

طرق مستوى القطع Cutting Plane Methods

(٧، ١) مقدمة

كما رأينا في الفصل الخامس فإن "طريقة التفرع والحد" لحل مسائل "البرمجة العددية البحتة" تعتمد على القيام بإسقاط الشرط "أن متغيرات المسألة الأصلية لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة" وحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة والتي أسميناها "المسألة المخففة". عندئذ إذا كانت جميع قيم المتغيرات في الحل الأمثل للمسألة المخففة الناتجة هي قيم عددية صحيحة فعندها يكون هذا الحل هو أيضا حلا أمثليا لمسألة البرمجة العددية الأصلية. وإلا فإننا نحرك دالة الهدف للمسألة المخففة الحالية اعتباراً من قيمتها المثلى بطريقة لا يمكننا فيها أن نتجاوز أي حل ممكن يمكن لقيمة دالة الهدف عنده أن تفوق القيمة المثلى لهذه المسألة المخففة. وبمعنى آخر فإن عملنا أشبه بإجراء عملية تهذيب للمسائل المخففة لحين الوصول إلى حل ممكن (فهو أمثل) للمسألة الأصلية.

والحل بالطريقة التي تسمى "طريقة مستوى القطع" (Cutting Plane Method) ينطلق أيضاً من "المسألة المخففة" (Relaxation Problem) ويعيد بناء فضاء الحل من خلال إضافة قيد إلى المسألة المخففة على أن يتم تصميم هذه القيد بطريقة خاصة وبحيث يحقق الخاصيتين الرئيسيتين التاليتين :

خاصية 1. أي حل ممكن لمسألة "البرمجة العددية الأصلية" يحقق القيد المضاف.

خاصية 2. الحل الأمثل "للمسألة المخففة الحالية" لا يحقق القيد المضاف.

ويسمى مثل هذا القيد المضاف باسم مستوي القطع (Cutting Plane). وفي الحقيقة فإن الخاصية 2. تعني أن مثل مستوي القطع هذا يقطع أو يفصل (Cut) الحل الأمثل "للمسألة المخففة" عن فضاء حلها فيصبح حلاً غير ممكن. أما الخاصية 1. فتعني أن إضافة مثل مستوي القطع هذا لن يفقدنا أي حل ممكن من حلول المسألة الأصلية. وتتم عملية رد الحلول غير الممكنة الناتجة للمسائل المخففة المتتالية باستخدام طريقة السمبلكس الثنوية، والتي تعرفنا عليها في الفصل الأول، إلى حلول مثلى ممكنة ولكنها حلول ذات قيم عددية صحيحة لتلك المسائل. فنكون بذلك قد حصلنا على حل أمثل لمسألة البرمجة العددية الأصلية وهو ما نبحت عنه. وسنوضح كافة الأمور من خلال المثالين التمهيديين التاليين، ولكننا نود قبل ذلك التذكير بالملاحظة (١) من مقدمة الباب الثاني وهي أنه إذا كان لدينا مسألتين تنتج الثانية عن الأولى بإضافة قيد أو أكثر لقيد الأولى فإن فضاء الحل للثانية يكون مجموعة جزئية من فضاء الحل للأولى.

مثال (١، ٧)

تقوم شركة بإنتاج صنفين من السجاد A و B، الربح المتوقع لكل وحدة من A هو 30 ريال والربح المتوقع لكل وحدة من B هو 25 ريال. تمر عملية إنتاج كل من صنفين السجاد بقسمين هما قسم النسيج وقسم الإخراج النهائي، ويخضع كل منهما لبعض القيود والتي تتمثل بما يلي:

- ١- توفر 40 ساعة عمل يومية في قسم النسيج.
- ٢- توفر 40 ساعة عمل يومية في قسم الإخراج النهائي.
- ٣- عدد الوحدات التي يمكن بيعها يومياً من النموذج B لا تتجاوز 12 وحدة.

٤- كل وحدة تصنع من A تستغرق ساعتين في قسم النسيج وساعة في قسم الإخراج النهائي وإن كل وحدة تصنع من B تستغرق ساعة في قسم النسيج و3 ساعات في قسم الإخراج النهائي.

ترغب الشركة في وضع برنامج إنتاجي لكلا الصنفين بحيث تكون الأرباح العائدة منهما معاً أكبر ما يمكن. المطلوب إيجاد الحل الأمثل للشركة.

الحل

لورمزنا بالرمز x_1, x_2 لعدد الوحدات التي ستنتجها الشركة من الصنفين A و B على الترتيب لكان النموذج الرياضي لهذه المسألة هو كبر الدالة :

$$Z = 30x_1 + 25x_2 \quad (٧, ١)$$

وفقاً للقيود :

$$2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 40$$

$$x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أعداد صحيحة x_1, x_2

ولكان جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة، بعد حذف القيد الأخير (x_1, x_2) أعداد صحيحة) معطى في الجدول رقم (٧, ١).

الجدول رقم (٧,١).

المغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	13	4	0	680
x_1	1	0	0.6	-0.2	0	16
x_2	0	1	-0.2	0.4	0	8
s_3	0	0	0	0.2	-0.1	1

فالحل الأمثل للمسألة المخففة هو $x_1 = 16$ و $x_2 = 8$ و $Z = 680$. ولما كانت قيم x_2, x_1 صحيحة فهذا الحل هو أيضاً حل أمثل للمسألة الأصلية (٧,١).
مثال (٧,٢)
كبر الدالة:

$$(٧,٢) \quad Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقاً للقيود:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

أعداد صحيحة x_1, x_2

$$x_1, x_2 \geq 0$$

وبإضافة المتغيرات الراكدة نجد أن المسألة المخففة هي:
كبر الدالة:

$$(٧,٣) \quad Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقاً للقيود:

$$x_1 + x_2 + s_1 = 6$$

$$9x_1 + 5x_2 + s_2 = 45$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

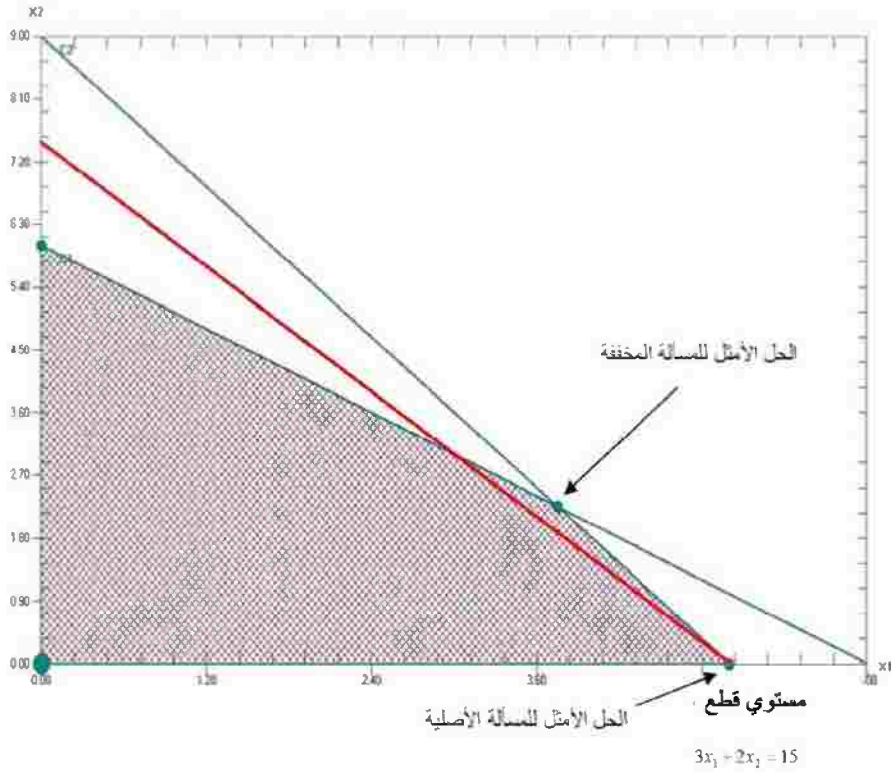
والحل الأمثل للمسألة المخففة لهذا المثال معطى في الجدول رقم (٧,٢) وفضاء الحل معطى للمسألة المخففة موضح كما في الشكل رقم (٧,١). ولتطبيق طريقة مستوى القطع فإننا نختار أي قيد (في الحقيقة ثمة بعض القواعد التي نقوم بموجبها بتحديد مناسب للقيد الذي سنقوم باختياره) من جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة والتي تكون فيه قيمة متغير من

الجدول رقم (٧,٢).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	1.25	.75	41.25
x_2	0	1	2.25	-.25	2.25
x_1	1	0	-1.25	.25	3.75

المتغيرات الأساسية قيمة كسرية (غير صحيحة). فلو اخترنا القيد الثاني مثلاً وهو $x_1 - 1.25s_1 + .25s_2 = 3.75$ فإننا نعيد كتابته بحيث نكتب جميع المعاملات فيه على شكل مجموع (الجزء الصحيح + الجزء الكسري) فنجد

$$x_1 - 2s_1 + 0.75s_1 + 0.s_2 + 0.25s_2 = 3 + 0.75$$



الشكل رقم (٧, ١).

الآن نعيد وضع الأجزاء الصحيحة بطرف والأجزاء الكسرية في الطرف الآخر فنجد

$$(٧, ٤) \quad x_1 - 2s_1 + 0.s_2 - 3 = 0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2$$

وتقترح طريقة مستوي القطع إضافة القيد التالي لجدول الحل الأمثل (٧, ٢) للمسألة المخففة:

$$\text{الطرف الأيمن من } (٧, ٤) \geq 0.$$

أي إضافة القيد التالي :

$$(٧, ٥) \quad 0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \leq 0$$

ويسمى مثل هذا القيد المضاف باسم مستوى قطع (Cutting Plane).
وكما أشرنا أعلاه فإن مثل هذا القيد يجب أن يحقق الخاصيتين 1. و2. السابقتين.
وسنوضح ذلك فيما يلي :

تحقق الخاصية 1. لنفرض أن (x_1, x_2) هو حل ممكن للمسألة الأصلية عندئذ يكون (x_1, x_2) حلاً ممكناً للمسألة المخففة وبالتالي لا بد لهذا الحل أن يحقق القيد (٧, ٤) حيث $s_1, s_2 \geq 0$. ولما كان $0.75 < 1$ فإن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيمن من القيد (٧, ٤) أقل من الواحد أيضاً. ولكن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيسر من القيد (٧, ٤) عدداً صحيحاً، وبالتالي فإن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيمن من القيد (٧, ٤) عدداً صحيحاً أقل من الواحد، أي صفراً أو أقل. ومن ذلك نجد أن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيحقق القيد أو مستوى القطع (٧, ٥)، وبذلك تتحقق الخاصية 1.

تحقق الخاصية 2. سنوضح الآن أن الحل الأمثل للمسألة المخففة الحالية لا يمكن أن يحقق مستوى القطع (٧, ٥)، والذي يعني أن مثل هذا القطع يقطع أو يفصل الحل الأمثل للمسألة المخففة عن فضاء الحل للمسألة الأصلية. وليبان ذلك نلاحظ من جدول الحل الأمثل (٧, ٢) للمسألة المخففة أن $s_1 = s_2 = 0$ في هذا الحل وبالتالي لا يمكن لهذا الحل أن يحقق مستوى القطع (٧, ٥).

لتطبق طريقة مستوى القطع نقوم بإضافة متغير راكد للقطع (٧, ٥) فنحصل على القيد التالي :

$$(٧,٦) \quad -0.75s_1 - 0.25s_2 + s_3 = -0.75$$

ثم نقوم بإضافة القيد الناتج إلى جدول الحل الأمثل (٧,٢) للمسألة المخففة الحالية فنجد الجدول رقم (٧,٣) التالي :

الجدول رقم (٧,٣).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1 متغير داخل	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	1.25	0.75	0	41.25
x_2	0	1	2.25	-0.25	0	2.25
x_1	1	0	-1.25	0.25	0	3.75
s_3 متغير خارج	0	0	-0.75	-0.25	1	-0.75
النسبة			-5/3	-3		

وكما نلاحظ فإن الحل المعطى بالجدول رقم (٧,٣) غير ممكن لأن $s_3 \leq 0$. نقوم الآن بتطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,٣) للحصول على الحل الأمثل (راجع هذه الطريقة في نهاية الفصل الأول). فبما أن مسألتنا هي مسألة تكبير وبحسب سطر النسبة فإن المتغير الداخل هو s_1 فالعنصر المحوري هو -0.75. وباستكمال الحسابات الخاصة بطريقة السمبلكس (العادية) فإننا نحصل على الجدول رقم (٧,٤). والحل في الجدول رقم (٧,٤) هو حل أمثل للمسألة المخففة وجميع قيم المتغيرات فيه صحيحة فهو بالتالي حل أمثل للمسألة الأصلية (٧,٢). وهذا الحل الأمثل هو $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, و $Z=40$.

وللحصول على معادلة مستوي القطع، الذي أوصلنا للحل الأمثل المنشود للمسألة الأصلية، نوجد قيمة s_1 من القيد $x_1 + x_2 + s_1 = 6$ وقيمة s_2 من القيد $9x_1 + 5x_2 + s_2 = 45$ في النموذج (٧,٣) ونعوضهما في معادلة مستوي القطع (٧,٥) فنجد ما يلي :

الجدول رقم (٧، ٤).

المغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	0.33	1.67	40
x_2	0	1	0	-1	3	0
x_1	1	0	0	0.67	-1.67	5
s_1	0	0	1	0.33	-1.33	1

$$0.75 - 0.75(6 - x_1 - x_2) - 0.25(45 - 9x_1 - 5x_2) = 0$$

وبإصلاح هذه العلاقة نحصل على $3x_1 + 2x_2 \leq 15$ والتي تمثل مستوى القطع المطلوب. وقد أظهرنا هذا القطع كخط ملون في الشكل رقم (٧، ١). لاحظ أن هذا القطع قد عزل الحل الأمثل للمسألة المخففة عن مجموعة الحلول للمسألة الأصلية.

(٧، ٢) خوارزميات مستوى القطع

Cutting Plane Algorithms

بعد المثال التمهيدي السابق فإننا سنتعرف في هذه الفقرة على بعض الخوارزميات الأساسية التي تمكننا من حل "مسائل البرمجة الخطية العددية" البحتة والمختلطة. (٧، ٢، ١) خوارزمية مستوى القطع لحل مسائل البرمجة الخطية العددية البحتة تطبق هذه الخوارزمية على مسائل البرمجة الخطية العددية البحتة فقط حيث لا تأخذ المتغيرات في هذا النوع من المسائل إلا قيماً صحيحة. وتتطلب هذه الخوارزمية الشرط التالي

شرط 1. "أن تكون معاملات المتغيرات في كافة القيود وفي الأطراف اليمنى لهذه القيود بما في ذلك دالة الهدف أعداد صحيحة".

إن تحقيق الشرط 1. ممكن دوماً، فمثلاً لو أخذنا القيد التالي $x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq \frac{15}{3}$ وقمنا بتوحيد المقامات فيه لحصلنا على القيد المكافئ التالي $6x_1 + 9x_2 \leq 30$ حيث كافة المعاملات فيه صحيحة.

خطوات الخوارزمية

خطوة (1)

نسقط الشرط أن المتغيرات تأخذ قيماً صحيحة فقط ونحل "المسألة المخففة" الناتجة. (مسألة البرمجة الخطية الناتجة). فإذا كان الحل الأمثل الناتج للمسألة المخففة أعداداً صحيحة (كما في مثال (٧,١) مثلاً) فإن هذا الحل هو حل أمثل للمسألة الأصلية وعندها نتوقف. وإلا انتقلنا إلى الخطوة (2).

خطوة (2)

نختار أحد المتغيرات ذات القيمة غير الصحيحة ونولد مستوي قطع من قيد هذا المتغير ونضيف مستوي القطع هذا إلى جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة ثم نحل المسألة الناتجة بطريقة السمبلكس الثنوية ، ويكون ذلك على النحو التالي :

خطوة (2أ). لنفرض أن جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة (تكبير أو تصغير) كان على الشكل التالي (الجدول رقم (٧,٥)) في هذا الحل $x_1, \dots, x_n$ هي المتغيرات الأساسية و $s_1, \dots, s_m$ هي المتغيرات غير الأساسية. الآن لنأخذ سطر x_i في هذا الجدول فنجد منه

الجدول رقم (٧,٥).

	x_1	.	x_i	.	x_n	s_1	...	s_j	...	s_m	الحل
z	0		0	.	0	b_1	...	b_j	...	b_m	z_0
x_1	1	.	0	.	0	a_{11}	.	a_{1j}	.	a_{1m}	v_1
....											
x_i	0	.	1	.	0	a_{i1}	.	a_{ij}		a_{im}	v_i
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	...
x_n	0	.	0	.	1	a_{n1}	.	a_{nj}		a_{nm}	v_n

$$(٧,٧) \quad x_i = v_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}s_j$$

حيث v_i هي قيمة غير صحيحة.

ويشار لمثل العلاقة (٧,٧) باسم "سطر أساس" (Source Row). في مثل هذا السطر نكتب كل من v_i و a_{ij} على الشكل $[x]+f$ حيث $[X]$ هي الجزء الصحيح من X و f هي الجزء الكسري من x ولذا فإن $1 > f \geq 0$ فيكون لدينا:

$$(٧,٨) \quad a_{ij} = [a_{ij}] + f_{ij} \quad \text{و} \quad v_i = [v_i] + f_i$$

ثم نعوض (٧,٨) في سطر الأساس (٧,٧) فنجد ما يلي:

$$(٧,٩) \quad f_i - \sum_{j=1}^m f_{ij}s_j = v_i - [v_i] + \sum_{j=1}^m [a_{ij}]s_j$$

وحيث أننا نشترط أن تكون قيم كل من المتغيرات x_i و s_j أعداداً صحيحة لكافة قيم i و j ، فإن ذلك الاشتراط لا يتحقق إلا إذا كان الطرف الأيمن من العلاقة (٧,٩) عدداً صحيحاً، والذي يؤدي بدوره إلى أن يكون الطرف الأيسر من العلاقة (٧,٩) أيضاً عدداً صحيحاً. ولما كان $f_{ij} \geq 0$ و $s_j \geq 0$ لجميع قيم i و j كان لدينا

$$(٧,١٠) \quad f_i - \sum_{j=1}^m f_{ij}s_j \leq f_i$$

وبما أن $f_i < 1$ والطرف الأيسر من (٧,١٠) عدد صحيح، فسيكون لدينا بالضرورة

$$(٧,١١) \quad f_i - \sum_{j=1}^m f_{ij}s_j \leq 0$$

إذاً فالقييد (٧,١١) هو قيد ضروري لكي تكون قيم كل من المتغيرات x_i و s_j أعداداً صحيحة لكافة قيم i و j .

خطوة (2، ب). نضيف متغيراً راکداً y_i للقيد (٧، ١١) ثم نضيف القيد الناتج للجدول رقم (٧، ٥) والذي يمثل الحل الأمثل للمسألة المخففة فيكون لدينا

$$f_i - \sum_{j=1}^m f_{ij} s_j + y_i = 0 \quad (٧، ١٢)$$

كما ذكرنا أعلاه فإن مثل القيد (٧، ١٢) يسمى "مستوق قطع بحت" (Pure Cutting Plane). وكلمة "بحت" مردها إلى أن مسألتنا هي مسألة برمجة خطية عددية بحتة. ولذلك فإنه يطلق أيضاً على هذه الخوارزمية اسم "خوارزمية مستوي القطع البحتة" (Pure Cutting Plane Algorithm).

والقيد المضاف (٧، ١٢) يعني أن الحل الناتج بعد إضافة هذا القيد هو حل غير ممكن، لأنه وبموجب (٧، ١١) فإن $y_i = -f_i \leq 0$. فلا بد إذاً من رد مثل هذه القيمة السالبة، والتي تعتبر غير ممكنة، إلى قيمة ممكنة. ومن الطرق التي توافرت شروطها (شرط الأمثلية محقق في سطر دالة الهدف لكن قيمة أحد المتغيرات الأساسية غير موجبة) والتي يمكننا فيها الوصول إلى ما نريد هي "طريقة السمبلكس الثنوية" التي نوهنا عنها أعلاه.

خطوة (3)

نطبق "طريقة السمبلكس الثنوية" بعد إضافة القيد (٧، ١٢) إلى جدول الحل الأمثل (٧، ٥) ثم نحل المسألة المخففة الناتجة. فإذا كان الحل لهذه المسألة الأخيرة صحيحاً فإننا نتوقف (نذكر بما فعلناه في مثال (٧، ٢))، وإلا فإننا نولد مستوي قطع جديداً ونكرر العمل السابق لحين الوصول إلى حل أمثل قيم جميع متغيراته صحيحة وموجبة. يبقى السؤال الآن

هل من قاعدة لاختيار سطر الأساس والذي يتم من خلاله توليد مستوي قطع مناسب؟.

وبعبارة أخرى: هل من مستوي قطع أقوى أو أفضل من مستوي قطع آخر؟.

للإجابة نعود للقطع (٧,١١) المأخوذ من سطر الأساس x_i فنجد أنه يمكن تعريفه بالشكل المكافئ التالي :

$$(٧,١٣) \quad \sum_{j=1}^m f_{ij} s_j \geq f_i$$

ولو أخذنا سطر الأساس x_k لوجدنا منه مستوى القطع التالي :

$$(٧,١٤) \quad \sum_{j=1}^m f_{kj} s_j \geq f_k$$

ولدينا بهذا الخصوص التعريف التالي :

تعريف (٧,١)

نقول عن القطع (٧,١٣) إنه أفضل أو أقوى من القطع (٧,١٤) إذا كان

$$(أ) \quad f_i \geq f_k \quad (ب) \quad f_{ij} \geq f_{kj} \text{ لجميع قيم } j$$

على أن تتحقق واحدة على الأقل من المتراجحتين في (أ) أو (ب) بشكل حاد (أي من غير مساواة).

ثمة مقاييس أخرى للمفاضلة بين أكثر من مستوى قطع منها

(أ) أن نختار مستوى القطع الذي يملك أكبر قيمة كسرية (أي $Max_i f_i$).

(ب) أن نختار مستوى القطع الذي يملك أكبر قيمة لـ $Max_i f_i / \sum_{j=1}^m f_{ij}$.

(ج) أن نختار مستوى القطع الذي يملك قيمة كسرية قريبة من $1/2$.

وقد أظهرت التجارب فعالية المقياس (II)، ولذا فإننا سنعمده غالباً في حساباتنا

للأمثلة القادمة.

مثال (٧,٣)

أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية باستخدام طريقة مستوى القطع

صغر الدالة:

(٧,١٥)

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

أعداد صحيحة x_1 , x_2

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الحل

إن فضاء الحل والحل الأمثل للمسألة المخففة لهذه المسألة موضحة كما في الشكل رقم (٧,٢). ولحل المسألة المخففة لهذه المسألة لابد لنا من إضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية حيث نحصل على الشكل القياسي التالي:

صغر الدالة:

(٧,١٦)

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, a_1, s_2, a_2 \geq 0$$

وباستخدام طريقة المرحلتين (راجع الفصل الأول) نجد أن جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة معطى كما في الجدول رقم (٧,٦).

الجدول رقم (٧,٦). الحل الأمثل للمسألة المخففة للمسألة (٧,١٥).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	-1	-1	$44/5=8.8$
x_1	1	0	-2/5	1/5	$4/5=0.8$
x_2	0	1	1/5	-3/5	$8/5=1.6$

وكما نلاحظ فإن الحل الأمثل الناتج للمسألة المخففة هو أعداد غير صحيحة ، لذا علينا توليد مستوى قطع. وهنا لدينا ما يلي :

$$\text{سطر } x_1 \text{ هو : } x_1 - \frac{2}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2 = \frac{4}{5} = 0.8 = 0 + 0.8 \quad \text{ومنه نجد أن } f_1 = 0.8$$

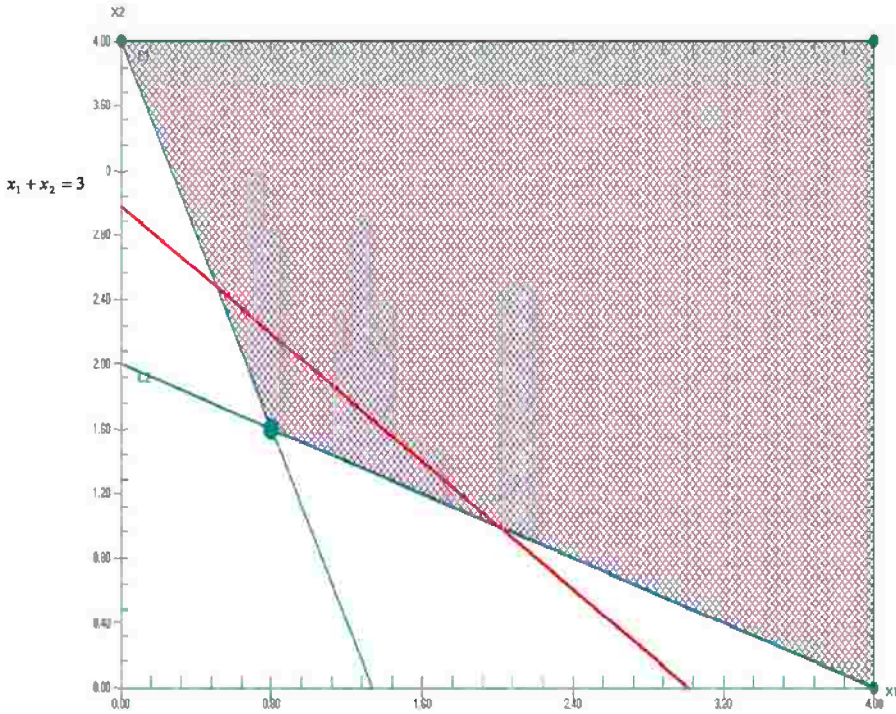
$$f_{11} = 0.6 \quad , \quad a_{12} = 1/5 = 0.2 = 0 + 0.2 \quad , \quad a_{11} = -2/5 = -0.4 = -1 + 0.6$$

$$, \quad f_{12} = 0.2 \quad \text{وبالتالي فإن } f_1 / (f_{11} + f_{12}) = 0.8 / (0.6 + 0.2) = 1$$

$$\text{سطر } x_2 \text{ هو : } x_2 + \frac{1}{5}s_1 - 3s_2 = \frac{8}{5} = 1.6 = 1 + 0.6 \quad \text{ومنه نجد أن } f_2 = 0.6$$

$$, \quad a_{22} = -3/5 = -0.6 = -1 + 0.4 \quad , \quad a_{21} = 1/5 = 0.2 = 0 + 0.2$$

$$, \quad f_{21} = 0.2 \quad \text{وبالتالي فإن } f_2 / (f_{21} + f_{22}) = 0.6 / (0.2 + 0.4) = 1$$



الشكل رقم (٧، ٢).

وبموجب معايير المفاضلة (I)، (II)، (III) أعلاه نجد أن اختيار سطر x_2 كسطر أساس أولى من اختيار سطر x_1 لأنه يتعادل مع x_1 في المعيار (II) ويحقق المعيار (III). وبموجب (٧، ١٢) علينا أن نضيف مستوي القطع التالي إلى الجدول رقم (٧، ٦)

$$(٧، ١٧) \quad \frac{3}{5} - \frac{1}{5}s_1 - \frac{2}{5}s_2 \leq 0$$

وبإضافة المتغير الراكد y_2 نجد

$$f_2 - \sum_{j=1}^m f_{2j}s_j + y_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}s_1 - \frac{2}{5}s_2 + y_2 = 0$$

والذي يكافئ القيد التالي (نفرض أن $y_2 = s_3$)

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5}s_1 - \frac{2}{5}s_2 + s_3 = 0 \quad (٧,١٨)$$

فنحصل بهذه الإضافة على الجدول رقم (٧,٧) وهو يمثل حل غير ممكن لأن فيه $s_3 < 0$. ونظراً لأن شرط الأمثلية لمسألة التصغير هذه متحقق في سطر دالة الهدف فإنه يمكننا تطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,٧) الأخير.

وبحسب النتائج في عمود النسبة نجد أن المتغير الداخل هو s_1 . وبإجراء الحسابات بطريقة السمبلكس نحصل على النتائج الموضحة في الجدول رقم (٧,٨) الذي يمثل الحل الأمثل لأن قيم دالة الهدف وكذلك قيم جميع المتغيرات هي أعداد صحيحة، كما أن شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف مازال محققاً. وكما نلاحظ فقد لزمنا مستوي قطع واحد للوصول إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية (٧,١٥) وهو مستوي القطع (٧,١٧).

الجدول رقم (٧,٧).

المتغيرات	x_1	x_2	داخل s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	-1	-1	0	44/5
x_1	1	0	-2/5	1/5	0	4/5
x_2	0	1	1/5	-3/5	0	8/5
s_3 خارج	0	0	-1/5	-2/5	1	-3/5
النسبة			5	5/2		

الجدول رقم (٧,٨).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	-1	-1	10
x_1	1	0	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	-1	1	1
s_1	0	0	1	2	-5	3

ولإيجاد مستوى القطع هذا بدلالة المتغيرات الأصلية x_1, x_2 فإننا نعوض عن s_1, s_2 من القيود الأصلية في المسألة (٧, ١٧) بعد إسقاط المتغيرات الاصطناعية a_1, a_2 فنجد أن

$$s_2 = x_1 + 2x_2 - 4 \quad s_1 = 3x_1 + x_2 - 4$$

وبالتعويض في العلاقة (٧, ١٧) وإصلاحها نجد مستوى القطع التالي :

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

وقد أظهرنا مستوى القطع أعلاه على شكل خط منقط في الشكل رقم (٧, ٢).

(٧, ٢, ٢) خوارزمية مستوى القطع حل مسائل البرمجة الخطية العددية المختلطة

سبق وأن عرفنا مسألة "البرمجة الخطية العددية المختلطة" بأنها تلك التي تأخذ فيها بعض متغيرات هذه المسألة قيماً صحيحة بينما تأخذ باقي المتغيرات قيماً اختيارية. ولذا فإن ثمة فروق أساسية في خطوات الحصول على الحل الأمثل مقارنة مع الخوارزمية (٧, ٢, ١) السابق. وتتمثل هذه الفروق في أنه لا ضرورة هنا لتحقيق الشرط ١ أعلاه للقيود المتعلقة بالمتغيرات التي لا يشترط لها أن تأخذ قيماً صحيحة. وسنوضح هذه الفروق في خطوات الخوارزمية فيما يلي :

خطوات الخوارزمية

خطوة (١)

نسقط الشرط الخاص بأن بعض المتغيرات تأخذ قيماً صحيحة فقط ونحل "المسألة المخففة الناتجة" كمسألة برمجة خطية. فإذا كان الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" يحقق الشرط المتعلق بطبيعة متغيرات المسألة الأصلية فإن هذا الحل هو حل أمثل للمسألة الأصلية وعندها نتوقف. وإلا انتقلنا إلى الخطوة (٢).

خطوة (2)

نختار أحد المتغيرات ذات القيمة غير الصحيحة من بين المتغيرات التي يشترط في قيمها أن تكون صحيحة ونولد مستوى قطع من قيد هذا المتغير ونضيفه مستوى القطع هذا إلى جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة ثم نحل المسألة الناتجة بطريقة السمبلكس الثنوية، ويكون ذلك على النحو التالي:

لنفرض، كما في السابق، أن المتغير x_i لا يأخذ إلا قيماً صحيحة وأن سطر x_i (كسطر أساس) في جدول الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" هو:

$$(٧, ١٨) \quad x_i = v_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} s_j = v_i = [v_i] + f_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} s_j$$

(حيث v_i هي قيمة غير صحيحة) والذي يكافئ

$$(٧, ١٩) \quad x_i - [v_i] = f_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} s_j$$

وحيث أننا هنا لا نشترط أن تكون قيم كل من المتغيرات s_j أعداداً صحيحة فإننا لن نستطيع استخدام الطريقة التي شرحناها في (٧, ٢, ١) لتوليد مستوى قطع المنشود. وهنا نلاحظ ما يلي.

بما أن x_i لا يأخذ إلا قيماً صحيحة فإن هذا يعني الآتي:

$$(٧, ٢٠) \quad x_i \geq [v_i] + 1 \quad \text{أو أن يكون} \quad x_i \leq [v_i]$$

ومن (٧, ١٩) نجد أن الشرط (٧, ٢٠) يعني أيضاً ما يلي:

إما

$$(٧, ٢١) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} s_j \geq f_i$$

أو

$$(٧, ٢٢) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} s_j \leq f_i - 1$$

ومن الواضح أن (٧, ٢١) و (٧, ٢٢) لا يمكن أن تتحققا بأن واحد (نكرر هنا أننا لم نشترط أن تكون المتغيرات s_j صحيحة كما في السابق).

الآن لنعرف المجموعتين A^+ , A^- كما يلي

A^+ هي مجموعة الأدلة z التي تكون فيها $a_{ij} \geq 0$

A^- هي مجموعة الأدلة z التي تكون فيها $a_{ij} < 0$

عندئذ نجد من (٧, ٢١) و (٧, ٢٢) ما يلي :

إما

$$(٧, ٢٣) \quad \sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j \geq f_i$$

أو

$$(٧, ٢٤) \quad \frac{f_i}{f_i - 1} \cdot \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \geq f_i$$

ولا يمكن للعلاقتين (٧, ٢٣) و (٧, ٢٤) أيضاً أن تتحققا بأن واحد.

وهنا نلاحظ أنه يمكن دمج العلاقتين (٧, ٢٣) و (٧, ٢٤) بالعلاقة التالية :

$$(٧, ٢٥) \quad \sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j + \frac{f_i}{f_i - 1} \cdot \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \geq f_i$$

وبإضافة المتغير الراكذ y_i إلى العلاقة الأخيرة فإننا نحصل على العلاقة التالية :

$$(٧, ٢٥) \quad y_i - \left\{ \sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j + \frac{f_i}{f_i - 1} \cdot \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \right\} = -f_i$$

والعلاقة (٧,٢٥) ب) تمثل ما يطلق عليه اسم مستوى قطع مختلط (Mixed Cutting Plane). ولذلك يطلق أيضاً على هذه الخوارزمية اسم "خوارزمية مستوى القطع المختلطة" (The Mixed Plane Algorithm) .

ونظراً لأننا توصلنا للعلاقة (٧,٢٥) من العلاقة (٧,٢٠) ولما كانت هذه الأخيرة تمثل كما أسلفنا الشرط الضروري لكي يكون x_i صحيحاً، فإن مستوى القطع المختلط (٧,٢٥) ب) يمثل أيضاً مثل هذا الشرط الضروري.

الآن نضيف القيد (٧,٢٥) ب) إلى جدول الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" فيكون الحل الناتج بعد إضافة هذا القيد هو حل غير ممكن. ثم نستخدم طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول الناتج للحصول على حل أمثل جديد "للمسألة المخففة الناتجة"، فإذا كان هذا الحل الأمثل الجديد يحقق المتطلبات الخاصة بطبيعة كل من متغيرات المسألة الأصلية فإنه يمثل أيضاً الحل الأمثل لهذه المسألة الأخيرة وعندها نتوقف ولا ننتقل إلى الخطوة (3).

خطوة (3)

نولد مستوى قطع مختلطاً جديداً ونكرر العمل السابق في الخطوة (2) حين الوصول إلى حل أمثل يحقق المتطلبات الخاصة بطبيعة كل من متغيرات المسألة الأصلية. سنوضح الآن كيفية تطبيق الخوارزمية (٧,٢,٢) من خلال المثال التالي :

مثال (٧, ٤)

كبر الدالة :

(٧,٢٦)

$$Z = 7x_1 + 9x_2$$

وفقاً للقيود :

$$3x_2 - x_1 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

x_1 عدد صحيح

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل

إذا أسقطنا الشرط "أن x_1 عدد صحيح" نتج لدينا المسألة المخففة التالية:
كبر الدالة:

$$(٧,٢٧) \quad Z = 7x_1 + 9x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_2 - x_1 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

إن فضاء الحل للمسألة المخففة (٧,٢٧) معطى كما في الشكل رقم (٧,٣) وبإضافة المتغيرات الراكدة s_1, s_2 للنموذج (٧,٢٧) نحصل على النموذج التالي:
كبر الدالة:

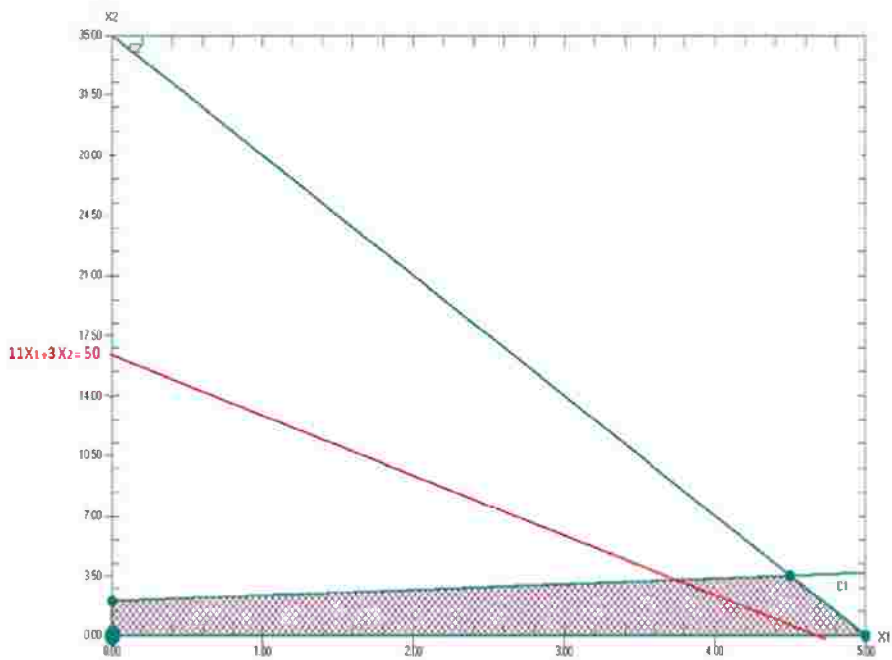
$$(٧,٢٨) \quad Z = 7x_1 + 9x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_2 - x_1 + s_1 = 6$$

$$7x_1 + x_2 + s_2 = 35$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$



الشكل رقم (٣، ٧).

ويحل النموذج الناتج (٧,٢٨) نجد أن جدول الحل الأمثل ممثل بالجدول رقم (٧,٩).
فبما أن x_1 هو المتغير الوحيد الذي تقتصر قيمه على قيم صحيحة فلا بد من استخدام
سطر x_1 كسطر أساس. ومن الجدول رقم (٧,٩) نجد

$$x_1 - \frac{1}{22}s_1 + \frac{3}{22}s_2 = \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

وهنا نلاحظ أن $f_1 = \frac{1}{2}$ وأن معامل s_1 موجب ($=3/22$) ومعامل s_2 سالب ($=-1/22$).

وبموجب (٧,٢٥ ب) نجد مستوي القطع المختلط التالي:

$$\frac{3}{22}s_2 + \frac{1/2}{1/2-1}(-\frac{1}{22})s_1 \geq \frac{1}{2} \quad (٧,٢٩ أ)$$

الجدول رقم (٧,٩). الحل الأمثل للمسألة المخففة (٧,٢٨).

المقدرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	28/11	15/11	63
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2

وبإضافة المتغير الراكد y_1 نحصل على مستوي القطع المختلط التالي:

$$y_1 - \left\{ \frac{3}{22}s_2 + \frac{1/2}{1/2-1}(-\frac{1}{22})s_1 \right\} = -\frac{1}{2}$$

والذي يكافئ (نفرض أن $s_3 = y_1$)

$$s_3 - \frac{1}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2 = -\frac{1}{2} \quad (٧,٢٩ ب)$$

وبإضافة (٧,٢٩ ب) إلى جدول الحل الأمثل (٧,٩) فإننا نحصل على الجدول رقم
(٧,١٠) التالي.

الجدول رقم (٧,١٠).

الحل	s_3	s_2 داخل	s_1	x_2	x_1	المتغيرات
63	0	15/11	28/11	0	0	Z
9/2	0	3/22	-1/22	0	1	x_1
7/2	0	1/22	7/22	1	0	x_2
-1/2	1	-3/22	-1/22	0	0	s_3 خارج
		-5/2	-14			النسبة

الآن نقوم بتطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,١٠)، فنجد من نتائج سطر النسبة أن s_2 هو المتغير الداخل وأن s_3 هو المتغير الخارج. وبإجراء الحسابات على الجدول رقم (٧,١٠) حسب طريقة السمبلكس (العادية) نجد الجدول رقم (٧,١١) التالي.

الجدول رقم (٧,١١).

الحل	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1	المتغيرات
58	10	0	23/11	0	0	Z
4	1	0	-1/11	0	1	x_1
10/3	-1/3	0	10/33	1	0	x_2
11/3	-22/3	1	1/3	0	0	s_2

والجدول رقم (٧,١١) يمثل الحل الأمثل المنشود لأن شرط الأمثلية (كمسألة تكبير) محقق في سطر دالة الهدف، والمتطلبات المتعلقة بطبيعة متغيرات المسألة الأصلية (٧,٢٧) وهي x_1 عدد صحيح غير سالب ($x_1 = 4$) و $x_2 \geq 0$ ($x_2 = 10/3$) محققة لهذا الحل.

سنوجد الآن مستوى القطع المختلط (٧,٢٩) بدلالة المتغيرات الأصلية x_1 ، x_2 . فمن علاقات المساواة في النموذج (٧,٢٨) نجد أن

$$s_1 = 6 - \{3x_2 - x_1\} \quad , \quad s_2 = 35 - \{7x_1 + x_2\}$$

وبالتعويض في (٧,٢٩) نجد مستوى القطع المختلط التالي :

$$11x_1 + 3x_2 \leq 50$$

وقد أظهرنا هذا القطع على شكل خط منقط في الشكل رقم (٧,٣).

ملاحظة (٧,٢)

(أ) تجدر الإشارة هنا إلى إن عدم اشتراطنا على المتغيرات s_j أن تكون ذات قيم عددية صحيحة، كما ورد أعلاه في الخوارزمية (٧,٢,٢)، يساعد في التوصل إلى مستوى قطع مختلط أقوى من القطع ذلك المعرف بالعلاقة (٧,٢٩ب)، وهذا القطع هو

$$y_i = -f_i + \sum_{j=1}^n \mu_j s_j \quad (٧,٣٠)$$

حيث

$$a_{ij} = \mu_j \quad \text{إذا كان } s_j \text{ عدد غير صحيح وكان } a_{ij} \geq 0$$

$$a_{ij} = \mu_j \frac{f_i}{f_i - 1} \quad \text{إذا كان } s_j \text{ عدد غير صحيح وكان } a_{ij} < 0$$

$$f_{ij} = \mu_j \quad \text{إذا كان } s_j \text{ عدد صحيح وكان } f_{ij} \leq f_i$$

$$f_{ij} = \mu_j (1 - \frac{f_i}{f_i - 1}) \quad \text{إذا كان } s_j \text{ عدد صحيح وكان } f_{ij} > f_i$$

(ب). قدمنا أعلاه نوعين مما أسميناه "مستوي القطع" أحدهما في الخوارزمية (٧,٢,١) والآخر في الخوارزمية (٧,٢,٢). ويوجد، في الحقيقة، أنواع أخرى من مستويات القطع كل له ميزاته وعيوبه الخاصة به. ولا يوجد نوع محدد من مستويات القطع يفوقها جميعاً ويمكن تطبيقه لكافة البرامج الخطية العددية، بل إننا قد نجد أحياناً

أن لمسألة برمجة خطية عددية خاصة مستوى قطع أنسب لحلها (ونعني به أسرع حسابيا) من مستوى قطع آخر.

(ج). كما نلاحظ فإن طرق مستويات القطع التي قدمناها في هذا الفصل لا تصلح إلا لحل مسائل البرمجة الخطية العددية (البحثة والمختلطة) أو تلك التي يمكن أن تؤول إلى هذا النوع من المسائل. ولذا فإنه ينظر إلى طرق مستويات القطع على أنها، وبشكل عام، غير فعالة لحل أي مسألة برمجة خطية عددية.

(٧, ٣) تمارين (٧)

١- لدينا المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 14x_1 + 18x_2$$

وفقا للقيود :

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 وأعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧, ١٢).

الجدول رقم (٧، ١٢).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	56/11	30/11	126
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوي القطع.

٢- لدينا المسألة التالية :

صغر الدالة :

$$Z = 6x_1 + 8x_2$$

وفقا للقيود :

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

 x_1, x_2 وأعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧، ١٣).

الجدول رقم (٧، ١٣).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	-4/5	-18/5	88/5
x_1	1	0	-2/5	1/5	4/5
x_2	0	1	1/5	-3/5	8/5

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوى القطع.

٣- لديك المسألة التالية :

صغر الدالة :

$$Z = 3x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$2x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 عدد صحيح

المطلوب

(أ) إيجاد الحل الأمثل بطريقة مستوى القطع المختلطة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفرع والحد.

(ت) قارن بين نتائجك في (أ) و(ب).

٤- لديك المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

وفقا للقيود:

$$4x_1 - 4x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

 x_1 عدد صحيح

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧، ١٤).

الجدول رقم (٧، ١٤).

المتغيرات	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	2	2	2	30
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	5/4
x_3	0	1	1	1/4	0	1	25/4

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوي القطع المختلطة.

٥- تمتلك شركة أربع فروع في أربع مدن لإنتاج نوع من مكيفات الهواء تقوم بتوزيعها على أربع من المناطق الرئيسة في القطر. ولكل من عمليات الإنتاج في كل من الفروع الأربعة تكلفتها الخاصة (تكلفة ثابتة)، كما أن تكلفة إنتاج كل مكيف هواء والتي تتضمن تكلفة شحنه يعتمد على المدينة التي ينتج فيها والمنطقة التي يتم شحنه إليها. جميع بيانات التكاليف (\$) موضحة في الجدول رقم (٧، ١٥). ثمة بيانات أخرى

- هي أن كل من الفروع الأربعة يمكنها أن تنتج لغاية 1500 مكيف هواء بالسنة و50000 على الأقل من طلب المنطقة 3 يجب أن يأتي من المدينة 1 أو من المدينة 2. ترغب الشركة بجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن ، والمطلوب
- (أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.
- (ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة.
- (ج) إيجاد الحل الأمثل للمسألة بطريقة مستوى القطع.
- (د) إيجاد جميع القطوع المستوية بدلالة المتغيرات الأصلية للمسألة.
- (هـ) إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفرع والحد.
- (و) مقارنة النتائج التي توصلت إليها في (ج) و(د).

الجدول رقم (٧, ١٥).

التكلفة الثابتة مليون \$	المناطق				المدن
	المنطقة 4	المنطقة 3	المنطقة 2	المنطقة 1	
6.2	215	262	270	290	1
6	290	230	225	206	3
5.8	260	208	221	230	2
5.5	270	221	206	225	4
	90000	110000	150000	100000	الطلب

٦- معمل فيه خمس مكائن تقوم بإنجاز خمس أعمال. يعتمد وقت إنجاز عمل ما على الماكينة التي ستنجزه ، كما أن لكل ماكينة وقت لتجهيزها للإنتاج. جميع بيانات الأزمنة بالدقائق معطاة في الجدول رقم (٧, ١٦). (وجود الفراغ في الجدول مقابل ماكينة وعمل يعني أن الماكينة لا يمكن أن تنجز العمل المقابل). ترغب إدارة المعمل بعمل جدولة تنفيذ للأعمال الخمسة على المكائن الخمسة بحيث يكون زمن التنفيذ الكلي أقل ما يمكن ،

الجدول رقم (٧, ١٦).

زمن التجهيز	رقم العمل					المكائن
	5	4	3	2	1	
30			93	70	42	ماكينة ١
40			45	85		ماكينة ٢
50		37			58	ماكينة ٣
60	38		55		58	ماكينة ٤
20		54		60		ماكينة ٥

والمطلوب.

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة.

(ج) إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية بأكثر من طريقة.

(د) بيان أي الطرق التي استخدمتها في (ج) هي الأسهل في الوصول إلى الحل

الأمثل للمسألة الأصلية.

٧- لديك المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + 5x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$

$$6x_1 - 5x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_1, x_2, x_3 أعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧, ١٧).

الجدول رقم (٧, ١٧).

المتغيرات	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	17/12	1/12	5/12	57/4
x_3	0	0	1	11/60	-1/12	-1/60	7/4
x_2	0	1	0	1/10	1/2	-1/10	3/2
x_1	1	0	0	1/12	5/12	1/12	5/4

المطلوب إيجاد ما يلي :

(أ) الحل الأمثل للمسألة بطريقة يعني مستوى القطع البحتة.

(ب) إذا كان x_1 هو المتغير الوحيد الذي يأخذ قيمة صحيحة فما هو الحل الأمثل للمسألة عندئذ؟.

٨- أعد حل المثال (٤, ١٠) باستخدام طريقة مستوى القطع.

٩- أعد حل المثال (٢, ١) من الفصل الثاني باستخدام مستوى القطع.

١٠- أعد حل المثال (٢, ٢) من الفصل الثاني باستخدام طريقة القطع المستوي البحتة.

١١- أعد حل المثال (٢, ٦) من الفصل الثاني باستخدام طريقة القطع المستوي.

١٢- أعد حل المثال (٥, ٢) من الفصل الخامس باستخدام طريقة مستوى

القطع. قارن طريقة مستوى القطع التي استخدمتها وطريقة التفرع والحد التي سبق لنا استخدامها في حل المثال (٥, ٢) من حيث حجم الحسابات.

المراجع

أولاً: المراجع العربية

- [١] البلخي، زيد تميم. مقدمة في بحوث العمليات - الطبعة الثانية. النشر العلمي والمطابع، الرياض: جامعة الملك سعود ٢٠٠٧م.
- [٢] الألوسي، عبد الستار أحمد. أساليب بحوث العمليات: الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار، دار القلم للنشر والتوزيع، دبي ٢٠٠٣م.

ثانياً: المراجع الأجنبية

أ) الكتب

- [3] Duan, L. and Xiaoling, S. *Nonlinear Integer Programming*, Springer , Berlin , 2006.
- [4] Garfinkel, R.S. and Nemhauser, G.L., *Integer Programming*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1972.
- [5] Greenberg, H., *Integer Programming*. New York, NY: Academic Press, 1971.
- [6] Harmer, P.L., Johnson, E.L., Kort, B.H. , And Nemhauser, G.L. (Editors) . *Studies In Integer Programming* .Amsterdam , North -Holland Publishing Company , 1977.
- [7] Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. *Introduction to Operations Research* . Holden-Day ,1980.
- [8] John K. Karlof . *Integer Programming: Theory and Practice* ,Taylor & Francis Group, LLC ,2006
- [9] Jünger M., and Thomas M. *Liebling 50 Years of Integer Programming 1958-2008:Springer Verlag Berlin* ,2010

- [10] Kaufmann , A. Labordere, A.H. *Integer and Mixed Programming , Theory and Applications* . Academic Press, New York , 1977.
- [11] Lawler, L. ET AL., *The Traveling Salesman Problem*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1985.
- [12] Lawrence, J.R. , and Pasternack , B.A. *Applied Management Science* , John Wiley & Sons, New York 1998.
- [13] Li D. and Sun X. *Nonlinear Integer Programming* (International Series in Operations Research & Management Science) 2006.
- [14] Luenberger D.G., and Ye Y. . *Linear and Nonlinear Programming* (International Series in Operations Research & Management Science) Springer, 2008
- [15] Nauss, R.M. *Parametric Integer Programming* . University of Missouri Press , Columbia & London , 1979 .
- [16] Nesa, W. and Coppins, R. *Linear Programming and Extensions*. McGraw-Hill Book Company , New York , 1981.
- [17] Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A., *Integer and Combinatorial Optimization*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1999.
- [18] Parker, R. and Rardin, R., *Discrete Optimization*. Orlando, Fla.: Academic Press, 1988.
- [19] Plane, D. and McMillan, C.,. *Discrete Optimization: Integer Programming and Network Analysis for Management Decision*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [20] Pochet , Y. , and Wolsey, L.A. *Production Planning by Mixed Integer Programming* . Springer , New York , 2006
- [21] Salkin, H.M., *Integer Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1975.
- [22] Salkin, H.M. and Mathur, K., *Foundations of Integer Programming*. New York, NY: North-Holland, 1989.
- [23] Schrijver, A. *Theory of Linear and Integer Programming* . John Wiley A sons , Amsterdam , 2000.
- [24] Taha, H.A., *Integer Programming: Theory, Applications, and Computations*. New York, NY: Academic Press, 1975.
- [25] Taha, H.A., *Operations Research , An Introduction* . Macmillan Publishing Company, New York, 1987.
- [26] Williams H.P P. *Model Building in Mathematical Programming*, , John Wiley A sons , New York , 1999.
- [27] Winston, W.L. *Operations Research , Applications and Algorithms* . Duxbury Press , Belmont , California, 1994.
- [28] Wolsey, L.A *Integer Programming* , John Wiley A sons , New York, 1998.

(ب) مجلات العلمية

- [29] *European Journal of Operational Research*
- [30] *Journal of the Operational Research Society*

(ج) مواقع إلكترونية

- [31] <http://tomopt.com/tomlab/optimization/mip.php>
- [32] http://www.insightful.com/products/nuopt/SNUOPT_technical_note_MIP.pdf
- [33] <http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/integer/integer.html>.

نبذة عن المصفوفات والمحددات والمجموعات المحدبة

أولاً: المصفوفات

Matrices

لنفرض أن a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$ ، $j=1,2,\dots,n$) هي أعداد حقيقية فإذا وضعنا هذه الأعداد بترتيب معين كما في الشكل التالي G :

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن G يسمى مصفوفة من الدرجة $m \times n$ (عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n).
وعادة ما نختصر كتابة G على الشكل $G=[a_{ij}]$ ونسمي الأعداد a_{ij} عناصر المصفوفة. وفي الحالة الخاصة $n=m$ فإننا نسميها مصفوفة مربعة من الدرجة n . وعندما $m=1$ فإنها تسمى مصفوفة سطر أما عندما $n=1$ فتسمى مصفوفة عمود. كذلك نسمي العناصر a_{ij} التي يكون فيها $i=j$ بقطر المصفوفة، ونسمي المصفوفة المربعة التي تكون جميع عناصر القطر فيها مساوية 1 وبقية عناصرها أصفارا باسم "مصفوفة الوحدة كما

نسمي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا باسم المصفوفة الصفرية. فمثلا المصفوفات G_1 ، G_2 ، G_3 ، G_4 التالية هي مصفوفة 5×4 ومصفوفة عمود 4×1 ومصفوفة وحدة 3×3 ومصفوفة سطر 1×4 على الترتيب.

$$G_4 = [4 \quad 8 \quad 7 \quad 2], G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

العمليات الأساسية على المصفوفات

إذا كان لدينا مصفوفتان $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ من درجة واحدة فإن مجموعهما (فرقهما) هو المصفوفة C التي عناصرها c_{ij} معرفة بالعلاقة التالية :

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

(+ للمجموع و- للفرق). ويعرف حاصل ضرب مصفوفة ما $A=[a_{ij}]$ بعدد r والذي نرمز له بالرمز rA بأنه المصفوفة الناتجة من ضرب كل عنصر من A بالعدد r أي $rA=[ra_{ij}]$. ومن الواضح أن $A+B=B+A$ أي أن جمع المصفوفات تبديلي.

ولتعريف حاصل ضرب مصفوفتين $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ نشترط أن A من الدرجة $m \times n$ وأن B من الدرجة $n \times p$ عندئذ حاصل ضربيهما والذي نرمز له بالرمز AB هو المصفوفة التي عناصرها m_{ij} معطاة بالعلاقة التالية :

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

وبوجه عام فإن $AB \neq BA$. أي أن ضرب المصفوفات ليس تبديلياً.

فمثلا لو أخذنا المصفوفات G_2 و G_4 أعلاه فإن $G_2 G_4$ هي مصفوفة 1×1 تحسب كما يلي $157 = 2 \times 8 + 7 \times 11 + 8 \times 7 + 4 \times 2$. كذلك يمكننا التحقق أنه لو كانت I هي مصفوفة الوحدة من الدرجة n وكانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فإن $AI = A$. ولو كانت A مربعة ومن الدرجة n لكان $AI = IA = A$. وكمثال على جمع المصفوفات نأخذ المصفوفة G_1 أعلاه والمصفوفة التالية :

$$G_1 + G_5 = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 10 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 15 & 12 & 18 \\ 8 & 14 & 4 & 20 \\ 4 & 22 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{عندئذ} \quad G_5 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 10 \\ 2 & 16 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ثانياً: المحددات

Determinants

إن مفهوم المحددات وقيمتها من أهم الأمور المتعلقة بالمصفوفات لكننا لا نعرف المحددات إلا للمصفوفات المربعة. فإذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن محدد A (determinant) والذي سنرمز له بـ $\det(A)$ يعطى كما يلي :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويقال عن محدد A إنه من المرتبة n . وللمحددات قيمتها الخاصة بها وتتم حساب هذه القيمة استناداً إلى المحددات ذات المرتبة الثانية حيث تحسب قيمها كما يلي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

وتتم حساب المحددات من مراتب أعلى من 2 إما حسب أحد أسطرها (أو حسب أحد أعمدتها) وذلك بإعطاء عناصر ذلك السطر (العمود) إشارات مختلفة ومتعاقبة ابتداء من الإشارة + وضرب النواتج بالمحددات المقابلة الناتجة . ويقصد بالمحدد المقابل لعنصر بأنه ذلك المحدد الجزئي الناتج من حذف السطر والعمود اللذان يتقاطعان في ذلك العنصر من المحدد الذي نرغب بحسابه. وللتوضيح فإن

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2(6-63) - 8(5-56) + 4(54-48) = 27$$

ويتم حساب المحددات من مراتب أعلى بنفس الطريقة. ومن الواضح أنه إذا كانت جميع عناصر سطر (أو عمود) في محدد ما أصفارا فإن قيمة هذا المحدد تساوي الصفر فإذا كان مثل هذا السطر أو العمود غير موجود في محدد فيمكننا تسهيل حساب قيمته من خلال اختيار السطر أو العمود الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار . فمثلا من المحدد التالي نلاحظ أن السطر الثاني هو الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار الأمر الذي يسهل علينا حساب قيمته عن طريق هذا السطر حيث نجد

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 3[2(7) - 1(-25)] - 1[-7(-28) + 2(-2)] = -75$$

ثالثاً: تعريف المجموعات المحدبة

Convex sets

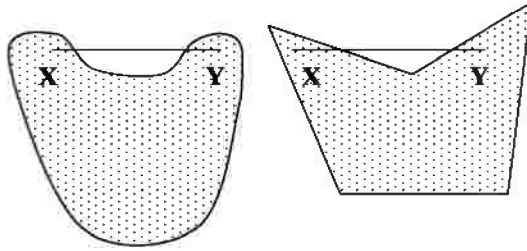
نقول عن مجموعة S جزئية غير خالية من الفضاء $\mathbb{R}^n$ إنها مجموعة محدبة (Convex Set) إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين X , Y منها تقع بكاملها داخل هذه المجموعة.

ويعطي الشكل رقم (١، أ) أمثلة على مجموعات غير محدبة في حين يمثل الشكل رقم (٢، أ) أمثلة على مجموعات محدبة.

وتعرف المجموعة المحدبة رياضياً كما يلي. نقول عن مجموعة غير خالية S إنها محدبة إذا تحقق الشرط التالي لأي عنصرين X, Y من S ولأي $0 \leq \lambda \leq 1$ فإن $S \ni \lambda X + (1 - \lambda)Y$ ويمكننا، باستخدام العلاقة الأخيرة، إثبات النظرية التالية بسهولة

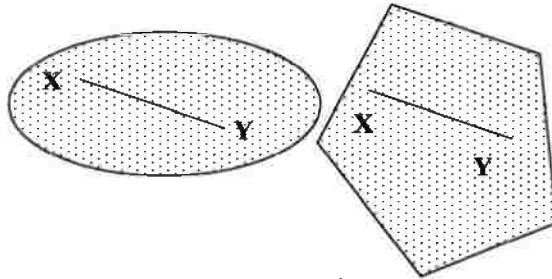
نظرية (١، م)

تقاطع أي عدد منته من المجموعات المحدبة (إذا لم يكن خالياً) هو أيضاً مجموعة محدبة. كما يمكننا إثبات أن حل أي متباينة خطية هو مجموعة محدبة. وبموجب النظرية الأخيرة يكون فضاء الحل لأي برنامج خطي هو مجموعة محدبة، لأن هذا الفضاء ليس إلا تقاطع مجموعات هي حلول لمتباينات خطية.



(ب) مجموعات غير محدبة

الشكل رقم (١، أ).



(أ) مجموعات محدبة

الشكل رقم (٢، أ).

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي - إنجليزي

أ

Procedure	إجراء
Probability	احتمال
Probabilistic	احتمالي
Statistics	إحصاء
Performance	أداء
Low	أدنى
Lower	الأدنى
Basic	أساسي
Strategy (Strategies)	إستراتيجية (إستراتيجيات)
Optimal Strategy (Strategies)	الإستراتيجية (الإستراتيجيات) المثلى
Upper	أعلى

Economic	اقتصادي
Shortest path	أقصر مسار
Optimal	أمثل
Optimization	أمثلية
Sub-optimization	أمثلية جزئية
Facility	إمكانية (مكان للخدمة)
Production	إنتاج
Waiting	انتظار
Elementary	أولي



Prominent	بارز
Operation research	بحوث عمليات
Alternative(s)	بديل (بدائل)
Programming	برمجة
Linear programming	برمجة خطية
Integer Linear Programming	برمجة خطية عددية
Mathematical programming	برمجة رياضية
Integer programming	برمجة عددية
(0-1) Integer Programming	برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم
Mixed integer Programming	برمجة عددية مختلطة
Model building	بناء

Data

بيانات



Variance

تباين

Partition

تجزئة

Sensitivity analysis

تحليل الحساسية

Data analysis

تحليل بيانات

Assignment

تخصيص

Scale

تدرج أو مقياس

Network flow

تدفق شبكي

Design

تصميم

System design

تصميم نظام

Problem classification

تصنيف المشكلة

Cooperative

تعاوني

Economic interpretation

تفسير اقتصادي

Direct costs

تكاليف مباشرة

Deterioration

تلف

Forecasting

تنبؤ

Implementation

تنفيذ

Distribution

توزيع

Normal distribution

توزيع طبيعي

Uniform distribution

توزيع منتظم



Table

جدول



Computer

حاسب

Steady-state

حالة استقرار

Size

حجم

Lower bound

حد أدنى

Upper bound

حد أعلى

Critical

خرج

Sensitivity

حساسية

Chance

حظ

Solution

حل (حلول)

Initial solution

حل ابتدائي

Basic solution

حل أساسي

Model solution

حل النموذج

Optimal solution

حل أمثل

Suboptimal solution

حل أمثل جزئي

Multiple optimal solution

حل أمثل مضاعف

Unique optimal solution

حل أمثل وحيد

Non-optimal solution

حل غير أمثل

Infeasible solution

حل غير ممكن

Feasible solution

حل ممكن

ف

Property

خاصية

Pure

خالص أو بحت أو صرف

Service

خدمة

Discount

خصم

Quantity discount

الخصم على الكمية

Linear

خطي

Algorithm

خوارزمية

Iterative algorithm

خوارزمية تكرارية

د

Function

دالة

Objective function

دالة الهدف

Convex function

دالة محدبة

Concave function

دالة مقعرة

Degree

درجة

Cycle

دورة

Periodic

دورية

Dynamic

ديناميكيا (حركي)

ذ

Artificial intelligence

ذكاء صناعي

ر

Profit

ربح

Graph

رسم

Symbol

رمز (رموز)

ز

Time

زمن أو وقت

س

Static

ساكن

Pivot row

سطر محوري

Simplex

السمبلكس

ش

Network

شبكة

Tree

شجرة

Personal

شخصي

Condition شرط (شروط)

ص

Row(s) صف (صفوف)

Characteristic صفة أو ميزة

Validation صلاحية

Formulation صياغة

Problem formulation صياغة المشكلة

Form صيغة

ض

Implicit ضمني

ط

Nature طبيعة (قدر)

Method طريقة

Total enumeration method طريقة التعداد الشامل

Implicit enumeration method طريقة التعداد الضمني

Simplex Method طريقة السمبلكس

Dual Simplex Method طريقة السمبلكس الثنوية

Graphical method طريقة بيانية

ح

Payoff(s)	عائد (عوائد)
Discount factor	عامل الخصم
Shortage	عجز
Integer	عدد صحيح
Digital	عددي
Random	عشوائي
Stochastic	عشوائي
Node	عقدة
Chance Node	عقدة حظ
Process	عملية
Pivot column	عمود محوري
Element	عنصر
Pivot element	عنصر محوري

غ

Infinite	غير منته
----------	----------

ف

Space	فضاء
Solution space	فضاء الحل

Effectiveness

فعالية

System effectiveness

فعالية نظام

ق

Controllable

قابل للضبط

Cut

قطع

Cutting plane

قطع مستوي

Pure cutting plane

قطع مستوي صرف

Mixed cutting plane

قطع مستوي مختلط

Constraint(s)

قيود (قيود)

Upper Value

القيمة العليا

Expected Value

قيمة متوقعة

ك

Complete

كامل

Perfect

كامل

Total

كلي

Quantity

كمية

ل

Game(s)

لعبة (ألعاب)

Direct	مباشر
Principle	مبدأ
Continuous	متصل
Identical	متطابق
Variable	متغير
Basic Variable	متغير أساسي
Controllable variable	متغير قابل للضبط
Decision variable	متغير قرار
Symmetric	متناظر
Mean	متوسط
Expected	متوقع
Convex set	مجموعة محدبة
Simulation	محاكاة
Deterministic	محدد
Mixed	مختلط
Stock	مخزون
Diagram	مخطط
Inputs	مدخلات
Dependent	مرتبط
Stage(s)	مرحلة (مراحل)
Path	مسار

Primal problem	مسألة أولية
Dual problem	مسألة ثنوية
Stationary	مستقر
Independent	مستقل
Level	مستوى
Joint	مشترك
Project	مشروع
Matrix	مصفوفة
Payoff matrix	مصفوفة العوائد
Strict	مطلق أو حاد أو كامل
Rate	معدل
Parameter	معلمة
Information	معلومات
Imperfect Information	معلومات غير كاملة
Perfect Information	معلومات كاملة
Criterion	معييار
Admissible	مقبول
Performance measure	مقياس الأداء
Appropriate	ملائم
Feasible	ممكّن
Competition	منافسة
Uniform	منتظم
Finite	منته

Discrete	منفصل
Utility	منفعة
Transpose of a Matrix	منقول مصفوفة
Facility Location	موقع الخدمة
Slope	ميل

ن

Activity	نشاط
Depletion	نضوب
System	نظام
Theorem	نظرية
Point	نقطة
Saddle Point	نقطة سرجية (أو نقطة توازن)
Models of integer programming	نماذج البرمجة العددية
Modelling	نمذجة
Model	نموذج
Optimal model	نموذج أمثل
Dual Model	نموذج ثنائي
Mathematical model	نموذج رياضي

هـ

Objective	هدف
-----------	-----

Structure

هيكل

System structure

هيكل النظام

و

Unique

وحيد

Weight

وزن

ي

Dominate

يهيمن

ثانياً: إنجليزي - عربي

A

Activity	نشاط
Admissible	مقبول
Algorithm	خوارزمية
Alternative(s)	بديل (بدائل)
Appropriate	ملائم
Artificial intelligence	ذكاء صناعي
Assignment	تخصيص

B

Basic	أساسي
Basic solution	حل أساسي
Basic Variable	متغير أساسي

C

Chance	حظ
Chance Node	عقدة حظ
Characteristic	صفة أو ميزة

Competition	منافسة
Complete	كامل
Computer	حاسب
Concave function	دالة مقعرة
Condition	شرط (شروط)
Constraint(s)	قيود (قيود)
Continuous	متصل
Controllable	قابل للضبط
Controllable variable	متغير قابل للضبط
Convex function	دالة محدبة
Convex set	مجموعة محدبة
Cooperative	تعاوني
Criterion	معيار
Critical	حرج
Cut	قطع
Cutting plane	قطع مستوي
Cycle	دورة

D

Data	بيانات
Data analysis	تحليل بيانات
Decision variable	متغير قرار

Degree	درجة
Dependent	مرتبط
Depletion	نضوب
Design	تصميم
Deterioration	تلف
Deterministic	محدد
Diagram	مخطط
Digital	عددي
Direct	مباشر
Direct costs	تكاليف مباشرة
Discount	خصم
Discount factor	عامل الخصم
Discrete	منفصل
Distribution	توزيع
Dominate	يهيمن
Dual problem	مسألة ثنوية
Dual Model	نموذج ثنوي
Dual Simplex Method	طريقة السمبلكس الثنوية
Dynamic	ديناميكيا (حركي)

Economic interpretation	تفسير اقتصادي
Effectiveness	فعالية
Element	عنصر
Elementary	أولي
Expected	متوقع
Expected Value	قيمة متوقعة

F

Facility	إمكانية (مكان للخدمة)
Facility Location	موقع الخدمة
Feasible	ممکن
Feasible solution	حل ممكن
Finite	منته
Forecasting	تنبؤ
Form	صيغة
Formulation	صياغة
Function	دالة

G

Game(s)	لعبة(ألعاب)
Graph	رسم

Graphical method

طريقة بيانية

I

Integer Linear Programming

برمجة خطية عددية

Integer programming

برمجة عددية

Integer Programming

برمجة عددية ثنائية ذات متغيرات ثنائية القيم

Implementation

تنفيذ

Initial solution

حل ابتدائي

Infeasible solution

حل غير ممكن

Iterative algorithm

خوارزمية تكرارية

Implicit

ضمني

Implicit enumeration method

طريقة التعداد الضمني

Integer

عدد صحيح

Infinite

غير منته

Identical

متطابق

Inputs

مدخلات

Independent

مستقل

Information

معلومات

J

Joint

مشترك

L

Level	مستوى
Linear	خطي
Linear programming	برمجة خطية
Low	أدنى
Lower	الأدنى
Lower bound	حد أدنى

M

Mathematical model	نموذج رياضي
Mathematical programming	برمجة رياضية
Matrix	مصفوفة
Mean	متوسط
Method	طريقة
Mixed	مختلط
Mixed integer Programming	برمجة عددية مختلطة
Mixed cutting plane	قطع مستوي مختلط
Model	نموذج
Models of integer programming	نماذج البرمجة العددية
Model building	بناء
Model solution	حل النموذج

Modelling

نمذجة

Multiple optimal solution

حل أمثل مضاعف

N

Nature

طبيعة (قدر)

Network

شبكة

Network flow

تدفق شبكي

Node

عقدة

Non-optimal solution

حل غير أمثل

Normal distribution

توزيع طبيعي

O

Objective

هدف

Objective function

دالة الهدف

Operation research

بحوث عمليات

Optimal

أمثل

Optimal model

نموذج أمثل

Optimal solution

حل أمثل

Optimal Strategy (Strategies)

الإستراتيجية (الإستراتيجيات) المثلى

Optimization

أمثلية

Parameter	معلمة
Partition	تجزئة
Payoff(s)	عائد (عوائد)
Path	مسار
Payoff matrix	مصفوفة العوائد
Perfect	كامل
Perfect Information	معلومات كاملة
Imperfect Information	معلومات غير كاملة
Performance	أداء
Performance measure	مقياس الأداء
Periodic	دورية
Personal	شخصي
Pivot row	سطر محوري
Pivot column	عمود محوري
Pivot element	عنصر محوري
Point	نقطة
Primal problem	مسألة أولية
Principle	مبدأ
Probabilistic	احتمالي

Probability	احتمال
Problem classification	تصنيف المشكلة
Problem formulation	صياغة المشكلة
Procedure	إجراء
Process	عملية
Production	إنتاج
Profit	ربح
Programming	برمجة
Project	مشروع
Prominent	بارز
Property	خاصية
Pure	خالص أو بحت أو صرف
Pure cutting plane	قطع مستوي صرف

Q

Quantity	كمية
Quantity discount	الخصم على الكمية

R

Random	عشوائي
Rate	معدل
Row(s)	صف (صفوف)

S

Saddle Point	نقطة سرجية (أو نقطة توازن)
Scale	تدرج أو مقياس
Sensitivity	حساسية
Sensitivity analysis	تحليل الحساسية
Service	خدمة
Shortage	عجز
Shortest path	أقصر مسار
Simplex	السمبلكس
Simplex Method	طريقة السمبلكس
Simulation	محاكاة
Size	حجم
Slope	ميل
Solution	حل (حلول)
Solution space	فضاء الحل
Space	فضاء
Stage(s)	مرحلة (مراحل)
Static	ساكن
Stationary	مستقر
Statistics	إحصاء
Steady-state	حالة استقرار

Stochastic	عشوائي
Stock	مخزون
Strict	مطلق أو حاد أو كامل
Structure	هيكل
Strategy (Strategies)	إستراتيجية (إستراتيجيات)
Suboptimal solution	حل أمثل جزئي
Sub-optimization	أمثلية جزئية
Symbol	رمز (رموز)
Symmetric	متناظر
System	نظام
System design	تصميم نظام
System effectiveness	فعالية نظام
System structure	هيكل النظام

T

Table	جدول
Theorem	نظرية
Time	زمن أو وقت
Total	كلي
Total enumeration method	طريقة التعداد الشامل
Transpose of a Matrix	منقول مصفوفة
Tree	شجرة

U

Uniform	منتظم
Uniform distribution	توزيع منتظم
Unique	وحيد
Unique optimal solution	حل أمثل وحيد
Upper	أعلى
Upper bound	حد أعلى
Upper Value	القيمة العليا
Utility	منفعة

V

Validation	صلاحية
Variable	متغير
Variance	تباين

W

Waiting	انتظار
Weight	وزن

كشاف الموضوعات

التعبير عن المتغيرات أو الدوال المنفصلة

باستخدام المتغيرات المتممة ١١٩

الصيغة المعتمدة في حل مسائل البرمجة

العديدية ذات المتغيرات الثنائية القيم ٢٧٥

الخوارزمية الجمعية ٢٨٠ ، ٢٨٩ ،

٢٩١ ، ٣٠١

استخدام المتغيرات المتممة ١١٩ ، ١٢٠ ،

٢٧٦

المسألة الموجهة لأقل شجرة متفرعة ١٨٦

ألية إسقاط الحلول غير الواعدة ٢٧٩

أ

الحد الأعلى الحالي ٢٣٥ ، ٢٤٥

أساسي ٥

أقصر مسار ٢٠١

اقتصادي ٢٤٢

أمثل ١٠ ، ١١ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ٢٥

استخدام المتغيرات الثنائية القيم ٧٦ ،

١٠٨

في القيود المنطقية ١٠٨

في القيود ذات الشروط ١٠٨

في القيود الإقتضائية ١٠٩ ، ١١٠

في القيود البديلة ١١٠ ، ١١١

في القيود المقتضية لقيود أخرى ١١٢

ب

بحوث عمليات ٣ ، ٦

برمجة ابيانية ١ ، ٦١

- برمجة خطية ٣، ٥، ٦، ٨٣، ٢٢١
 برمجة عددية ٣، ٤، ٧٥، ١٠٧، ٢٢١، ٢٢٢
 ثنائية القيم ٢٧٢
 تحويل مسألة برمجة خطية إلى مسألة برمجة
 خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم
 ١١٨، ٢٧٢
 تعادل في المتغيرات الداخلة ٥٥
 تعادل في المتغيرات الخارجة ٥٥
 تغيير في دالة الهدف ٣٠
 تغيير في الموارد النادرة ٢٧
 تغيير في الموارد غير النادرة ٢٧
 تفسير اقتصادي ١٩، ٢٦
 تكاليف التجهيز ١٣٣
 تكاليف ثابتة ١٣٠
 تكاليف متغيرة ١٣٤
 تحضير أو تجهيز ١٣٤
- تحليل الأمثلية ١٠
 تحليل حساسية ٢٦
 تحديد العنصر المحوري
 لطريقة السمبلكس ٤٣
 لطريقة السمبلكس الثنوية ٦٠، ٦١
 تحويلات بسيطة ١١٨
 تحويل مسألة برمجة غير خطية إلى مسألة
 برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية
 القيم ١٢٨
- ثنوي ١٨، ٢٨٢
- جدول الحل الأمثل ٤٤

جداول السمبلكس ٤٣، ٤٤

م

حر ٢٧٨

حل ابتدائي ٣٦، ٤٥، ٤٧ و ٤٨،

٥٣ و ٥٤، ٥٩

حل أساسي ٣٧، ٤٠، ٤٣، ٤٥، ٥٣، ٥٩

حل أمثل ١٠، ١١، ١٥، ١٦، ١٧،

٢٥، ٣٩،

٤٩، ٥٢، ٥٩، ٦٠، ٩٤، ٩٥

حل أمثل مضاعف (متعدد) ٥٥

حل أمثل وحيد ١٦، ١٧، ١٨

حل جزئي ٢٧٨

حل كامل ٢٧٨

حل النموذج ٩، ١٠، ١٤

حل غير أمثل ٣٩، ٥٨

حل غير ممكن ٤٨، ٥٨، ٦٠، ٦٣،

٣٧، ٣٨، ٤٠، ٤٣، ٤٥، ٤٩، ٥٨

حل مرشح ٢٢٣، ٢٢٩، ٢٤٣

حل مسألة حقيقية الظهر البسيطة ٢٤٧، ٢٤٨

حل مسألة حقيقية الظهر العامة

حساسية ٢٦

خطوة التفرع ٢٤٦

خطوة شطب المسائل الجزئية ٢٤٦

خلاصة طريقة التفرع والحد ٢٤٥

خوارزمية ٣٤، ٣٦، ٣١١

خوارزمية التفرع والحد ٢٤٥

خوارزمية مستوي القطع ٣١١

خوارزمية السمبلكس ٣٤، ٤٥، ٤٨

خوارزمية السمبلكس الثنوية ٦١

خوارزمية هنفارية ٢٥٧

د

دالة الهدف ٣٦، ٣٧، ٣٨، ٣٩

و

راكد ٣٤، ٤٨، ٢٨٠، ٢٨٢، ٣٠٩

رقم محوري ٤٠، ٤١

س

سعر الظل ٣٠

سطر محوري ٤٠، ٤١، ٦٠، ٦١، ٦٣

سطر أساس ٣١٣

ط

طرق التفرع والحد ٢٢٧، ٢٢٨، ٢٤٣،

٢٤٧

طرق مستوي القطع ٩٤، ٣٠٣، ٣٠٤،

٣٢٠

طريقة السمبلكس ٦، ٣٥، ٣٦، ٤٥،

٥٠، ٦٩

طريقة السمبلكس الثنوية ٥٩، ٢٤٢،

٣٠٤، ٣١٠، ٣٢

طريقة التعداد الضمني ٩٢، ٢٧١

طريقة التعداد الكلي (الشامل) ٨٦

طريقة بيانية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧،

١٠، ٢٠، ٣٥

طريقة المرحلتين ٤٩، ٥٩، ٣١٧

عم

عمود محوري ٤٠، ٤١، ٤٢، ٤٤،

عنصر محوري ٤٠، ٤١، ٤٢، ٦١، ٦٣،

٣١٠

عنصر غير أساسي ٣٥، ٣٩

علاقة بين

شر

شبكة ١٠٧، ١٣٧، ١٥٥

شجرة ٢٣٥

شرط الأمثلية لطريقة السمبلكس ٣٩،

٢٨٢

شرط الأمثلية لطريقة السمبلكس الثنوية

٦٠

ص

صورة قياسية للبرامج الخطية ٣٤

صعوبات الحل لمسائل البرمجة العددية

٨٣

صياغة المشكلة ٩

صياغة مسألة البائع المتجول المتناظرة

١٨٤، ١٨٣

صياغة مسألة البائع المتجول غير المتناظرة

١٧٦، ١٧٥

صياغات خاصة لمسائل البرمجة العددية

١٠٨

متغير خارج ٣٥، ٣٧، ٣٩، ٤٠، ٤١،
٤٣، ٥٨، ٦١

متغير فائض ٣٤، ٣٦، ٥٩
متغير غير أساسي ٣٥، ٣٧، ٣٨، ٤٣،
٤٤، ٥٣

متغير زائف (اصطناعي) ٣٦، ٤٩، ٥١
متغير قرار ٣٥، ٣٧، ٣٨، ٤٣، ٤٤،
٥٣، ٧٧، ١١٣، ١٢٦، ١٢٧، ١٥٢،
١٧٠

متغير مهمل (راكد) ٣٤، ٤٨، ٢٨٠
متغير مثبت ٢٧٨، ٢٨٥
مجموعة محدبة ٦، ٣٤٢
مسألة أولية ٢٠، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٥٥،
٥٦

مسائل خاصة في البرمجة العددية ١٢٥
مسألة حقيقية الظهر البسيطة ١٢٧
مسألة حقيقية الظهر العامة ١٢٩
مسألة اختيار المشاريع مع وجود موارد
محدودة ١٣١
مسألة التكلفة الثابتة للتجهيز ١٣٣
مسألة التدفق الأكبر ١٩٢، ١٩٣
مسألة تصميم الشبكات ١٣٧

حلول المسألة الأولية وحلول المسألة
الثنوية ٥٥، ٥٨

قيمة الحل الأمثل للمسألة الأولية وقيمة
الحل الأمثل للمسألة الثنوية ٢٥، ٥٨

ف

فضاء الحل ١١، ١٥، ٣٢
فضاء الحل الممكن ٩، ١٤، ١٥، ١٦،
٣٢، ٢٣٣

ق

قيود وثيقة ٢٨، ٢٧، ٣٠
قيود غير وثيقة ٢٨، ٢٧، ٣٠
قيود منطقية ١٠٨
قيود اقتضائية ١٠٩، ١١٠، ١١٢، ١١٥
قيود بديلة ١١٠

م

متغير أساسي ٣٥، ٣٧، ٣٨، ٤٣، ٤٤، ٥٣
متغير حر ٢٧٨، ٢٨٤، ٢٨٥، ٢٩٠،
٢٩١
متغير داخل ٣٥، ٣٧، ٣٩، ٤٠، ٤١،
٤٣، ٥٨، ٦١

- مسألة التخصيص البسيطة ١٤٢
 مسألة التخصيص العامة ١٤٥، ١٤٦
 مسألة الإيداعات البريدية المقيدة ١٤٨، ١٤٩
 مسألة تحديد مواقع وطاقة مراكز الخدمات وسياسات التوزيع المثلى منها للمراكز ذات الطاقة المحدودة ١٥١، ١٥٢، ١٥٣، ١٥٤، ١٥٥
 للمراكز ذات الطاقة غير المحدودة ١٥٧، ١٥٨
 مسألة تلوين خريطة بأربعة ألوان ١٥٩
 مسألة التخصيص التريعية ١٦٩، ١٧٠، ١٧١
 مسألة البائع المتجول ١٧٥
 المتناظرة ١٨٣
 غير المتناظرة ١٧٥
 مسألة غطاء العقد ١٧٠، ١٧١، ١٩٦
 مسألة أقصر مسار في شبكة موجهة ٢٠١، ٢٠٢
 مسألة تلوين الرؤوس في شبكة غير موجهة ٢٠٤
- مسألة تصميم نظام توزيع سلع متعددة ٢٠٦، ٢٠٧، ٢٠٨
 مسألة جدولة تنفيذ أعمال على مكائن التصنيع ٢٠٩، ٢١٠، ٢١١
 مسائل التوافق ١٧٤، ١٧٥
 مسائل الحزم ١٩٠، ١٩١
 مسائل التغطية ١٩٤، ١٩٥
 مسألة ثنوية ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥ و٥٦
 مسألة معدلة ٤٩، ٥٠، ٩٥
 منبع ١٣٥
- ن**
- نظام ٥
 نظرية الثنوية ٢٤، ٢٥، ٣٢، ٥٨
 نظرية نقطة الركن ١٥، ١٦
 نموذج أولي ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٥٧
 نموذج ثنائي ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٥٧
 نموذج رياضي ١١٣، ١١٤، ١١٦، ١٢٥، ١٣٣، ١٤٤، ١٥٢، ١٧٠، ١٨٧