الفصل الثالث عشر

المعادلات التفاضلية العادية

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

(١٣,١) يتناقص عدد الذرات المشعة N في مركب بالنسبة للزمن t حسب القانون

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

إذا كان عدد الذرات المشعة بداية يساوي N_o فجد صيغة لنصف الحياة (الزمن اللازم لكي يصبح عدد الذرات المشعة يساوي $\frac{N_o}{2}$).

الحل :

بما أن $\frac{d}{dt} = -\lambda N$ فإن :

$$\int_{N_o}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{0}^{t} dt$$

ولذا فإن :

$$[lnN]_{N_o}^{N} = -\lambda t$$

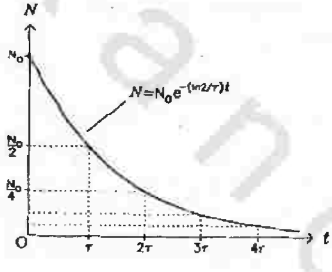
$$\Rightarrow ln\left(\frac{N}{N_o}\right) = -\lambda t$$

$$\Rightarrow N = N_o e^{-\lambda t}$$

لإيجاد نصف الحياة نضع $N = \frac{N_o}{2}$ فنجد إن :

$$\frac{N_o}{2} = N_o e^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2$$

إذن ، $t = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$.



(١٣,٢) جد الحل العام للمعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى :

أ) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{x}$

ب) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2+xy}{x^2}$

ج) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+5}{x-y+2}$

د) $\frac{dy}{dx} + ycotx = cosecx$

هـ) $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$

و) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = cosx$

الحل :

أ)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2}{x} \qquad \Rightarrow \int \frac{dy}{1-y^2}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y)(1+y)}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)dy=\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[-ln(1-y)+ln\,(1+y)]$$
$$=lnx+A$$

$$\Rightarrow ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}=lnx+A$$

$$\Rightarrow \frac{1+y}{1-y}=Bx^2$$

حيث إن $B=e^{2A}$.

ب) هذه معادلة متجانسة. بوضع $y=V$ نجد أن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2+xy}{x^2} \quad \Rightarrow V+x\frac{dV}{dx}=2\left(\frac{y^2}{x^2}\right)+\frac{xy}{x^2}$$

$$\Rightarrow V+x\frac{dV}{dx}=2V^2+V$$

$$\Rightarrow x\frac{dV}{dx}=2V^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x}=\int \frac{dV}{2V^2}$$

$$\Rightarrow lnx = -\frac{1}{2V} + A$$

$$\Rightarrow lnx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right) + A$$

إذن ،
$$y = \frac{-x}{2lnx + B}$$

ج) باستخدام التحويل الخطي $u = x + a$ و $v = y + b$ نجد أن $du = dx$ و $dv = dy$. وبهذا يكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 5}{x - y + 2} \quad \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{(u - a) + (v - b) + 5}{(u - a) - (v - b) + 2}$$

$$= \frac{u + v + 5 - a - b}{u - v + 2 - a - b}$$

الآن ، بوضع $5 - a - b = 0$ و $2 - a - b = 0$

نجد أن $a = \frac{7}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$ وأن :

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v}$$

الآن ، باستخدام التعويض $v = \theta u$ نجد أن :

$$\frac{dv}{du} = \theta + u\frac{d\theta}{du}$$

ومن هذا نرى أن :

$$\theta + u\frac{d\theta}{du} = \frac{u + v}{u - v} = \frac{1 + (v/u)}{1 + (v/u)} = \frac{1 + \theta}{1 - \theta}$$

أي أن :

$$u\frac{d\theta}{du}=\frac{1+\theta}{1-\theta}-\theta=\frac{1+\theta^2}{1-\theta}$$

إذن،

$$\int\frac{1-\theta}{1+\theta^2}d\theta=\int\frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow\int\frac{d\theta}{1+\theta^2}-\int\frac{\theta}{1+\theta^2}d\theta=lnu+B$$

$$\Rightarrow tan^{-1}\theta-\frac{1}{2}ln(1+\theta^2)=lnu+B$$

$$\Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)=lnu+\frac{1}{2}ln\left(1+\left(\frac{v}{u}\right)^2\right)$$
$$+B$$

$$\Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)=ln\left(u\sqrt{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}\right)+B$$

إذن ، $tan^{-1}\left(\frac{y+3/2}{x+7/2}\right)=ln\sqrt{(x+7/2)^2+(y+3/2)^2}+B$.

د) معامل التكامل هو :

$$I(x)=exp\left(\int cotx\,dx\right)=exp(ln(sinx))=sinx$$

ولذا فإن :

$$\frac{dy}{dx}+ycotx=cosecx\quad\Rightarrow\frac{d}{dx}(ysinx)=sinxcosecx=1$$
$$\Rightarrow ysinx=x+B$$

إذن ، $y = \dfrac{x+B}{sinx}$.

هـ) معامل التكامل هو :

$$I(x) = exp\left(\int 2x\,dx\right) = exp\,(x^2)$$

وبهذا يكون :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right) = xe^{x^2}$$

$$\Rightarrow ye^{x^2} = \int x\,e^{x^2} dx$$

$$\Rightarrow ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + A$$

إذن، $y = \dfrac{1}{2} + Ae^{-x^2}$.

و) معامل التكامل هو :

$$I(x) = exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) = e^{lnx} = x$$

ونرى أن :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = cosx \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy) = xcosx$$

$$\Rightarrow xy = \int xcosx\,dx$$

$$\Rightarrow xy = xsinx - \int sinx\,dx$$

$$\Rightarrow xy = xsinx + cosx + A$$

إذن ، $y = sinx + \frac{cosx + A}{x}$.

(١٣,٣) معادلة برنولي هي :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^{\alpha}Q(x)$$

استخدم التحويل $v = y^{-(\alpha-1)}$ لتحويل معادلة برنولي إلى معادلة تفاضلية يمكن حلها باستخدام معامل التكامل ومن ثم جد الحل عندما يكون :

$P(x) = Q(x) = x$ و $\alpha = 2$.

الحل :

بوضع $v = y^{-(\alpha-1)}$ نجد أن :

$$\frac{dv}{dx} = -(\alpha - 1)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$$

وبهذا يكون :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^{\alpha}Q(x) \quad \Leftrightarrow \frac{y^{\alpha}}{-(\alpha - 1)}\frac{dv}{dx} + P(x)y = y^{\alpha}Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

وفي الحالة الخاصة ، $P(x) = Q(x) = x$ و $\alpha = 2$ نجد أن :

$$\frac{dv}{dx} - xv = -x$$

معامل التكامل هو :

$$I(x) = exp\left(-\int x\,dx\right) = e^{-x^2/2}$$

وبهذا نرى أن :

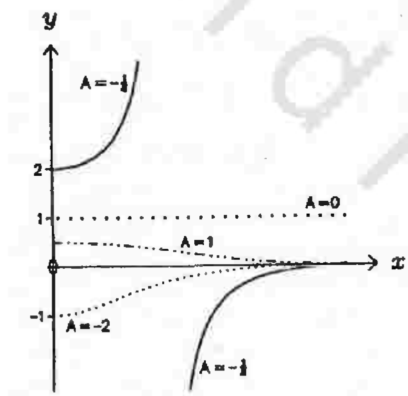
$$\frac{d}{dx}\left(ve^{-x^2/2}\right) = -xe^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow ve^{-x^2/2} = \int -xe^{-x^2/2}\,dx = e^{-x^2/2} + A$$

$$\Rightarrow v = 1 + Ae^{x^2/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} - 1 = Ae^{x^2/2}$$

إذن ، $y = \dfrac{1}{1 + Ae^{-x^2/2}}$.



في أغلب الأحيان (وهذا الحال هنا) نجد أن حل المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية يعتمد بشكل أساسي على ثابت التكامل.

(١٣،٤) أثبت أن الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية العادية الخطية من الرتبة الأولى هي :

$$[Q(x) - P(x)y]dx - dy = 0$$

بضرب طرفي المعادلة بالمعامل $I(x)$ والاختبار للتفاضل التام ، أثبت أن :

$$I(x) = exp\ (\int P(x)\, dx)$$

الحل :

$$I(x)\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = I(x)Q(x) \Leftrightarrow I(x)[Q(x) - P(x)y]dx - I(x)dy = 0$$

ولكي يكون هذا تفاضلاً تاماً يجب أن يتحقق الشرط :

$$\frac{\partial}{\partial y_x}\{I(x)[Q(x) - P(x)y]\} = \frac{\partial}{\partial x_y}(-I(x))$$

أي :

$$-I(x)P(x) = -\frac{dI}{dx}$$

وبهذا نرى أن :

$$\int \frac{dI}{dx} = \int P(x)\, dx \Rightarrow lnI = \int P(x)\, dx$$

أي أن :

$$.I(x) = exp\ (\int P(x)\, dx)$$

(١٣,٥) لتكن $y'' + k_1 y' + k_2 y = F(x)$.

أ) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = -2$ ، $k_2 = -3$ ، $F(x) = sinx$.
ثم جد الحل الذي يحقق الشروط الحدية $y(0) = 0$ و y منته عندما $x \to \infty$.

ب) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = -2$ ، $k_2 = -8$ ، $F(x) = x^2$.

ج) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = 0$ ، $k_2 = w_0^2$ ، $F(x) = cos\,(x)$.
ادرس سلوك الحل عندما يكون $w = w_0$.

د) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = 1$ ، $k_2 = 1$ ، $F(x) = cos\,(wx)$
جد حل حالة الثبوت وذلك بكتابة الطرف الأيمن كمركبة حقيقية لدالة أُسية مركبة ووضع $P = \{Aexp(iwx)\}$.

هـ) جد الحل العام عندما يكون $k_1 = 0$ ، $k_2 = 4$ ، $F(x) = \cos\,(2x)$.

الحل :

أ) الحل المتمم $c(x)$ هو الحل الذي يحقق $c'' - 2c' - 3c = 0$ وبوضع $c = Ae^{mx}$ نجد أن :

$$Ae^{mx}(m^2 - 2m - 3) = Ae^{mx}(m-3)(m+1) = 0$$

ونرى أن $c = e^{-x} + Ce^{3x}$. أما الحل الخاص $p(x)$ فيأخذ الشكل :

$$p(x) \ = Dsinx + Ecosx$$

$$p'(x) \ = Dcosx - Esinx$$

$$p''(x) = -Dsinx - Ecosx$$

وبالتعويض في المعادلة $p'' - 2p' - 3p = sinx$ ومقارنة المعاملات نجد أن:

$$-4D + 2E = 1$$

$$-4E - 2D = 0$$

وبحل المعادلتين نجد أن $D = -\frac{1}{5}$ و $E = \frac{1}{10}$. إذن ، الحل العام هو:

$$y = c + p = Be^{-x} + Ce^{3x} - \frac{1}{5}sinx + \frac{1}{10}cosx.$$

الآن ، بقاء y منتهياً عندما يكون $x \to \infty$ يؤدي إلى أن $C = 0$. وبتعويض $y(0) = 0$ في المعادلة نجد أن $B + \frac{1}{10} = 0$. أي أن $B = -\frac{1}{10}$. وبهذا نخلص إلى أن الحل هو:

$$y = \frac{1}{10}(-e^{-x} - 2sinx + cosx).$$

ب) بوضع $(x) = Ae^{mx}$ والتعويض نجد أن:

$$Ae^{mx}(m^2 - 2m - 8) = Ae^{mx}(m + 2)(m - 4) = 0$$

وبهذا يكون $c(x) = Be^{-2x} + Ce^{4x}$.

الآن ، بوضع $p(x) = F + Ex + Dx^2$ نجد أن:

$$p'(x) = E + 2Dx$$

$$p''(x) = 2D$$

بالتعويض في المعادلة ومقارنة المعاملات نجد أن :

$$\begin{aligned} -8D &= 1 \\ -4D - 8E &= 0 \\ 2D - 2E - 8F &= 0 \end{aligned}$$

ويكون $D = -\frac{1}{8}$ ، $E = \frac{1}{16}$ ، $F = -\frac{3}{64}$.

إذن ، الحل العام للمعادلة هو :

$$y = Be^{-2x} + Ce^{4x} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{3}{64}$$

ج) بوضع $(x) = Ae^{mx}$ والتعويض نجد أن :

$$Ae^{mx}(m^2 + w_0^2) = Ae^{mx}(m + iw_0)(m - iw_0) = 0$$

وبهذا يكون :

$$\begin{aligned} c(x) &= Ae^{-iw_ox} + Be^{iw_ox} \\ &= A\big(\cos(w_ox) - isin(w_ox)\big) + B\big(\cos(w_ox) + isin(w_ox)\big) \\ &= (A + B)\,cos(w_ox) + (-iA + iB)sin\,(w_ox) \\ &= C\,cos(w_ox) + D\,sin(w_ox) \end{aligned}$$

حيث إن $C = A + B$ و $D = -iA + iB$. الآن ،

$$\begin{aligned} p(x) &= Ecos(wx) + Fsin(wx) \\ p'(x) &= -Ewsin(wx) + Fwcos(wx) \\ p''(x) &= -Ew^2\,cos(wx) - Fw^2sin\,(wx) \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة ومقارنة المعاملات نجد أن :

$$E(-w^2 + w_0^2) = 1$$

$$F(-w^2 + w_0^2) = 0$$

ونرى أن $E = \frac{1}{w_0^2 - w^2}$ و $F = 0$.

إذن ، الحل العام هو :

$$y = C\,cos(w_o x) + D\,sin(w_o x) + \frac{cos\,(wx)}{w_0^2 - w^2}$$

لاحظ أن $y \to \infty$ عندما $w \to w_o$.

وفي هذه الحالة نحصل على تذبذب توافقي بسيط عندما يكون التردد رناناً. ونرى من الناحية النظرية أن سعة التذبذب تزداد بلا حدود ، وأما من الناحية العملية فمن الممكن الوصول إلى حالة لا يتبع فيها النظام معادلة الحركة التوافقية البسيطة.

د) بوضع $(x) = Ae^{mx}$ والتعويض نجد أن :

$$m^2 + m + 1 = 0 \Rightarrow m = (-1 \pm \sqrt{-3})/2$$

ويكون $c(x) = e^{-x/2}\left[Asin\left(\sqrt{3}x/2\right) + Bcos\left(\sqrt{3}x/2\right)\right]$

الآن ،

$$\begin{aligned} p(x) &= Ecos(wx) + Fsin(wx) \\ p'(x) &= -Ewsin(wx) + Fwcos(wx) \\ p''(x) &= -Ew^2\,cos(wx) - Fw^2 sin\,(wx) \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة ومقارنة المعاملات نجد أن :

$$-w^2E + wF + E = 1$$

$$-w^2F - wE + F = 0$$

وباستخدام طريقة المصفوفات لحل هذا النظام نجد أن :

$$\begin{pmatrix} 1-w^2 & w \\ -w & 1-w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبهذا يكون :

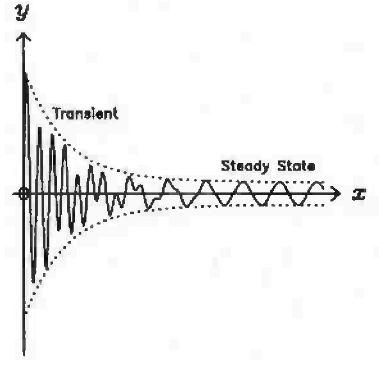
$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-w^2 & w \\ -w & 1-w^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{w^4 - w^2 + 1}\begin{pmatrix} 1-w^2 \\ w \end{pmatrix}$$

إذن ، الحل العام للمعادلة هو :

$$y = e^{-x/2}\left[Asin(\sqrt{3}x/2) + Bcos(\sqrt{3}x/2)\right]$$

$$+\frac{1}{w^4 - w^2 + 1}\left[(1-w^2)\,cos(wx) + wsin(wx)\right]$$

يصف هذا الحل حركة تذبذبية مدفوعة للتخامد (انظر الشكل التالي) حيث يمثل الحد في الطرف الأيمن من المعادلة الأصلية قوة الدفع ويمثل y الإزاحة في النظام والمتغير x يمثل الزمن. إن وظيفة التخامد y' هي جعل الدالة المتممة $c(x)$ تقترب من الصفر عندما $x \to \infty$ (تُسمى $c(x)$ الحل العابر).



أما $p(x)$ فهو حل الحالة الثابتة ويصف لنا الحركة في اللحظة التي يخمد فيها الحل العابر. ويمكن إيجاد هذا الحل بطريقة أسرع بوضع :

$$p(x) = Re\{Aexp(iwx)\}$$

$$p'(x) = Re\{Aiwexp(iwx)\}$$

$$p''(x) = Re\{A(-w^2)\exp(iwx)\}$$

حيث العلاقة بين السعة $|A|$ والإزاحة الزّاويّة هي $A = |A|e^{i\varphi}$.

بالتعويض وكتابة الطرف الأيمن على الصورة $R\{Aexp(iwx)\}$ نحصل على :

$$(-w^2 + iw + 1)Aexp(iwx) = (1)exp(iwx)$$

وبهذا يكون $A = \dfrac{1}{-w^2 + iw + 1}$. إذن ،

$$Re\{Aexp(iwx)\} = Re\left\{\frac{cos(wx) + isin(wx)}{-w^2 + iw + 1}\left[\frac{-w^2 + 1 - iw}{-w^2 + 1 - iw}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{w^4 - w^2 + 1}[(1 - w^2)\,cos(wx) + wsin(wx)]$$

ومن السهل أن نرى أن السعة هي $\frac{1}{\sqrt{w^4-w^2+1}}$ وأن الإزاحة الزّاويّة هي :

$-arctan\left[\frac{w}{1-w^2}\right]$ وذلك من المعيار والإزاحة الزّاويّة للمقدار A.

هـ) بوضع $(x) = Ae^{mx}$ نجد أن :

$$m^2 + 4 = (m + 2i)(m - 2i) = 0 \Rightarrow m = \pm 2i$$

ونرى أن $(x) = Acos(2x) + Bsin(2x)$.

بما أن الدالة في الطرف الأيمن للمعادلة تظهر في الحل المتمم فالحل الخاص لا يمكن أن يكون على الصورة $(x) = Acos(2x) + Bsin(2x)$. وعوضاً عن ذلك فإننا نحاول :

$$p(x) = Cxcos2x + Dxsin2x$$

$$p'(x) = Ccos2x - 2Cxsin2x + Dsin2x + 2Dxcos2x$$

$$p''(x) = -2Csin2x - 2Csin2x - 4Cxcos2x + 2Dcos2x + 2Dcos2x$$

$$-4Dxsin2x$$

بالتعويض ومقارنة المعاملات نحصل على :

$$-4C + 4C = 0$$

$$-4D + 4D = 0$$

$$4D = 1$$

$$-4C = 0$$

ونرى أن $C = 0$ و $D = \frac{1}{4}$. إذن، الحل العام للمعادلة هو:

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$$

عند حسابنا للحل الخاص $p(x)$ وجدنا أن قيمة أحد الثوابت (C) يساوي صفراً وهذا متوقع لأن الطرف الأيمن من المعادلة الأصلية دالة زوجية $(\cos(-2x) = \cos(2x))$. ولهذا فالطرف الأيسر يجب أن يكون دالة زوجية أيضاً. كما أن المؤثر التفاضلي $\frac{d^2}{dx^2} + 4$ زوجي أيضاً وبهذا فهو يحافظ على هذه الخاصية للدوال المؤثر عليها. من ذلك فإن $p(x)$ يجب أن يحتوي على دوال زوجية فقط ، وفي حالتنا $p(x) = x\sin(2x)$ وهو حاصل ضرب دالتين فرديتين ومن ثم فهو زوجي. إن معرفتنا لنوعية الحل (زوجي أم فردي) يوفر الكثير من الجهد في حسابات ميكانيكا الكم وخاصة تلك الحسابات المتعلقة بمعادلة شرودينغر.

(١٣،٦) حل المعادلة التفاضلية: $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$$ بتجريب الحل $y = x^\lambda$ والتعويض $u = \ln x$.

الحل :

بوضع $y = Ax^\lambda$

نرى أن
$$\frac{dy}{dx} = A\lambda x^{\lambda-1}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد أن :

$$Ax^{\lambda}[\lambda(\lambda-1)+3\lambda+1]=0 \quad \Rightarrow [\lambda(\lambda-1)+3\lambda+1]=0$$
$$\Rightarrow (\lambda+1)^2 = 0$$

وعليه فإن الجذر المكرر -1 يزودنا بحل واحد فقط هو :

$$y = Ax^{-1}$$

وبما أن الحل العام لمعادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية يجب أن يحتوي على ثابتين فمن المؤكد وجود حل آخر. إذا حاولنا $y = x(x^{\lambda})$ كحل آخر كما هو متبع في المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة فنجد بعد التعويض أن هذا الحل هو الحل الذي وجدناه سابقاً. وللخروج من هذا المأزق نستخدم التعويض $u = Inx$ فنجد إن :

$$3x\frac{dy}{dx} = 3x\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3\frac{dy}{du}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{du}{dx}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\right) = \frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}$$

وبهذا نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2y}{du^2} + 2\frac{dy}{du} + y = 0$$

وبوضع $(u) = Ae^{mu}$ نجد أن :

$$Ae^{mu}(m^2 + 2m + 1) = Ae^{mu}(m + 1)^2 = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 = 0$$

ومن ذلك نحصل على الجذر المكرر $m = -1$. وبما أن معاملات هذه المعادلة ثابتة فنرى أن الحل العام هو :

$$y(u) = \mathrm{A}e^{-u} + Bue^{-u}$$

وباستخدام التعويض $u = Inx$ نجد أن :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-lnx} + Bln(x)e^{-lnx} \\ &= Ax^{-1} + Bln(x)x^{-1} \end{aligned}$$.