمان من أربع مناطق رئيسة في المملكة العربية السعودية هي : المنطقة الوسطى، المنطقة الغربية، المنطقة الشمالية والمنطقة الشرقية. لذلك فقد قرر افتتاح أربع مراكز لهذا الغرض في المدن التالية : الرياض، جدة، تبوك والدمام.

يبين الجدول رقم (٣,٧) التالي الخسارة الناتجة (تكاليف ناتجة) عن ارسال زبون من المنطقة i مدفوعاته إلى المدينة j . كذلك فإن التكلفة السنوية لأي مركز في أي من المدن الأربع تقدر ب 50000 ريال. إذا افترضنا أن على كل منطقة أن ترسل مدفوعات زبائنها إلى واحدة فقط من المدن وأنه لا توجد قيود على مقدار المدفوعات التي يمكن لأي مركز أن يستلمها، فالمطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الجدول رقم (٣,٧). بيانات المثال (٣,١٤).

المنطقة	المدينة			
	الرياض	جدة	تبوك	الدمام
الوسطى	28	84	112	112
الغربية	60	20	50	50
الشمالية	96	60	24	60
الشرقية	64	40	40	16

الحل

من الواضح أن على البنك السعودي الفرنسي أن يتخذ نوعين من القرارات :

● الأول : في أي مدينة من المدن الأربعة سيختار مكان عمل مركز ما من المراكز الأربعة، ولذلك لدى البنك متغيرات القرار الثنائية القيم التالية : من أجل $j = 1, \cdots, 4$ نعرف

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا عمل المركز في المدينة } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

● الثاني: لأي من المراكز في المدن ستقوم منطقة معينة بإرسال (أو دفع) مدفوعاتها، ولذلك لدى البنك متغيرات القرار الثنائية القيم التالية: من أجل $i, j = 1, \cdots, 4$ نعرف

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا أرسلت المنطقة } i \text{ مدفوعاتها للمدينة } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبالتالي سيكون النموذج الرياضي لهذه المسألة على النحو التالي:

صغر الدالة:

$$\begin{aligned} Z \quad = \quad & 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} \\ & + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44} \\ & + 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 \end{aligned}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} \le y_j , \quad i, j = 1, \cdots, 4$$

$$x_{ij}, y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad i, j = 1, \cdots, 4$$

وهي مسألة برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم. وتضمن القيود الأربعة الأولى أن كل منطقة سترسل مدفوعات زبائنها إلى مدينة معينة، بينما يضمن القيدين الأخيرين أنه إذا أرسلت منطقة ما مدفوعات زبائنها إلى مدينة معينة فإن هذه المدينة تمتلك مركزاً. والحل الأمثل لهذه المسألة هو $y_1^* = y_3^* = 1$ و $x_{11}^* = x_{23}^* = x_{43}^* = 1$ وقيمته $Z^* = 242$.

(٣,٣,٦) مسألة تحديد مواقع وطاقة مراكز الخدمات وسياسات التوزيع المثلى

نحتاج في كثير من المسائل العملية أن نحدد مواقع مراكز خدمات معينة وطاقتها الاستيعابية ونحدد بعدها سياسات التوزيع المثلى من هذه المراكز إلى أماكن الاحتياج والتي تجعل التكلفة الكلية لهذه العملية أقل ما يمكن. فمثلا نحتاج تحديد مراكز المستودعات الخاصة بشركة ما وكذلك تحديد حجم كل من هذه المستودعات ثم نقوم بعدها بإيجاد سياسات النقل المثلى للبضائع المخزنة في هذه المستودعات إلى مناطق الاستهلاك بحيث تكون التكلفة الكلية للعملية برمتها أقل ما يمكن. وينقسم هذا النوع من المسائل إلى قسمين: في القسم الأول نفترض أن الطاقة الاستيعابية لأي مركز خدمة هي طاقة محددة ولكنها غير معروفة (نرغب بتحديدها) أما في القسم الثاني فإننا لا نشترط ذلك.وفي الحالتين فإننا نرغب كذلك بتحديد مواقع مراكز الخدمات هذه.

(٣,٣,٦,١) مسألة تحديد مواقع مراكز الخدمات ذات الطاقة المحدودة وسياسات التوزيع المثلى منها

لنفرض أن لدينا m مركز خدمات بحيث أن طاقة المركز المقام في الموقع i هي z_i وحدة من السلعة المطلوبة (نرغب بتحديدها) وبطاقة قصوى معلومة وقدرها u_i حيث

$i = 1,\cdots,m$. وتقدم هذه المراكز الخدمات ل n من مناطق الاحتياج تحتاج فيها المنطقة j إلى d_j وحدة من السلعة المطلوبة (d_j معلومة) حيث $j = 1,\cdots,n$. ولو فرضنا أن تكلفة تجهيز مركز خدمات في موقع ما i سيكلف f_i كتكلفة ثابتة ولكن تكلفة الوحدة من هذا المركز ولتكن v_i تختلف من مركز لأخر فهي تكلفة متغيرة. ولو فرضنا أن تكلفة نقل وحدة من السلعة المطلوبة من مركز الخدمة i إلى منطقة الاحتياج j هي c_{ij} (c_{ij} معلومة) وأن x_{ij} هو عدد الوحدات الواجب نقلها من مركز الخدمة i إلى منطقة الاحتياج j حيث $i = 1,\cdots,m$ و $j = 1,\cdots,n$ ، ولنعرف المتغيرات y_i كما يلي:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا اخترنا مركز الخدمة في الموقع } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

لنفرض أن الهدف هو إيجاد القيم المثلى لكل من z_i ، x_{ij} ، y_i (متغيرات القرار) بحيث تكون التكلفة الكلية للعملية برمتها أقل ما يمكن فإن النموذج الرياضي لهذه المشكلة هو:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m} v_i z_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le z_i, \quad i = 1,\cdots,m$$

$$z_i \le u_i y_i, \quad i = 1,\cdots,m$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n$$

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

وهي مسألة برمجة خطية عددية مختلطة. سنقوم الآن بتوضيح هذه الحالة من خلال المثال التالي :

مثال (٣,١٥)

ترغب شركة ببناء شبكة لتوزيع المؤن في المملكة العربية السعودية وقد قررت لذلك اختيار 5 مواقع كمواقع محتملة لإشادة مخازنها فيها حيث تتوقع الشركة أن يتم توزيع البضائع المُخزنة فيها على 5 مناطق احتياج في المملكة. البيانات المتعلقة بهذه المسألة تتضمن تكلفة نقل وحدة من المخزون من أي من المخازن الخمسة إلى كافة مناطق الاحتياج والتكلفة الثابتة لتشييد مخزن في منطقة معينة والتكلفة المتغيرة التي عرفناها أعلاه. أما ما أسميناه بالطاقة القصوى فهي هنا محددة بعدد الوحدات التي يمكن نقلها أسبوعيا. كذلك فإن هذا الجدول يحوي على عدد الوحدات المتوقع استهلاكها في كل منطقة والبيانات معطاة في الجدول رقم (٣,٨).

تهدف الشركة إلى اختيار مواقع المخازن وسعتها وسياسات النقل المثلى التي تلبي الاحتياج من الإستهلاك والتي تجعل مجموع التكاليف الكلية لهذه العملية أقل ما يمكن. المطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

الجدول رقم (٣,٨). بيانات المثال (٣,١٥).

المخازن	تكلفة نقل الوحدة من المخزن إلى المنطقة 1	2	3	4	5	الطاقة القصوى	التكلفة الثابتة	التكلفة المتغيرة
1	8	21	42	12	37	80	1000	20
2	21	10	31	24	40	80	1500	17
3	42	31	4	14	32	80	1700	13
4	12	24	14	7	12	80	1400	25
5	37	40	32	12	10	80	1200	33
الإستهلاك المتوقع	30	40	50	35	40			

كما نلاحظ فإن الشروط في هذه المسألة العملية تتطابق تماما مع الشروط النظرية أعلاه. فلو حافظنا على الرموز لكان النموذج الرياضي لها كما يلي :

صغر الدالة :

$$\begin{aligned} Z \quad = \quad & 1000\,y_1 + 1500\,y_2 + 1700\,y_3 + 1400\,y_4 + 1200\,y_5 \\ & + 20z_1 + 17z_2 + 13z_3 + 25z_4 + 33z_5 \\ & + 8x_{11} + 21x_{12} + 42x_{13} + \cdots + 10x_{55} \end{aligned}$$

وفقا للقيود :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 30$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 40$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 50$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 35$$

$$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=40$$

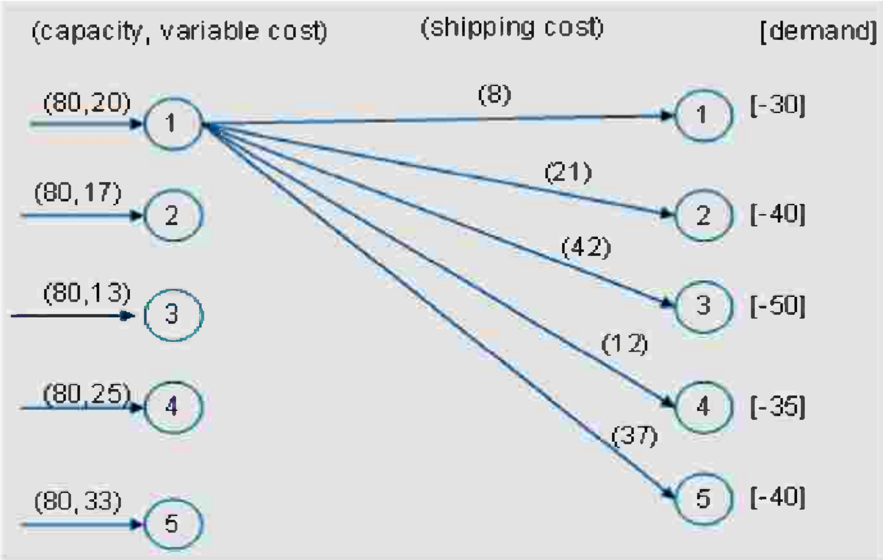
$$\begin{array}{ll}
x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}\le z_1 & z_1\le 80\,y_1\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le z_2 & z_2\le 80\,y_2\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}\le z_3 & z_3\le 80\,y_3\\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}\le z_4 & z_4\le 80\,y_4\\
x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}\le z_5 & z_5\le 80\,y_5
\end{array}$$

$$x_{ij}\ge 0,\quad i=1,\cdots,5;\, j=1,\cdots,5$$

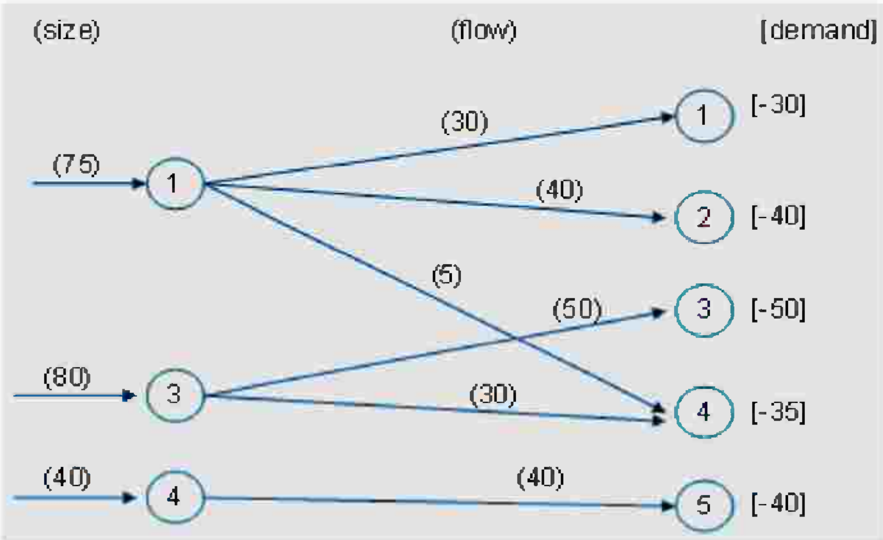
$$z_i\ge 0,\quad i=1,\cdots,5$$

$$y_i=1 \text{ أو } 0,\quad i=1,\cdots,5$$

وهي مسألة برمجة خطية عددية مختلطة كما أسلفنا. ويمكن النظر إلى هذه المسألة على أنها مسألة شبكات تعطى شبكتها بشكل جزئي بالشكل رقم (٣,٤) حيث أظهرنا الإستهلاك المتوقع كمقادير سالبة. والحل الأمثل لهذه المسألة هو أن تقوم الشركة ببناء مخازنها في المواقع 1,3 و4 وفقا لسياسة النقل المثلى الموضحة بالشكل رقم (٣,٥)



الشكل رقم (٣,٤). تمثيل المثال (٣,١٥) كشبكة.



الشكل رقم (٣,٥). تمثيل حل المثال (٣,١٥) كشبكة.

(٣,٣,٦,٢) مسألة تحديد مواقع مراكز الخدمات ذات الطاقة غير المحدودة وسياسات التوزيع المثلى منها

كما أسلفنا فإن هذه المسألة تختلف عن سابقتها بافتراض أن طاقة مراكز الخدمات تصبح هنا غير محدودة ولذلك فإن z_i لا تبقى من ضمن متغيرات القرار وتبقى الصياغة السابقة صحيحة بعد تعديل كل ما يتعلق بهذه المتغيرات وهي الحد الثاني من دالة الهدف والقيد الثالث حيث نعطي ل u_i في هذا القيد قيمة اختيارية كبيرة نسبيا.

ثمة نموذج معدل لهذه المسألة يسهل عملية حله بطريقة القطع والحد. وهذا النموذج المعدل مبني على تعديل في فرضيات النموذج الأصلي على النحو التالي:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم بناء المركز } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ونظرا لأن الطاقة الاستيعابية للمراكز غير محدودة فيمكن إثبات أنه يمكن الوصول إلى الحل الأمثل بتزويد معدل الاستهلاك المتوقع لكل منطقة احتياج من واحد فقط من مراكز الخدمة. وفي هذه الحالة فإننا نجمع التكلفة المتغيرة وتكلفة نقل الوحدة وندمج الناتج مع معدل الاستهلاك ونعرف

$$\overline{c}_{ij} = (v_i + c_{ij})d_j$$

وعندها يصبح النموذج المعدل كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq ny_i, \quad i=1,\cdots,m$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i=1,\cdots,m$$

لاحظ في القيد الثاني أننا قمنا بضرب y_i ب n وذلك لإعطاء المرونة بإمكانية أن نزود كافة المناطق باحتياجها من واحد فقط من مراكز الخدمة.

(٣,٤) تمارين (٣)

١- لدينا مسألة البرمجة الخطية العددية الثنائية التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 35x_1 + 40x_2 + 42x_3$$

وفقا للقيود :

$$7x_1 + 6x_2 + 13x_3 \leq 754$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 30$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j=1,2,3$$

أضف القيود التالية :

أ) أكثر من اثنين من متغيرات القرار لا يساوي الصفر.

ب) إذا كان $x_2 = 1$ فإن $x_3 = 1$ والعكس بالعكس.

قم بعد ذلك بحل النموذج الناتج.

٢- مسألة تلوين خريطة بأربعة ألوان. لنفرض أن خريطة مقسمة إلى مجموعة المناطق $r = \{1,2,\ldots,R\}$ وأن $x_r = 0,1,2,3$ تقابل الألوان الأربعة وأن أي منطقتين متجاورتين ستلونان بلونيين مختلفين أي أن $x_r - x_s$ مختلف عن الصفر وأنه إما $x_r - x_s \geq 1$ أو $x_s - x_r \geq 1$. صغ هذه المسألة بنموذج رياضي.

٣- يقوم معمل بصناعة ثلاثة أنواع من المنتجات الخشبية هي كراسي، طاولات كبيرة وطاولات صغيرة. تمر عملية الصناعة عبر قسم التجميع وقسم الدهان حيث تحتاج كل قطعة في أي منهما إلى زمن محدد ويتوافر لكل من هذين القسمين زمنا معينا للعمل الأسبوعي البيانات المتعلقة في هذه المسألة معطاة كما في الجدول رقم (٣,٩). وتقضي المتطلبات أن تتم صناعة 50 طاولة من أحد النوعين أو كلاهما أو ألا يتم صناعة أي طاولة. يهدف المعمل لجعل أرباحه الأسبوعية أقل ما يمكن. صغ هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

الجدول رقم (٣,٩).

المنتج	الزمن اللازم لصناعة الوحدة(ساعة)			الزمن المتوافر (ساعة/أسبوع)
	كراسي	طاولات كبيرة	طاولات صغيرة	
قسم التجميع	2	4	3	180
قسم الدهان	4	2	2	200
ربح الوحدة	$8	$10	$7	

٤- ترغب جامعة الملك سعود بشراء 1100 جهاز كمبيوتر شخصي وقد توافر لها ثلاثة عروض على النحو التالي:

العرض الأول. وسعر الجهاز فيه 500 $ لكن صاحبه لا يستطيع بيع الجامعة أكثر من 500 جهاز على أن تدفع الجامعة 5000 $ كتكاليف استخراج وتوصيل لكامل الطلبية.

العرض الثاني. وسعر الجهاز فيه 350 $ لكن صاحبه لا يستطيع بيع الجامعة أكثر من 900 جهاز على أن تدفع الجامعة 4000 $ كتكاليف استخراج وتوصيل لكامل الطلبية.

العرض الثالث. وسعر الجهاز فيه 250 $ لكن صاحبه لا يستطيع بيع الجامعة أكثر من 400 جهاز على أن تدفع الجامعة 6000 $ كتكاليف استخراج وتوصيل لكامل الطلبية.

لكن الجامعة قررت ألا تقل مشترياتها عن 200 جهاز في أي من العروض الثلاثة وهي تهدف إلى جعل التكاليف الكلية لكامل الصفقة أقل ما يمكن. صغ هذه المسألة بنموذج رياضي.

٥- تنتج شركة صناعية 3 منتجات تستهلك الوحدة من كل منها زمنا محددا عبر أربعة أقسام مختلفة.

البيانات الخاصة بهذه المسألة محددة كما في الجدول رقم (٣,١٠). ونظرا لوجود بعض الصعوبات فإن الشركة تشترط أنه إذا تم تصنيع أي من المنتجات الثلاثة فلا بد من إنتاج مالا يقل عن 500 وحدة من هذا المنتج وأن عدد الوحدات المنتجة من أي منتج يجب أن يكون صحيحا. المطلوب صياغة هذه المسألة مع العلم أن الشركة تهدف إلى جعل الأرباح الكلية من هذه المنتجات أكبر ما يمكن.

الجدول رقم (٣،١٠).

الأقسام	الساعات الأسبوعية المطلوبة لصناعة الوحدة			الساعات المتوافرة أسبوعيا
	المنتج (1)	المنتج (2)	المنتج (3)	
A	4	1	1	6000
B	2	1	1	4500
C	1	2	1	2000
D	1	2	2	2500
ربح الوحدة	3	2	2	

٦- جدولة طواقم حجز الطيران. ترغب الخطوط الجوية السعودية بجدولة طواقم الحجز عبر الهاتف وفقا لعشر فترات متصلة تبدأ من الساعة السادسة صباحا وفقا للجدول رقم (٣،١١). ومع ذلك فإن الخطوط السعودية ترغب بجعل العمل على 6 فترات (دفعات عمل فقط على النحو المبين في الجدول رقم (٣،١٢). تهدف الخطوط السعودية لتخصيص أقل قدر ممكن من الأشخاص للعمل بحيث يتم تغطية احتياج كافة الفترات الموضحة بالجدولين (٣،١١) و(٣،١٢) . المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الجدول رقم (٣،١١).

رقم الفترة	الفترة من إلى	الحد الأدنى من الأشخاص الذين تحتاجهم الفترة
1	6-8 صباحاً	3
2	8-10 صباحاً	12
3	10-12 صباحاً	13
4	12-14 مساءً	10
5	14-16 مساءً	12
6	16-18 مساءً	10
7	18-20 مساءً	6
8	20-22 مساءً	5
9	20 -12 ليلاً	4
10	12-2 ليلاً	3

الجدول رقم (٣,١٢).

رقم دفعة العمل	وقت عمل الدفعة
1	6 صباحاً–14 مساءً
2	8 صباحاً–16 مساءً
3	10 صباحاً–18 مساءً
4	18مساءً–2 صباحاً
5	10 مساءً–1 صباحاً ومن 16 مساءً–20 مساءً
6	من 8–11 صباحاً ومن 17 مساءً–21 مساءً

٧- تعتزم إحدى الشركات الصناعية أن تصرف مبلغ لا يزيد عن 4.8 مليون دولار على تطوير أربعة مشاريع. الجدول رقم (٣,١٣) يبين كل من التكلفة والربح العائد لكل من هذه المشاريع بملايين الدولارات.

الجدول رقم (٣,١٣).

المشروع	1	2	3	4
التكلفة	1.8	2.6	2.1	3
الربح	3.4	5.3	3.7	6

ترغب الشركة بمعرفة أي المشاريع سيتم تطويره لكي تحقق أكبر ربح كلي ممكن.

المطلوب

أ) صياغة هذه المسألة.

ب) تحديد القيود المقابلة لكل من الشروط التالية :

١- على الشركة أن تطور 3 مشاريع على الأقل.

٢- إذا تم اختيار المشروع (1) فعلى الشركة أن تختار المشروع (4).

٣- على الشركة أن تختار مشروعين فقط.

٤- إذا تم اختيار المشروع (2) فعلى الشركة أن تختار المشروع (3).

٥- أن تطبق الشركة الشرط (1) أو الشرط (2) وليس كليهما.

ج) اكتب المسألة المخففة لهذه المسألة.

٨- ترغب شركة بتحصيص مبلغ $ 100000 ومساحة قدرها 27000 قدم مربع لأربعة مشاريع على النحو التالي:

المشروع1: يحتاج لمبلغ $ 20000 ولمساحة قدرها 12000 قدم مربع وربحه المتوقع $5000 .

المشروع2: يحتاج لمبلغ $ 30000 ولمساحة قدرها 5000 قدم مربع وربحه المتوقع $7000 .

المشروع3: يحتاج لمبلغ $ 50000 ولمساحة قدرها 18000 قدم مربع وربحه المتوقع $10000 .

المشروع4: يحتاج لمبلغ $ 25000 ولمساحة قدرها 10000 قدم مربع وربحه المتوقع $4000 .

تهدف الشركة لجعل الربح الكلي المتوقع أكبر ما يمكن. المطلوب صياغة هذه المسألة ضمن الشروط التالية:

١- لا تستطيع الشركة أن تختار أقل من ثلاثة مشاريع من هذه المشاريع الأربعة.

٢- إذا تم اختيار المشروع 1 فلا بد من اختيار المشروع 2، أما بالنسبة للمشروعين 3 و4 فيجب ألا يتم اختيارهما معا.

٩- تلقت شركة أربعة عروض من داخل المحافظة ومن خارجها لتنفيذ أربعة مشاريع منها اثنين من المشاريع الكبيرة (1 و 2) وفقا للبيانات الموضحة بالجدول رقم (٣,١٤).

الجدول رقم (٣,١٤).

المشروع	العروض			
	1	2	3	4
1	600	630	650	690
2	550	520	530	560
3	120	140	150	140
4	170	180	190	180

ونظرا لضيق الوقت فقد قررت الشركة تخصص واحد فقط من العروض لواحد فقط من المشاريع ولكن ولأسباب اقتصادية فإن الشركة ترغب بتخصيص واحد على الأكثر من المشروعين 1 و2 لخارج المحافظة. المطلوب صياغة هذه المسألة إذا علمت أن الشركة ترغب بتنفيذ المشاريع الأربعة بأقل تكلفة ممكنة.

١٠- تعاقدت شركة لإنتاج 500 وحدة من سلعة معينة لأحد زبائنها. لدى الشركة ٣ مكائن يمكن لكل منها ان تنتج المطلوب من هذه السلعة تختلف في طاقتها الإنتاجية القصوى كما تختلف في كل من التكاليف الثابتة والمتغيرة وفقا للبيانات الموضحة بالجدول رقم (٣,١٥). ترغب الشركة بتفيذ عملية إنتاج ال 500 وحدة من السلعة المطلوبة لزبونها بأقل تكلفة ممكنة، صغ هذه المسألة بنموذج رياضي.

الجدول رقم (٣,١٥).

الماكينة	تكلفة إنتاج الوحدة	تكلفة تجهيز الماكينة (القصوى/أسبوع)	الطاقة الإنتاجية
1	1.2	60	300
2	1.4	55	250
3	1.23	50	270

١١- تعتزم شركة إنتاج منتج جديد، وقد أظهرت الدراسات أن هناك ستة أماكن محتملة لإقامة مصانع لإنتاج هذا المنتج وأنه بإمكان هذه المصانع أن تخدم أربعة مناطق مختلفة.

جميع البيانات المتعلقة بهذه المسألة معطاة في الجدول رقم (٣,١٦) وهي تشمل ما يلي: معدل الطلب الشهري لكل منطقة، الطاقة الشهرية الممكنة لكل مصنع، تكلفة إنتاج الوحدة عند كل مصنع وتكلفة نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل منطقة (التكلفة المتغيرة) والتكلفة الثابتة لدى كل مصنع. ترغب الشركة بمعرفة أي المصانع ستختار بحيث تلبي احتياج كافة المناطق وبحيث تكون التكاليف الكلية لإنتاج هذا المنتج أقل ما يمكن. المطلوب صياغة هذه المسألة.

الجدول رقم (٣,١٦).

المصانع	التكلفة المتغيرة للمناطق				الطاقة الممكنة للمصنع/شهر	التكلفة الثابتة
	1	2	3	4		
1	10	12	13	17	700 وحدة	$3000
2	11	9	10	14	750 وحدة	$3500
3	15	12	8	10	650 وحدة	$2600
4	18	15	12	9	550 وحدة	$2100
5	13	16	14	12	800 وحدة	$3900
6	18	11	8	16	600 وحدة	$2800
معدل الطلب (وحدة)	800	600	700	500		

١٢- كُلفت إحدى ورشات الإصلاح الأتوماتيكية بتنفيذ أربعة أعمال على أربعة مكائن بحيث يتم تنفيذ كل من هذه الأعمال عل ماكينة واحدة. وقد تمكنت الورشة من تقدير تكاليف تنفيذ كل من هذه الأعمال على كل من المكائن الأربعة والبيانات معطاة كما في الجدول رقم (٣,١٧). تهدف الورشة إلى تخصيص تنفيذ الأعمال الأربعة على المكائن الأربعة بشكل يجعل التكلفة الكلية لذلك أقل ما يمكن، والمطلوب:

(أ) إيجاد عدد الحلول الممكنة للمسألة. (ب) صياغة المسألة كمسألة برمجة عددية

الجدول رقم (٣,١٧).

الأعمال	المكائن			
	A	B	C	D
1	81	75	69	77
2	74	74	63	73
3	85	77	66	74
4	66	63	58	62

١٣- يمكن لأحد المؤتمرات أن يجتذب 100 شخص لحضوره في اليوم الواحد. يعتمد عدد الحاضرين على المحاضرين في هذا المؤتمر وهم السادة {هاني، فيصل، رعد، نبيل} وعلى وقت المحاضرة لكل منهم. البيانات محددة في الجدول رقم (٣,١٨). يرغب منظموا المؤتمر بتحديد مواعيد المحاضرات بحيث يكون عدد الحاضرين أكبر ما يمكن في كافة الأوقات الأربعة، والمطلوب :

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة عددية.

(ب) إعادة صياغة المسألة إذا علمت أن السيد فيصل لن يشارك في إلقاء محاضرات في الفترة الأخيرة من الوقت نظرا لانشغاله بأمور أخرى.

الجدول رقم (٣,١٨).

وقت المحاضرة	المحاضر			
	هاني	فيصل	رعد	نبيل
8.30 - 10.00 صباحا	64	72	70	68
10.30 - 12.00 صباحا	87	93	90	87
2.00 - 3.30 مساء	79	84	85	86
4.00- 5.30 مساء	74	90	81	80

١٤- ترغب شركة لصناعة الأطعمة الجاهزة في فتح سبع فروع جديدة لها في إحدى المدن، وقد دلت الدراسات على وجود عشرة مواقع ممكنة لهذه الفروع. كذلك فقد تمكنت الشركة من تقدير عدد الزبائن لكل من هذه المواقع العشرة وتم بالتالي تقدير

الأرباح المتوقعة لكل فرع من الفروع السبعة. البيانات معطاة في الجدول رقم (٣,١٩) حيث يدل الرقم 1 على وجود زبائن للفرع من المنطقة المقابلة والرقم 0 على عدم وجود مثل هؤلاء الزبائن.

ترغب الشركة بعدم وجود تنافس على الزبائن من نفس المنطقة. المطلوب صياغة المسألة بحيث يكون الربح السنوي الكلي لكافة الفروع أكبر ما يمكن.

الجدول رقم (٣,١٩).

المنطقة	الفروع						
	1	2	3	4	5	6	7
A	1	0	0	0	0	1	0
B	1	0	0	0	0	0	1
C	1	1	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	1	0	1
E	0	1	0	1	0	0	0
F	0	0	1	0	0	1	0
G	0	0	1	0	1	0	1
H	0	0	1	0	1	0	0
I	0	0	0	1	0	1	0
J	0	0	0	1	0	1	1
الربح السنوي المتوقع(ألف دولار)	80	90	70	100	120	180	150

١٥- أنت مكلف بتصوير 8 لقطات لمشهدين من مسلسل تلفزيوني وتسجيلها بترتيب معين على وجهي شريط التسجيل مدة الوجه الأول 14 دقيقة ومدة الوجه الثاني 16 دقيقة. إذا علمت أن مدة كل لقطة من القطات التلفزيونية الثمانية وترتيب تواجد المشهدين في هذه اللقطات معطاة كما في الجدول رقم (٣,٢٠). والهدف هو جعل زمن تسجيل اللقطات أقل ما يمكن فالمطلوب صياغة المسألة كمسألة برمجة عددية بحيث تتحقق المتطلبات التالية:

(أ) كل وجه يجب أن يحوي لقطتين من المشهد الأول.

(ب) الوجه الأول يجب أن يحوي عل الأقل ثلاث لقطات من المشهد الثاني.

(ج) اللقطة 5 أو القطة 6 يجب أن تكون على الوجه الأول.

(د) إذا كانت اللقطة 2 واللقطة 4 على الوجه الأول فيجب أن تكون اللقطة 5 على الوجه الثاني.

١٦- لديك المسألة التالية :

أوجد أفضل قيمة للدالة :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

وفقاً للقيود :

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq b_i \quad i = 1,2,\dots\dots\dots, m$$

لنفرض أن $k<m$ ، فالمطلوب صياغة المسألة بنموذج رياضي بحيث يتحقق k بالضبط من أصل m من هذه القيود.

الجدول رقم (٣,٢٠).

رقم اللقطة	رقم المشهد	الزمن اللازم /دقيقة
1	1	4
2	2	5
3	1	3
4	2	2
5	1	4
6	2	3
7	2	5
8	1و2	4