الفصل العاشر

الاشتقاق الجزئي

PARTIAL DIFFERENTIATION

(١٠.١) استخدم المبادئ الأساسية لحساب الاشتقاق الجزئي $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ و $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ حيث إن $z(x,y) = \frac{x^3}{1-y}$.

احسب (بأي طريقة) كلاً من $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

ثم تحقق من صحة المساواة $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

الحل :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{z(x+\delta x, y) - z(x,y)}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{(x+\delta x)^3/(1-y) - x^3/(1-y)}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{x^3 + 3x^2\delta x + 3x\delta x^2 + \delta x^3 - x^3}{(1-y)\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{3x^2 + 3x\delta x + \delta x^2}{(1-y)}\right) = \frac{3x^2}{1-y}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = lim_{\delta y\to 0}\left(\frac{z(x,y+\delta y)-z(x,y)}{\delta y}\right)$$

$$= \lim_{\delta y\to 0}\left(\frac{x^3/(1-[y+\delta y])-x^3/(1-y)}{\delta y}\right)$$

$$= \lim_{\delta y\to 0}\left(\frac{x^3}{\delta y}\left[\frac{1}{(1-y-\delta y)}-\frac{1}{(1-y)}\right]\right)$$

$$= \lim_{\delta y\to 0}\left(\frac{x^3[(1-y)-(1-y-\delta y)]}{\delta y(1-y-\delta y)(1-y)}\right)$$

$$= \lim_{\delta y\to 0}\left(\frac{x^3}{(1-y-\delta y)(1-y)}\right) = \frac{x^3}{(1-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{3x^2}{1-y}\right) = \frac{6x}{1-y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y_x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y_x}\left(\frac{x^3}{(1-y)^2}\right) = \frac{2x^3}{(1-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x_y}\left(\frac{x^3}{(1-y)^2}\right) = \frac{3x^2}{(1-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y_x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial y_x}\left(\frac{3x^2}{1-y}\right) = \frac{3x^2}{(1-y)^2}$$

على الرغم من معرفتنا أن المشتقات الجزئية الثانية المختلفة تكون متساوية ، إلاّ أنه يكون من المناسب التحقق من ذلك.

(١٠،٢) إذا كانـت $f(x,y,z) = cos\,(xyz)$ فاحسـب $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ وذلـك بتثبيت ملائم للمتغيرات.

الحل :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} = -xysin(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y_{xz}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} = -x^2yzcos(xyz) - xsin(xyz)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x_{yz}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)$$

$$= x^2y^2z^2\,sin(xyz) - 2xyzcos(xyz) - xyzcos(xyz) - sin\,(xyz)$$

$$= (x^2y^2z^2 - 1)\,sin(xyz) - 3xyzcos(xyz)$$

(١٠،٣) أثبت أن $x^2 = y^2 sin\,(yz)$ تحقق المعادلة :

$$(\partial x/\partial y)_z(\partial y/\partial z)_x(\partial z/\partial x)_y = -1$$

الحل :

$$x^2 = y^2 sin\,(yz) \qquad (١)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_z}(1) \Rightarrow 2x\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = y^2\,cos(yz)\frac{\partial}{\partial y_z}(yz) + 2ysin(yz)$$

إذن ،
$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{y^2 z\cos(yz) + 2y\sin(yz)}{2x} \qquad (٢)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_x}(1) \Rightarrow 0 = y^2\cos(yz)\frac{\partial}{\partial z_x}(yz) + 2y\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \sin(yz)$$

$$= y^2\cos(yz)\left[y + z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\right] + 2y\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \sin(yz)$$

إذن ،
$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{-y^3\cos(yz)}{y^2 z\cos(yz) + 2y\sin(yz)} \qquad (٣)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_y}(1) \Rightarrow 2x = y^2\cos(yz)\frac{\partial}{\partial x_y}(yz) = y^3\cos(yz)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$$

إذن ،
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{2x}{y^3\cos(yz)} \qquad (٤)$$

من المعادلات (٢)، (٣) ، (٤) نخلص إلى أن :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

(١٠,٤) لتكن $f(x,y) = xy(1 - y + x)$.

أ) احسب متجه الميل ∇f عند النقاط $(-\frac{1}{2},0)$ و $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $(0\frac{1}{2})$.

ب) جد النقاط الحرجة الواقعة داخل المثلث الذي رؤوسه $(-1,0)$ و $(0,0)$ و $(0,1)$.

ج) ارسم بيان الدالة داخل هذا المثلث وبيّن اتجاه ∇f عند النقاط المعطاة في الفقرة (أ) .

الحل :

أ)
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x_y}\,(xy - xy^2 + x^2y) = y(1 - y + 2x)$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y_x}\,(xy - xy^2 + x^2y) = x(1 - 2y + x)$$

إذن ، $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y(1 - y + 2x), x(1 - 2y + x))$.

وأخيراً :

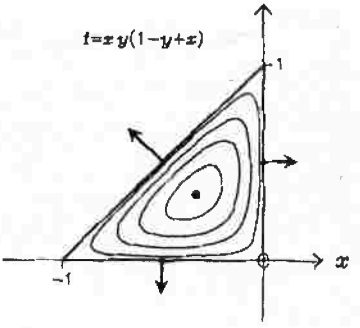
$$\nabla f(-\frac{1}{2}, 0) \quad = (0, -\frac{1}{4})$$
$$\nabla f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$
$$\nabla f(0, \frac{1}{2}) \quad = (\frac{1}{4}, 0)$$

ب) النقاط الحرجة هي النقاط التي تحقق $\nabla f = 0$. ومن ذلك نرى أن :

$$y(1 - y + 2x) = 0$$
$$x(1 - 2y + x) = 0$$

وبحل المعادلتين معاً نجد أن $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ هي النقطة الحرجة الوحيدة داخل المثلث.

ج) بيان الدالة داخل المثلث مبين في الشكل التالي.



من الواضح أن النقطة الحرجة هي نقطة صغرى (من الممكن التأكد من ذلك من المشتقة الثانية) لأن قيمة f عند $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ تساوي $-\frac{1}{27}$ ولكن أضلاع المثلث تشكل كانتور حيث إن $f = 0$.

(١٠,٥) إذا كانت $(u,v)=0$ حيث إن $u = x + y$ و $v = x^2 + xy + z^2$ فأثبت أن : $$x + y = 2z\left[(\partial z/\partial y)_x - (\partial z/\partial x)_y\right]$$

الحل :

$$f = f(u,v) = 0 \Rightarrow \qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u dv = 0$$

إذن ، $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y$.

أي أن $$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left[2x + y + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right] \qquad (١)$$

أيضاً $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$.

أي أن $$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left[x + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] \qquad (٢)$$

بقسمة (١) على (٢) نجد أن :

$$2x + y + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = x + 2z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

ومن هذا نرى أن :

$$x + y = 2z\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right].$$

(١٠,٦) استخدم التعويض $u = x + ct$ و $v = x - ct$ لاختزال معادلة الموج

$$\frac{c^2\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

إلى المعادلة

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

الحل :

$$z = z(u, v) \Rightarrow \qquad dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u dv$$

عندئذ ،

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u$$

كما أن :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x = c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v - c\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_t = \left[\frac{\partial}{\partial u_v} + \frac{\partial}{\partial v_u}\right]\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v + \frac{\partial}{\partial u_v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u + \frac{\partial}{\partial v_u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v + \frac{\partial}{\partial v_u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u$$

ومن ذلك نرى أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \qquad (١)$$

الآن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t_x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_x = \left[c\frac{\partial}{\partial u_v} - c\frac{\partial}{\partial v_u}\right]\left[c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v - c\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\right]$$

$$= c\frac{\partial}{\partial u_v}\left[c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v - c\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\right] - c\frac{\partial}{\partial v_u}\left[c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v - c\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_u\right]$$

إذن ،

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \qquad (٢)$$

بضرب المعادلة برقم(٢) بالعدد $\frac{1}{2}$ وطرح الناتج من المعادلة رقم (١) نجد أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

ولكن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

وبهذا نخلص إلى أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \, .$$

لاحظ أنه من الممكن الحصول بسهولة على المؤثرين التفاضليين $\partial/\partial x_t$ و$\partial/\partial t_x$ من صيغ المشتقة الأولى $(\partial z/\partial x)_t$ و $(\partial z/\partial t)_x$ وذلك بترتيب المعادلات بحيث يظهر z دائماً كحد أخير في الطرف الأيمن، فمثلاً :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_x = \frac{\partial}{\partial t_x}(z) \quad = c\frac{\partial}{\partial u_v}(z) - c\frac{\partial}{\partial v_u}(z)$$

$$= \left[c\frac{\partial}{\partial u_v} - c\frac{\partial}{\partial v_u}\right](z)$$

وبهذا يكون :

$$\frac{\partial}{\partial t_x} = c\frac{\partial}{\partial u_v} - c\frac{\partial}{\partial v_u}$$

إن معالجة المؤثرات التفاضلية يشبه معالجة الصيغ الجبرية الاعتيادية عند الضرب وفك الأقواس وهكذا. لاحظ أن معادلة الموج هي معادلة سهلة المعالجة وذلك لأن c ثابت ، فلو كان c دالة في x و y ومن ثم فهو ضمنياً دالة في u و v فإنه يلزمنا استخدام قاعدة الضرب عدداً من المرات كما في الحالة :

$$\varphi(u,v)\frac{\partial}{\partial u_v}\left[\varphi(u,v)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v\right] = \varphi(u,v)\left[\varphi(u,v)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_v\right]$$

مما يزيد من تعقيد الحسابات.

(١٠,٧) جد ثم صنف جميع النقاط الحرجة الحقيقية للدالة :

$$f(x,y) = y^2(a^2 + x^2) - x^2(2a^2 - x^2)$$

حيث إن a ثابت.

الحل :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2xy^2 - 4a^2x + 4x^3 = 2x(y^2 - 2a^2 + 2x^2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2y(a^2 + x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - 4a^2 + 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(a^2 + x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

لإيجاد النقاط الحرجة نقوم بحل النظام :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 0$$

أي النظام : $x(y^2 - 2a^2 + 2x^2) = 0$

$$y(a^2 + x^2) = 0$$

ونجد الحلول (النقاط الحرجة) هي $(0,0)$ و $(\pm a, 0)$.

ولتصنيف النقاط الحرجة نقوم بدراسة إشارة $det\ (\nabla\nabla f)$ حيث إن:

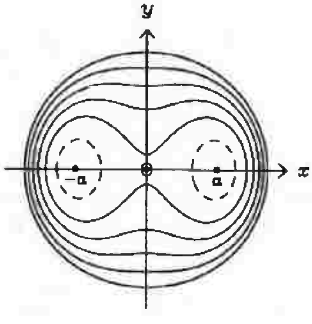
$$D = det(\nabla\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

عند $(0,0)$: $D = -8a^4 < 0$ وبهذا تكون $(0,0)$ نقطة سرجية.

عند $(\pm a, 0)$: $D = 32a^2 > 0$ ومن ثم يمكن أن تكون نقطة عظمى أو صغرى، ولهذا يلزمنا دراسة إشارة $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ أو $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ أو $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

عند $(a,0)$: و $\nabla^2 f = 12a^2 > 0$ ومن ثم تكون $(a,0)$ نقطة صغرى.

عند $(-a,0)$: $\nabla^2 f = 12a^2 > 0$ ومن ثم تكون $(-a,0)$ نقطة صغرى أيضاً.



(a عدد حقيقي $\Leftarrow$ $a^4 \geq 0$)

عند محاولة إيجاد النقاط الحرجة يكون من المناسب تحليل المشتقة الأولى بالقدر المستطاع.

ففي هذا التمرين $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 0$ يؤدي إلى أن $x = 0$ أو $y^2 - 2a^2 + 2x^2 = 0$ و $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 0$ يؤدي إلى أن $y = 0$ أو $a^2 + x^2 = 0$. وبدراسة الخيارات الأربعة نضمن حصولنا على جميع النقاط الحرجة.

(١٠،٨) استخدم طريقة ضوارب لاجرانج لإيجاد القيم الحرجة للدالة e^{-xy} مع الشرط الحدي $x^2 + y^2 = 1$.

الحل :

بوضع

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$
$$= e^{-xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

نجد أن :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = -ye^{-xy} + 2x\lambda$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = -xe^{-xy} + 2y\lambda$$

لإيجاد النقاط الحرجة نقوم بحل النظام :

$$-ye^{-xy} + 2x\lambda = 0 \qquad (١)$$

$$-xe^{-xy} + 2y\lambda = 0 \qquad (٢)$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (٣)$$

بقسمة المعادلة رقم (١) على المعادلة رقم (٢) نجد أن :

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

أي أن :

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad (٤)$$

وبجمع المعادلتين رقم (٣) و (٤) نرى أن :

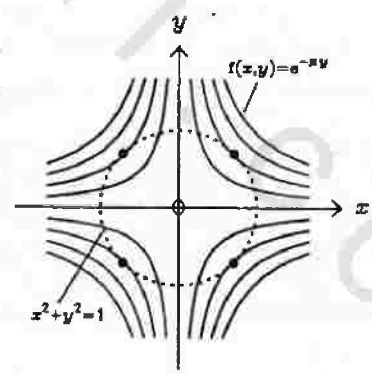
$$2x^2 = 1$$

وبهذا نجد أن $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. وبالتعويض في المعادلة رقم (٤) نجد أن $y = \pm x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ومن ذلك نخلص إلى وجود قيمتين حرجتين هما $f = e^{-1/2}$ عند $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

و $f = e^{1/2}$ عند $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ وهذا موضح بالبيان أدناه.

$$F = e^{-xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$



(١٠,٩) استخدم متسلسلة تايلور بعدة متغيرات للحصول على صيغة مناسبة لخوارزمية نيوتن ورافسون لإيجاد نقاط حرجة عددياً للدالة $f(x)$ في عدة متغيرات .

الحل :

يمكن الحصول على تعميم لمتسلسلة تايلور على النحو التالي (باستخدام مصفوفات ومتجهات):

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)^T \nabla f(x_o) + \frac{1}{2}(x - x_o)^T \nabla\nabla f(x_o)(x - x_o) + \cdots$$

وتتحقق النقاط الحرجة عندما يكون $\nabla f(x_o) = 0$.[1] أي عندما يكون :

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_o) + \nabla\nabla f(x_o)(x - x_o) + \cdots = 0$$

لاحظ أنه يمكن التفكير بالصيغة أعلاه على أنها متسلسلة تايلور للدالة ∇f (عوضاً عن f).

إذا كان x_o تقريباً جيداً لحل المعادلة $\nabla f(x) = 0$ (على اعتبار أن الحدود العليا صغيرة ومن ثم يمكن تجاهلها) فإن :

---

(١) إذا كانت $f = f(,y)$ فإن:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

وإذا كانت $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_M)$ فإن:

$$(\nabla f)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$(\nabla\nabla f)_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$\nabla f(x_o) + \nabla\nabla f(x_o)(x - x_o) \approx 0$$

أي أن: $[\nabla\nabla f(x_o)]^{-1}[\nabla f(x_o) + \nabla\nabla(x_o)(x - x_o) \approx 0]$

وهذا يؤدي إلى أن $[\nabla\nabla f(x_o)]^{-1}\nabla f(x_o) + I(x - x_o) = 0$

إذن ، $[\nabla\nabla f(x_o)]^{-1}\nabla f(x_o) \approx x_o - x$

وبهذ نخلص إلى أن $x \approx x_o - [\nabla\nabla f(x_o)]^{-1}\nabla f(x_o)$

إن هذا يعني أنه يمكن الحصول على تقريب أفضل لحل المعادلة $\nabla f(x) = 0$ باستخدام قيمتي متجه الميل ومصفوفة المشتقة الثانية عند x_o وهذه هي الخطوة الأولى لخوارزمية نيوتن ورافسون:

$$x_{N+1} = x_N - [\nabla\nabla f(x_N)]^{-1}\nabla f(x_N)$$

حيث إن x_N هو التقريب من الرتبة .

تعد خوارزمية نيوتن ورافسون من أكثر الخوارزميات فعالية لإيجاد قيمة تقريبية لنقطة حرجة (إذا كان التقريب الأولي جيداً). أما إذا كان التقريب الأولي بعيداً عن قيمة النقطة الحرجة فإن الخوارزمية تتباعد بسرعة عن الحل.