

حساب المثلثات

TRIGONOMETRY

(٣،١) باستخدام تعريف الراديان ودالة الجيب يبين أن $\sin \theta \approx \theta$ عندما تكون θ ومن ثم يبين أن ذلك يؤدي إلى $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

الحل :

بالاستعانة بالرسم المقدم في الشكل أدناه نجد:

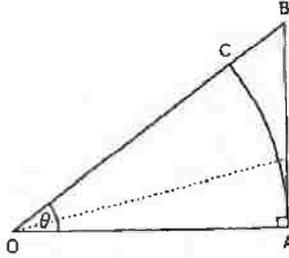
$$\theta = \frac{\text{طول القوس } AC}{OC} \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{AB}{OB}$$

ولكن طول القوس $AC \rightarrow AB$ و $OB \rightarrow OC$ عندما $\theta \rightarrow 0$.

إذن ، $\sin \theta \approx \theta$ عندما $\theta \ll 1$.

وبما أن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ فيكون $\cos \theta = 1 - 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$ ونستنتج

أن $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ عندما يكون $\theta \ll 1$.



(٣،٢) إذا كان $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ فتجد كل من $\sin \theta$ و $\cos \theta$ و $\tan \theta$ بدلالة t .

الحل :

إذا كان $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ فبالاستعانة بالشكل المرفق ومبرهنة فيثاغورس نجد أن :

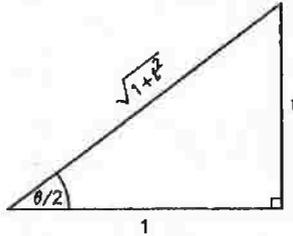
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{و} \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

الآن :

$$\sin \theta = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}$$



يُستخدم هذا التعويض في حساب تكاملات بعض الدوال المثلثية حيث تفاضله

هو:

$$dt = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2} \left[1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] d\theta$$

$$d\theta = \frac{2dt}{1+t^2} \text{ أي أن}$$

(٣,٣) حل المعادلات التالية في المجال $-\pi < \theta < \pi$.

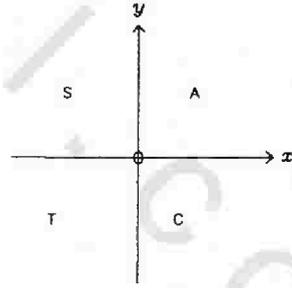
(أ) $\tan \theta = -\sqrt{3}$ (ب) $\sin(3\theta) = -1$ (ج) $4\cos^3\theta = \cos\theta$

الحل :

(أ) حلول المعادلة $\tan \theta = -\sqrt{3}$ هي $\theta = -\frac{\pi}{3}$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3}$

(ب) إذا كانت $\sin(3\theta) = -1$ فإن $3\theta = -\frac{5\pi}{2}$ أو $3\theta = \frac{3\pi}{2}$ أو $3\theta = -\frac{\pi}{2}$ أو $3\theta = \frac{5\pi}{2}$

إذن، $\theta = -\frac{\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{5\pi}{6}$



(ج) $4\cos^3\theta - \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta(4\cos^2\theta - 1) = 0$

ونجد أن $\cos\theta = 0$ أو $\cos\theta = \pm \frac{1}{2}$.

إذن، $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$ أو $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$

(٣,٤) اكتب $a \sin \theta + b \cos \theta$ على الصورة $A \sin(\theta + \varphi)$ حيث إن

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

ثم حل المعادلة $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$ و A و φ يُكتبان بدلالة a و b .

الحل :

$$\sin(\theta + \varphi) = A \cos \varphi \sin \theta + A \sin \varphi \cos \theta$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = A \cos \varphi \sin \theta + A \sin \varphi \cos \theta$$

وبمقارنة المعادلتين نجد أن :

$$A \cos \varphi = a$$

$$A \sin \varphi = b$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

وبهذا يكون

$$a^2 + b^2 = A^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = A^2$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \text{ و } A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{ولحل المعادلة } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ لاحظ أولاً أن :}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

وبهذا يكون :

$$\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{أي أن } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ونجد أن } \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} \text{ أو } \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{إذن ، } \theta = \frac{5\pi}{12} \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{12}$$

(٣,٥) أثبت أن $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ ومن ثم اكتب
 $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin \theta$ و $\cos \theta$.

الحل :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$$

$$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$$

$$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$= 2(2 \sin \theta \cos \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= 4 \sin \theta \cos^3 \theta - 4 \sin^3 \theta \cos \theta$$

(٣,٦) أثبت أن $8\sin^4\theta = \cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3$ ومن ثم اكتب $8\cos^4\theta$

بصورة مشابهة.

الحل :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

ولذا نرى أن :

$$\begin{aligned} 8\sin^4\theta &= 8(\sin^2\theta)^2 = 8\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)^2 \\ &= 2(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \\ &= 2 - 4\cos 2\theta + (2\cos^2 2\theta - 1) + 1 \\ &= 3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta \\ 8\cos^4\theta &= 8(\cos^2\theta)^2 = 8\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)^2 \\ &= 2(\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1) \\ &= (2\cos^2 2\theta - 1) + 1 + 4\cos 2\theta + 2 \\ &= \cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3 \end{aligned}$$

(٣.٧) أثبت أن :

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 4\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$$

الحل :

$$\text{بما أن } \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \text{ فإن :}$$

$$\cos\theta + \cos 3\theta = 2\cos 2\theta\cos\theta \quad \text{و} \quad \cos 5\theta + \cos 7\theta = 2\cos 6\theta\cos\theta$$

(لاحظ أن $\cos(-\theta) = \cos\theta$). وبهذا يكون :

$$\begin{aligned}
 \cos\theta + \cos3\theta + \cos5\theta + \cos7\theta &= 2\cos\theta(\cos2\theta + \cos6\theta) \\
 &= 2\cos\theta(2\cos4\theta\cos2\theta) \\
 &= 4\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta
 \end{aligned}$$

(٣,٨) باستخدام صيغة التحليل جد حيث إن $0 < \theta < \pi$ التي تحقق المعادلة:

$$\cos\theta = \cos2\theta + \cos4\theta$$

الحل:

$$\cos2\theta + \cos4\theta = 2\cos3\theta\cos\theta$$

وبهذا نرى:

$$\cos\theta = \cos2\theta + \cos4\theta \Rightarrow \cos\theta(1 - 2\cos3\theta) = 0$$

وعليه فإن:

$$\cos\theta = 0 \text{ أو } \cos3\theta = \frac{1}{2} \text{ ولذا نجد أن:}$$

$$\frac{7\pi}{3} \text{ أو } \frac{5\pi}{3} \text{ أو } 3\theta = \frac{\pi}{3} \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ وبهذا يكون:}$$

$$\frac{7\pi}{9} \text{ أو } \frac{5\pi}{9} \text{ أو } \frac{\pi}{2} \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{9}$$

(٣,٩) إذا كان طول رابطتين بين ذرات جزئ ثلاثي الذرة هما 1.327\AA

و 1.514\AA وكان مقياس زاوية الربط وصل بينهما يساوي 107.5°

فاحسب المسافة بين أبعد ذرتين (انظر الشكل أدناه).

الحل :

باستخدام قاعدة جيب التمام لدينا :

$$\begin{aligned}(BC)^2 &= (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos(\widehat{BAC}) \\ &= (1.327)^2 + (1.514)^2 - 2 \times 1.327 \times 1.514 \\ &\quad \times \cos(107.5^\circ) \\ &= 5.2614A^\circ\end{aligned}$$

وعليه فإن المسافة بين الذرتين B و C هي :

$$. BC = \sqrt{5.2614A^\circ} = 2.294A^\circ$$

