الباب الثاني

طرق حل مسائل البرمجة العددية

- طرق التفرع والحد
- طريقة التعداد الضمني
- طرق مستوي القطع

مقدمة الباب الثاني

كما رأينا في الفصول الأربعة الأولى (الباب الأول) فإن العديد من المسائل العملية لا يمكن لمتغيراتها أن تأخذ قيماً غير صحيحة وقد أطلقنا عليها اسم مسائل "برمجة عددية" (Integer Programming اختصاراً IP. وقد صنفنا مسائل البرمجة العددية هذه لعدة أصناف كانت على النحو التالي :

(أ) مسائل "*برمجة خطية عددية بحتة* (Pure Integer Linear Programming اختصارا PILP)" إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة.

(ب) مسائل "*برمجة خطية عددية مختلطة* (Mixed Integer Linear Programming اختصارا MILP)" إذا كانت قيم بعض متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة بينما تأخذ باقي المتغيرات قيما اختيارية.

(ج) مسائل" *برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم* 0-1 Integer Linear Programming اختصارا0-1 ILP)" إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي 0 أو 1.

وكما سنرى في هذا الفصل فإن ثمة صعوبات كبيرة تبرز لدى حل مسائل البرمجة العددية بأنواعها. وفي الحقيقة فإن حل مسائل البرمجة العددية أكثر صعوبة من حل نظيراتها من مسائل البرمجة الخطية. ويعود السبب في ذلك إلى وجود طرق حل

(خوارزميات Algorithms) بسيطة لمسائل البرمجة الخطية لا تنطبق على نظيراتها من مسائل البرمجة العددية. فعلى سبيل المثال، لو عدنا إلى مثال (٢,٦) من الفصل الثاني والذي كان كما يلي فقد وجدنا أن النموذج الرياضي للمسألة هو:

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 15x_2$$

وفقا للقيود:

$$x_1 \leq 125$$

$$1.5x_2 \leq 250$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 400$$

$x_1, x_2 \geq 0$ أعداد صحيحة

حيث x_1 هي ما يجب أن تصنعه الشركة يوميا من القمصان القطنية و x_2 هي ما يجب أن تصنعه الشركة يوميا من القمصان ذات الخيوط التركيبية.

فمن الواضح أن متغيرات القرار في هذه المسألة x_1 و x_2 لا يمكن أن يأخذ قيما غير صحيحة، وبذلك فإن هذه المسألة هي من مسائل البرمجة العددية البحتة. وكما يمكننا ملاحظته من القيد الأول والثالث فإن x_1 يمكن أن يأخذ 126 قيمة تبدأ من الصفر إلى أصغر قيمة صحيحة ل{125,400/2} أي (125,......,0,1,2). أما المتغير x_2 فيمكن أن يأخذ 134 قيمة تبدأ من الصفر إلى أصغر قيمة صحيحة ل {250/1.5,400/3} أي (133,......,0,1,2). وبذلك فإن عدد الحلول الممكنة(وهي التي يأخذ فيها كلاً من

x_1 و x_2 قيمة عددية صحيحة ممكنة) يساوي 126×134= 16884 حلا ممكنا. ولو فرضنا أن الشركة تنتج نوع ثالث من القمصان بمقدار x_3 وأن x_3 يمكن أن يأخذ 121 قيمة مثلا ابتداءً من الصفر فإن عدد الحلول الممكنة للمسألة الناتجة يصبح 16884×121= 2042964 حلا ممكنا.

وكمثال أخر، لو فرضنا أن لدينا 10 أعمال نرغب بتنفيذها على ماكينة واحدة (مثال ذلك أن نصنع 10 قطع غيار على جهاز واحد) فإن عدد الحلول الممكنة لهذه المسألة البسيطة نسبيا يساوي 10×9×8×7×6×5×4×3×2×1=3628000 حلاً لجدولة تنفيذ هذه الأعمال العشرة على ماكينة واحدة.

وهكذا نجد أن عدد الحلول الممكنة لمسائل البرمجة العددية البحتة يزداد أحيانا (طبقا لعدد المتغيرات وطبيعة القيم التي تأخذها) بصور مذهلة.

ونظرا لعدم وجود خوارزميات محددة لحل مسائل البرمجة العددية البحتة، كما هي الحال بالنسبة للبرمجة الخطية مثلا، فإن التعامل مع هذا العدد الهائل من الحلول الممكنة لهذا النوع من المسائل سيكون من الأمور التي يصعب إنجازها عمليا حتى بالحاسبات الرقمية؛ وذلك لأنها تتطلب قدرا كبيرا من الوقت وحجما كبيرا من الحسابات وبالتالي من الذاكرة.

ومع ذلك فإن ثمة بعض الطرق التي تساعد وبدرجة كبيرة من الإسقاط التدريجي لكافة الحلول غير المرشحة لأن تكون حلولا مثلى حتى نصل في النهاية إلى الحل (الحلول) الأمثل (المثلى)، أو نصل إلى مجموعة قليلة جدا من الحلول يكون الحل (الحلول) الأمثل (المثلى) من بينها. ففي مثالنا أعلاه لصناعة نوعي القمصان، لو علم لدينا أثناء عملية دراسة وتحليل القيود أن x_2 لا يقل عن 100 لأدى ذلك إلى إنقاص القيم الممكنة ل x_2 إلى 35 قيمة فقط بدلا من 134 قيمة سابقا ولأدى ذلك إلى إنقاص عدد الحلول الممكنة لمسألة إنتاج نوعي القمصان المشار إليها أعلاه إلى 4410 حلا ممكنا أي أن عدد الحلول الممكنة قد نقص بمقدار 12474.

وكما سنرى فإن معظم طرق الحل التي سنتعرف عليها في هذا الجزء تعتمد ولدرجة كبيرة على أسلوب الإسقاط التدريجي للحلول غير الواعدة بأن تحوي حلا (حلولا) أمثل (مثلى) من بينها.

وسنتعرف في هذا الباب على الطرق الرئيسة التالية المستخدمة في حل مسائل البرمجة العددية البحتة والمختلطة.

١- طريقة التفرع والحد . The Branch- and- Bound Method

٢- طريقة التعداد الضمني .The Implicit Enumeration Method

٣- طريقة مستو القطع. The Cutting Plain Method

حيث سنتعرف على الطريقة الأولى في الفصل الخامس ونتعرف على الطريق الثانية في الفصل السادس، ونتعرف على الطريقة الثالثة في الفصل السابع. وكما أشرنا أعلاه فإن جميع هذه الطرق تستخدم فكرة الإسقاط التدريجي للحلول الممكنة وغير الواعدة بأن يكون الحل (الحلول) الأمثل(المثلى) من بينها. وتعتمد فكرة الإسقاط التدريجي هذه على جملة من الملاحظات الأساسية نورد فيما يلي بعضا منها.

ملاحظة (١)

إذا كان فضاء الحل لمسألة البرمجة العددية الأصلية هو S فإن فضاء الحل لمسألة البرمجة الخطية الناتجة بإسقاط شرط القيم الصحيحة عن متغيرات المسألة الأصلية والتي سبق وأسميناها "المسألة المخففة"، وليكن T ، يحوي S . ويعود السبب في ذلك إلى أن إضافة القيود التي تشترط أن قيم متغيرات المسألة الأصلية هي قيم صحيحة تنقص من عدد الحلول الممكنة وبالتالي فإن مثل هذه الإضافة تجعل S محتوى في T . وفي هذه الحالة فإن قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل "للمسألة المخففة" ولتكن Z، ستكون أفضل من أو تساوي قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل للمسألة الأصلية ولتكن W.

ونميز في ذلك حالتين:

حالة (١). الهدف في المسألة الأصلية هو تكبير دالة الهدف ذات الصلة، عندئذ يكون $W \leq Z$ والذي يعني أن *القيمة Z تشكل حدا أعلى للقيمة W*، وعندئذ إذا قمنا بتجزئة المسألة الأصلية لعدة مسائل جزئية *فيمكننا إهمال أي مسألة جزئية ناتجة تكون فيها قيمة W أكبر من قيمة Z*.

حالة (٢). الهدف في المسألة الأصلية هو تصغير دالة الهدف ذات الصلة، عندئذ يكون $W \geq Z$ والذي يعني أن *القيمة Z تشكل حدا أدنى للقيمة W*، وعندئذ إذا قمنا بتجزئة المسألة الأصلية لعدة مسائل جزئية *فيمكننا إهمال أي مسألة جزئية ناتجة تكون فيها قيمة W أصغر من قيمة Z*.

الفصل الخامس

طرق التفرع والحد
The Branch- And- Bound Methods

(٥,١) مقدمة

مع أن عدد الحلول الممكنة في مسائل البرمجة العددية هو عدد منته (Finite) بشكل عام، إلا أن إيجاد الحل الأمثل لها مهمة صعبة للغاية حتى في المسائل ذات العدد القليل من المتغيرات. ولتوضيح بعض جوانب هذه الصعوبة، لنفرض مثلا أن المسألة التي نرغب بحلها تحوي 5 متغيرات لا يمكن لأي منها أن يأخذ قيما غير صحيحة، وأن لكل من هذه المتغيرات يأخذ 10 قيم صحيحة ممكنة، فإن عدد الحلول الممكنة لهذه المسألة يساوي 10×10×10×10×10=100000 حلا.

ونظرا لعدم وجود خوارزميات محددة لحل هذا النوع من المسائل، فإنه لابد من استعراض جميع هذه الحلول للوصول إلى الأمثل منها وهو من الأمور الصعبة جدا وخاصة إذا كان عدد الحلول الممكنة لهذا النوع من المسائل كبيرا.

إلا أنه، وكما أشرنا أعلاه في مقدمة الباب الثاني، فإن فكرة التخلص التدريجي من الحلول التي لا يمكن أن يكون الحل الأمثل من بينها (والتي أشرنا لها بأنها غير واعدة) ستساعدنا على التقليل السريع من هذه الحلول والإبقاء فقط على الواعدة منها لتسهل علينا بعدها استخلاص الحل(الحلول) الأمثل (المثلى) من بينها. ومن بين الطرق

التي تستخدم مبدأ التخلص التدريجي من الحلول غير الواعدة ما يسمى "*طرق التفرع والحد* (*The Branch- and- Bound Methods*)" .

(٥,٢) عرض عام لطريقة التفرع والحد لحل مسائل البرمجة العددية البحتة

تعتمد "*طريقة التفرع والحد*" لحل مسائل "البرمجة العددية البحتة" على القيام أولا بإسقاط الشرط "أن متغيرات المسألة الأصلية لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة" وحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة والتي أسميناها "المسألة المخففة"، عندئذ

(أ) إذا كانت جميع قيم المتغيرات في الحل الأمثل للمسألة المخففة الناتجة هي قيم عددية صحيحة فعندها يكون هذا الحل هو أيضا حلا أمثليا لمسألة البرمجة العددية الأصلية. ولتوضيح هذا الأمر نورد المثال التالي :

مثال (٥,١)

كبر الدالة :

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

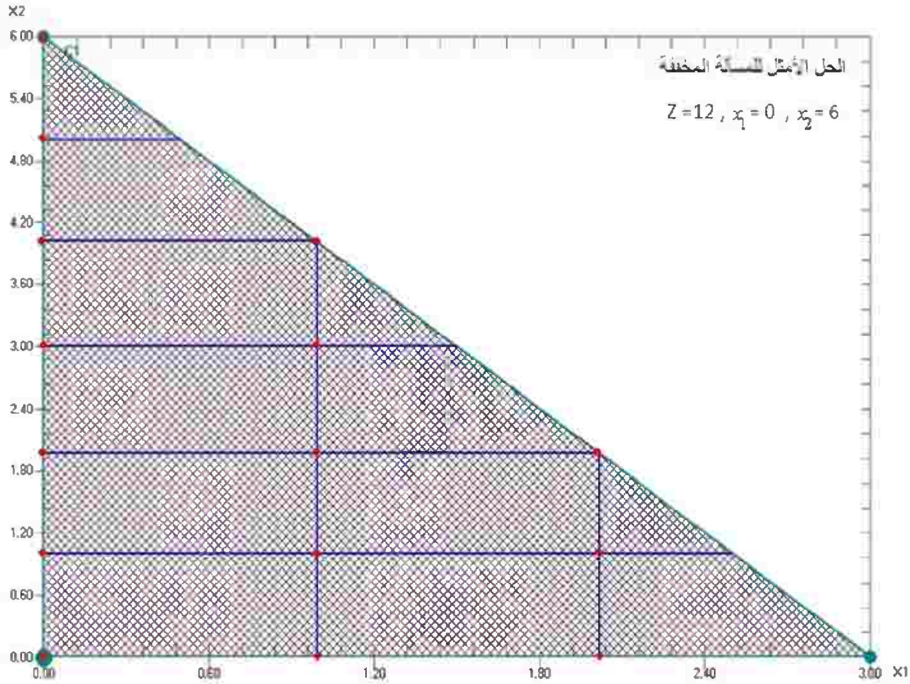
وفقا للقيود :

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ أعداد صحيحة}$$

إن الحل الأمثل للمسألة المخففة (م.م) هو : $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $Z = 12$

وبما أن جميع قيم المتغيرات في هذا الحل هي قيم عددية صحيحة، لذا فإن هذا الحل هو أيضا حل أمثلي للمسألة الأصلية (م.أ). (انظر كذلك الشكل رقم ٥,١).



الشكل رقم (٥,١).

(ب) إذا كانت بعض قيم المتغيرات في الحل الأمثل للمسألة المخففة الناتجة هي قيم عددية صحيحة وكان بعضها الآخر قيما عددية ولكنها غير صحيحة (أعداد حقيقية) فإننا نقوم بتجزئة المسألة الناتجة عن هذا الحل إلى عدة مسائل جزئية وذلك من خلال إجراء عمليات تفرع (Branch) ومن ثم حساب الحد (Bound) الأعلى (الأدنى) لمسائل التكبير (التصغير) الجزئية الناتجة وفقا للأسس الواردة في الملاحظة (١) الواردة في مقدمة الباب الثاني (ومن هنا جاء اسم الطريقة التفرع والحد). وسيساعد ذلك في الإسقاط التدريجي لبعض المسائل الجزئية المخالفة لهذه الأسس، حتى نصل في النهاية إلى المسألة الجزئية التي توافق الأسس التي وردت في الملاحظة (١) والتي تكون فيها

القيم المثلى لجميع المتغيرات قيما صحيحة، حيث نصل عندها إلى الحل الأمثل المنشود.
وسنوضح ذلك من خلال حل المثال التالي:

مثال (٥,٢)

كبر الدالة:

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

الحل

إن المسألة المخففة للمسألة السابقة تنتج عنها بإسقاط الشرط: x_1, x_2 أعداد صحيحة أي أن المسألة المخففة هي:

كبر الدالة:

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

وسنسمي هذه المسألة باسم "مسألة جزئية1 (اختصارا مج7). إن الحل الأمثل للمسألة (مج1) كمسألة برمجة خطية هو

$$x_1 = \frac{15}{4} \quad , \; x_2 = \frac{9}{4} \quad , \; Z = \frac{165}{4}$$

انظر كذلك الشكل رقم (٥,٢). وبما أن الهدف في المثال هو التكبير فإن القيمة $Z = \frac{165}{4}$ تشكل "حدا أعلى" لقيمة Z المثلى للمسألة الأصلية، أي أن القيمة المثلى ل Z للمسألة الأصلية لن تتجاوز $\frac{165}{4}$.

وبما أن بعض قيم المتغيرات الأخيرة (هنا كلها) غير صحيحة، فبموجب ما ذكرناه في (ب) السابقة، لابد لنا من تجزئة مج1 إلى مسائل جزئية وذلك بإجراء عملية تفرع على قيم x_1 , x_2 المثلى الناتجة أعلاه. وبشكل عام يمكننا اختيار إما x_1 أو x_2، وإجراء عملية التفرع عليه بالطريق التالية:

لنفرض أننا اخترنا x_1. إن القيمة (الحقيقية) السابق ل x_1 تدل على أن القيم الصحيحة المحتملة ل x_1 ستكون قريبة من أحد الرقمين الصحيحين 3 و4 ولكنها ليست بينهما. أي أنه:

إما أن يكون: $x_1 \geq 4$ أو أن يكون $3 \geq x_1$

ولذا فإننا نضيف أحد هذين القيدين. فلو أضفنا القيد $x_1 \geq 4$ ل مج1 لحصلنا على المسألة الجزئية مج2 التالية:

كبر الدالة:

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

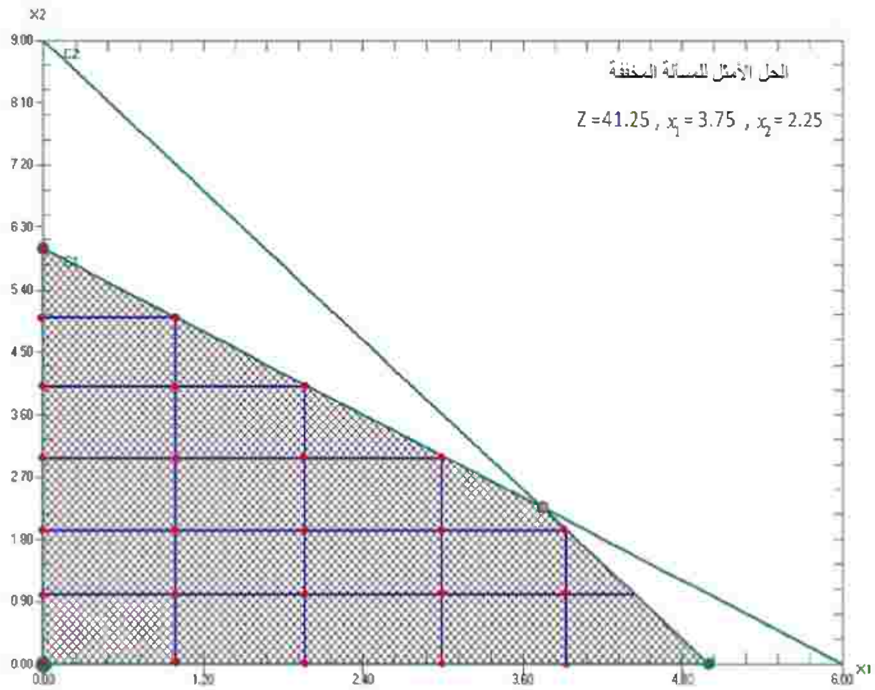
وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



الشكل رقم (٥,٢).

أي أن مج2 = مج1 + القيد $x_1 \geq 4$.

كذلك إذا أضفنا القيد التالي $3 \geq x_1$ ل مج1 لحصلنا على المسألة الجزئية مج3 التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$3 \geq x_1$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

أي أن مج3= مج1+ القيد $3 \geq x_1$.

ويعطي الشكل رقم (٥,٣) فضاء الحل الممكن (Feasible Solution Space اختصار FSS) لكل من المسألتين مج2 (داخل ومحيط المضلع ABCD) ومج3 (داخل ومحيط المضلع FEG).

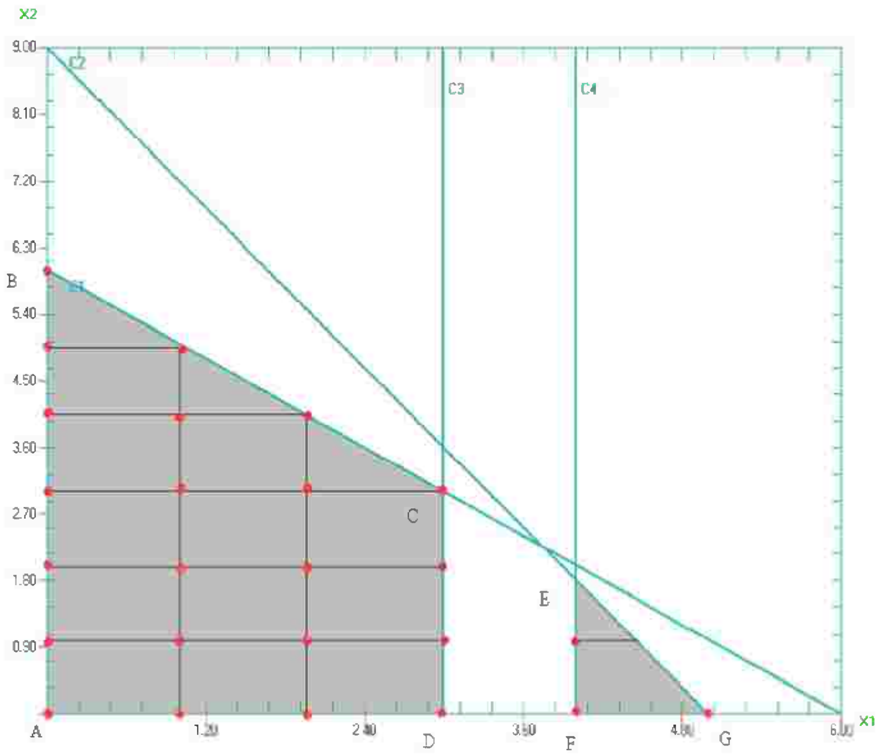
وكما نلاحظ من حلول مج2 ومج3 الموضحة على الشكل رقم (٥,٣) فإن أياً منهما لا يحوي القيمة $x_1 = \frac{15}{4}$ التي استخدمناها للحصول على مج2 ومج3 . ويعني ذلك أن حل المسألة المخففة مج1 لن يتكرر لدى حل كل من مج2 ومج3. نقوم بعد ذلك باختيار أحد المسألتين مج2 أو مج3 بشكل اختياري وحلها كمسألة برمجة خطية. وبشكل عام يصح لدينا المبدأ التالي حول اختيار إحدى المسألتين

(م١). نختار أحدث المسائل الجزئية التي وصلنا إليها في عمليات التفرع، وفي حال وجود أكثر من مسألة جزئية فإننا نختار أحدها.

فلو اخترنا مج2 مثلا فإننا نجد أن الحل الأمثل لها هو:

$$x_1 = 4 \qquad , \; x_2 = \frac{9}{5} \qquad , \; Z = 41$$

وبما أن قيمة Z(Z=41) التي حصلنا عليها في حل المسألة مج2 أقل من تلك التي حصلنا عليه في حل المسألة مج1 ($Z = \dfrac{165}{4}$) لذا فإن القيمة Z=41 تلغي الحد الأعلى



الشكل رقم (٥,٣).

القديم للمسألة الأصلية لتصبح القيمة Z=41 هي الحد الأعلى الحالي(Current Upper Bound اختصاراً CUP) للمسألة الأصلية.

ولتلخيص ما وصلنا إليه من نتائج فإننا نقوم عادة بتمثيل المسألة المخففة مج1 والمسائل الجزئية المتفرعة عنها على شكل شجرة (Tree) تبدأ من مج1 ويتفرع عنها كل من مج2 ومج3 وهكذا دواليك إلى أن تنتهي جميع عمليات التفرع الممكنة. وعلى سبيل المثال فإن الشكل رقم (٥,٤) يمثل الشجرة التي وصلنا إليها حاليا. الآن، بما أن قيم المتغيرات الناتجة من حل المسألة مج2 ليست جميعها قيما صحيحة ، فإننا نقوم بعملية تفرع جديدة على مج2 وباستخدام أحد المتغيرات الذي نتجت بقيمة غير صحيحة في الحل الأمثل ل مج2. وحيث إن $x_2 = \frac{9}{5}$ ، هو المتغير الوحيد الناتج بقيمة غير صحيحة وحيث إن قيمة x_2 هذه تدل على أنه ، إما أن يكون $x_2 \geq 2$ أو أن يكون $1 \geq x_2$ ، فإننا نضيف أحد القيدين $x_2 \geq 2$ أو $1 \geq x_2$ إلى مج2 لنحصل بذلك على مسألتين جزئيتين من المسألة مج2 وهما مج4 و مج5 حيث مج4 = مج2 + القيد $x_2 \geq 2$ ، ومج5 = مج2 +القيد $1 \geq x_2$.

حيث نجد أن مج4 هي :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

وأن مج5 هي :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

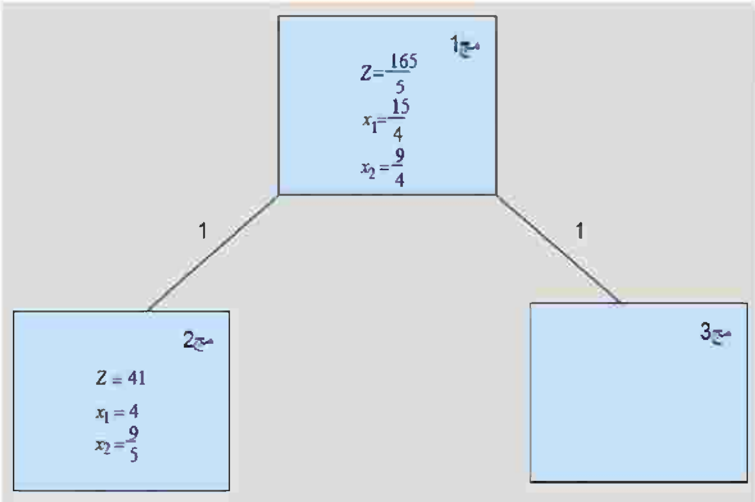
$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$1 \geq x_2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



الشكل رقم (٥,٤).

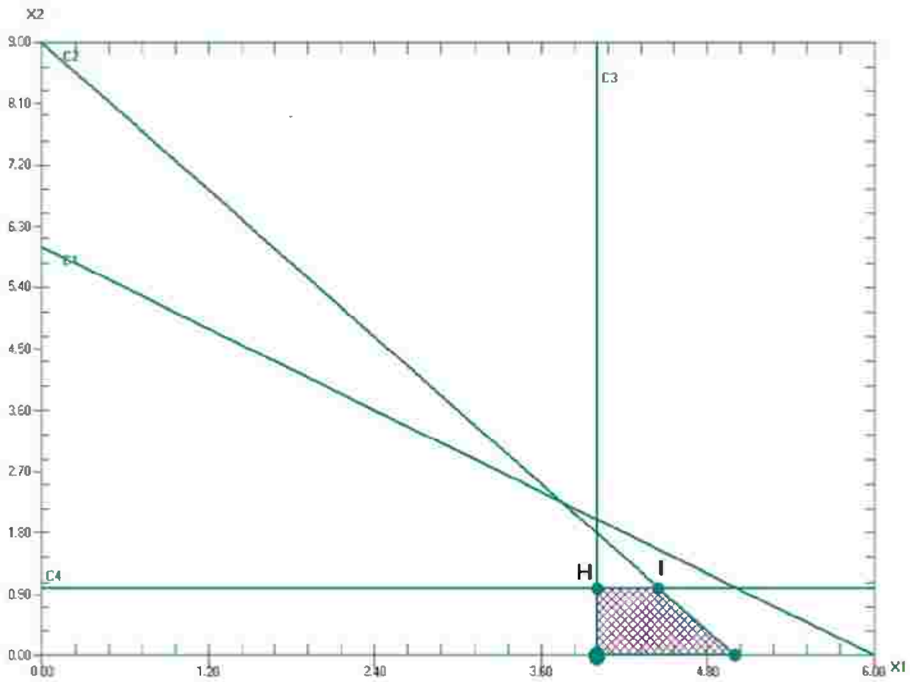
وهنا نلاحظ أن مج4 هي مسألة غير ممكنة وذلك لعدم إمكانية تحقق ثلاثة من قيودها معا وهي القيد الثاني والقيد الثالث والقيد الرابع. ولذا فإننا نشطب (Fathom) مج4 بإشارة × في الشجرة الناتجة ولا نتابع أي عملية تفرع منها. نقوم الآن بحل مج5 فنجد أن فضاء الحل الممكن ل مج5 معطى كما في الشكل رقم (٥,٥) وأن الحل الأمثل لها هو

$$x_1 = \frac{40}{9} \quad , \; x_2 = 1 \quad , \; Z = \frac{365}{9}$$

إن الحد الأعلى الجديد Z=40.56 لا يختلف كثيرا عن سابقه (Z=41)، ومع ذلك فإننا نقوم بالتجزئة من جديد بإجراء عملية تفرع على x_1 حيث تدل القيمة الكسرية الأخيرة ل x_1 أنه إما أن يكون $x_1 \geq 5$ أو أن يكون $4 \geq x_1$. وبذلك نحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين:

مج6 = مج5+القيد $x_1 \geq 5$ ، مج7= مج5+ القيد $4 \geq x_1$ وتجدر الإشارة هنا إلى أن فضاء الحل للمسألتين مج6 ومج7 يحوي جميع الحلول الممكنة ذات القيم

الصحيحة والتي كانت من قبل في فضاء الحل ل مج5 ، إلا أن أياً من فضائي الحل ل مج6 أو مج7 لا يمكن أن يحوي القيمة الكسرية السابقة $x_1 = \frac{40}{9}$.



الشكل رقم (٥,٥).

بحسب (م١) فإنه يمكننا اختيار أي من المسألتين مج6 أو مج7 وحلها . فلو اخترنا المسألة مج7 مثلا نجد أن الحل الأمثل لها هو:

$$x_1 = 4 \quad , \; x_2 = 1 \quad , \; Z = 37$$

وبما أن قيم المتغيرات في هذا الحل هي قيم صحيحة فإننا نعتبر أن هذا الحل هو حل ممكن لمسألة البرمجة العددية الأصلية، وبالتالي فإنه "حل مرشح Candidate Solution " لأن يكون حلاً أمثليا للمسألة الأصلية.

في هذه الحالة نعتبر أن القيمة Z= 37 التي نتجت عن حل ممكن للمسألة الأصلية بمثابة " حد أدنى Lower Bound " (وذلك عندما تكون المسألة مسألة تكبير كما هي الحال في مسألتنا) لقيمة Z عند الحل الأمثل لهذه المسألة. ومن الجدير أن نلاحظ هنا أنه لا فائدة من تجزئة مج7 ثانية، وذلك لأن فضاء الحل لأي مسألة جزئية من مج7 سيكون محتوى في فضاء الحل للمسألة مج7، وبالتالي فلن ينتج عن هذه المسألة الجزئية قيمة للدالة Z أفضل من القيمة 37 (نذكر بما ورد في الملاحظة (١)).

وبشكل عام يصح لدينا المبدأ التالي:

(م٢). عند الحصول على حل ممكن لمسألة البرمجة العددية الأصلية فإنه يكون مرشحاً لأن يكون حلاً أمثلياً لهذه المسألة. وعندها تمثل قيمة دالة الهدف عند هذا الحل حداً أدنى بالنسبة لمسائل التكبير (حداً أعلى بالنسبة لمسائل التصغير) للقيمة المثلى لهذه الدالة.

خلاصة ما توصلنا إليه إلى الآن هي الوصول إلى الحد الأعلى Z=40.56 والحد الأدنى Z=37 لقيمة Z المثلى. ولمعرفة فيما إذا كانت نتائجنا هذه هي الأفضل أم لا، لابد لنا من تحليل ما تبقى من مسائل جزئية وهي مج6 ومج3. وبحسب (م١) علينا أن نختار مج6 . وبموجب الشكل رقم (٥,٥) نجد أن فضاء الحل ل مج6 يتكون من النقطة(5.0) ولذ فإن الحل الأمثل ل مج6 هو:

$$x_1 = 5 \qquad , \; x_2 = 0 \qquad , \; Z = 40$$

وهو حل ممكن للمسألة الأصلية وبالتالي فهو حل مرشح لأن يكون حلا أمثليا. وبذلك يصبح الحد الأدنى الجديد لقيمة Z هو Z=40 وهو أفضل من الحد الأدنى السابق

(Z=37)، ولذا فإننا نشطب المسألة مج7 بإشارة (×) ولا يتبقى لنا عندها سوى المسألة مج3 . وبحل مج3 نجد أن حلها الأمثل هو:

$$x_1 = 3 \qquad , \; x_2 = 3 \qquad , \; Z = 39$$

ومع أن الحل الأمثل ل مج3 هو حل ممكن للمسألة الأصلية إلا أن قيمة Z الناتجة من حل مج3 أسوأ من تلك التي نتجت من حل مج6 . ولذا فإننا نستطيع أن نجزم أن الحل الأمثل ل مج6 وهو:

$$x_1 = 5 \qquad , \; x_2 = 0 \qquad , \; Z = 40$$

هو أيضا الحل الأمثل للمسألة الأصلية. ويعطي الشكل رقم (٥,٦) ملخصاً لجميع عمليات التفرع التي ذكرناها أعلاه وهو يمثل كامل الشجرة الناتجة عن جميع عمليات التفرع التي قمنا بها. إن تطبيق طريقة التفرع والحد في حل المثال (٥,٢) السابق قد مكننا من استنتاج المبدأين (م١) و(م٢). كذلك فإن ثمة *مبادئ أخرى تتعلق بعملية شطب بعض المسائل الجزئية* تم استخدامها لدى تطبيق هذه الطريقة في حل هذا المثال يمكن تلخيصها بما يلي:

(م٣). *يمكن شطب أي مسألة جزئية إذا كانت غير ممكنة (**Infeasible**).*

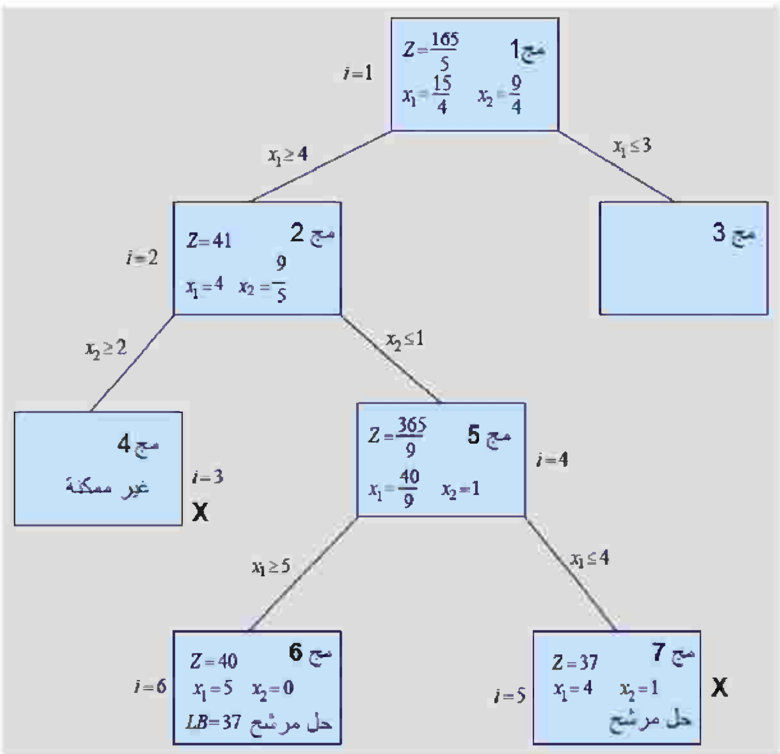
(م٤). *إذا كان الحل الأمثل لمسألة جزئية هو حل ممكن للمسألة الأصلية إلا أن الحد الأدنى الناتج لغايته بالنسبة لمسائل التكبير (الحد الأعلى بالنسبة لمسائل التصغير) أسوأ (أصغر بالنسبة لمسائل التكبير وأكبر بالنسبة لمسائل التصغير) من قيمة دالة الهدف عند هذا الحل فيمكن شطب هذه المسألة الجزئية.*

فمثلا قمنا بشطب مج4؛ لأنها غير ممكنة وهو ما ينطبق مع (م٣)، كما قمنا بشطب مج7 لأن قيمة دالة الهدف عند مج6 أفضل من الحد الأدنى الذي نتج عن حل

مج7 وهو ما ينطبق مع (م٤). ثمة ملاحظات أخرى تتعلق بالمبدأ (م١) وبالمتغير الذي نجري عليه عملية التفرع لابد من تسجيلها.

ملاحظة (٥,١)

(أ) .عندما قمنا بحل المسألة المخففة مج1 للمسألة الأصلية فقد كان قيمة كل من المتغيرين x_1, x_2 المثلى قيما عددية غير صحيحة وهي $(x_1 = \frac{15}{4} \quad , \ x_2 = \frac{9}{4})$ وقد ذكرنا وقتها أنه يمكن اختيار أي من المتغيرين لإجراء عملية التفرع عليه، وقد قمنا باختيار x_1 . والسؤال الآن :



الشكل رقم (٥,٦).

إذا كانت القيم المثلى لمسألة جزئية لأكثر من متغير هي قيمة عددية غير صحيحة (قيمة كسرية) فهل لاختيار أحد المتغيرات لإجراء عملية التفرع عليه من تأثير في عملية الوصول إلى الحل الأمثل النهائي، وهل من قاعدة مفيدة لهذا الاختيار؟.

في الحقيقة لا توجد إجابة محددة لهذا السؤال، لكن البعض اختار المبدأ التالي:

(م٥). الأفضلية في عملية التفرع يجب أن تكون للمتغير الذي يملك أكبر قيمة كسرية والذي تكون قيمته من الناحية الاقتصادية أو القرارية للمسألة قيد الدراسة هي الأهم، أما في برامج الحواسيب الجاهزة فإن الأفضلية تكون للمتغير الذي يملك القيمة الكسرية الأقل.

ففي مثالنا الحالي فإن القيمة الكسرية في كل من x_1, x_2 هي نفسها في الحل الأمثل ل مج1، ولذا كان هناك اختيار في عملية التفرع على أحدهما وقد تم اختيار x_1 لإجراء عملية التفرع عليه. أما في عمليات التفرع اللاحقة فلم يكن لدينا إلا متغيراً واحداً يملك قيمة كسرية ولذا كان خيارنا وحيداً فيها.

(ب). وفقا للمبدأ (م١) فإننا نختار أحدث مسألة جزئية نصل إليها ونقوم بحلها ثم نعود أدراجنا (Backtrack) لحل المسائل الجزئية المتبقية حسب درجتها في الحداثة، وقد قمنا بتطبيق هذا المبدأ لدى حل المثال (٥،٢) السابق.

لكن منطق الأمور يقتضي أن نحل المسألة الجزئية التي تملك أفضل قيمة لدالة الهدف دون التقيد بالمبدأ (م١) حيث نتوقع عندها أن نصل إلى الحل الأمثل بعدد أقل من التكرارات. وفي هذه الحالة، فإن مسارنا في اختيار المسائل الجزئية لا يكون متدرجا وفق حداثة المسائل بل تكون لدينا قفزات نوعية (Jump-tracking) نختار فيها المسائل الجزئية التي تملك أفضل قيمة حالية لدالة الهدف.

(ج). إن حل المسائل الجزئية الناتجة من عمليات التفرع غالباً ما يكون باستخدام "طريقة السمبلكس الثنوية The Dual Simplex Method". ويعود السبب في ذلك إلى أنه للوصول إلى الحل الأمثل بعد إضافة قيد جديد فإننا نطبق طريقة السمبلكس الثنوية

اعتبارا من الحل الأمثل للمسألة التي وصلنا إليها قبل عملية إجراء التفرع (راجع هذه الطريقة في الفقرة (١,٧) من الفصل الأول).

(٥,٣) طريقة التفرع والحد لحل مسائل البرمجة العددية المختلطة
The Branch and Bound Method for Solving Mixed Integer Programming Problems

كما سبق وأشرنا أعلاه فإننا نطلق اسم " مسألة برمجة عددية مختلطة "على المسائل التي لا تأخذ بعض قيم متغيراتها إلا قيماً عددية صحيحة، بينما يأخذ باقي المتغيرات قيماً اختيارية. وتستخدم طريقة التفرع والحد الموضحة بالفقرة السابقة لحل هذا النوع من المسائل، ولكن بإجراء عمليات التفرع على المتغيرات التي لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة فقط. ويعتبر أي حل نصل إليه من حل مسألة جزئية ناتجة بأنه "حل مرشح لأن يكون حلاً أمثليا" إذا كانت قيم المتغيرات التي لا تأخذ إلا قيما صحيحة في هذا الحل هي فعلاً قيم صحيحة. ولتوضيح الكيفية التي يتم فيها تطبيق طريقة التفرع والحد لحل هذا النوع من المسائل سنقوم بحل مثال (٢,٣) من الفصل الثاني والذي نعيد كتابته النموذج الرياضي له ثانية لأغراض التكامل في المثال التالي :

مثال (٥,٣)

كبر الدالة :

$$Z = 2x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$5x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 عدد صحيح

الحل

نبدأ أولاً بحل المسألة المخففة (والتي سنرمز لها بالرمز مج1) بإسقاط شرط أن x_1 عدد صحيح فنجد أن فضاء الحل لهذه المسألة معطى كما في الشكل رقم (٥،٧) وأن الحل الأمثل لها هو:

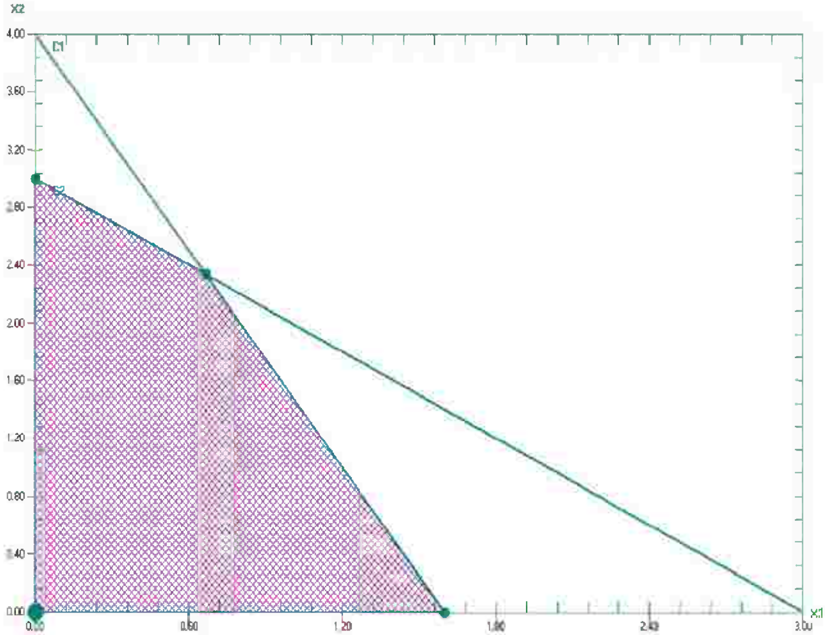
$$x_1 = \frac{2}{3} \quad , \; x_2 = \frac{7}{3} \quad , \; Z = \frac{11}{3}$$

وبذلك فإن الحد الأعلى الحالي لقيمة Z للمسألة الأصلية هو Z=11/3 . وبما أن x_1 عدد صحيح و x_2 عدد حقيقي فإننا نقوم بعملية التفرع على x_1 فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين مج2 ومج3 حيث مج2 = مج1 + القيد $x_1 \geq 1$ و مج3= مج1+ القيد $0 \geq x_1$. وحلولهما على الترتيب هي:

$$x_1 = 0 \quad , \; x_2 = 3 \quad , \; Z = 3$$ (الحل الأمثل ل مج2)

$$x_1 = 1 \quad , \; x_2 = \frac{3}{2} \quad , \; Z = \frac{7}{2}$$ (الحل الأمثل ل مج3)

وكلا هذين الحلين هو حل ممكن للمسألة الأصلية وبالتالي فكل من هذين الحلين مرشح لأن يكون حلاً أمثلياً لها، كما أن قيمة Z في كل منهما تمثل حداً أدنى لقيمة Z المثلى في المسألة الأصلية، ولكن القواعد التي وصلنا إليها سابقاً تقتضي شطب المسألة الجزئية مج2 والإبقاء على حل مج3 كمرشح وحيد لأن يكون الحل الأمثل للمسألة الأصلية. ونظراً لعدم إمكانية إجراء مزيد من عمليات التفرع على x_1 فإن حل مج3 هو الحل الأمثل المنشود للمسألة الأصلية.



الشكل رقم (٥,٧).

(٥,٤) خلاصة طريقة التفرع والحد
Summary of Branch and Bound Method

إذا كانت المسألة الأصلية قيد الدراسة هي مسألة برمجة عددية بحتة أو مختلطة ورمزنا بالرمز Z لدالة الهدف في المسألة سواء كانت المسألة تكبير أو تصغير ورمزنا بالرمز LB (اختصار Lower Bound) للحد الأدنى لقيمة Z وبالرمز UB (اختصار Upper Bound) للحد الأعلى لقيمة Z ، فإننا نخلص مما سبق إلى أن العمل في طريقة التفرع والحد يكون وفقا لما يلي :

الخطوة الابتدائية

ضع $UB = \infty$ ($LB = -\infty$) بالنسبة لمسائل التكبير (مسائل التصغير)، ثم حل المسألة المخففة للمسألة الأصلية لتحصل على قيمة جديدة ل UB(LB) بالنسبة لمسائل

التكبير (مسائل التصغير). ونسميه الحد الأعلى الحالي (الحد الأدنى الحالي) بالنسبة لمسائل التكبير (بالنسبة لمسائل التصغير).

خطوة التفرع

(أ) إذا كانت جميع قيم المتغيرات التي لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة والناتجة من حل المسألة المخففة في الخطوة الابتدائية هي فعلا قيم عددية صحيحة فإننا نتوقف، وعندئذ يكون حل المسألة المخففة هو الحل الأمثل المنشود للمسألة الأصلية وقيمته هي قيمة Z التي حصلنا عليها في الخطوة الابتدائية.

(ب) إذا كان بعض قيم المتغيرات التي لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة والناتجة من حل المسألة المخففة في الخطوة الابتدائية هي قيم عددية غير صحيحة فإننا نقوم بعملية التفرع على أحدها لنحصل على مسألتين جزئيتين، ثم نختار أحدهما ونحلها ونحدد قيمة Z الناتجة للمسائل الممكنة منهما ونعتبر هذه القيمة بمثابة الحد الأدنى (الحد الأعلى) الحالي لمسائل التكبير (مسائل التصغير).

(ج) نعتبر قيمة الدالة Z في حل أي من المسائل الجزئية المتفرعة، وغير المرشحة لأن تكون حلا للمسألة الأصلية، بمثابة حد أعلى(حد أدنى) حالي بالنسبة لمسائل التكبير (مسائل التصغير) يتمم استبداله بحد أعلى (حد أدنى) جديد عند حصولنا على مسألة متفرعة جديدة تكون فيها قيمة الدالة Z أفضل من سابقتها.

خطوة شطب المسائل الجزئية

نقوم بشطب أي مسألة جزئية ممكنة وناتجة من عملية تفرع ما في الحالات التالية:

١- إذا كان حل هذه المسألة غير ممكن.

٢- إذا قيمة Z الناتجة لها أكبر من الحد الأعلى الحالي بالنسبة لمسائل التكبير (أصغر من الحد الأدنى الحالي بالنسبة لمسائل التصغير).

٣- نختار أفضل المسائل الجزئية الممكنة ونحدِّث فيها قيمة UB‘(LB) ونسميها "المسألة المرشحة أو الواعدة".

خطوة التوقف

نتوقف عن إجراء أي عمليات تفرع جديدة عندما ننتهي من جميع عمليات الشطب وعندها نختار أفضل المسائل الواعدة وهي التي تملك أكبر (أصغر) قيمة صحيحة لدالة الهدف في مسائل التكبير (التصغير).

(٥,٥) طريقة التفرع والحد لحل مسائل البرمجة العددية بمتغيرات ثنائية القيم

The Branch and Bound Method for Solving (0-1)IP

كما رأينا في الفصول الثاني والثالث والرابع من الجزء الأول، فإن متغيرات القرار لكثير من "مسائل البرمجة العددية هي متغيرات ثنائية القيم". كما أننا رأينا أنه يمكن كتابة أي مسألة برمجة خطية عددية عامة على شكل مسألة "برمجة عددية بمتغيرات ثنائية القيم" (راجع الفقرة (٣,٢,٢,١) من الفصل الثالث).

ونود أن نشير هنا إلى أنه لا توجد خطوات محددة لحل مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم باستخدام طريقة التفرع والحد كما كان الأمر في مسائل البرمجة العددية البحتة والمختلطة، ولكن هذه الخطوات تعتمد على طبيعة مسألة البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم التي نرغب بحلها.

وسنوضح هذا الأمر من خلال حل بعض مسائل البرمجة العددية *ذات المتغيرات الثنائية القيم* التي تعرفنا عليها في الفصل الثالث من هذا الكتاب.

(٥,٥,١) حل مسألة حقيبة الظهر البسيطة

بالعودة إلى مسألة حقيبة الظهر البسيطة من الفصل الثالث، فقد وجدنا أن النموذج العام لهذه المسألة كان على النحو التالي:

كبر الدالة:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots\dots + c_nx_n$$

وفقا للقيود:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,......,n$$

حيث c_i تمثل العائد (الربح) الناتج من حمل السلعة i ، و a_i تمثل ما تستهلكه الوحدة (وزن الوحدة) من (المورد) b والتي تمثل السعة الكلية للحقيبة. ولحل هذه المسألة بطريقة التفرع والحد يمكننا الاستفادة من ميزتين خاصتين بهذا النوع من المسائل نوضحهما فيما يلي:

الميزة (١). بما أن كل من المتغيرات x_j لا يأخذ إلا أحد القيمتين 0 أو 1 فإننا لا نقوم بأي عملية تفرع على أي من هذه المتغيرات لأنها ستنتج فرعين يكون في أحدهما $x_j = 1$ وفي الأخر $x_j = 0$.

الميزة (٢). يمكن حل المسألة المخففة والمسائل الجزئية الناتجة عنها بعملية فحص دقيق للنسبة $\frac{c_i}{a_i}$ والتي تمثل الفائدة النسبية المتحققة من وحدة من السلعة i لدى استهلاكها a_i وحدة من المورد الذي يتوافر منه b وحدة. ويمكننا تحقيق الهدف (جعل Z أكبر ما يمكن) بعملية اختيار للسلع التي تملك أكبر قيمة للنسبة $\frac{c_i}{a_i}$ بشكل متدرج (الأكبر ثم الذي يليها في الكبر وهكذا) وإعطاء قيم المتغيرات المقابلة القيمة 1 ، محاولين استهلاك أكبر قدر ممكن من المورد المتاح منه b وحدة . عندئذ ، إذا تم استهلاك كامل هذا المورد بالقيم I لجميع المتغيرات التي تملك فيها $\frac{c_i}{a_i}$ أكبر القيم نكون قد وصلنا للحل الأمثل المنشود الذي تكون فيه قيم المتغيرات التي تم اختيارها مساوية للواحد وقيم المتغيرات الباقية أصفاراً . أما إذا بقي جزء غير صحيح فإننا نقوم بعملية

التفرع على المتغير الثنائي القيمة الأخير، أي على المتغير الذي يملك أقل النسب $\frac{c_i}{a_i}$ من بين المتغيرات التي تم اختيارها.

وللتوضيح دعنا نقوم بتحليل وحل المثال التالي:

مثال (٥,٤)

يرغب أحد المستثمرين باستثمار مبلغ 14 مليون ريال في بعض من 4 محافظ استثمارية متوافرة في أسواق الاستثمار حاليا. يبين الجدول رقم (٥,٢) قيمة الوحدة (مليون ريال) في كل من هذه المحافظ والربح المتوقع منها (مليون ريال). يرغب المستثمر باختيار المحافظ الاستثمارية المناسبة من بين المحافظ الأربع المتوافرة له والتي تجعل مجموع الربح الكلي المتوقع منها أكبر ما يمكن علما بأن نظام هذه المحافظ لا يسمح باستثمار جزء من الوحدة في أي من هذه المحافظ ولا يسمح كذلك باستثمار أكثر من وحدة في أي منها. المطلوب صياغة هذه المسألة وإيجاد الحل الأمثل لها بطريقة التفرع والحد.

الجدول رقم (٥,٢). بيانات المثال (٥,٤).

رقم المحفظة الاستثمارية	1	2	3	4
المبلغ المطلوب للوحدة (مليون ريال)	5	7	4	3
الربح المتوقع للوحدة (مليون ريال)	16	22	12	8

الحل

وفقا لبيانات المسألة فمن الواضح أن القرار بالنسبة لأي من المحافظ الأربع هو أن يختارها أو لا يختارها المستثمر ولذا فإن متغيرات القرار هي المتغيرات الثنائية القيم المعرفة كما يلي:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار المحفظة } j \text{ للاستثمار} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمسألة الناتجة هي مسألة "برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم" نموذجها الرياضي هو:

كبر الدالة:

$$Z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

وفقا للقيود:

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3,4$$

كما نلاحظ فإن هذا النموذج الرياضي يشبه النموذج الرياضي ل "مسألة حقيبة الظهر البسيطة" والتي سبق لنا التعرف عليها في الفصل الثالث. سنوضح فيما يلي كيفية تطبيق الميزة (٢) من خلال حل المثال (٥,٤) بالاستفادة من هذه الميزة.

حل مثال (٥,٤)

نقوم أولا بحساب النسب $\frac{c_i}{a_i}$ الخاصة ببيانات المثال فنجد أن النتائج كما هي معطاة في الجدول رقم (٥,٣). ومن نتائج هذا الجدول ومما شرحناه أعلاه في نعطي $x_1 = 1$ أي أننا نستثمر في المحفظة الاستثمارية 1 ويستهلك ذلك 5 مليون ريال من أصل ال 14 مليون المتوافرة فيتبقى 14- 5=9 مليون ، ثم نعطي $x_2 = 1$ أي أننا نستثمر كذلك في المحفظة 2 ما مقداره 7 مليون فيتبقى لدينا 9- 7=2 مليون . ولما كان المبلغ المتبقي لا يكفي لاستثمار وحدة كاملة في المحفظة 3 التالية في الترتيب التنازلي حيث تتطلب هذه المحفظة 4 مليون ، فإننا نضع $x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. وبذلك يكون حل المسألة المخففة، والتي سنسميها مج1، هو:

$$x_4 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2} \text{ ،} \quad x_1 = 1 \text{ ,} \quad x_2 = 1 \quad \text{وقيمته } Z= 44$$

ويكون لدينا UB=44 . نقوم الآن بإجراء التفرع على $x_3 = \frac{1}{2}$ فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين مج2= مج1 + القيد $x_3 = 0$ و مج3 = مج1 + القيد $x_3 = 1$. نختار أحد المسألتين ولتكن مج3 (الأحدث وفقا للمبادئ أعلاه). وفي مج3 لابد لنا من التقيد بالقيد $x_3 = 1$ أي الاستثمار في المحفظة 3 والتي تستهلك 4 مليون فيتبقى لنا 14-4=10 مليون. ولما كانت أكبر نسبة هي التي تقابل x_1 فإننا نختار x_1 =1 والذي يعني اختيار الاستثمار في المحفظة1 والتي تستهلك 5 مليون .

الجدول رقم (٥,٣). النسب $\frac{c_i}{a_i}$ لبيانات المثال (٥,٤).

رقم المحفظة الاستثمارية	1	2	3	4
النسبة $\frac{c_i}{a_i}$	3.2	3.143	3	2.67
النسبة $\frac{c_i}{a_i}$ مرتبة تنازليا	3.2	3.143	3	2.67

وبذلك يتبقى من المبلغ 10- 5 =5 مليون . ثم نختار x_2 المقابل لأكبر نسبة تالية . ونظرا لأن المحفظة المقابلة للمتغير x_2 تستهلك 7 مليون أي أكثر من المبلغ المتبقي 5 مليون فإننا نضع $x_2 = \frac{5}{7}$. وبذلك يكون حل المسألة مج3 هو :

$$x_4 = 0 \quad x_2 = \frac{5}{7} \text{ ،} \quad x_3 = 1 \text{ ,} \quad x_1 = 1 \quad \text{وقيمته } Z=43.7143$$

نقوم الآن بإجراء التفرع على المتغير $x_2 = \frac{5}{7}$ فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين :

مج4= مج3 + القيد $x_2 = 0$ و مج5 = مج3 + القيد $x_2 = 1$

وحل مج4 هو $x_4 = 1$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 1$, $x_1 = 1$ وقيمته Z= 36 .

إن هذا الحل هو حل ممكن لذا نضع LB = 36 كقيمة حالية للحد الأدنى لقيمة Z للمسألة الأصلية.

وحل مج5 هو $x_4 = 0$ ، $x_3 = 1$ ، $x_2 = 1$, $x_1 = \frac{3}{5}$ وقيمته Z= 43.6 .

نقوم الآن بإجراء التفرع على $x_1 = \frac{3}{5}$ فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين:

مج6=مج5 + القيد $x_1 = 0$ و مج7= مج5 + القيد $x_1 = 1$

وحل مج6 هو $x_4 = 1$ ، $x_3 = 1$ ، $x_2 = 1$, $x_1 = 0$ وقيمته Z= 42 .

وحل مج6 هو أيضا حل ممكن قيمة Z فيه أكبر من قيمة LB الحالية ، لذا فإننا نحدث قيمة LB لتصبح LB= 42 ، الأمر الذي يستدعي شطب المسألة مج4 . وحل مج7 هو:

$$x_4 = 0 \quad ، \quad x_3 = 1 \quad ، \quad x_2 = 1 \; , \; x_1 = 1$$

إلا أن هذا الحل غير ممكن لأنه لا يحقق جميع القيود، لذا نقوم بشطب مج7 . نكون بذلك قد انتهينا من جميع عمليات التفرع الخاصة بالمسألة الجزئية مج3 . نعود الآن للمسألة الجزئية مج2 وهي مج2= مج1 + القيد $x_3 = 0$ وحلها هو $x_4 = \frac{2}{3}$ ، $x_3 = 0$ ، $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ وقيمته Z=43.3333 . ويقتضي هذا الحل أن نقوم بالتفرع على $x_4 = \frac{2}{3}$ لنحصل بذلك على المسألتين الجزئيتين التاليتين:

مج8 = مج2+ القيد $x_4 = 0$ و مج9 = مج2 + القيد $x_4 = 1$

وحل مج8 هو $x_4 = 0$ ، $x_3 = 0$ ، $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ وقيمته Z=38 .

وهو حل ممكن إلا أن قيمته أقل من الحد الأدنى الحالي (LB=42) ، لذا نشطب مج8 .

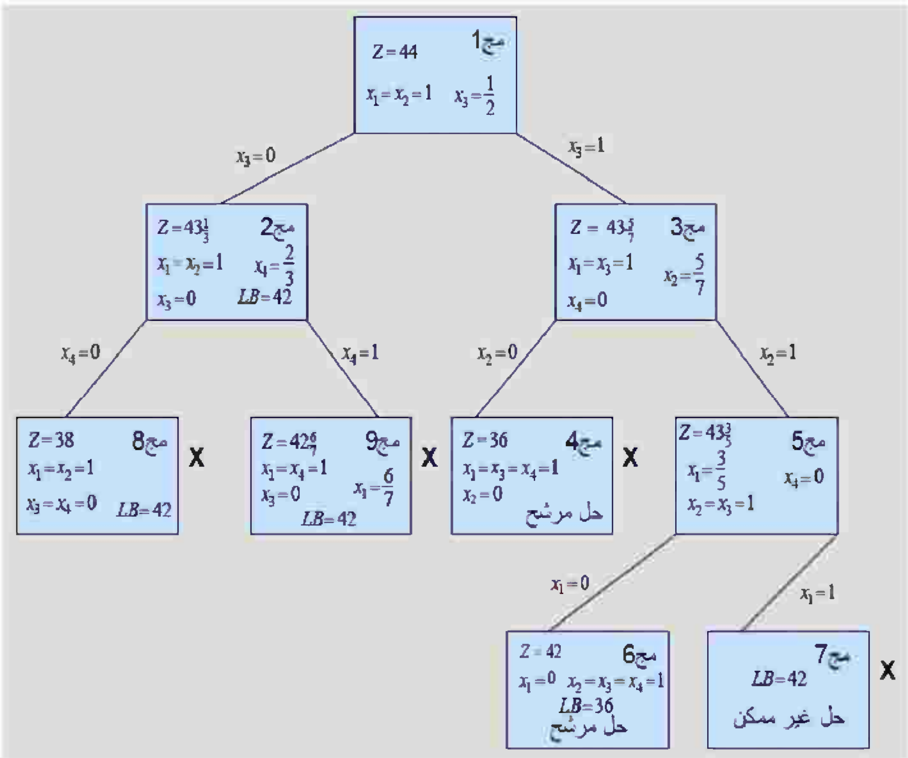
وحل مج9 هو $x_4 = 1$ ، $x_3 = 0$ ، $x_2 = \frac{6}{7}$, $x_1 = 1$ وقيمته Z=42.857 .

هنا علينا أن نستخدم x_2 لعملية تفرع جديدة لكننا لن نجري مثل هذه العملية لأننا لن نحصل على أحسن مما حصلنا عليه سابقا ، ذلك أن قيمة Z عند أي حل ممكن من هذا التفرع لن تزيد على 42 والتي حصلنا عليها عند حل ممكن سابق هو :

$$Z = 42 \text{ وقيمته } \quad x_1 = 0 \ , \ x_2 = 1 \ ، \ x_3 = 1 \quad x_4 = 1$$

وبذلك يكون الحل الأخير هو الحل الأمثل للمسألة.

ويعطي الشكل رقم (٥,٩) ملخصا لحل مسألة المثال (٥,٤) السابق.



الشكل رقم (٥,٩).

(٥,٥,٢) حل مسألة البائع المتجول المتناظرة

كما رأينا في الفصل الرابع فإن مسألة البائع المتجول تتلخص في أن شخصا ما (بائع) يرغب بزيارة n مدينة مختلفة ابتداءً من مدينته (مسقط رأسه) بحيث يزور كل من هذه المدن مرة واحدة فقط ليعود أخيرا إلى بيته (مدينته) بأقصر طريق ممكنة. سنرمز للمسافة بين المدينتين (i,j) ، وهي مسافة معلومة، بالرمز c_{ij}. فإذا كانت المسافة المقطوعة بين المدينتين (i,j) تساوي المسافة المقطوعة بين المدينتين (j,i) أي كان $c_{ij} = c_{ji}$ قلنا عن المسألة إنها *متناظرة* وإلا قلنا عنها إنها غير *متناظرة*. وعندما يتعذر الذهاب من المدينة i إلى المدينة j جاز لنا أن نضع c_{ij} مساوية لقيمة كبيرة جدا M أو أننا نحذف المتغيرات المقابلة من النموذج الرياضي للمسألة. وفي جميع الحالات تصبح المسألة هي :

إيجاد الطريق (المثلى) التي تجعل مجموع المسافات التي يقطعها البائع المتجول بين المدن (ابتداء من مدينته والعودة إليها) أقل ما يمكن.

إن معظم الصياغات المتعلقة بالحالة المتناظرة تفترض أن $i < j$ وتعرف متغيرات القرار x_{ij} على الشكل التالي :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا احتوت الجولة على ضلع يربط } i \text{ بـ } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

إن وجود ضلع يصل بين المدينة i والمدينة j يعني ضمنا وجوده بين j و i وللضلعين نفس التكلفة. وقد وجدنا أن النموذج الرياضي لمسألة البائع المتجول المتناظرة كمسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم قد كان على النحو التالي :

صغر الدالة :

$$Z = \sum_{i} \sum_{j>i} c_{ij} x_{ij} \quad \text{(مجموع المسافات التي يقطعها البائع المتجول)}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 2, \qquad \text{لجميع قيم } i$$

لجميع المجموعات الجزئية الحقيقية S حيث $|S| \geq 3$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S,\, j>i} x_{ij} + \sum_{i \notin S} \sum_{j \in S,\, j>i} x_{ij} \geq 2,$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad \text{لجميع قيم } i, j;\ j > i$$

والمجموعة الأولى من القيود تبين أن قيم اثنين بالضبط من المتغيرات x_{ij} المتعلقة في مدينة ما i يمكن أن تكون مساوية للواحد في أي حل ممكن للمسألة، أحدهما ينتج من ربط المدينة i بالمدينة التي تسبقها في جولة ممكنة (حل ممكن) والأخرى تنتج من ربط المدينة i بالمدينة التي تليها في هذه الجولة. وتضمن لنا المجموعة الثانية من القيود عملية التخلص من الجولات الجزئية حيث تؤدي هذه القيود إلى وجوب احتواء أي جولة على نقاط من S ونقاط من خارج S مرتين على الأقل.

ولتوضيح كيفية حل مسألة البائع المتجول المتناظرة بطريقة التفرع والحد نسوق المثال التالي:

مثال (٥,٥)

يبين الجدول رقم (٥,٤) عملية ربط ممكنة بين 5 مدن حيث تدل الأرقام الموضحة في هذا الجدول على الزمن اللازم بالدقيقة للتنقل بين هذه المدن. المطلوب إيجاد الجولة ذات الزمن الأصغر والتي تسمح بالمرور في كل مدينة مرة واحدة بالضبط وأن نوضح لماذا يمكن اعتبار هذه المسألة كمسألة (بائع متجول) متناظرة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة باستخدام طريقة التفرع والحد.

الحل

نظراً لأن المسألة تتطلب استخدام جولة مغلقة بحيث تسمح بزيارة كل مدينة فهي مسألة بائع متجول. وهذه المسألة متناظرة لأن الوقت اللازم للمرور من i إلى j هو نفس الوقت اللازم للمرور من j إلى i.

الجدول رقم (٥,٤).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	0	132	217	164	58
2	132	0	290	201	79
3	217	290	0	113	303
4	164	201	113	0	196
5	58	79	303	196	0

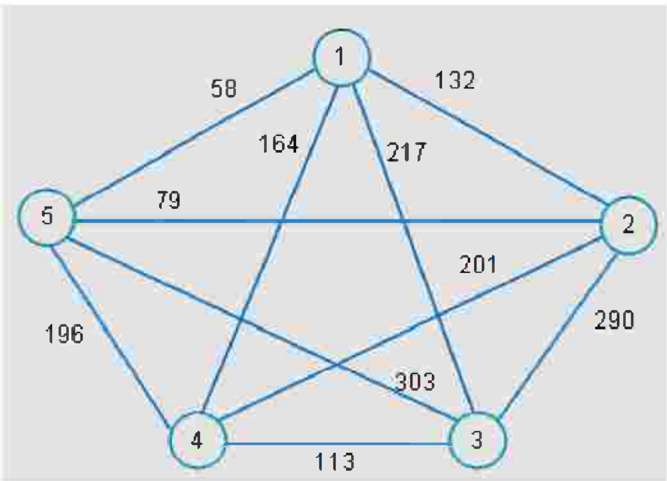
بحسب بيانات الجدول رقم (٥,٤) فإن دالة الهدف المطلوب تصغيرها وفقا لقيود المسألة المتناظرة سابقاً هي :

$$Z=\sum_{i}^{5}\sum_{j>i}^{5}c_{ij}x_{ij}=132x_{12}+217x_{13}+164x_{14}+58x_{15}+290x_{23}$$
$$+201x_{24}+79x_{25}+113x_{34}+303x_{35}+196x_{45}$$

ويعطي الشكل رقم (٥,١٠) عملية الربط الممكنة بين هذه المدن كما أسلفنا أعلاه فإن استخدام طريقة التفرع والحد في حل مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم يعتمد على طبيعة المسألة التي نرغب بحلها. فقد اعتمدنا تحليلاً منطقياً سليماً عند حل مسألة حقيبة الظهر البسيطة أدى إلى إمكانية استخدام طريقة التفرع والحد للوصول إلى الحل الأمثل لهذه المسألة.

وفي مسألة البائع المتجول المتناظرة في المثال أعلاه فإنه يمكننا أن نلاحظ بسهولة أن هذه المسألة تكافئ مسألة تخصيص واحد - لواحد (نذكر بأن مسألة التخصيص هي حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية) وذلك بأن نخصص لكل مدينة زيارة واحدة

فقط ولكل زيارة مدينة واحدة فقط شريطة ألا يحوي الحل الناتج على جولات جزئية (Sub tours). ولذا فإننا سنستفيد من الطريقة الهنغارية (Hungarian Algorithm) في حل مسائل التخصيص الناتجة وسنستخدم طريقة التفرع والحد لاستبعاد مسائل التخصيص الجزئية الناتجة والتي تحوي على جولات جزئية إلى أن نصل إلى أفضل مسألة تخصيص لا تحوي أي جولة جزئية فيكون حل هذه المسألة هو الحل الأمثل لمسألة البائع المتجول المتناظرة. ولمنع وجود جولات جزئية في مسائل التخصيص الجزئية الناتجة فإننا سنضع $c_{ii}=M$ وذلك لمنع البائع المتواجد في مدينة من تخصيصه لزيارة تلك المدينة، كذلك سنضع $x_{ij}=0$ أو $c_{ij}=M$ لضمان عدم احتواء الجولة على الضلع *(i,j)* وهو ما نواجهه عادة عند وجود جولات جزئية في المسألة الجزئية المتفرعة.



الشكل رقم (٥,١٠).

سنقوم الآن بتطبيق ما ورد أعلاه لحل مسألة البائع المتجول المتناظرة في المثال (٥,٥) السابق. وفقا للمصطلحات الأنفة الذكر سنقوم أولا بحل مسألة التخصيص

(سنسميها مج1) الممثلة في الجدول رقم (٥,٥) والذي نتج عن الجدول رقم (٥,٤) بعد استبدال c_{ii} ب M .

الجدول رقم (٥,٥).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	M	132	217	164	58
2	132	M	290	201	79
3	217	290	M	113	303
4	164	201	113	M	196
5	58	79	303	196	M

فنجد أن الحل الأمثل ل مج1 هو :

$$x_{21} = x_{15} = x_{34} = x_{43} = x_{52} = 1 \qquad , \qquad Z = 495$$

ويمكننا بسهولة أن نلاحظ أن هذا الحل يحوي على الجولتين الجزئيتين التاليتين :

الجولة الجزئية الأولى هي $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

الجولة الجزئية الثانية هي $3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

فلا بد إذا من التخلص من كلا الجولتين. لنبدأ مثلا بالتخلص من الجولة الجزئية الثانية. فكما نوهنا أعلاه فإنه للتخلص من هذه الجولة الجزئية فإننا إما أن نضع $x_{34} = 0$ أو أن نضع $c_{34} = \mathrm{M}$ وذلك لمنع ظهور أي من الضلعين (3,4) و (4,3) في الجولة. وسيستدعي منا ذلك إجراء عملية تفرع على مج1 إلى المسألتين الجزئيتين التاليتين :

مج2= مج1 + القيد ($x_{34} = 0$ أو $c_{34} = \mathrm{M}$)

مج3= مج1 + القيد ($x_{43} = 0$ أو $c_{43} = \mathrm{M}$)

نقوم الآن بحل إحدى المسألتين ولتكن مج 2 والمعطاة بياناتها كما في الجدول رقم (٥,٦) كمسألة تخصيص بالطريقة الهنغارية فنجد أن حلها الأمثل هو :

$$x_{14} = x_{25} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1 \qquad , \quad Z = 625$$

الجدول رقم (٥,٦).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	M	132	217	164	58
2	132	M	290	201	79
3	217	290	M	M	303
4	164	201	113	M	196
5	58	79	303	196	M

وكما نلاحظ فإن هذا الحل يحوي جولتان جزئيتان هما :

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \quad \text{و} \quad 2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$$

ولذا لا يمكن أن يكون هذا الحل أمثليا. هنا نجري التفرع على مج2 لمحاولة التخلص من الجولة الجزئية $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين :

مج4= مج2 + القيد ($x_{25} = 0$ أو $c_{25} = M$)

مج3= مج2 + القيد ($x_{52} = 0$ أو $c_{52} = M$)

ونحل أحدهما بالطريقة الهنغارية ، ولتكن مج4 والتي تصبح بياناتها كما في الجدول رقم (٥,٧)، فنحصل على الحل التالي :

$$x_{15} = x_{24} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1 \qquad , \quad Z = 668$$

وكما نلاحظ فإن هذا الحل لا يحوي جولات جزئية ولذا فهو حل ممكن ، وهو يعطي الجولة الكاملة التالية :

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

لذا فهو حل ممكن ولذا نعتبر أن هذا الحل مرشح لأن يكون حلا أمثليا. ولما كانت قيمة هذا الحل هي Z=668 ، ولما كان الهدف في المسألة هو التصغير، لذا ستكون القيمة Z=668 بمثابة *حداً أدنى* لقيمة أي حل مستقبلي ممكن. ويعني ذلك أنه يمكننا أن نشطب أي مسألة جزئية ممكنة يكون فيها Z < 668 .

الجدول رقم (٥,٧).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	M	132	217	164	58
2	132	M	290	201	M
3	217	290	M	M	303
4	164	201	113	M	196
5	58	79	303	196	M

نعود الآن لحل مج5 ، والمعطاة بياناتها بالجدول رقم (٥,٨)، بالطريقة الهنغارية فنجد أن حلها الأمثل هو:

$$x_{14} = x_{43} = x_{32} = x_{25} = x_{51} = 1 \qquad , \quad Z = 704$$

وهذا الحل هو حل ممكن لأنه يمثل جولة كاملة وخالية من الجولات الجزئية هي:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$$

ولكننا سنشطب هذا الحل ؛ لأن قيمة Z=704 عنده أسوأ من قيمة سابقة Z=668 (ذلك أن المسألة هي مسألة تصغير). وبذلك تنتهي عملية التفرع على مج2، ولا بد لنا من العودة إلى المسألة الجزئية المتبقية مج3 ونجري عليها كافة عمليات التفرع الممكنة كما فعلنا بالنسبة ل مج2. فحسبما عرفنا مج3 أعلاه نجد أن بياناتها معطاة كما في الجدول رقم (٥,٨). فلو قمنا بحلها بالطريقة الهنغارية لوجدنا أن حلها الأمثل هو

$$x_{13} = x_{34} = x_{41} = x_{25} = x_{52} = 1 \qquad , \quad Z = 652$$

وقيمة هذا الحل Z=652 أقل من قيمة ممكنة سابقة Z=668 .

ولكن وبالنظر لأن هذا الحل يحوي على جولتين جزئيتين هما :

$$1 \to 3 \to 4 \to 1 \quad \text{و} \quad 2 \to 5 \to 2$$

لذا فإن إجراء عملية تفرع على مج3 هذه قد يوصل إلى حل (أو حلول) ممكن (حلول ممكنة) أفضل مما وصلنا إليه لغايته. الآن لو أجرينا عملية تفرع على مج3 لحصلنا على المسألتين الجزئيتين التاليتين :

مج6= مج3 + القيد ($x_{25}=0$ أو $c_{25}=\mathrm{M}$)

مج7= مج3 + القيد ($x_{52}=0$ أو $c_{52}=\mathrm{M}$)

وبطرق مماثلة نجد أن حل مج6 هو :

$$Z=704 \quad , \quad x_{15}=x_{34}=x_{23}=x_{41}=x_{52}=1$$

وهذا الحل هو حل ممكن ؛ لأنه لا يحوي جولات جزئية ، إلا أننا نشطبه لأن قيمته أسوأ من قيمة لحل ممكن سابق.

الجدول رقم (٥,٨).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	M	132	217	164	58
2	132	M	290	201	79
3	217	290	M	113	303
4	164	201	M	M	196
5	58	79	303	196	M

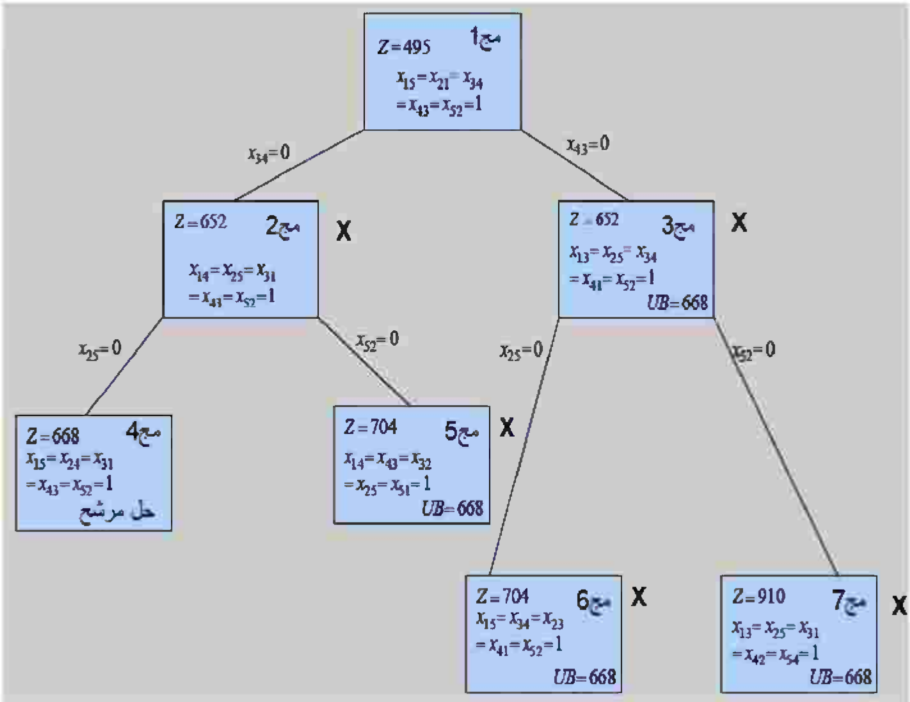
كذلك نجد أن حل مج7 هو :

$$Z=910 \quad , \quad x_{13}=x_{25}=x_{31}=x_{42}=x_{54}=1$$

وهذا الحل هو حل ممكن لأنه لا يحوي جولات جزئية، إلا أننا نشطبه لأن قيمته أسوأ من قيمة لحل ممكن سابق. الآن، ووفقا لما وجدناه أعلاه، يكون حل مج4 هو الحل الأمثل للمسألة وهو الجولة التالية:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \qquad \text{وقيمته } Z=668$$

ويعطي الشكل رقم (٥,١١) ملخصا وافيا لجميع عمليات التفرع التي قمنا بها لدى حل هذا المثال.



الشكل رقم (٥,١١).

(٥,٦) تمارين (٥)

١- يمتلك شخص حافلة حمولتها 50 طن يرغب أن يحملها بواحد أو أكثر من بين ثلاثة أنواع من الشاحنات من ميناء جدة إلى مدينة الرياض بحيث يحقق أكبر ربح ممكن. البيانات معطاة في الجدول رقم (٥,٩).

الجدول رقم (٥,٩).

رقم نوع الشاحنات	ربح الوحدة /ألف ريال	وزن الوحدة/طن
1	10	3
2	15	4
3	17	5

المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي وإيجاد الحل الأمثل لها.

٢- ترغب شركة باستثمار مبلغ 60 مليون في واحد أو أكثر من أربعة مشاريع متوافرة للاستثمار حالياً. البيانات معطاة في الجدول رقم (٥,١٠).

المطلوب صياغة المسألة وحلها في كل من الحالات التالية

(أ) لا يمكن الاستثمار في أي من المشاريع الأربعة إلا بعدد صحيح من الوحدات.

(ب) يمكن الاستثمار بأي من المشروعين (1) أو(3) بأجزاء من الوحدة.

(ج) لا يمكن الاستثمار بأكثر من 3 مشاريع من أصل المشاريع الأربعة المتوافرة.

الجدول رقم (٥,١٠).

رقم المشروع	الحد الأدنى (مليون) المطلوب للاستثمار/ وحدة	الربح المتوقع للوحدة/ مليون
1	3	2
2	5	4
3	2	3
4	4	5

٣- كبر الدالة :

$$Z = x_1 - 3x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 15$$

$x_1, x_2 \geq 0$ أعداد صحيحة

المطلوب :

(أ) رسم فضاء الحل للمسألة المخففة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل لها.

(ب) إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفرع والحد.

٤- لدينا المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

وفقا للقيود :

$$4x_1 - 4x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0 \text{ و عدد صحيح}$$

$$x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة التفرع والحد.

٥- ترغب سيدة أعمال باستثمار جزء من مالها الوفير وقد توافرت لها فرصتا استثمار. الأولى في أسهم لشركة اتصالات قيمة السهم فيها 70 $ والربح المتوقع للسهم هو 13 $. والثانية في سوق الأسهم العامة حيث يمكنها أن تستثمر أي مبلغ من المال وبنسبة مئوية متوقعة من الربح قدرها 9%. واعتماداً على تجربتها الناجحة في هذه الأخيرة فقد قررت هذه السيدة أن لا يتجاوز استثمارها في الأولى 40% من مجموع استثمارها في الفرصتين أو ألا يزيد عن 750 $. كما قررت هذه السيدة أن تستثمر مبلغاً كافياً من المال بحث لا تقل أرباحها في الفرصتين عن 250 $. إذا علمت أن السيدة تهدف أن يكون مجموع المال الذي ستستثمره في الفرصتين أقل ما يمكن فالمطلوب :

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية مختلطة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة التفرع والحد.

٦- أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية بطريقة التفرع والحد.

كبر الدالة :

$$Z = 3x_1 + 13x_2$$

وفقا للقيود:

$$2x_1 + 9x_2 \leq 40$$

$$11x_1 - 8x_2 \leq 82$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$ و أعداد صحيحة

٧- يقوم زوجان موظفان بتقاسم الواجبات المنزلية وهما يرغبان بجعل الزمن الكلي الذي يصرفانه في إنجاز كافة هذه الواجبات أقل ما يمكن. يعطي الجدول رقم (٥,١١) الأزمنة بالساعة لإنجاز هذه الواجبات.

الجدول رقم (٥,١١).

	التسوق	الطبخ	غسل الأواني	غسل الثياب
الزوج	3.2	7.4	4.1	2.5
الزوجة	3.9	6.8	4.5	2.7

المطلوب.

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة بطريقة التفرع والحد.

٨- أوجد الحل الأمثل لمسألة البائع المتجول التالية بين خمس مدن بطريقة التفرع والحد. البيانات معطاة في الجدول رقم (٥,١٢).

الجدول رقم (٥,١٢).

المدن	A	B	C	D	E
A	0	65	69	66	57
B	64	0	24	92	22
C	49	50	0	31	45
D	48	45	55	0	50
E	59	34	30	34	0

٩- لديك المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

وفقا للقيود :

$$2x_1 + 6.3x_2 + x_3 \leq 11$$

$$9x_1 + 6x_2 + 10x_3 \leq 28$$

$x_2 \geq 0$ و عدد صحيح

$$x_1, x_3 \geq 0$$

المطلوب :

(أ) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة بطريقة السمبلكس.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية بطريقة التفرع والحد.

١٠- لديك المسألة التالية :

صغر الدالة :

$$Z = -3x_1 + 4x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 8$$

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$ و أعداد صحيحة

المطلوب :

(أ) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة باستخدام طريقة السمبلكس ذات المرحلتين.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية بطريقة التفرع والحد.

١١- تحقق أن الحل الأمثل للمسألة التالية :

صغر الدالة :

$$Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + 3x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$ و أعداد صحيحة

هو (2,2,2) .

١٢- تقوم شركة بإنتاج إحدى السلع وقد وجد أن الطلب على هذه السلعة خلال الأشهر الخمسة القادمة هو كما في الجدول رقم (٥,١٣).

وقد توافرت لمسألة المخزون هذه كلا من المعلومات التالية. مستوى المخزون في بداية الفترة الأولى يساوي الصفر، تكاليف التجهيز للإنتاج تقدر ب 250$ لكل عملية إنتاج، أما تكلفة إنتاج الوحدة فتقدر ب 2$ وتكلفة تخزينها لنهاية الفترة فتقدر ب 1$.

الجدول رقم (٥,١٣).

الفترات	1	2	3	4	5
الطلب	220	280	360	140	270

تهدف الشركة إلى جعل تكاليف المخزون الكلية خلال الفترات الخمسة أقل ما يمكن. المطلوب صياغة المسألة بنموذج رياضي وحلها بطريقة التفرع والحد في كل من الحالات التالية:

(أ) إذا رمزنا بالرمز x_i لعدد الوحدات المنتجة في الشهر i و استخدمنا المتغير الثنائي القيمة التالي $y_i = 0$ إذا لم يكن هناك إنتاج في الشهر i، و $y_i = 1$ إذا كان هناك إنتاج في الشهر i.

(ب) المتغير y_i معرف كما في (أ) و المتغير الجديد x_{it} يعرف بأنه عدد الوحدات المنتجة في الشهر i لتغطية الاحتياج في الشهر t.

١٣– حول المسألة التالية إلى الصيغة النموذجية لمسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم ثم أوجد الحل الأمثل لها بطريقة التفرع والحد

كبر الدالة:

$$Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

وفقا للقيود:

$$20x_1 + 15x_2 - x_3 \leq 10$$

$$12x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{و أعداد ثنائية}$$