

متسلسلة تايلور

TAYLOR SERIES

(٦,١) جد متسلسلة تايلور للدالة $\sin(x + \frac{\pi}{6})$ لقيم x الصغيرة.

الحل :

$$f(\pi/6) = 1/2 \quad , \quad f(x) = \sin x$$

$$f'(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \quad , \quad f'(x) = \cos x$$

$$f''(\pi/6) = -1/2 \quad , \quad f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(\pi/6) = -\sqrt{3}/2 \quad , \quad f'''(x) = -\cos x$$

$$f''''(\pi/6) = 1/2 \quad , \quad f''''(x) = \sin x$$

ولكن $f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \dots$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4 + \dots \quad , \quad \text{إذن}$$

(٦,٢) جد صيغة ذات الحدين للمقدار $(1+x)^n$. وكتابة \sqrt{c} على الصورة

$$a(1+b)^{i/2}$$

حيث إن a و b ثابتان مناسبان ، احسب $\sqrt{8}$ و $\sqrt{17}$ مقربة لأربع مراتب عشرية.

الحل :

$$f(1) = 1$$

$$، f(x) = x^n$$

$$f'(1) = n$$

$$، f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f''(1) = n(n-1)$$

$$، f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$f'''(1) = n(n-1)(n-2) ، f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \dots$$

، إذن

$$.|x| < 1 \text{ حيث إن } (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \dots$$

إذا كان $n = \frac{1}{2}$ فإن :

$$.|x| < 1 \text{ حيث إن } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{9-1} = 3\sqrt{1-1/9}$$

وبهذا يكون

$$\sqrt{8} = 3 \left[1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} \right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{9} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{9} \right)^3 - \frac{5}{128} \left(-\frac{1}{9} \right)^4 + \dots \right]$$

$$= 3 \left[1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{648} - \frac{1}{11664} - \frac{5}{839808} - \dots \right]$$

$$= 2.8284 \text{ (مقرباً لأربع مراتب عشرية)}$$

كذلك :

$$\sqrt{17} = \sqrt{16 + 1} = 4\sqrt{1 + 1/16}$$

$$\sqrt{17} = 4 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{16} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{16} \right)^3 - \dots \right] \quad \text{ونرى أن}$$

$$= 4 \left[1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{65536} + \dots \right]$$

$$= 4.1231 \quad (\text{مقرباً لأربع مراتب عشرية})$$

من المعلوم أن تقارب صيغة ذات الحدين سريع جداً عندما يكون $|x| \rightarrow 0$.
فمثلاً ، إذا أضفنا الحد x^2 (وهو -1.25×10^{-15}) عند حساب :

$$\sqrt{1.0000001} = (1 + 10^{-7})^{1/2}$$

التقريب الذي نحصل عليه باستخدام معظم الآلات الحاسبة.

إن أفضل طريقة لحساب $\sqrt{a^2 + b^2}$ حيث إن $a \gg b$ هي باستخدام مفكوك

ذات الحدين :

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} &= a \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= a \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{b}{a} \right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{b}{a} \right)^6 - \dots \right] \end{aligned}$$

وذلك لتلافي ما يُسمى "خطأ التقريب" حتى لو استخدمت أجهزة حاسب آلي

عالية الدقة.

(٦,٣) جد متسلسلة تايلور لكل من $\ln(1+x)$ و $\ln(1-x)$ ومن ثم

جد متسلسلة قوى للدالة $\ln[(1+x)/(1-x)]$

الحل :

$$f(1) = 0 \quad , \quad f(x) = \ln x$$

$$f'(1) = 1 \quad , \quad f'(x) = x^{-1}$$

$$f''(1) = -1 \quad , \quad f''(x) = -x^{-2}$$

$$f'''(1) = 2 \quad , \quad f'''(x) = 2x^{-3}$$

$$f^{(4)}(1) = -6 \quad , \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

$$f^{(5)}(1) = 24 \quad , \quad f^{(5)}(x) = 24x^{-5}$$

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \dots \quad \text{ولكن}$$

$$\text{إذن،} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{حيث إن } |x| < 1.$$

وبتعويض $x = -$ في الصيغة أعلاه نجد أن :

$$\text{حيث إن } |x| < 1 \quad \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \quad \text{وبهذا يكون}$$

$$\text{حيث إن } |x| < 1 \quad = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

(٦.٤) جد متسلسلة ماكلورين للدالة $\cos^{-1}(x)$.

الحل :

متسلسلة ماكلورين هي حالة خاصة لمتسلسلة تايلور عندما يكون $a = 0$ (حول نقطة الأصل). ومن الممكن الحصول عليها بالطريقة الاعتيادية. أي بإيجاد

مشتقات $\cos^{-1}(x)$ ومن ثم قيم هذه المشتقات عندما $x = 0$. ولكننا سنستخدم طريقة أسهل من ذلك وهي إيجاد مشتقة $\cos^{-1}(x)$ مرة واحدة فقط ومن ثم استخدام صيغة ذات الحدين واجراء التكامل للناتج حداً حداً.

بوضع $f(x) = \cos^{-1}(x)$ نجد أن $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-1/2}$ ولكن $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots$ إذن ،

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= C - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 - \dots$$

وبما أن $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ فإن $C = \frac{\pi}{2}$. إذن ،

$$\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} - \dots$$

يجب ملاحظة أن متسلسلة ماكلورين صحيحة فقط عندما يكون $|x| < 1$

$$\text{و } 0 \leq \cos^{-1}(x) \leq \pi$$

(٦,٥) احسب قيمة النهايات التالية :

(أ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x + x\sin x - 2}{x^4}$

الحل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - a^3 x^3/6 + \dots}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(a - \frac{a^3}{6} x^2 + \dots \right) \\ &= a \end{aligned}$$

(أ)

أو باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{1} \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots) - 1}{x} \quad (\text{ب}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \dots \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

أو باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x + x\sin x - 2}{x^4} & \quad (\text{ج}) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots) + x(x - x^3/6 + \dots) - 2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{12} + O(x^2) \right) \\ &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

الرمز $O(x^2)$ (من درجة x^2) يعني أن الحدود المحذوفة تحتوي على حدود من الدرجة الثانية فأكثر.

أو بتطبيق قاعدة لوبيتال ثلاث مرات :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x + x\sin x - 2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x\cos x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x\sin x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{12x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{12} \\ &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

(٦,٦) إذا علمت أن للمعادلة $x^3 + 3x^2 + 6x - 3 = 0$ جذراً حقيقياً واحداً فقط فجد هذا الجذر مقرباً لخمس مراتب عشرية باستخدام طريقة نيوتن ورافسون.

الحل :

نفرض أن $f(x) = 3x^2 + 3x^2 + 6x - 3$. عندئذ، $f'(x) = x^3 + 6x + 6$

إذا كان $f(x_n) \approx 0$ فإن التقريب الأفضل لحل المعادلة $f(x) = 0$ هو x_{n+1} الذي

يحقق :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n^2 + 6x_n - 3}{3x_n^2 + 6x_n + 6}$$

$f(x_0) = -3.000$ ، $x_0 = 0$ نبدأ بوضع

$f(x_1) = 0.875$ ، $x_1 = 0.5$

$f(x_2) = 0.03552$ ، $x_2 = 0.4102564$

$f(x_3) = 0.00006633$ ، $x_3 = 0.4062950$

$f(x_4) = 0$ ، $x_4 = 0.4062876$

أي أن $3 + 3x^2 + 6x - 3 = 0$ عندما يكون $x = 0.40629$ (مقرباً
لخمس مراتب عشرية).

