أساسيات الجبر والحساب

BASIC ALGEBRA AND ARITHMETIC

(١,١) احسب قيمة كل من :

أ)	$4^{3/2}$	ب)	$27^{-2/3}$
ج)	$3^2 3^{-3/2}$	د)	$log_2(8)$
هـ)	$log_2(8^3)$		

الحل :

أ)

$$4^{3/2} = 4^{1/2\times 3} = \left(4^{1/2}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$$

أو

$$4^{1+1/2} = 4^1 4^{1/2} = 4\sqrt{4} = 4\times 2 = 8$$

ب)

$$27^{-2/3} = \frac{1}{27^{2/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

ج)

$$3^2 3^{-3/2} = 3^{2-3/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

د)

$$log_2(8) = log_2(2^3) = 3$$

هـ)

$$log_2(8^3) = 3\, log_2(8) = 3\times 3 = 9$$

أو

$$log_2(8^3) = \log_2[(2^3)^3] = log_2(2^9) = 9$$

(١,٢) بوضع $A = a^M$ و $B = a^N$ واستخدام تعريف اللوغاريتم أثبت أن :

$log(AB) = log(A) + log(B)$ و $log(A/B) = log(A) - log(B)$

وبالمثل أثبت أن :

$log_b(A) = log_a(A) \times log_b(a)$ و $log(A^\beta) = \beta \, log(A)$

الحل :

$$A = a^M \Leftrightarrow M = log_a(A) \quad \text{و} \quad B = a^N \Leftrightarrow N = log_a(B)$$

ولكن $AB = a^M a^N = a^{M+N}$.

إذن $log_a(AB) = l_a(a^{M+N}) = M + N = log_a(A) + log_a(B)$.

وبهذا يكون $log(AB) = log(A) + log(B)$.

تبقى هذه النتيجة صحيحة للوغاريتمات لأي أساس لأننا لم نحدد قيمة معينة للأساس .

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{a^N} = a^{-N}$$

إذن، $log_a\left(\frac{1}{B}\right) = lo_a(a^{-N}) = -N = -\, lo_a(B)$.

ومن ثم بتطبيق النتيجة السابقة على لوغاريتم حاصل ضرب مع $\frac{1}{B}$ نحصل على :

$$log(A/B) = log(A) - log(B)$$

$$A^{\beta} = (a^{M})^{\beta} = a^{M\beta}$$

إذن، $log_a(A^{\beta}) = log_a(a^{M\beta}) = M\beta = log_a(A)$. وبهذا يكون:

$$log(A^{\beta}) = \beta\, log(A)$$

$$log_b(A) = log_b(a^{M}) = M\, log_b(a)$$

إذن، $log_b(A) = log_a(A) \times log_b(a)$.

(١,٣) جد صيغة لحلي معادلة الدرجة الثانية $x^2 + bx + c = 0$

الحل :

إذا كان $a \neq 0$ فإن:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الصيغة السابقة صحيحة عندما $a \neq 0$. أما إذا كان $a = 0$ فإننا نحصل على المعادلة الخطية $bx + c = 0$ ومن ثم على الحل $x = -c/b$.

(١,٤) حل المعادلات التالية :

أ) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ب) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ج) $x^2 - 4x + 2 = 0$

الحل :

أ) $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2\ ,\ x = 3$

ب) $3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1/3\ ,\ \ x = -2$

إذا كان التحليل صعباً فمن الممكن حل المعادلة دائماً باستخدام الصيغة العامة المقدمة في التمرين (١,٣).

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x = -\frac{12}{6}, \frac{2}{6}$$

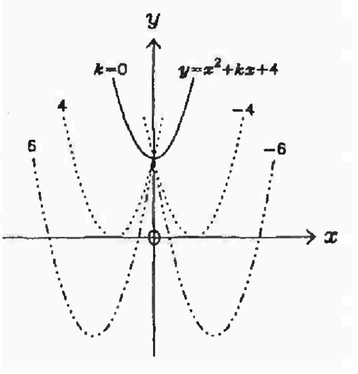
ج)
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

(١,٥) ما هي قيم التي تجعل جذور المعادلة $x^2 + kx + 4 = 0$ حقيقية؟

الحل :

الشرط اللازم للحصول على جذور حقيقية هو $b^2 \geq 4ac$. وبهذا يكون $k^2 \geq 16$.

أي أن $|k| \geq 4$. وهذا يعني أن $c \leq -4$ أو $k \geq 4$.



(١,٦) حل المعادلات التالية آنياً :

أ) $3x + 2y = 4$
$x - 7y = 9$

ب) $x^2 + y^2 = 2$
$x - 2y = 1$

ج) $3x + 2y + 5z = 0$
$x + 4y - 2z = 9$
$4x - 6y + 3z = 3$

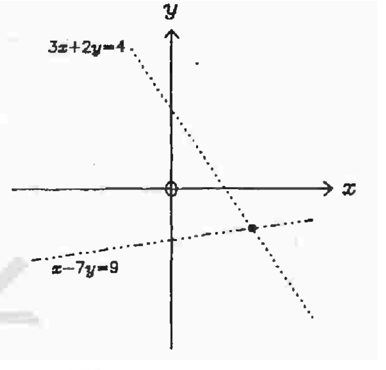
الحل :

أ)
$$3x + 2y = 4 \qquad (١)$$
$$x - 7y = 9 \qquad (٢)$$

بضرب (٢) بالعدد -3 وجمعها مع المعادلة (١) نجد أن :

$$3x + 2y - (3x - 21y) = 4 - 27$$

ومنه فإن $-23y = -23$ وبهذا يكون $y = -1$. بالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن $x + 7 = 9$ وبهذا نحصل على الحل $x = 2$ و $y = -1$.



ب)

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad (٣)$$

$$x - 2y = 1 \qquad (٤)$$

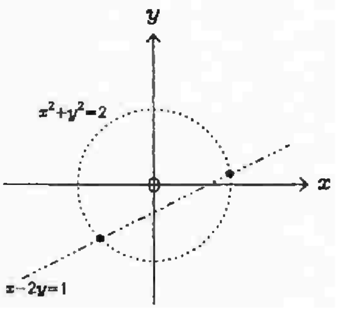
بتعويض $x = 2y + 1$ في المعادلة رقم(٣) نجد أن :

$$(2y + 1)^2 + y^2 = 2$$
$$\Rightarrow 4y^2 + 4y + 1 + y^2 = 2$$
$$\Rightarrow 5y^2 + 4y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (5y - 1)(y + 1) = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{5} \quad \text{أو} \quad y = -1$$

عندما $y = \frac{1}{5}$ نرى أن $x = 1 + 2/5$.

وعندما $y = -1$ نرى أن $x = 1 - 2$.

إذن، ($x = 7/5$ و $y = 1/5$) أو ($x = -1$ و $y = -1$)



ج) $3x + 2y + 5z = 0$ (٥)

$x + 4y - 2z = 9$ (٦)

$4x - 6y + 3z = 3$ (٧)

بضرب المعادلة رقم (٦) بالعدد -3 وجمع الناتج مع المعادلة رقم (٥) نحصل على:

$$-10y + 11z = -27$$

بضرب المعادلة رقم (٦) بالعدد -4 وجمع الناتج مع المعادلة رقم (٧) نحصل على:

$$-22y + 11z = -33$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين آنياً نجد أن $y = 1/2$ أو $z = -2$.

إذن $x = 3$ ، $y = 1/2$ و $z = -2$

(١،٧) جد صيغة لمجموع كل من المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية.

الحل :

لنفرض أن :

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (L - 2d) + (L - d) + L = S_N \quad (١)$$

حيث إن $L = a + (N-1)d$. عندئذ :

$$L + (L-d) + (L-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a = S_N \quad (٢)$$

الآن :

$$(١) + (٢) \quad \Rightarrow (a+L) + (a+L) + \cdots + (a+L) + (a+L) = 2S_N$$

أي أن $2S_N = N(a+L) = [2a + (N-1)d]$.

وبهذا يكون المجموع هو $AP = \frac{N}{2}[2a + (N-1)d]$.

افرض أن $a + ar + r^2 + \cdots + ar^{N-2} + ar^{N-1} = S_N$ (٣)

بضرب المعادلة رقم (٣) بالعدد   نجد أن :

$$ar + ar^2 + \cdots + ar^{N-2} + ar^{N-1} + ar^N = rS_N \quad (٤)$$

وبطرح المعادلة رقم (٣) من المعادلة رقم (٤)نجد أن $a(\; ^{N} - 1) = S_N(r-1)$

وبهذا يكون المجموع $GP = \frac{a(r^N - 1)}{r-1}$

(١,٨) بكتابة العدد العشري الدوري $0.121212\cdots$ كمجموع متتالية هندسية أثبت أن $\frac{4}{33} = 0.121212\cdots$. ما هي القيمة الكسرية للعدد $0.3181818\cdots$ ؟

الحل :

$$0.12121212\cdots = 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots$$

وهذا مجموع متتالية هندسية حدها الأول $a = 0.12$ ونسبتها $0.01 =$. وبهذا نرى أن :

$$0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots = \frac{0.12}{1-0.01} = \frac{12}{99}$$

ونستنتج أن : $0.12121212\cdots = 4/33$.

$$\begin{aligned} 0.318181818\cdots &= 0.3 + 0.018 + 0.00018 + 0.0000018 + \cdots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{0.018}{1-0.01} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{18}{990} \\ &= \frac{33}{110} + \frac{2}{110} \\ &= \frac{35}{110} \end{aligned}$$

ونخلص إلى أن : $0.318181818\cdots = 7/22$.

(١,٩) فرّق الكسور التالية إلى كسور جزئية :

أ) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

ب) $\dfrac{x^2-5x+1}{(x-1)^2(2x-3)}$

ج) $\dfrac{11x+1}{(x-1)(x^2-3x-2)}$

الحل :

أ) $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$.

عندئذ ، $A(x-2)+B(x-3)=1$.

بوضع $x = 2$ نجد أن $B = -1$ وبوضع $x = 3$ نجد أن $A = 1$.

إذن ، $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-2)}$

وأيضاً ، كان من الممكن الحصول على الإجابة مباشرة باستخدام قاعدة التغطية.

ب) $\frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2(2x-3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(2x-3)}$.

حينئذ، $A(2x-3)+(x-1)[(2x-3)+C(x-1)] = x^2-5x+1$

بوضع $x = 1$ نجد أن $A = 3$ وبوضع $x = \frac{3}{2}$ نجد أن $C = -17$. بمقارنة معاملي x^2 نجد أن $2B + C = 1$. وبهذا يكون $B = 9$. إذن ،

$$\frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2(2x-3)} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{9}{(x-1)} - \frac{17}{(2x-3)}$$

في هذه المسألة استخدمنا قاعدة التغطية لإيجاد A و C ولكننا احتجنا إلى مقارنة معاملات لإيجاد .

ج) $\frac{11x+1}{(x-1)(x^2-3x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2-3x-2)}$

إذن ، $A(x^2-3x-2)+(x-1)(Bx+C) = 11x+1$.

بوضع $x = 1$ نجد أن $A = -3$ وبوضع $x = 0$ نجد أن $-2A - C = 1$.

ومن ذلك نجد أن $C = 5$.

بمقارنة معاملات x^2 نجد أن $A + B = 0$ ونرى أن $B = 3$.

إذن ، $\frac{3}{(x-1)} - \frac{3x+5}{(x^2-3x-2)} = \frac{11x+1}{(x-1)(x^2-3x-2)}$

هنا وجدنا فقط من قاعدة التغطية واستخدمنا مقارنة المعاملات لإيجاد B و C.

(١,١٠) احسب كل من المجموعين التاليين :

أ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

ب) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)}$

الحل :

أ) بملاحظة أن $\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$ يكون :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \\ &- \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots \\ &= 1\end{aligned}$$

هذا مثال بسيط على استخدام الكسور الجزئية وسنرى أيضاً كيفية استخدام مفهوم الكسور الجزئية في حل بعض مسائل التكامل.

ب) لاحظ أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)} = e^{-\beta/2} + e^{-3\beta/2} + e^{-5\beta/2} + e^{-7\beta/2} + \cdots$$

وهـذا مجمـوع متتاليـة هندسـية غـير منتهيـة حـدها الأول $a = e^{-\beta/2}$ ونسبتها $r = e^{-\beta}$.

ولذا يكون مجموعها يساوي $\frac{e^{-\beta/2}}{1-e^{-\beta}}$

لهذا المثال البسيط على إيجاد مجموع متتالية هندسية غير منتهية أهمية خاصة في الفيزياء. ففي ميكانيكا الكم ، عند حل معادلة شرودنغر لجزئ في وضع كون توافقي (مثل الجزئ ثنائي الذرة) نجد أن مستويات الطاقة للنظام هي :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$$

حيـث إن $n = 0,1,2,3,\cdots$ و h ثابـت بلانـك و ν هـو الـتردد الطبيعـي للذبذبات الذي نحصـل عليهـا مـن تقـوس انبعـاث الكمـون. تُسـمى الحالـة $n = 0$ ، حالة الأساس حيث تكون الطاقة عند نقطة الصفر هي $E_o = \frac{h\nu}{2}$.احتمـال أن يكـون الجزئي في مستوى طاقة E_n يساوي معامل بولتزمـان $exp(-E_n/kT)$ حيث إن k ثابت بولتزمان و T درجة الحرارة (مقاسة بميزان كـالفن). ومجمـوع هـذه الاحتمـالات هو المجموع سابقاً حيث إن $\beta = \frac{h\nu}{kT}$ ويُسمى عادة دالة التجزئ.