

## مشكلة النقل والتخصيص

### TRANSPORTATION AND ASSIGNMENT PROBLEM

#### مقدمة

قلنا فيما سبق أنه يوجد تطبيقات كثيرة من الممكن أن تصاغ وتحل باستخدام البرمجة الخطية. ولكن بعض هذه التطبيقات سيكون حلها أفضل باستخدام أساليب أخرى زيادة على البرمجة الخطية. من هذه المشاكل مشكلة النقل.

#### أولاً: مشكلة النقل

تعريف: شركة تنتج مُنتج معين في عدة مصانع موزعة على عدة مدن ولتكن (M). هذا المُنتج يراد تصديره إلى عدة مخازن أو مراكز للتوزيع ولتكن (N). كل مصنع من هذه المصانع له طاقة إنتاجية معروفة ومحددة وكل مخزون أو مركز توزيع له طلب معين ومحدد. إذا كانت تكلفة نقل وحدة واحدة (كرتون، صندوق، سيارة،... إلخ) معروفة فإن هدف المشكلة هو نقل هذه الكميات من مصادر الإنتاج (المصانع... مثلاً) إلى مراكز الطلب (مراكز التوزيع... مثلاً) بأقل تكلفة إجمالية ممكنة.

لنفرض أنه يوجد عندنا المثال التالي:

شركة العاير للنقل تقوم بتكرير البترول ونقله من المنطقة الشرقية إلى مراكز التوزيع في كلا من المنطقة الوسطى والغربية. يوجد عند الشركة 3 مناطق إنتاجية و4 مناطق لاستهلاكه وتوزيعه. جدول الإنتاج والطلب والتكلفة معطاة في الجدول التالي:

الإنتاج (العرض)	موقع المصنع
50	الدمام
30	الظهران
70	الجبيل
150	الإجمالي

الطلب	المستودعات (مراكز التوزيع)
30	مكة
60	المدينة
20	جدة
40	الرياض
150	الإجمالي

جدول تكلفة النقل للوحدة الواحدة (ناقلة واحدة):

من / إلى	مكة	المدينة	جدة	الرياض
الدمام	150	180	190	130
الظهران	200	140	150	170
الجبيل	250	120	170	220

المطلوب معرفة التوزيع الأمثل لنقل هذه الكميات المنتجة في الشرقية إلى مراكز التوزيع المختلفة بأقل تكلفة ممكنة.

ملحوظة: مع أن هذه المشكلة من الممكن صياغتها ثم حلها بطريقة البرمجة الخطية السابقة إلا أننا سنرى أنه من الأفضل حلها بطريقة مشكلة النقل "Transportation Problem" وهي طريقة عملت خصيصاً لتحل المشاكل من هذا النوع.

قبل شرح خطوات الحل يجب أن نوضح شكل جدول النقل "Transportation Tableau" ومكوناته الأساسية.

### جدول النقل

لإظهار البيانات في شكل واضح ولتبسيط الإجراءات والحسابات الضرورية يجب أن نضع هذه البيانات في جدول .

هذا الجدول يتكون من 6 عناصر:

- 1- مصادر الإنتاج (المصانع .. وغيرها).
- 2- الإنتاج (الكمية المنتجة...).
- 3- مراكز التوزيع (مستودعات، مخازن ...).
- 4- الطلب.
- 5- تكلفة النقل.
- 6- الكمية المنقولة.

الجدول التالي يبين الشكل العام لجدول النقل:

إلى \ من To \ From	مراكز التوزيع Destinations				العرض Supplies
المصادر Sources	الكمية المنقولة Shipping allocation	تكلفة النقل Shipping cost			
Demands الطلب					Totals الإجمالي

ويلاحظ من الجدول أن كل خلية من خلايا المصدر وكذلك مركز التوزيع قد قسمت إلى قسمين. في الجزء العلوي توجد تكلفة نقل الوحدة وفي الأسفل توجد الكمية المنقولة. ووجود صفر (أو فراغات) في خانة الكمية المنقولة يدل على أنه لم تنقل أي كمية من ذلك المصدر أو المصنع إلى ذلك المركز أو المستودع. هذه الفراغات ستستخدم في الوصول لحلول أخرى قد تكون أقل تكلفة.

الجدول التالي يبين جدول النقل "Transportation Tableau" لشركة العاير لنقلات البترول.

إلى \ To من \ From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150	180	190	130	50
الظهران	200	140	150	170	30
الجبيل	250	120	170	220	70
Demands الطلب	30	60	20	40	150

يلاحظ من الجدول أن كمية الإنتاج (العرض) وكمية الطلب متساويتين. في حالات أخرى قد لا تتساوى الكميتين وهذا ستتطرق إليه مستقبلاً إن شاء الله.

### إيجاد الحل المبدئي الممكن

1- طريقة الركن الشمالي الغربي "The northwest-corner technique"

2- طريقة أقل تكلفة "The minimum-cost technique"

3- طريقة فوجل التقريبية (VAM) Vogel's Approximation Method

1- طريقة الركن الشمالي الغربي

لإيجاد الحل المبدئي باستخدام الطريقة يجب اتباع الخطوات التالية:

(أ) ابدأ بالخلية التي تقع في أقصى الركن الشمالي الغربي.

ب) قارن العرض والطلب لهذه الخلية وضع الكمية الأقل منها، وضع دائرة على هذه الكمية المنقولة واطرح الكمية هذه من كلا الطرفين. في مشكلة النقل السابقة يوجد عرض 50 ناقلة وطلب 30 ناقلة من البترول، ولذلك نحن نخصص 30 ناقلة في هذه الخانة.

الجدول الأول: تعبئة خلية الدمام - مكة

العرض Supplies	الرياض	جدة	المدينة	مكة	إلى \ To من \ From
2050	130	190	180	150	الدمام
	170	150	140	200	الظهران
	220	170	120	250	الجبيل
150	40	20	60	300	Demands الطلب

ج) إذا كانت الخلية المخصصة لها الكمية السابقة هي الخلية الواقعة في أقصى الزاوية الجنوب شرقية تتوقف عند هذا الحد. فيما عدا ذلك أكمل الخطوات التالية.

د) اذهب إلى الخلية المجاورة حسب الشروط التالية:

- إذا كان العرض أكبر من الطلب، إذا تحرك في نفس الصف

- إذا كان العرض أقل من الطلب تحرك في نفس العمود.
  - إذا كان العرض والطلب متساويان تحرك أفقياً باتجاه الزاوية الجنوب شرقية.
- في المشكلة السابقة تحركنا من الدمام - مكة ثم الدمام - المدينة.

الجدول الثاني: تعبئة خلية الدمام - المدينة

من From	الى TO:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	30	150	20	190	130	50-20-0
الظهران		200	140	150	170	30
الجبيل		250	120	170	220	70
Demands الطلب		50-0	60-40	20	40	150

الجدول الثالث: تعبئة خلية الظهران - المدينة

من From	الى TO:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	30	150	20	190	130	50-20-0
الظهران		200	30	150	170	30-0
الجبيل		250	120	170	220	70
Demands الطلب		50-0	60-40-10	20	40	150

## الجدول الرابع: تعبئة خلية الجبيل - المدينة

من From	الى To:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies				
	الدمام	30	150	20	180	190	130	50	20	0
	الظهران		200	30	140	150	170	30		0
	الجبيل		250	10	120	170	220	70	60	
Demands الطلب		30	0	60	40	40	20	40		150

## الجدول الخامس: تعبئة خلية الجبيل - جدة

من From	الى To:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies					
	الدمام	30	150	20	180	190	130	50	20	0	
	الظهران		200	30	140	150	170	30		0	
	الجبيل		250	10	120	20	170	220	70	60	40
Demands الطلب		30	0	60	40	40	20	40		150	

## الجدول السادس: تعبئة خلية الجبيل - الرياض

من From	الى To:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies					
	الدمام	30	150	20	180	190	130	50	20	0	
	الظهران		200	30	140	150	170	30		0	
	الجبيل		250	10	120	20	40	220	70	60	40
Demands الطلب		30	0	60	40	40	20	40		150	

يجب أن نعلم أن عدد الخانات غير الصفرية (غير الفارغة) يجب أن تساوي عدد

$$\text{المصادر (M) + عدد مراكز التوزيع (N) - 1 = (M) + (N) - 1}$$

$$\text{من بين إجمالي الخلايا التي مجموعها = (M) \times (N)}$$

لذلك فإنه في مشكلة النقل السابقة يوجد هناك  $3 \times 4 = 12$  خلية ممكن أن يوضع

فيها كمية للنقل. وعدد الخانات غير الصفرية يجب أن تكون  $3 + 4 - 1 = 6$ . ولذلك إذا

كان عدد الخانات المعبأة أقل من 6 فإن الحل يقال له "متحلل Degeneracy" كذلك

يقال له "ليس أساسى not basic". خطوات الحل المراد شرحها لا تسمح بالحل غير

الأساسى ولكن ستتعرض للحالة التي يكون فيها الحل متحلل "Degeneracy" لاحقاً

إن شاء الله .

ويلاحظ أن هذه الحل المبدئى لم يأخذ بالحسبان التكلفة الإجمالية لنقل هذا

المنتج. الجدول التالي يوضح الحل المبدئى وتكلفتها الإجمالية باستخدام الركن الشمالى

الغربي "The northwest-corner technique"

	الدمام - مكة	الدمام - المدينة	الظهران - المدينة	الجبيل - المدينة	الجبيل - جدة	الجبيل - الرياض	الإجمالي
الكمية المقولة	30	20	30	10	20	40	
التكلفة	150	180	140	120	170	220	
الإجمالي	4500	3600	4200	1200	3400	8800	25700

## 2- طريقة أقل تكلفة "The Minimum-cost Technique"

## خطوات الحل:

(أ) أبدأ من الخلية التي فيها أقل تكلفة نقل . إذا وجد أكثر من واحدة اختر الخلية التي تنقل بها أكبر كمية ممكنة.

(ب) قارن بين المتاح من الطلب والعرض وضع الكمية الأقل وضع عليها دائرة وخفض الطلب والعرض بهذه القيمة.

(ج) إذا كان ليس من الممكن تخصيص كميات للنقل قف وهذا هو الحل المبدئي. فيما عدا ذلك نذهب إلى الخلية والتي يوجد بها أقل تكلفة نقل تالية.

في المشكلة السابقة نلاحظ أن أقل تكلفة نقل للوحدة تقع في الخلية الخاصة بالنقل من الجبيل إلى المدينة (وهي 120 ريالاً) ويوجد 70 في خانة العرض و60 في خانة الطلب، لذلك نضع 60 ناقلة لتتنقل البترول من الجبيل إلى المدينة.

من To: From	مكة	المدينة	حدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150	180	190	130	50
الظهران	200	140	150	170	30
الجبيل	250	120	170	220	10
Demands الطلب	30	60 0	20	40	150

بعد ذلك نتقل من الخلية الجبيل - المدينة للخلية الدمام - الرياض (تكلفة 130 ريالاً) ونقارن بين عرض 50 ناقلة مع طلب 40 ناقلة ولذلك نضع 40 في الدمام - الرياض. وهي أجمالي ما يحتاجه الرياض.

من From	التي TO:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
	الدمام	150	180	190	130 (40)	<del>50</del> 10
	الظهران	200	140	150	170	30
	الجبيل	250	120 (60)	170	220	<del>70</del> 10
Demands الطلب		30	<del>60</del> 0	20	<del>40</del> 0	150

ثم نتقل إلى الخلية الظهران - المدينة ولكن لا نستطيع أن نقل أي كمية؛ لأن جميع طلبات المدينة قد حددت. ولذلك نتحرك للخلايا التالية في تقليل التكلفة (150 ريالاً تكلفة النقل للوحدة) وهما خلية الدمام - مكة والظهران - جدة ونضع 20 و10 في كل منهما.

من From	التي TO:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
	الدمام	150	180	190	130 (40)	<del>50</del> 10
	الظهران	200	140	150 (20)	170	30
	الجبيل	250	120 (60)	170	220	<del>70</del> 10
Demands الطلب		30	<del>60</del> , 0	<del>20</del> , 0	<del>40</del> , 0	150

يأتي الدور على الخلايا الخاصة بالظهران - الرياض والجبيل - جدة، ثم الدمام - المدينة ولكن لا نستطيع أن نخصص أي كمية في هذه الخلايا؛ وذلك لعدم سماح العرض أو الطلب في هذه الخلايا. لذلك نتقل إلى الخلية الظهران - مكة ونخصص فيها 10 ناقلات ثم أخيرا الجبيل - مكة ونخصص فيها 10 ناقلات وبذلك يتم نقل جميع الكمية المنتجة في تلك المصانع إلى مراكز التوزيع المحتاجة.

من From	إلى To:	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	10	150	180	190	130	50
الظهران	10	200	140	150	170	30
الجبيل	10	250	120	170	220	70
Demands الطلب		30, 20, 10, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة = 6 وهو الرقم المطلوب للحصول على حل

ابتدائي أساسي.

الجدول التالي يوضح الحل الابتدائي بطريقة التكلفة الأقل والتكلفة الإجمالية

لنقل جميع الإنتاج

	الدمام - مكة	الظهران - مكة	الجبيل - مكة	الجبيل - المدينة	الظهران - جدة	الدمام - الرياض	
الكمية المخصصة	10	10	10	60	20	40	150
تكلفة الوحدة الواحدة	150	200	250	120	150	130	
	1500	2000	2500	7200	3000	5200	21400

هنا تلاحظ أن طريقة أقل تكلفة (The minimum-cost technique) أدت إلى أقل تكلفة إجمالية مقارنة مع طريقة الركن الشمالي الغربي (The northwest-corner technique). ولكن هذا هو ليس الحالة الدائمة، حيث إنه في بعض الحالات الخاصة فإن طريقة الركن الشمالي الغربي تعطي تكاليف أقل. ولكن عموماً طريقة الركن الشمالي الغربي (The northwest-corner technique) أسهل بكثير من طريقة أقل تكلفة (The minimum-cost technique) ولكن طريقة أقل تكلفة تعطي أقل تكلفة في الحل الابتدائي.

### 3- طريقة فوجل التقريبية (VAM) Vogel's Approximation Method

تعتبر طريقة فوجل من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من السرعة في الوصول إلى الحل الأمثل أو الحل القريب من الحل الأمثل ونادراً ما تكون طريقتي أقل التكاليف والطريقة الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل. لكن طريقة فوجل تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه طريقتا أقل التكاليف والزاوية الشمالية الغربية.

وتتلخص خطوات طريقة فوجل التقريبية كما يلي:

- 1- حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وتأشير هذه الفروق على جانبي جدول الحل.
- 2- تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق.
- 3- اختيار الخلية ذات الكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود.
- 4- في الخلية التي اختيرت في الخطوة (3) نقارن احتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر لناخذ القيمة الأقل.
- 5- نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

سيتم توضيح طريقة فوجل بالاستعانة بالمثال التالي:

الفرق	العرض supplies	D3	D2	D1	إلى من
7-6=1	10	8	7	6	S1
78-15=63		78	80	15	S1
الأكبر 73	25	5	5	15	Demands الطلب
		78-8=70	80-7=73	15-6=9	الفرق

• نجد الفرق في التكلفة بين أقل تكلفتين للصفوف وللأعمدة كما هو مبين في الجدول السابق.

• نلاحظ أن للعمود الثاني أكبر فرق والذي يساوي 73.

• نبحث عن أقل تكلفة في العمود الثاني، فنجد أن للخلية (S<sub>1</sub>, D<sub>2</sub>) أقل كلفة

والبالغة 7.

• نقارن احتياجات مركز الطلب D<sub>2</sub> مع الكمية المتاحة في المصدر S<sub>1</sub> ثم نختار

أقل الكميتين.  $\text{Min}(10,5) = 5$ .

الفرق	العرض Supplies	D3	D2	D1	إلى من
7-6=1	10-5=5	8	7	6	S1
78-15=63		78	80	15	S2
	25	5	5-5=0	15	Demands الطلب
الأكبر 73=		78-8=70	80-7=73	15-6=9	الفرق

• ويتم تعديل العرض والطلب في الجدول السابق، وهذه العملية تؤدي إلى تلبية كامل احتياجات المركز  $D_2$ ، لذا يشطب المركز  $D_2$  من الجدول لغرض إعادة حساب الفروق بين التكاليف مرة أخرى.

• يتم حساب الفرق في الكلفة لكل صف وعمود في الجدول السابق.

• نلاحظ أن العمود الثالث ( $D_3$ ) أعلى فرق في الكلفة ويساوي 70.

• نبحث عن أقل تكلفة في العمود الثالث، فنجد أن للخلية ( $D_3, S_1$ ) أقل كلفة

والبالغة 8.

• نقارن احتياجات مركز الطلب  $D_3$  مع ما هو متاح من كميات لدى المصدر  $S_1$ ،

ثم نختار أقل الكميتين.  $\text{Min}(5,5) = 5$ .

يتم شطب مركز الطلب  $D_2$  كما في الجدول التالي:

الفرق	العرض Supplies	D3	D2	D1	إلى من
8-6=2	5-5=0	8	7	6	S1
78-15=63	15	78	80	15	S2
	25	5	0	15	الطلب Demands
الأكبر 70=		78-8=70	XXXXXXXXXX	15-6=9	الفرق

وبعد شطب العمود الثالث (D3) والصف الأول (S1) وكتابة الجدول من

جديد ينتج:

الفرق	المعرض Supplies	D3	D2	D1	الطلب Deman ds
		8	7	6	
Xxxxx	0	5	5		S1
	15	78	80	15	S2
	25	0	0	15	الطلب Deman ds
		xxxxxxx	xxxxxxx		الفرق

عند مرحلة الحل هذه لا نحتاج لحساب الفرق في الكلفة للصفوف والأعمدة بسبب وجود خلية واحدة (D1,S2) ومركز واحد فقط وهو (D1) والذي لم يحصل على احتياجاته حتى الآن.

إن ما نحتاجه هنا البحث عن أقل كلفة في العمود الأول، والذي نلاحظ فيه أن المصدر  $S_2$  يقابل أقل كلفة والتي تساوي 15 لذا سيتم تخصيص كامل محتويات المصدر  $S_2$  لتلبية جزء من احتياجات مركز الطلب  $D_1$ ، ويتم إلغاء المركز  $S_2$ .

وبوضع أكبر كمية ممكنة في هذه الخلية وهي  $\min(15,15)=15$  نجد أن جدول

الحل الأساسي الأول هو كما يلي:

إلى \ من	D1	D2	D3	العرض Supplies	الفرق
S1	6	7	8	0	XXXXXX
S2	15	80	78	0	XXXXXX
Demands الطلب	0	0	0	25	
الفرق	XXXXXXXX	XXXXXXXX	XXXXXXXX		

### اختبار أمثلية الحل الأولي

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لاختبار ما إذا كان الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل، أي الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلولاً أمثل منه؟ هنا طريقتان لاختبار أمثلية الحل هما:

1- طريقة المسار المتعرج The Stepping Stone Method

2- طريقة التوزيع المعدلة (MODI) Modified Distribution Method

### 1- طريقة المسار المتعرج The Stepping Stone Method

تقضي طريقة المسار المتعرج بتقييم جميع الخلايا غير المشغولة (الفارغة) في جدول (الحل الأولي) لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة على مجموع التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة.

وإذا وجدنا أن ملء خلية معينة فارغة سيؤدي إلى تقليل تكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للاستفادة من ذلك. وتستمر عملية تقييم كل جدول نقل إلى

أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي على زيادتها.

القواعد الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق:

- 1- يجب أن يبدأ وينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.
- 2- يجب أن يتألف المسار المغلق من مجموعة من المستقيبات الأفقية والعمودية بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق.
- 3- وجود مسار مغلق واحد لكل خلية غير مشغولة.
- 4- نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة.
- 5- حتى يكون الحل أمثلاً يجب أن تكون التكلفة لكل خلية فارغة قيمة موجبة أو مساوية للصفر.

افترض أننا بدأنا بالحل الابتدائي لطريقة أقل تكلفة "The minimum-cost technique". لمعرفة ما إذا كان هناك حل أفضل (أقل تكلفة) من هذا الحل الابتدائي، فإنه يجب أن نختبر "نقيّم" كل خلية فارغة لمعرفة ما إذا كان استخدامها سيؤدي إلى تخفيض التكاليف الإجمالية للنقل.

الاختبار يشتمل على حساب صافي التغير في التكلفة (هل تنخفض أم لا) إذا خصصت كمية جديدة في هذه الخلية الفارغة. إذا انخفضت التكلفة الإجمالية نتيجة لاستخدام هذه الخلية الفارغة فإن هذه الخلية الفارغة يجب أن تكون ضمن الحل " أن تُشغل بكمية جديدة".

عملية اختبار وتقييم هذه الخلايا الفارغة هي عملية مشابهة لتحسين الحل الابتدائي في جدول السمبلكس.

## الحل الابتدائي

انظر إلى جدول الحل الابتدائي بطريقة أقل تكلفة "The minimum-cost technique"

TO From من الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180	190	130 (40)	50, 10, 0
الظهران	200 (10)	140	150 20	170	30, 40, 0
الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	70, 10, 0
Demands الطلب	30, 20, 40, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

افترض أننا أردنا اختيار الخلية الدمام - المدينة وذلك بوضع وحدة واحدة في هذه الخلية فإن تكلفة الوحدة هذه سيكون 180 ريال. ولكن بإرسال وحدة "ناقلة" إضافية من الدمام إلى المدينة سيؤدي إلى زيادة إجمالي الكميات المنقولة من الدمام إلى  $(1 + 60) = 61$  وكذلك زيادة إجمالي الكميات المنقولة للمدينة إلى  $(1 + 40 + 10) = 51$  وهذه غير ممكن. لأن مصنع الدمام لا يستطيع إنتاج أكثر من 50 ناقلة ولا المدينة تستطيع استيعاب أكثر من 60 ناقلة على الأكثر. لذلك فإنه لا بد من مراعاة كميات الطلب والعرض المحددة.

للتأكد من عدم تغير كميات الطلب والعرض المحددة فإنه لا بد من إجراء دوران "Loop" من عمليات الإضافة والتخفيض في الخانات المشغولة والخانة الفارغة الجديدة كما يلي:

نضع وحدة واحدة في الخلية الدمام - المدينة، ونتحمل تكلفة هذه الوحدة (وهي 180) كتكاليف إضافية للحل الابتدائي، ونعرّف هذه الخلية بأنها خلية يراد زيادتها بوحدة واحدة ونضع فيها العلامة "⊕". ولتخفيف أثر الزيادة في الخلية الدمام-المدينة فإننا نطرح وحدة واحدة من الخلية الدمام - مكة ونخصم تكلفتها البالغة 150 ريالاً للوحدة حتى لا يزيد المنقول من الدمام عن 50 ناقلة " الحد الأعلى لمصنع الدمام". ونعرّف هذه الخلية بأنها خلية يراد تخفيضها بوحدة واحدة ونضع فيها العلامة "⊖". ولتعويض النقص الجديد في الدمام - مكة فإننا نزيد الخلية الجبيل - مكة بوحدة واحدة تكلفتها 250 ريالاً ونعرفها بالعلامة "⊕" ونخفض الخلية الجبيل - المدينة بوحدة واحدة ونوفر على أنفسنا تكلفتها البالغة 120 ريالاً ثم نعرفها بالعلامة "⊖" دليلاً على تخفيضها. بذلك نكون قد أنهينا الدورة وإليك الجدول التالي الذي يوضح هذه العملية:

من TO الى From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	⊖ 150 10	⊕ 180	190	130	50, 10, 0
الظهران	200 10	140	150	170	30, 10, 0
الجبيل	⊕ 250 10	⊖ 120 60	170	220	70, 10, 0
Demands الطلب	30, 20, 10, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

صافي التغير في التكلفة: بعد إجراء عملية الدوران السابقة وتحديد الخانات أو الخلايا المراد زيادتها أو تخفيضها فإنه يجب معرفة صافي التغير الذي ستحدثه هذه العملية أو الدورة سواء كان زيادة التكاليف أو خفضها. الجدول التالي يوضح صافي التغير في التكلفة الإجمالية بوضع وحدة واحدة في الخلية الدمام المدينة.

الخلية	التغير في الكمية المنقولة		التغير في التكلفة		الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	التخفيض في التكاليف	
الدمام - المدينة	0	1	180+		180+
الدمام - مكة	10	9		150-	150-
الجبيل - مكة	10	11	250+		250+
الجبيل - المدينة	60	59		120-	120-
صافي التغير	80	80	430+	270-	160+

لذلك فإن صافي التغير هو زيادة في التكلفة الإجمالية بمقدار 160 ريالاً لكل وحدة منقولة باستخدام هذه الخلية. ونستنتج أن نقل أي كمية من الدمام - المدينة سيكون غير أمثل.

نضع الرقم 160 " الذي هو صافي التغير في التكلفة الإجمالية نتيجة استخدام هذه الخلية " داخل الخلية ولكن بدون دائرة ليسهل تمييزه.

TO من From الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180 +160	190	130 (40)	50, 10, 0
الظهران	200 (10)	140	150 20	170	30, 10, 0
الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	70, 10, 0
Demands الطلب	30, 20, 10, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

## الحل الثاني

الآن باتباع نفس الخطوات دعنا نختبر إمكانية استخدام الخلية الدمام - جدة  
 لاختبار الخلية الدمام - جدة نضع وحدة واحدة في هذه الخلية وبذلك تكون  
 تكلفة الوحدة هذه سيكون 190 ريال. ولكن بإرسال وحدة "ناقلة" إضافية من الدمام  
 إلى جدة سيؤدي إلى زيادة إجمالي الكميات المنقولة من الدمام إلى  $(51 = 1 + 40 + 10)$   
 وكذلك زيادة إجمالي الكميات المنقولة لجدة إلى  $21 (1 + 20)$  وهذا غير ممكن. لأن مصنع  
 الدمام لا يستطيع إنتاج أكثر من 50 ناقلة ولا جدة تستطيع استيعاب أكثر من 20 ناقلة  
 على الأكثر. لذلك فإنه لا بد من مراعاة كميات الطلب والعرض المحددة.  
 للتأكد من عدم تغير كميات الطلب والعرض المحددة فإنه لا بد من إجراء  
 دوران "Loop" من عمليات الإضافة والتخفيض في الخانات المشغولة والخانة الفارغة  
 الجديدة هذه (الدمام - جدة) كما يلي:

نضع وحدة واحدة في الخلية الدمام - جدة، ونتحمل تكلفة هذه الوحدة (وهي 190) كتكاليف إضافية للحل الابتدائي، ونعرّف هذه الخلية بأنها خلية يراد زيادتها بوحدة واحدة ونضع فيها العلامة "⊕". ولتخفيف اثر الزيادة في الخلية الدمام-جدة فإننا نطرح وحدة واحدة من الخلية الدمام-مكة ونخصم تكلفتها البالغة 150 ريالاً للوحدة حتى لا يزيد المتقول من الدمام عن 50 ناقلة " وهو الحد الأعلى لمصنع الدمام". ونعرّف هذه الخلية بأنها خلية يراد تخفيضها بوحدة واحدة ونضع فيها العلامة "⊖". ولتعويض النقص الجديد في الدمام - مكة فإننا نزيد الخلية الظهران - مكة بوحدة واحدة وتكلفتها 200 ريالاً ونعرفها بالعلامة "⊕" ونخفض الخلية الظهران - جدة بوحدة واحدة ونوفر على أنفسنا تكلفتها البالغة 150 ريالاً ثم نعرفها بالعلامة "⊖" دليلاً على تخفيضها. بذلك نكون قد انهينا الدورة واليك الجدول التالي الذي يوضح هذه العملية:

من To From الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 ⊖ 10	180 +160	190 ⊕	130 40	50, 10, 0
الظهران	200 ⊕ 10	140	150 ⊕ 20	170 ⊖	30, 40, 0
الجبيل	250 10	120 60	170	220	70, 40, 0
Demands الطلب	30, 20, 40, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

صافي التغير في التكلفة (لإدخال الخلية الدمام - جدة): بعد إجراء عملية الدوران السابقة وتحديد الخانات أو الخلايا المراد زيادتها أو تخفيضها فإنه يجب معرفة صافي التغير الذي ستحدثه هذه العملية أو الدورة سواء كان زيادة التكاليف أو خفضها. الجدول التالي يوضح صافي التغير في التكلفة الإجمالية بوضع وحدة واحدة في الخلية الدمام - جدة.

الخلية	التغير في الكمية المنقولة		التغير في التكلفة		الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	التخفيض في التكاليف	
الدمام - جدة	0	1	190+		190+
الدمام - مكة	10	9		150-	150-
الظهران - مكة	10	11	200+		200+
الظهران - جدة	20	19		150-	150-
صافي التغير	80	80	390+	300-	90+

لذلك فإن صافي التغير هو زيادة في التكلفة الإجمالية بمقدر +90 ريالاً لكل وحدة منقولة باستخدام هذه الخلية. ونستنتج أن نقل أي كمية من الدمام - جدة سيزيد التكاليف.

نضع الرقم +90 " الذي هو صافي التغير في التكلفة الإجمالية نتيجة استخدام هذه الخلية " داخل الخلية أيضاً ولكن بدون دائرة ليسهل تمييزه .

من الى From TO	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180 +160	190 +90	130 (40)	50, 10, 0
الظهران	200 (10)	140	150 (20)	170	30, 10, 0
الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	70, 10, 0
Demands الطلب	30, 20, 10, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

وبنفس الخطوات السابقة يمكن اختبار جميع الخلايا الفارغة واستخراج صافي التغير في التكلفة الإجمالية.

اختبار الخلية (الظهران - المدينة) / صافي التغير في التكلفة الإجمالية

الخلية	التغير في الكمية المتقولة	التغير في التكلفة		التخفيض في التكاليف	الإجمالي
		من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)		
الظهران - المدينة	0	1	140+		140+
الظهران - مكة	10	9		200-	200-
الجبيل - مكة	10	11	250+		250+
الجبيل المدينة	60	59		120-	120-
صافي التغير	80	80	390+	320-	70+

## اختبار الخلية الظهران - الرياض / صافي التغير في التكاليف الإجمالية

الخلية	التغير في الكمية المنقولة		التغير في التكلفة		الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	التخفيض في التكاليف	
الظهران - الرياض	0	1	170+		170+
الرياض - الدمام	40	39		130-	130-
الدمام - مكة	10	11	150+		150+
الظهران - مكة	10	9		200-	200-
صافي التغير	60	60	320+	330-	10-

## اختبار الخلية الجبيل - جدة / صافي التغير في التكلفة الإجمالية

الخلية	التغير في الكمية المنقولة		التغير في التكلفة		الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	التخفيض في التكاليف	
الجبيل - جدة	0	1	170+		170+
الظهران - جدة	20	19		150-	150-
الظهران - مكة	10	11	200+		200+
الجبيل - مكة	10	9		250-	250-
صافي التغير	40	40	370+	400-	30-

## اختبار الخلية الجيبيل - الرياض / صافي التغير في التكلفة الإجمالية

الخلية	التغير في الكمية المنقولة		التغير في التكلفة		الإجمالي
	من (قبل) (النقل)	إلى (بعد) (النقل)	الزيادة في التكاليف	التخفيض في التكاليف	
الجيبيل - الرياض	0	1	220+		220+
الدمام - الرياض	40	39		130-	130-
الدمام - مكة	10	11	150+		150+
الجيبيل - مكة	10	9		250-	250-
صافي التغير	60	60	370+	380-	10-

بإدخال صافي التغيرات في التكلفة الكلية نتيجة أشغال الخلايا الفارغة إلى الجدول الابتدائي المحسوب بطريقة أقل تكلفة "The minimum-cost technique" فإن الجدول المحتوى على صافي التغيرات يكون كالتالي:

من TO From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 10	180 +160	190 +90	130 40	50, 10, 0
الظهران	200 10	140 +70	150 20	170 -10	30, 40, 0
الجيبيل	250 10	120 60	170 -30	220 -10	70, 40, 0
Demands الطلب	30, 20, 40, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

من الجدول السابق نلاحظ أن هناك 3 خلايا فيها صافي التغير بالسالب. ومعنى ذلك أن شغل هذه الخلايا بكميات جديدة ستؤدي إلى تخفيض التكاليف الإجمالية.

حيث إن الخلية (الجيبيل - جدة) تؤدي إلى أعظم تخفيض لتكلفة الوحدة الواحدة (-30) فإنه سيتم اختيارها لتكون خلية داخلة في الحل. والتخفيض في إجمالي التكاليف سيكون عبارة عن 30 ريالاً لكل ناقلة يتم تحويلها إلى هذا الطريق (الجيبيل - جدة)

ملاحظة: هذه الخطوات هي مشابهة تماماً لاختبار الصف الأخير في جدول السمبلكس لاختيار المتغير الداخِل وهو المقابل لأكبر قيمة سالبة. كذلك وبما أن الخلية (الجيبيل - جدة) سيتم إدخالها الحل، فإنه يجب اختيار خلية أخرى للخروج من الحل الأساسي وذلك حتى يحافظ الحل الأساسي على ما مجموعه 6 خلايا مشغولة ليكون حلاً أساسياً مقبولاً.

لتحديد الخلية الخارجة، فإنه يجب ملاحظة النقاط التالية:

1- يجب أن نخصص (نضع) أكبر كمية ممكنة في الخلية الجديدة الداخلة (في مثالنا هذا هي الجيبيل - جدة) وذلك لأن ذلك سيؤدي إلى خفض التكاليف الإجمالية.

2- يجب المحافظة على مستوى الكميات المعروضة والمطلوبة الإجمالية.

3- الكميات المخصصة لكل خلية يجب أن تكون موجبة دائماً.

4- يجب أن يرافق كل إضافة للخلية الجديدة (الجيبيل - جدة) انخفاض في خلية

أخرى (الظهران - جدة، وكذلك الجيبيل - مكة).

لذلك فإن الطريقة هي تخصيص وحدات من تلك الخليتين (الظهران - جدة، وكذلك الجيبيل - مكة) حتى تقلل الكمية الموجودة في أي منهم إلى الصفر. وعند ذلك تنتهي تلك الخلية وتُبعد من الحل الأساسي.

في مثالنا هذا فإن الخليتين المرشحتين للخروج من الحل الأساسي هما (الظهران-جدة، وكذلك الجبيل - مكة) . لاحظ أن إشارة سالبة يجب أن توضع على الخليتين المرشحتين للخروج لأن الزيادة في الخلية (الجبيل - جدة) ستؤدي إلى تقليل كلا من الخلية الظهران-جدة، وكذلك الجبيل - مكة.

كذلك لاحظ بما أن الكميات الموجودة في الخلية (الجبيل - مكة) تساوي 10 ناقلات، وهي أقل من الكمية الموجودة في الخلية (الظهران-جدة)، والتي تساوي 20 ناقلة، وهذا يعني أن عملية تخفيض التكلفة هذه ستُنهي الخلية (الجبيل - مكة) أولاً. ومنه فإن جميع العشرة ناقلات الموجودة بخلية (الجبيل - مكة) سيتم تحويلها إلى الخلية (الجبيل - جدة)، ويتم تخفيض الخلية (الظهران-جدة) وزيادة الخلية (الظهران - مكة) بهذه الكمية للإبقاء على نفس المستوى من العرض والطلب وعند ذلك يكون صافي التغير في التكلفة الإجمالية الناتج من عملية الدوران هذه هو كما يلي:

الخلية	التغير في الكمية المنقولة		التغير في التكلفة		الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	التخفيض في التكاليف	
الجبيل - جدة	0	10	1700+		1700+
الظهران-جدة	20	10		1500-	1500-
الظهران - مكة	10	20	2000+		2000+
الجبيل-مكة	10	0		2500-	2500-
صافي التغير	40	40	3700+	4000-	300-

وبذلك يكون جدول الحل الثاني للمشكلة كما يلي:

من TO From الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180	190 +90	130 (40)	50, 10, 0
الظهران	200 (20)	140	150 (10)	170	30, 10, 0
الجبيل	250	120 (60)	170 (10)	220	70, 10, 0
Demands الطلب	30, 20, 10, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

الجدول التالي يوضح إجمالي التكلفة لهذا الحل:

	الدمام - مكة	الظهران - مكة	الجبيل - المدينة	الجبيل - جدة	الظهران - جدة	الدمام - الرياض	الإجمالي
الكمية المخصصة	10	20	60	10	10	40	150
تكلفة الوحدة الواحدة	150	200	120	170	150	130	
	1500	4000	7200	1700	1500	5200	21100

يلاحظ أعلاه أن التكلفة الإجمالية لنقل جميع المنتج انخفضت من 21400 ريالاً في الحل الابتدائي الأول إلى 21100 ريالاً للحل الثاني.

إيجاد الحل الأمثل: لمعرفة ما إذا كان الحل الذي تم التوصل إليه حلاً أمثلاً أم لا، فإنه يجب علينا مرة أخرى اختبار "تقييم" جميع الخلايا الفارغة فيما إذا كان أيها سيخفض التكاليف الإجمالية إلى أقل حد ممكن من الحل السابق.

اختبار صافي التغير في شغل هذه الخلايا هو كما يلي:

## 1- الخلية (الحانة) الدمام - المدينة

الخلية	التغير في الكمية المنقولة		التغير في التكلفة		الإجمالي
	من (قبل) (النقل)	إلى (بعد) (النقل)	الزيادة في التكاليف	التخفيض في التكاليف	
الدمام - المدينة	0	1	180+		180+
الجبيل - المدينة	60	59		120-	120-
الجبيل - جدة	10	11	170+		170+
الظهران - جدة	10	9		150-	150-
الظهران - مكة	20	21	200+		200+
الدمام - مكة	10	9		150-	150-
					130+

## 2- الدمام - جدة

الخلية	التغير في التكلفة			الإجمالي
	من (قبل) (النقل)	إلى (بعد) (النقل)	الزيادة في التكاليف	
الدمام - جدة	0	1	190+	190+
الظهران - جدة	20	19		150-
الظهران - مكة	20	21	200+	200+
الدمام - مكة	10	9		150-
	50	50		90+

## 3- الظهران - المدينة

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			التخفيض في التكاليف	الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		
الحلقة					
الظهران - المدينة	0	1	140+		140+
الظهران - جدة	10	9		150-	150-
الجبيل - جدة	10	11	170+		170+
الجبيل - المدينة	60	59		120-	120-
	80	80	310+	270-	40+

## 4 - الظهران - الرياض

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			التخفيض في التكاليف	الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		
الحلقة					
الظهران - الرياض	0	1	170+		170+
الدمام - الرياض	40	39		130-	130-
الدمام - مكة	10	11	150+		150+
الظهران - مكة	20	19		200-	200-
	70	70	320+	330-	10-

## 5- الجبيل - مكة

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			التخفيض في التكاليف	الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		
الجبيل - مكة	0	1	250+		250+
الجبيل - جدة	10	9		170-	170-
الظهران - جدة	10	11	150+		150+
الظهران - مكة	20	19		200-	200-
	40	40	400+		30+

## 6- الجبيل - الرياض

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			التخفيض في التكاليف	الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		
الجبيل - الرياض	0	1	220+		220+
الدمام - الرياض	40	39		130-	130-
الدمام - مكة	10	11	150+		150+
الظهران - مكة	20	19		200-	200-
الظهران - جدة	10	11	150+		150+
الجبيل - جدة	10	9		170-	170-
			520+	500-	20+

بعد وضع صافي التغير في التكلفة الإجمالية لكل خلية فارغة فإنه يمكن الآن كتابة جدول تقييم الخلايا الفارغة كالتالي:

TO من From إلى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (10)	180 +130	190 +90	130 (40)	50, 10, 0
الظهران	200 (20)	140 +40	150 (10)	170 -10	30, 40, 0
الجبيل	250 +30	120 (60)	170 (10)	220 +20	70, 40, 0
Demands الطلب	30, 20, 10, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

يلاحظ أن جميع القيم التي في الخلايا الفارغة موجبة ماعدا الخلية (الظهران-الرياض) فإنها بإمكانها تخفيض التكلفة بنسبة 10 ريالاً لكل ناقلة جديدة ستستخدم هذا الطريق. ومع كل وحدة إضافية للخلية (الظهران-الرياض) فإنه يجب خفض كلا من (الدمام - الرياض) والظهران - مكة بوحدة واحدة للحفاظ على مستوى العرض والطلب.

لذلك فإن أحد الحلين (الدمام - الرياض والظهران - مكة) مرشح للخروج من الحل الأساسي للإبقاء على 6 خلايا مشغولة فقط.

ولكن حيث إن الخلية (الخانة) الدمام - الرياض مخصص لها 40 ناقلة وخانة الظهران - مكة مخصص لها 20 ناقلة فقط فإن الخلية (الظهران - مكة) ستكون الأولى من الخانتين التي ستصل إلى صفر أولاً. وستكون الخلية الظهران-مكة هي الخلية الأولى التي تغادر الحل الأساسي.

إذا الخلية الظهران - مكة ستغادر الحل الأساسي والخلية الظهران - الرياض ستدخل الحل وستنقل كامل القيمة الموجودة في الخلية الخارجة إلى الخلية الداخلة.

صافي التغير في التكلفة الإجمالية نتيجة لهذه العملية الدورانية هو الآتي:

الخلية	التغير في التكلفة			الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	
الظهران - الرياض	0	20	170×20	3400+
الدمام - الرياض	40	20		130×20
الدمام - مكة	10	30	150×20	3000+
الظهران - مكة	20	0		200×20
	70	70		200-

### الحل الثالث

بعد اختبار الحل الثاني والتأكد من وجود إمكانية تخفيض التكاليف الإجمالية وعمل اللازم لتخفيض التكاليف نجد أن جدول الحل الثالث يكون كالتالي:

TO From من الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180	190	130 (20)	50, 10, 0
الظهران	200	140	150 (10)	170 (20)	30, 10, 0
الجبيل	250	120 (60)	170 (10)	220	70, 10, 0
Demands الطلب	30, 20, 10, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

تقييم الخلايا الفارغة: مرة أخرى يجب أن نقيم جميع الخلايا الفارغة في جدول الحل الثالث والتأكد من وجود أو عدم وجود تخفيض في التكاليف.

## 1- الدمام - المدينة

صافي التغير في التكاليف الإجمالية:

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			الإجمالي	
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		التخفيض في التكاليف
الحلقة					
الدمام - المدينة	0	1	180+		180+
الدمام - الرياض	20	19		130-	130-
الظهران - الرياض	20	21	170+		170+
الظهران - جدة	10	9		150-	150-
الجبيل - جدة	10	11	170+		170+
الجبيل - المدينة	60	59		120-	120-
	120	120	520+	400-	120+

## 2- الدمام - جدة

صافي التغير في التكاليف الإجمالية

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			الإجمالي	
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		التخفيض في التكاليف
الحلقة					
الدمام - جدة	0	1	190+		190+
الدمام - الرياض	20	19		130-	130-
الظهران - الرياض	20	21	170+		170+
الظهران - جدة	10	9		150-	150-
	50	50	360+	280-	80+

## 3- الظهران-مكة

## صافي التغير في التكاليف الإجمالية

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			التخفيض في التكاليف	الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		
الخلية					
الظهران-مكة	0	1	200+		200+
الظهران-الرياض	20	19		170-	170-
الدمام-الرياض	20	21	130+		130+
الدمام-مكة	30	29		150-	150-
الإجمالي	80	80	330+	320-	10+

## 4- الظهران - المدينة

## صافي التغير في التكاليف الإجمالية

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			التخفيض في التكاليف	الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		
الخلية					
الظهران-المدينة	0	1	140+		140+
الظهران-جدة	10	9		150-	150-
الجبيل-جدة	10	11	170+		170+
الجبيل-المدينة	60	59		120-	120-
الإجمالي	80	80	310+	270-	40+

## 5- الجبيل - مكة

## صافي التغير في التكاليف الإجمالية

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	
الجبيل - مكة	0	1	250+	250+
الدمام - مكة	30	29		150-
الرياض - الدمام	20	21	130+	130+
الظهران - الرياض	20	19		170-
الظهران - جدة	10	11	150+	150+
الجبيل - جدة	10	9		170-
الإجمالي	80	80	550+	490-
				40+

## 6- الجبيل - الرياض

## صافي التغير في التكاليف الإجمالية

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف	
الجبيل - الرياض	0	1	220+	220+
الظهران - الرياض	20	19		170-
الظهران - جدة	10	11	150+	150+
الجبيل - جدة	10	9		170-
الإجمالي	40	40	370+	340-
				30+

نتيجة التقييم: يلاحظ من الاختبارات السابقة للخلايا الفارغة بان جميع قيم "صافي التغير في التكاليف الإجمالية" خرجت بالموجب. وهذا دليل على أن الحل هو حل نهائي أمثل. أي هو الحل الوحيد الذي يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية إلى أقل حد ممكن ولا يوجد أي إمكانية لتطوير الحل إلى الأفضل.

جدول إجمالي التكلفة للنقل:

الجدول التالي يبين إجمالي الكميات المخصصة للنقل بأقل تكلفة إجمالية ممكنة.

	الدمام -مكة	الظهران -الرياض	الجبيل - المدينة	الجبيل - جدة	الظهران - جدة	الدمام - الرياض	الإجمالي
الكمية المخصصة	30	20	60	10	10	20	150
تكلفة الوحدة الواحدة	150	170	120	170	150	130	
	4500	3400	7200	1700	1500	2600	20900

ويلاحظ أن التكلفة الإجمالية انخفضت من 21100 في الحل الثاني إلى 20900 في الحل الثالث " وهو الحل الأمثل"، أي بتوفير 200 ريال.

## 2- طريقة التوزيع المعتدلة MODI لاختبار الخلايا الفارغة

هي طريقة أخرى لتقييم أي خلية فارغة لأي جدول نقل. هذه الطريقة تسمى طريقة التوزيع المعدلة "MODI Modified Distribution Method" وهي قائمة على الخاصية الثنائية لصياغة البرنامج الخطي لمشكلة النقل. وهي تقول بأنه يوجد مجموعة من  $u_i$  لكل صف من العرض ومجموعة من  $v_j$  لكل عمود من أعمدة الطلب. ولكل خلية من الخلايا المشغولة فإن:

$$v_j + u_i = c_{ij}$$

ولكل خلية فارغة فإن تقييم الخلية يكون كالتالي:

$$d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

حيث إن:

$C_{ij}$ : هي تكاليف النقل للخلايا المشغولة.

$D_{ij}$ : صافي التغير في التكاليف أو نتيجة تقييم الخلايا الفارغة.

$v_j$ : قيم التقييم في الأعمدة.

$u_i$ : قيم التقييم في الصفوف.

للبداء بالخطوات افترض أي قيمة عشوائية لقيمة  $u$  الأولى وليكن مثلا صفر.

	$v_j$	150	20	100	130	
$u_i$	من TO الى From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
0	الدمام	$c_{ij}$ 150 (10)	180	190	130 (40)	30, 10, 0
50	الظهران	200 (10)	140	150 (20)	170	30, 40, 0
100	الجبيل	250 (10)	120 (60)	170	220	70, 40, 0
	Demands	30, 20, 40, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150
	الطلب					

وذلك بتطبيق المعادلة الأول حيث:

$$v_1 = 150 - 0 = 150$$

$$u_2 = 200 - 150 = 50$$

$$v_3 = 150 - 50 = 100$$

$$v_4 = 130 - 0 = 130$$

$$u_3 = 250 - 150 = 100$$

$$v_2 = 120 - 100 = 20$$

ولاختيار الخلايا الفارغة فإننا نطبق المعادلة  $d_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$  ويتيح لنا الجدول التالي:

	$v_j$	150	20	100	130	
$u_i$	من الى TO From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
0	الدمام	$c_{ij}$ 150 10	180 +160	190 +90	130 40	90, 10, 0
50	الظهران	200 10	140 +70	150 20	170 -10	30, 40, 0
100	الجبيل	250 10	120 60	170 -30	220 -10	70, 40, 0
	Demands الطلب	30, 20, 40, 0	60, 0	20, 0	40, 0	150

وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها من قبل.

الحلول المتعددة المثلى: قد يحدث ونحن نقيم الخلايا الفارغة أن توجد خلية أو أكثر يكون صافي التغير في تكاليفها الإجمالية يساوي أصفراً. هذا يعني أنه بالإمكان إدخال هذه الخلية إلى الحل الأساسي بدون أن يؤدي إدخالها الحل إلى زيادة أو نقص التكلفة الإجمالية للنقل. وفي هذه الحالة نقول إنه يوجد حلول متعددة للمشكلة، وإذا حدث هذا في الحل الأمثل فإنه يمكن القول بأنه يوجد حلول متعددة مثل للمشكلة.

مثال على الحلول المثلى المتعددة:

افترض أن الحل الأمثل لمشكلة نقل بعض الفواكه هي كما يلي:

	الى من TO From	حائل	بريدة	عنيزة	العرض Supplies
	الطائف	100 10	140	170	10
	أبها	170	15 130	5 160	20
	الباحة	15 120	110	20 140	35
	Demands الطلب	25	15	25	65

لو قمنا بتقييم الخلايا الفارغة وكتابتها في الخلايا الخاصة بها فإن جدول التقييم للخلايا الفارغة سيكون كالتالي:

العرض Supplies	عنيزة	بريدة	حائل	الطلب Demands
10	170	140	100	25
20	160	130	170	15
35	140	110	120	65

من جدول التقييم السابق نلاحظ أن صافي التغير في التكلفة الإجمالية بإدخال الخلية "الباحة-بريدة" سيكون صفراً. والذي يعني أنه يمكن إدخالها في الحل الأمثل "كحل أمثل آخر" ولكن بدون تغير في التكلفة الإجمالية. وللوصول إلى الحل الأمثل الآخر هذا فإنه بإمكاننا إجراء الدوران السابق والتأكد من عدم التغير في إجمالي التكلفة كما يوضح جدول التغير في إجمالي التكلفة:

الخلية	التغير في التكلفة			الإجمالي
	من (قبل) (النقل)	إلى (بعد) (النقل)	الزيادة في التكاليف	
الباحة-بريدة	0	15	$+15 \times 110$	1650+
الباحة-عنيزة	20	5		$-15 \times 140$
أبها-عنيزة	5	20	$+15 \times 160$	2400+
أبها-بريدة	15	0		$-15 \times 130$
الإجمالي	40	40	4050+	4050- 0

وسيكون الحل الأمثل الثاني كما يلي:

TO From من	حائل	بريدة	عنيزة	العرض Supplies
الطائف	100 10	140	170	10
أبها	170	130	160 20	20
الباحة	120 15	110 15	140 5	35
Demands الطلب	25	15	25	65

ولو قمنا بتقييم الخلايا الفارغة مرة أخرى فإنها ستكون كما يلي:

TO From من	حائل	بريدة	عنيزة	العرض Supplies
الطائف	100 10	140 +50	170 +50	10
أبها	170 +30	130 0	160 20	20
الباحة	120 15	110 15	140 5	35
Demands الطلب	25	15	25	65

عدم تساوي العرض مع الطلب: في الأمثلة السابقة افترضنا أن كمية العرض والطلب دائما متساويتين. ولكن في اغلب الحالات فإنه قد يزيد الطلب على العرض أو العكس. وبما أن الطريقة التي استخدمناها تشترط التساوي فإنه يجب تعديل هذه الطريقة لتتلاءم مع حالة عدم التساوي هذه.

1- العرض أكبر من الطلب: افترض انه في مشكلة شركة العاير لنقلات البترول السابقة والتي تطرقنا لها من قبل كان إنتاج المصانع هو كما يلي:

المصنع	العرض
الدمام	50
الظهران	55
الجبيل	70
الإجمالي	175

بينما الطلب وتكلفة النقل هي كما كانت وللتذكير هي كالتالي:

الطلب	المستودعات (مراكز التوزيع)
30	مكة
60	المدينة
20	جدة
40	الرياض
150	الإجمالي

جدول تكلفة النقل للوحدة الواحدة (ناقلة واحدة)

الرياض	جدة	المدينة	مكة	من / إلى
130	190	180	150	الدمام
170	150	140	200	الظهران
220	170	120	250	الجبيل

المطلوب معرفة توزيع النقل الأمثل لنقل هذه الكميات المنتجة في الشرقية إلى مراكز التوزيع المختلفة بأقل تكلفة ممكنة.

يلاحظ أن العرض يزيد عن الطلب بـ "25 ناقله".

كيف يتم حل هذه المشكلة؟

لحل هذه المشكلة فإنه يجب القيام بإنشاء مركز توزيع (طلب صوري أو وهمي) (a dummy demand) لاستيعاب العرض الزائد "25 ناقله" بحيث تكون طاقته العليا هي الفرق بين العرض والطلب. ولتسهيل العمليات يجب أن نجعل تكلفة النقل لمركز الطلب هذا تساوي الصفر.

لذلك فإنه عندما نريد حل المشكلة الجديدة باستخدام الركن الشمالي الغربي (The northwest-corner technique) مثلاً فإن الجدول الابتدائي الأول سيكون كالتالي:

من TO الى From	مكة	المدينة	جدة	الرياض	Dummy	العرض Supplies
الدمام	150 30	180 20	190	130	0	50
الظهران	200	140 40	150 15	170	0	55
الجبيل	250	120	170 5	220 40	0 25	70
Demands الطلب	30	60	20	40	25	175

في الحل النهائي ستكون هذه الزيادة قد خصصت إلى "مركز الطلب الوهمي" ويمكن تفسير ذلك على أن أحد أو أكثر من مراكز الإنتاج سينقل أقل من الكمية الإجمالية المنتجة.

2- الطلب أكبر من العرض: افترض الآن أن الطلب للمشكلة الأصلية

كالتالي:

الطلب	المستودعات (مراكز التوزيع)
30	مكة
60	المدينة
45	جدة
40	الرياض
175	الإجمالي

بينما العرض وتكلفة النقل هي كما كانت كالتالي:

المصنع	العرض
الدمام	50
الظهران	30
الجبيل	70
الإجمالي	150

يلاحظ في هذه الحالة أن الطلب يزيد عن العرض بـ 25 ناقلة . لذلك فإنه لإنشاء جدول النقل "Transportation Tableau" الأولي فإننا يجب أن نضع (أو ننشئ) مركز عرض وهمي (a dummy supply point) لملاقاة الطلبات الزائدة عن العرض.

أيضا فإننا نعين تكلفة صفرا لكل كمية تنقل من هذا المركز. الحل الأول

باستخدام الركن الشمالي الغربي معطى كما يلي:

من TO من From الى	مكة	المدينة	جدة	الرياض	العرض Supplies
الدمام	150 (30)	180 (20)	190	130	50
الظهران	200	140 (30)	150	170	30
الجبيل	250	120 (10)	170 (45)	220 (15)	70
Dummy	0	0	0	0 (25)	25
Demands الطلب	30	80	45	40	175

بعد ذلك نقوم بحلها تماما كما قمنا بحلها من قبل. وفي الحل الأمثل نقوم بتخصيص ال 25 ناقلة والموجودة في مركز العرض الوهمي إلى أحد مراكز الطلب. ففي الحل الابتدائي الأول نقول أن مركز التوزيع الذي في الرياض يتطلب 40 وحدة تنقل إليه ولكن 15 فقط وحدة هي التي تصل ويبقى 25 وحدة مطلوبة.

التحلل " Degeneracy ": قلنا في الأمثلة السابقة أن طريقة النقل تتطلب أن تكون الخانات أو الخلايا المشغولة يجب أن تساوي عدد الصفوف + عدد الأعمدة - 1 وذلك حتى نستعمل طريقة الحل المعروفة. ولكن قد تحدث أحيانا في الحلول الابتدائية أو حتى في الحلول اللاحقة أن عدد الخلايا المشغولة أقل من المطلوب. فمثلا إذا كان عندنا 3 مراكز إنتاج (عرض) و3 مراكز توزيع (طلب) فإن الحل الأساسي يجب أن يحتوي على 5 خلايا مشغولة على الأقل.

للتوضيح افترض أن عندنا مشكلة النقل "Transportation Problem" الآتية:

إلى \ To من \ From	حوظة بني تميم	الخروج	تمير	العرض Supplies
خميس مشيط	150	200	190	50
جيزان	130	210	180	40
نجران	220	160	140	10
Demands الطلب	30	60	10	100

افترض أننا أردنا حلها بطريقة الركن الشمالي الغربي (The northwest-corner technique) لسهولته، الحل الابتدائي سيكون كما يلي:

إلى \ To من \ From	حوظة بني تميم	الخروج	تمير	العرض Supplies
خميس مشيط	30	20	190	50
جيزان	130	40	180	40
نجران	220	160	10	10
Demands الطلب	30	60	10	100

من الحل السابق نجد أننا قمنا بحلها ولكن بشغل 4 خلايا فقط وليس 5، كما هو مطلوب.

مع أن الحل السابق هذا ممكن إلا أن المشكلة التي يسببها هو كيف نقيم الخلايا الفارغة؟  
مثلا إذا أردنا أن نختبر الخلية (خميس مشيط - تميم) فإننا سنقوم بطريقة الدوران التالية:

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			الإجمالي
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	التخفيض في التكاليف الزيادة في التكاليف	
الخلية				
خميس مشيط-تمير	0	1	190+	190+
نجران-تمير	10	9		140-
	10	10	190+	140-
				50+

ولكن لا نستطيع إكمال طريقة الدوران لأنه يلاحظ أن نجران تنتج 10 وحدات ولا نستطيع أن نضع أي كمية أقل من 10 وحدات في تلك الخلية لأننا لن نستطيع تعويضها، فهي الخلية الوحيدة المشغولة في الصف.

لذلك يقال للحل بأنه " حل متحلل " Degeneracy " ولا يمكن حلها بطريقة النقل السالفة الذكر إلا بعد إجراء بعض التعديلات على الجدول الابتدائي .

هذه التعديلات تتم عن طريق اعتبار أحد الخلايا الفارغة بأنها خلية مشغولة. افترض أن "s" هي قيمة صغيرة جدا تقترب من الصفر، وضع هذه القيمة في أحد الخلايا الفارغة ليكمل عدد الخلايا المشغولة إلى الحد المطلوب. هذا الرقم صغير لدرجة أنه لا يؤثر على العرض أو الطلب أو حتى التكلفة الإجمالية وإذا شغلت خلية فارغة بهذه القيمة في الحل الابتدائي فإن الحل سيكون أساسياً وبدون تأثير على الحل.

إذا تكمن المشكلة في معرفة أي خلية ممكن لنا أن نشغلها بهذه القيمة الصغيرة

"s".

بالنظر إلى الجدول السابق فإنه بإمكاننا التفريق بين نوعين من الخلايا الفارغة:

- 1- خلايا ممكن اختبارها: وذلك مثل: الخلية (جيزان - حوطة بني تميم). فلو أردنا أن نقيم هذه الخلية واستخراج صافي التغير في التكلفة الإجمالية لكان كالتالي:

التغير في الكمية المنقولة	التغير في التكلفة			الإجمالي	
	من (قبل النقل)	إلى (بعد النقل)	الزيادة في التكاليف		التخفيض في التكاليف
الخلية					
جيزان-حوظة بني تميم	0	1	130+		130+
خميس مشيط-حوظة بني تميم	30	29		150-	150-
خميس مشيط-الخرج	20	21	200+		200+
جيزان-الخرج	40	39		210-	210-
الإجمالي	90	90	330+	360-	30-

2- خلايا لا يمكن اختبارها: وهي الخلايا التالية: خميس مشيط-تمير، جيزان - تمير، نجران - حوظة بني تميم، نجران - الخرج.  
لتصحيح أو تعديل الحالة السابقة يمكن وضع القواعد الآتية:

-إذا كان جدول النقل الابتدائي متحل (Degeneracy)، ضع القيمة القليلة "s" في أي خلية لا يمكن اختبارها واختبر جميع الخلايا الفارغة. ولا حظ أن هذه القيمة المتناهية في الصغر يمكن أن تنتقل إلى خلايا أخرى فارغة في كل مرحلة إذا كان تقييم هذه الخلايا الفارغة سيؤدي إلى تخفيض في التكاليف. كرر العملية هذه كلما احتجت لذلك للمحافظة على عدد الخلايا المشغولة في حدود المطلوب.

بتطبيق هذه القاعدة على مشكلة النقل المتحللة فإن ذلك سيولد حل أساسي مقبول وذلك بوضع هذه القيمة القليلة "s" في خلية (نجران - الخرج) وبذلك يمكن اختبار وتقييم جميع الخلايا الفارغة.

الجدول التالي يوضح انه بالإمكان اختبار جميع الخلايا الفارغة إذا وضعنا القيمة القليلة "s" في أي خلية لا يمكن اختبارها، ولتكن مثلاً (نجران - الخرج).

العرض Supplies	تعبير	الخرج		حوظه بني تعبير	الى To من From
50	190	200	150	30	خميس مشيط
	180	210	130	20	حيزان
40	140	160	220	40	نجران
10	10	5	220	5	نجران
100	10	60	30	30	الطلب Demands

وبتطبيق قواعد الدوران السابقة فإن الجدول الخاص بتقييم الخلايا الفارغة

سيكون كالتالي:

العرض Supplies	تعبير	الخرج		حوظه بني تعبير	الى To من From
50	190	200	150	30	خميس مشيط
	180	210	130	20	حيزان
40	140	160	220	40	نجران
10	10	5	220	5	نجران
100	10	60	30	30	الطلب Demands

### تلخيص خطوات طريقة النقل " Transportation Algorithm "

خطوة (1): بناء جدول النقل موضحا المصادر، مراكز التوزيع أو الغايات،

الكميات المعروضة، الكميات المطلوبة، وتكلفة الوحدة الواحدة

خطوة (2): إذا كان العرض أكبر من الطلب، ضع طلباً وهمياً بالكمية الزائدة

فقط وضع تكاليف النقل لهذا الطلب تساوي أصفاً. أما إذا كان الطلب أكبر من

العرض، نضع عرضاً وهمياً بالكمية الزائدة فقط وضع تكاليف النقل لهذا العرض

تساوي صفاً.

خطوة (3): أوجد الحل الابتدائي الممكن الأول باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي، أو طريقة أقل تكلفة أو طريقة فوجل.

خطوة (4): إذا وجد مشكلة "تحلل"، ضع قيمة صغيرة ولتكن "s" في أحد الخلايا غير الممكن تقييمها.

خطوة (5): قيم أو اختر جميع الخلايا الفارغة باستخدام الطريقة العادية أو طريقة MODI.

خطوة (6): إذا كانت نتيجة التقسيم غير سالبة لكل الخلايا الفارغة، فإن ذلك الحل هو حل أمثل، أما إذا وجد على الأقل خلية واحدة سالبة فإن الحل الحالي غير أمثل وبالإمكان تطويره وتحسينه بإحلال هذه الخلية السالبة بدلاً من أحد الخلايا المشغولة.

خطوة (7): الخلية الجديدة والداخلة في الحل هي الخلية الفارغة والتي نتيجة تقييمها يعطي أكبر قيمة سالبة.

خطوة (8): انقل أكبر كمية ممكنة للخلية الداخلة الجديدة، وهي كامل الكمية الموجودة في الخلية الخارجة.

خطوة (9): تأكد من نقل كامل الكميات من المصادر إلى مراكز التوزيع وتأكد من أن متطلبات العرض والطلب قد بُيئت بالكامل.

خطوة (10): اذهب إلى الخطوة الرابعة وكرر العمليات حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

## ثانياً: مشكلة التعيين " التخصيص "

## Assignment Problem

مشكلة التعيين تشابه مشكلة النقل من كثير من الجهات ولكنها تتميز ببعض الخصائص الأخرى. ففي مشكلة التعيين نجد أن عدد المصادر (العرض) تساوى عدد مراكز التوزيع (الطلب) وكل الكمية المعروضة والمطلوبة دائماً تساوي الواحد الصحيح. مع أن هذه المشكلة بالإمكان حلها بطريقة النقل، إلا أنه توجد طريقة أفضل في هذا الشأن. وتسمى طريقة التخصيص. من أجل معرفة خطوات الحل بطريقة التخصيص اعتبر هذا المثال:

- أربعة عمال يعملون في مصنع المقص السحري للثياب الجاهزة. ويراد توزيعهم على أربع مكائن بطريقة تؤدي إلى خفض التكلفة. الجدول التالي يوضح تكاليف عمل كل شخص على كل ماكينة.

جدول تخصيص العمال المكائن:

الأعمال Jobs					
إلى من		ماكينة القمص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف
العمال Men	حمد	20	25	22	28
	محمود	15	18	23	17
	حامد	19	17	21	24
	علي	25	23	24	24

المطلوب تخصيص أو تعيين كل عامل من العمال الأربعة لعميل معين بحيث نصل إلى أقل تكلفة.

بالإمكان أن نخصص - مثلاً -

حمد للقمص، محمود للخياطة، حامد لعمل الأزرار، علي للتغليف.

و إجمالي التكلفة لهذا الحل يكون  $20 + 18 + 21 + 24 = 83$  ريالاً.  
جدول التعيين (التخصيص) التالي يوضح هذا الحل:

الأعمال Jobs					
		ماكينة النقص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف
		20			
العمال	حمد	X			
			18		
Men	عمود		X		
				21	
	حامد			X	
					24
	عل				X

ولكن التخصيص السابق قد لا يكون أمثلاً. لذلك يجب إجراء بعض الخطوات التي تجعل إيجاد الحل الأمثل سهلاً.

قبل التطرق إلى خطوات الحل بطريقة هانغاريان (Hungarian Method) فإنه يجب معرفة الآتي:

حمد مثلاً لو خصص لأي ماكينة فإن تكلفته لن تقل عن 20 ريالاً بأي حال من الأحوال وذلك إذا عين عاملاً في قص القماش.

أما إذا عين حمد للخياطة فإن التكلفة من ذلك ستكون  $20 + 5 = 25$  ريالاً بالمثل لو عين حمد للأزرار فإن التكلفة ستكون  $20 + 2 = 22$  ريالاً أو لو عين حمد للتغليف فإن التكلفة ستكون  $20 + 8 = 28$  ريالاً.

لذلك فإنه يمكن اعتبار أن 20 ريالاً هذه هي عبارة عن تكلفة ثابتة بغض النظر عن أي ماكينة يعمل عليها حمد. هذه القيمة بما أنها مشتركة بين الأعمال المختلفة التي يمكن أن يقوم بها حمد فإنه يمكن حذفها من جميع القيم الخاصة بحمد. لذلك فإنه يمكن أن يقال بأن أقل تكلفة ممكن أن تتحملها الشركة بتخصيص أو تعيين العامل حمد إلى أي ماكينة سيكون على الأقل 20 ريالاً بالإضافة إلى التكاليف الإضافية الخاصة بكل عمل وهي كالتالي:

الأعمال Jobs					
إلى من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف	التكلفة الثابتة
حمد	0	5	2	8	20 ريالاً

كذلك بالنسبة إلى العمال الآخرين فمثلاً محمود سيكلف على الأقل 15 ريالاً وحماد 17 ريالاً، وأخيراً علي سيكلف على الأقل 23 ريالاً. لذلك فإننا نجد أن جدول التخصيص السابق سيكون بعد خصم هذه التكاليف الثابتة من كل صف كالتالي:

الأعمال Jobs						
إلى من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف	التكلفة الثابتة	
العمال Men	حمد	0	5	2	8	20
	محمود	0	3	8	2	15
	حماد	2	0	4	7	17
	علي	2	0	1	1	23
الإجمالي						75

بالنظر إلى الجدول السابق فإننا نلاحظ أن شخصين من الممكن أن يخصص لهم عاملين بدون تكبد خسائر إضافية مثلاً حمد يتولى القص وحامد الخياطة أو محمود القص وعلي الخياطة. ولكن إذا أردنا أن نخصص العمال الأربعة للأعمال المختلفة فإنه لا بد من تحمل تكاليف أخرى غير الـ 75 ريالاً. لذلك فإن التكاليف الإضافية الأخرى هي عبارة عن التكلفة الخاصة بتخصيص أي عامل لماكينة التغليف أو الأزرار؛ وذلك لأنه يلاحظ أنه لا يوجد أصفار في تلك العمودين. لذلك فإن التكلفة الثابتة الآن ستزيد بمقدار التكاليف الثابتة في كل عمود. أي بإضافة أقل قيمة في كل عمود إلى الـ 75 ريالاً السابقة وسيكون الجدول بعد طرح أقل قيمة من كل عمود.

الأعمال Jobs					
إلى \ من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف	التكلفة الثابتة
حمد	0	5	1	7	20 ريالاً
محمود	0	3	7	1	15 ريالاً
حامد	2	0	3	6	17 ريالاً
علي	2	0	0	0	23 ريالاً
التكلفة الثابتة	0	0	1	1	$77 = 2+75$

بهذه التكلفة الـ 77 نقول إنه بالإمكان تخصيص حمد أو محمد للقص، حامد للخياطة، علي إما للأزرار أو التغليف. ولكن حيث إنه لا يمكن أن يعمل كلا من حمد ومحمود على ماكينة القص في آن واحد فإن علي أحدهم أن يذهب إلى ماكينة أخرى ويذهب أياً منهم إلى الماكينة الأخرى فإنه سيتحمل تكلفة إضافية أخرى غير الـ 77 ريالاً.

الآن وبعد طرح أقل قيمة في كل عمود وكل صف للوصول إلى أصفارا في كل صف وعمود يجب أن نستخدم طريقة أخرى لمعرفة التكلفة الإضافية اللازمة لمشكلة التخصيص هذه. هذه الطريقة تتم برسم خطوط عامودية وأفقية لتغطية جميع الأصفار. هذه الخطوط يجب أن تكون أقل عدد معين من الخطوط. أي نحاول أن نطمس على أكثر من صفر بخط واحد. وبالنظر إلى الجدول السابق فإنه يلاحظ أن أقل عدد ممكن من الخطوط لطمس جميع الأصفار هو 3 أي انه يساوي عدد التخصيصات الممكنة عملها بدون أي زيادة في التكلفة الإجمالية (77 ريالاً).

يكون الجدول السابق بعد الطمس على جميع الأصفار كالتالي:

الأعمال Jobs					
إلى من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف	التكلفة الثابتة
حمد	0	5	1	7	20 ريالاً
محمود	0	3	7	1	15 ريالاً
حامد	2	0	3	6	17 ريالاً
علي	2	0	0	0	23 ريالاً

بعد ذلك نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة بخط وهي المربع التالي :

ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف
5	1	7
3	7	1

هذه القيمة هي الواحد الصحيح "1". إذا رمزنا بالرمز "h" هذه القيمة القليلة

فإن التكلفة الإضافية الجديدة تكون كالتالي:

التكلفة الإضافية الجديدة = (أقل قيمة للخلايا غير المغطاة "h" × عدد الخطوط الأفقية - عدد الخطوط العمودية).

$$= (1 \text{ ريال}) (1-2) = 1 \times 1 = 1 \text{ ريال}$$

إذاً أقل تكلفة إجمالية ثابتة لتخصيص جميع العمال لجميع الآلات =  $77 + 1 = 78$  ريالاً.

لإيجاد جدول التكلفة الجديد بعد رسم الخطوط يجب اتباع الخطوات التالية:

- 1- اطرح قيمة أقل خلية غير مغطاة "h" من جميع الخلايا غير المغطاة بخط.
- 2- أضف قيمة أقل خلية غير مغطاة "h" لكل خلية مغطاة بخطين اثنين (أي تقع على التقاطع).

3- الخلايا المغطاة بخط واحد تبقى كما هي.

بتطبيق هذه القاعدة على جدول التكلفة السابق فإن جدول التكلفة الجديد

يكون كالتالي:

الأعمال Jobs					
إلى من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التفليف	التكلفة الثابتة
حمد	0	4	0	6	20 ريالاً
محمود	0	2	6	0	15 ريالاً
حامد	3	0	3	6	17 ريالاً
علي	3	0	0	0	23 ريالاً

وبذلك نكون توصلنا إلى الحل الأمثل بطريقة (Hungarian Method) حيث لا

يمكن تغطية الأصفار بأقل من أربعة 4 خطوط. كالتالي:

الأعمال Jobs					
إلى من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف	التكلفة الثابتة
حمد	0	4	0	6	20 ريالاً
محمود	0	2	6	0	15 ريالاً
حامد	3	0	3	6	17 ريالاً
علي	3	0	0	0	23 ريالاً

وبالنظر إلى الجدول السابق فإننا نلاحظ انه يوجد حلين اثنين أمثلين وليس حلا واحدا. يقال أن هذا الحل أمثلا إذا كان الحل يؤدي إلى تخصيص جميع العاملين لجميع الوظائف بأقل تكلفة.

الحل الأول :

الأعمال Jobs					
إلى من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف	
	20	25	22	28	
العمال	X				
	15	18	23	17	X
Men	19	17	21	24	
		X			
	25	23	24	24	
علي			X		

التكلفة هي كما قلنا 78 ريالاً والتعيين هو كالتالي:

حمد للقص

محمود للتغليف

حامد للخياطة

على لعمل الأزرار

وللتأكد من إجمالي التكلفة فإننا نقوم بجمع التكاليف الخاصة بكل خلية مشغولة

$$78 = 24 + 17 + 17 + 20 =$$

الحل الثاني :

الأعمال Jobs						
		إلى من	ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف
			20	25	22	28
العمال	حمد				X	
			15	18	23	17
	محمود	X				
Men			19	17	21	24
	حامد			X		
			25	23	24	24
	على					X

التكلفة 78 ريالاً والتعيين هو كما يلي:

حمد لعمل الأزرار

محمود للقص

حامد للخياطة

على للتغليف

وللتأكد من إجمالي التكلفة فإننا نقوم بجمع التكاليف الخاصة بكل خلية مشغولة

$$= 22 + 15 + 17 + 24 = 78 \text{ ريال}$$

خطوات حل مشكلة التخصيص بطريقة Hungarian

1- ابدأ بإيجاد أقل العناصر في كل صف من صفوف المصفوفة ( $m \times m$ ) والتي هدفها تخفيض التكلفة. وأوجد المصفوفة الجديدة بعد طرح أقل العناصر في كل صف من الصف التابع له.

2- أوجد أقل العناصر في كل عمود من أعمدة المصفوفة السابقة . وأوجد المصفوفة الجديدة بعد طرح أقل العناصر في كل عمود من العمود التابع له.

3- ارسم أقل خطوط (عمودية أو أفقية) ممكنة لتغطية جميع الأصفار في المصفوفة الناتجة. إذا كان عدد الخطوط الممكنة يساوي  $m$  (عدد الوظائف المطلوب تخصيصها)، فإن هناك حل أمثل يتمثل في الخطوط المغطاة وتنتهي الخطوات. وإذا كان عدد الخطوط أقل من  $m$  فإن الحل الأمثل لم ينتهي وتابع الخطوات التالية:

4- ابحث عن أقل قيمة غير مغطاة بخط. اطرح هذه القيمة من جميع القيم غير المغطاة، وأضفها إلى القيم التي غطيت بخطين، والقيم الأخرى والمغطاة بخط واحد فقط تظل على ما هي عليه. اذهب إلى الخطوة 3.

ملاحظات:

1- إذا كان هدف مصفوفة التخصيص هو تعظيم (Maximization) فيمكن ضرب جميع القيم في -1 وتكملة الحل كمشكلة تخفيض (Minimization).

2- إذا كانت الصفوف والأعمدة غير متساوية فإنه يقال للمشكلة إنها غير متوازنة (unbalanced) لذلك فإنه من الممكن إضافة النقاط الوهمية (Dummy points). من الممكن أيضا صياغة مشكلة التخصيص بطريقة البرمجة الخطية كالتالي:

ترمز بالرمز  $x_{ij}$  لتخصيص العامل  $i$  على الماكينة  $j$

min  $20x_{11} + 25x_{12} + 22x_{13} + 28x_{14} + 15x_{21} + 18x_{22} + 23x_{23} + 17x_{24}$ .....  
 subject to:  
 Workers constraints  
 $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$   
 .....  
 machines constraints  
 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$   
 .....  
 $x_{ij} = (0, 1)$

### مسائل على مشكلة النقل والتخصيص

1- (إدارة موارد بشرية) ثلاثة عمال يعملون في مصنع الهدايا الجميلة. ويراد توزيعهم على ثلاث مكائن بطريقة تؤدي إلى خفض التكلفة. الجدول التالي يوضح تكاليف عمل كل شخص على كل ماكينة. المطلوب استخدام طريقة Hungarian Method لتخصيص كل موظف لوظيفة معينة وحساب أقل التكاليف:

الموظف	التوريد	نعبنة الطلبات	التغليف
إبراهيم	30	37	26
عبد العزيز	37	40	24
محمد	33	39	27

2- (إدارة موارد بشرية) أربعة عمال يعملون في مصنع المقص السحري للثياب الجاهزة. ويراد توزيعهم على أربع مكائن بطريقة تؤدي إلى خفض التكلفة. الجدول التالي يوضح تكاليف عمل كل شخص على كل ماكينة.

جدول تخصيص العمال على المكائن :

الأعمال Jobs					
		ماكينة القص	ماكينة الخياطة	ماكينة الأزرار	ماكينة التغليف
إلى من					
العمال Men	حمد	20	25	22	28
	محمود	15	18	23	17
	حامد	19	17	21	24
	علي	25	23	24	24

المطلوب هو صياغة المشكلة لتخصيص أو تعيين كل عامل من العمال الأربعة لعمل معين بحيث نصل إلى أقل تكلفة.

3- شركة المملكة للمياه المحلاة تقوم يوميا بنقل مياه الشرب والمصنوعة في بعض الأحياء في الرياض إلى الأحياء الأخرى المحتاجة. إذا كانت الكميات المنتجة في هذه الأحياء والمستهلكة وتكاليف النقل هي كالتالي:

التكلفة بالريال	النسيم	العريجات	السويدي	الاستهلاك	اسم الحي	الإنتاج	اسم الحي
الملز	25	34	27	100	النسيم	250	الملز
العليا	30	32	28	200	العريجات	50	العليا
أم الحمام	33	26	27	130	السويدي	140	أم الحمام
السليمانية	27	25	30	430	الإجمالي	160	السليمانية
						600	الإجمالي

والمطلوب هو تكوين جدول الحل الأساسي الابتدائي بطريقة فوجل واختبر أمثليته وحدد الخلية الداخلة والخارجة.

4- المطلوب تقييم الخلايا الفارغة بطريقة المسار المتعرج:

	النسيم		العريجات		السويدي		Dummy		
العليا	25		34		27		0		250
	80						170		
	30		32		28		0		
أم الحمام	20				30				140
	33		26		27		0		
السليمانية			40		100				160
		27		25		30		0	
الطلب	100	200	130	170					

5- إذا كان جدول النقل والتكلفة بين مصادر الإنتاج والتوزيع كالتالي:

المطلوب: تقييم الخلايا الفارغة حسب طريقة التوزيع المعدلة (مودي) MODI

في جدول النقل التالي:

إلى من	العليا v1=	المنز v2=	العقيق v3=	متفوحة v4=	العرض
السويدي U1=	17	16	16	9	50
أم الحمام U2=	8	20	17	12	55
النسيم U3=	15	10	20	25	45
الطلب	20	35	55	40	150

## استخدام الحاسب في حل مسائل النقل والتخصيص

لتوضيح ذلك دعنا نكتب معطيات مثال شركة العاير للنقل والتي تقوم بتكرير البترول ونقله من المنطقة الشرقية إلى مراكز التوزيع في كلا من المنطقة الوسطى والغربية. ويوجد عند الشركة 3 مناطق إنتاجية و4 مناطق لاستهلاكه وتوزيعه. جدول الإنتاج والطلب والتكلفة معطاة في الجدول التالي:

الإنتاج (العرض)	موقع المصنع
50	الدمام
30	الظهران
70	الجبيل
150	الإجمالي

الطلب	المستودعات (مراكز التوزيع)
30	مكة
60	المدينة
20	جدة
40	الرياض
150	الإجمالي

جدول تكلفة النقل للوحدة الواحدة (ناقلة واحدة)

من / إلى	مكة	المدينة	جدة	الرياض
الدمام	150	180	190	130
الظهران	200	140	150	170
الجبيل	250	120	170	220

المطلوب معرفة التوزيع الأمثل لنقل هذه الكميات المنتجة في الشرقية إلى مراكز التوزيع المختلفة بأقل تكلفة ممكنة.

وكان الحل النهائي هو :

الجدول التالي يبين إجمالي الكميات المخصصة للنقل بأقل تكلفة إجمالية ممكنة.

	الدمام - مكة	الظهران - الرياض	الجبيل - المدينة	الجبيل - جدة	الظهران - جدة	الدمام - الرياض	الإجمالي
الكمية المخصصة	30	20	60	10	10	20	150
تكلفة الوحدة الواحدة	150	170	120	170	150	130	
	4500	3400	7200	1700	1500	2600	20900

ويلاحظ أن التكلفة الإجمالية بلغت 20900 ريالاً.

أولاً: نقوم بتحديد رقم لكل من مراكز التوزيع ومراكز الطلب حتى نستطيع

تحديد تكاليف وكميات كل خلية على حدة كما في الجدول التالي:

من / إلى	مكة (1)	المدينة (2)	جدة (3)	الرياض (4)
الدمام (1)	X11	X21	X31	X41
الظهران (2)	X12	X22	X32	X42
الجبيل (3)	X13	X23	X33	X43

حل مشاكل النقل والتخصيص باستخدام برنامج إكسل Excel في هذا الجزء سنتعلم كيفية حل مشاكل النقل وكذلك التخصيص باستخدام برنامج إكسل (Excel) لانتشاره وتوفره عند اغلب المستخدمين. إدخال البيانات كالتالي:

تكاليف النقل في الخلايا: B4:E6

الطاقة الإنتاجية لمراكز الإنتاج (العرض): F4:F6

الطاقة الاستيعابية لمراكز التوزيع (الطلب): B7:E7

فيكون جدول معطيات مشكلة النقل في برنامج إكسل (EXCEL) كالتالي:

المعطيات	مكة (1)	المدينة (2)	حدة (3)	الرياض (4)	العرض
من / إلى					
الدمام (1)	150	180	190	130	50
الظهران (2)	200	140	150	170	30
الجبيل (3)	250	120	170	220	70
الطلب	30	60	20	40	150

بعد ذلك الخلايا التي يتم فيها وضع النتائج افترض أننا وضعنا النتائج في

الخلايا التالية:

عدد الوحدات المنقولة من مركز العرض i إلى مركز الطلب j: B12:E14

إجمالي عدد الوحدات المنقولة من مراكز العرض: F12:F14

إجمالي عدد الوحدات المنقولة إلى مراكز الطلب: B15:E15

كما في الشكل التالي:

من / إلى	مكة (1)	المدينة (2)	جدة (3)	الرياض (4)	الوحدات المنقولة
الدعام (1)					
الطهران (2)					
الحيصل (3)					
الوحدات المنقولة					
اجمالي التكاليف					

و لحل المشكلة الآن يتعين علينا وضع معادلة أو دالة الحل باستخدام سولفر (SOLVER) والموجود في قائمة أدوات (TOOLS) في برنامج إكسل (EXCEL). حيث يتعين علينا كتابة المعادلات التي توضح كيفية استخدام المعطيات الموجودة في جدول المعطيات واستخراج الحلول وكتابتها في جدول الحلول. فمثلا، إجمالي التكاليف في الخلية B17 هو عبارة عن مجموع ناتج ضرب جميع الوحدات المنقولة مضروبا في تكاليف هذه الوحدات.

ولذلك فإن إجمالي التكاليف (B17) هو عبارة عن ضرب الخلايا (B4:E6) مع الخلايا المقابلة في (B12:E14).

و باستخدام الدالة (SUMPRODUCT) فإننا نضع المعادلة التالية في الخلية (B17). كما في الشكل التالي:

وصائص الدالة

SUMPRODUCT

Array1	B4:E6	= {150,180,190,130;2
Array2	B12:E14	= {0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0}
Array3		= صيفت

= 0

إرجاع مجموع المنتجات الخاص بالنطاقات أو الصفائف المتطابقة.

Array2: array1,array2... من 2 إلى 30 صفيفاً تريد ضرب وجمع مكونات لها. يجب أن يكون لكافة الصفائف الأبعاد نفسها.

0 = ناتج الصيغة

تعليمات حول هذه الدالة

إلغاء الأمر موافق

طبعا بما أن عدد الوحدات المنقولة في هذه المرحلة لم يتم استخراجه بعد فإن ناتج التكلفة الإجمالية في الخلية (B17) يساوي الصفر.

بعد ذلك دعنا نحسب إجمالي الكميات المنقولة من كل مركز عرض وإلى كل مركز طلب. أي أن إجمالي الوحدات المنقولة إلى مكة هي إجمالي قيمة الخلايا (B12:B14) وبالنسبة للمدينة (C12:C14) وجدة (D12:D14) والرياض (E12:B14).

وتكون إجمالي الوحدات المنقولة إلى هذه المراكز هي بالترتيب كالتالي:

قيمة الخلية (B15) لمكة هي: =SUM(B12:B14)

قيمة الخلية (C15) للمدينة هي: =SUM(C12:C14)

قيمة الخلية (D15) لجهة هي: =SUM(D12:D14)

قيمة الخلية (E15) للرياض هي: =SUM(E12:E14)

وبالمثل بالنسبة لمراكز العرض فإجمالي الوحدات المنقولة منها هي كالتالي بالترتيب:

قيمة الخلية (F12) للدمام هي: =SUM(B12:E12)

قيمة الخلية (F13) للظهران هي : =SUM(B13:E13)

قيمة الخلية (F14) للجيبيل هي : =SUM(B14:E14)

فيصبح جدول النتائج كما يلي:

من / الى	مكة (1)	المدينة (2)	جدة (3)	الرياض (4)	الوحدات المنقولة
الدمام (1)					0
الظهران (2)					0
الجيبيل (3)					0
الوحدات المنقولة	0	0	0	0	0
اجمالي التكاليف	0				

الآن جدول النتائج جاهز لاستخدام سولفر (SOLVER) من قائمة أدوات (TOOLS) لتحديد الكميات المنقولة من كل مركز عرض إلى كل مركز طلب ويتم ذلك باتباع الخطوات التالية:

- من قائمة أدوات (TOOLS) نختار سولفر (SOLVER) وعند ظهور النافذة ندخل B17 وهي الخلية الخاصة بإجمالي التكاليف أمام خيار تحديد الخلية الهدف (SET TARGET CELL).

- نختار تحفيض (MIN) أمام خيار (EQUAL TO).

- نكتب B12:E14 أمام خيار (BY CHANGING CELLS).

- نضغط على الزر إضافة (ADD) لإضافة قيد ثم نخرج نافذة إضافة قيد (ADD CONSTRAINT) نكتب في النافذة مرجع الخلية (CELL REFERENCE) ونختار العلاقة أقل من أو يساوي ( $\leq$ ) ونكتب F4:F6 كقيد يجب أن لا تتعداه الكميات المنقولة في خانة (CONSTRAINT). كما في الشكل التالي:



- ثم نضغط على الزر إضافة (ADD) لإدراج قيد آخر على إجمالي الكميات المنقولة إلى مراكز التوزيع وهي الصف B15:E15 ويكون كتابتها كالتالي: ونكتب التالي:

B15:E15 في النافذة (CELL REFERENCE)

نختار يساوي = حتى يتم تعبئة احتياجات المراكز

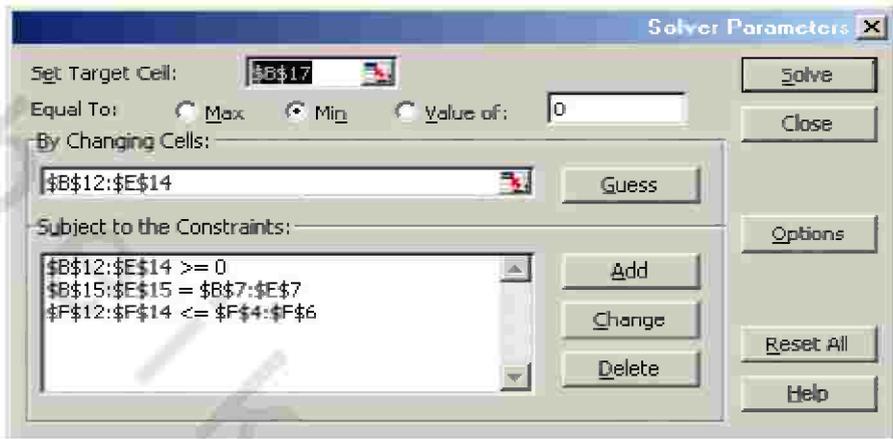
وفي خانة القيد (CONSTRAINT) نضع B7:E7 وهي إجمالي الكميات المطلوبة.

- القيد الأخير وهو الخاص بالكميات المنقولة حيث يجب أن لا تقل عن الصفر وخاصة أننا نحاول تخفيض التكاليف فيكون هذا القيد بالنقر على زر إضافة (ADD) ثم نضع الآتي في نافذة القيد:

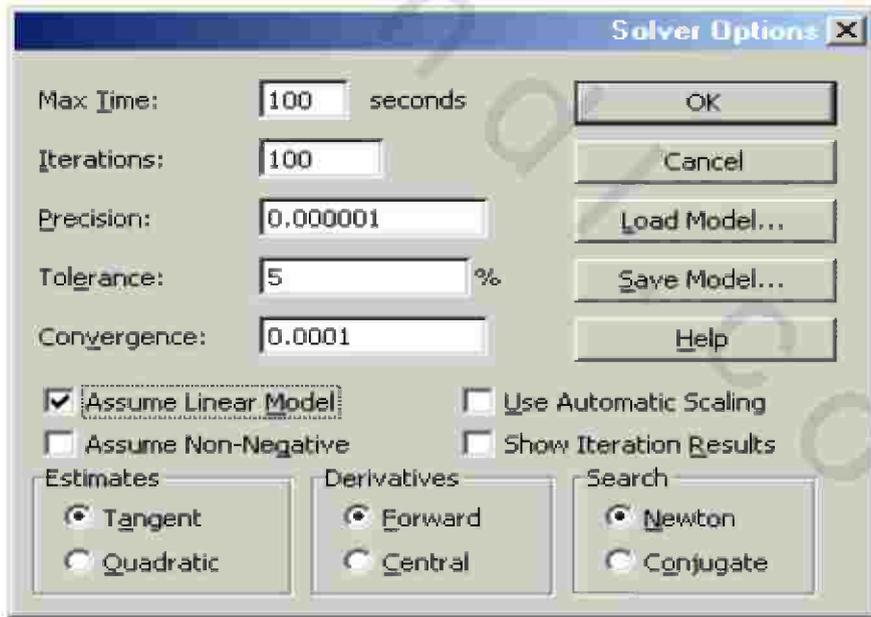
نكتب B12:B14 في النافذة مرجع الخلية (ADD REFERENCE)

ونختار أكبر من أو يساوي ( $\geq$ ) ثم ندخل الصفر (0) في القيد (CONSTRAINT).

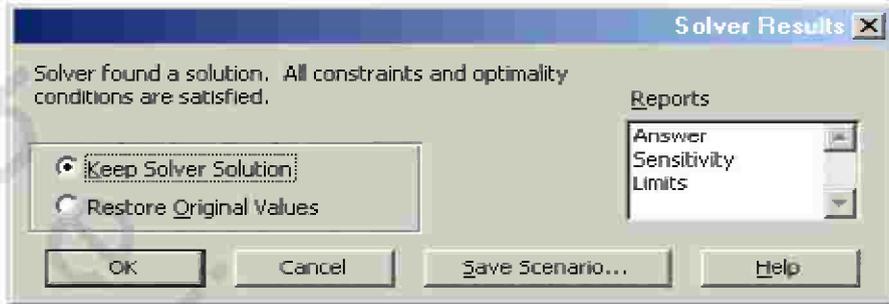
ثم موافق (OK) ويكون شكل نافذة (SOLVER) كالاتي:



بعد ذلك يتعين النقر على خيارات (OPTIONS) ونفترض الآتي:  
 ثم موافق كما في الشكل التالي:



ثم نختار موافق للرجوع إلى النافذة الخاصة بسولفر ومنها نقوم بالنقر على حل (solve) واختيار الخيار (keep solver solution) كما في الشكل التالي:



وبعد التفر على موافق نجد الحل أصبح أمامنا كما في الشكل التالي:

من / إلى	مكة (1)	المدينة (2)	حده (3)	الرياض (4)	نوحات المنقولة
الدمام (1)	30	0	0	0	50
الطهران (2)	0	10	10	20	30
الجبيل (3)	0	60	10	0	70
الوحدات المنقولة	30	60	20	40	150
اجمالي التكاليف					20900

ونلاحظ أن هذا الحل هو نفسه الذي تم الحصول عليه بالطريقة السابقة باستخدام طريقة الجداول اليدوية. كذلك يمكن حل مشاكل التخصيص بنفس الطريقة تماما وخاصة أنها حالة خاصة من مشكلة النقل ماعدا أن مجموع الكميات المنقولة في مشكلة التخصيص تكون كل واحدة منها تساوي الواحد.

وكذلك فإن عدد الكميات المنقولة في كل خلية تكون في مشكلة التخصيص أما واحد أو صفر فقط (0.1). ولذلك فلحل مشكلة التخصيص يتعين علينا استبدال تكاليف النقل بتكاليف التخصيص واستبدال مجاميع الطلب والعرض بواحد.

حل مشاكل النقل والتخصيص باستخدام برنامج ليندو Lindo

لحل مشاكل النقل والتخصيص باستخدام برنامج ليندو (Lindo) يتعين علينا أولاً تحويل جدول النقل وصياغته إلى شكل البرمجة الخطية.

فمثلاً لحل مشكلة شركة العاير للنقلات السابق والمحلول باستخدام جداول

النقل يتعين علينا اتباع الخطوات التالية:

أولاً: معرفة مراكز التوزيع وكذلك الإنتاج والطاقة الاستيعابية لكل مركز

وكذلك التكاليف المصاحبة لنقل الوحدة الواحدة من مركز الإنتاج إلى مركز التوزيع.

وهي حسب جدول النقل كانت كالآتي:

العروض Supplies	الرياض	جدة	المدينة	مكة	إلى \ To من \ From
	130	190	180	150	
50					الدمام
	170	150	140	200	
30					الظهران
	220	170	120	250	
70					الجبيل
150	40	20	60	30	Demands الطلب

ثانياً: افترض أن الكميات المنقولة من كل مركز إنتاج إلى كل مركز طلب هي (xij) حيث i ترمز لمركز الإنتاج و j ترمز لمركز الطلب كالآتي:

العرض Supplies	الرياض				جدة	المدينة		مكة		إلى \ To من \ From
	X11	X12	X13	X14		X21	X22	X31	X32	
50	150	180	190	130	30	200	140	150	120	الدمام
	X21	X22	X23	X24		X31	X32	X33	X34	
70	250	120	170	220	40	Demands				الطلب
	30	60	20	150						

ثالثاً: تحويل شكل المشكلة من جدول النقل إلى البرمجة الرياضية. وحيث إن مشكلة النقل هي تخفيض التكاليف فإن دالة الهدف هي تخفيض (Minimization) والقيود هي الكميات الإجمالية المنتجة والموزعة لكل مركز وتكون الصياغة كالتالي:  
دالة الهدف:

$$\text{Min } 150x_{11}+180x_{12}+190x_{13}+130x_{14} \\ +200x_{21}+140x_{22}+150x_{23}+170x_{24} \\ +250x_{31}+120x_{32}+170x_{33}+220x_{34}$$

Subject to

قيود مراكز التوزيع:

$$X_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=50 \\ X_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=30 \\ X_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=70$$

قيود مراكز الطلب:

$$X_{11}+x_{21}+x_{31}=30 \\ X_{12}+x_{22}+x_{32}=60$$

$$X_{13} + x_{23} + x_{33} = 20$$

$$X_{14} + x_{24} + x_{34} = 40$$

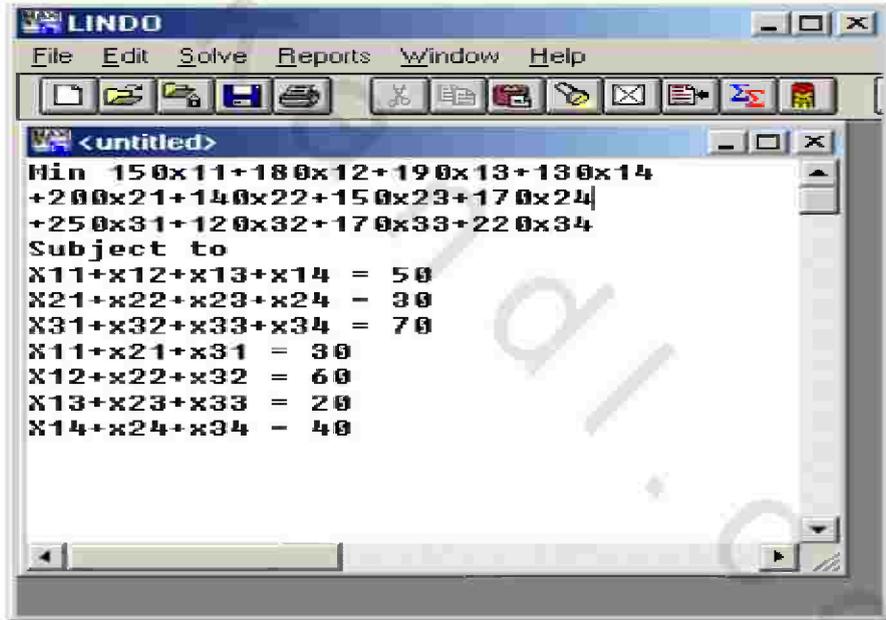
قيد عدم السالبة:

$$X_{ij} \geq 0$$

رابعاً: نسخها ولصقها في برنامج ليندو (Lindo):

لاحظ أن أي أخطاء أو فراغات قد تسبب في خروج رسائل أخطاء وعند

الانتهاء من نسخها ثم لصقها في برنامج ليندو (Lindo) فإنها تبدو مثل الشكل التالي:



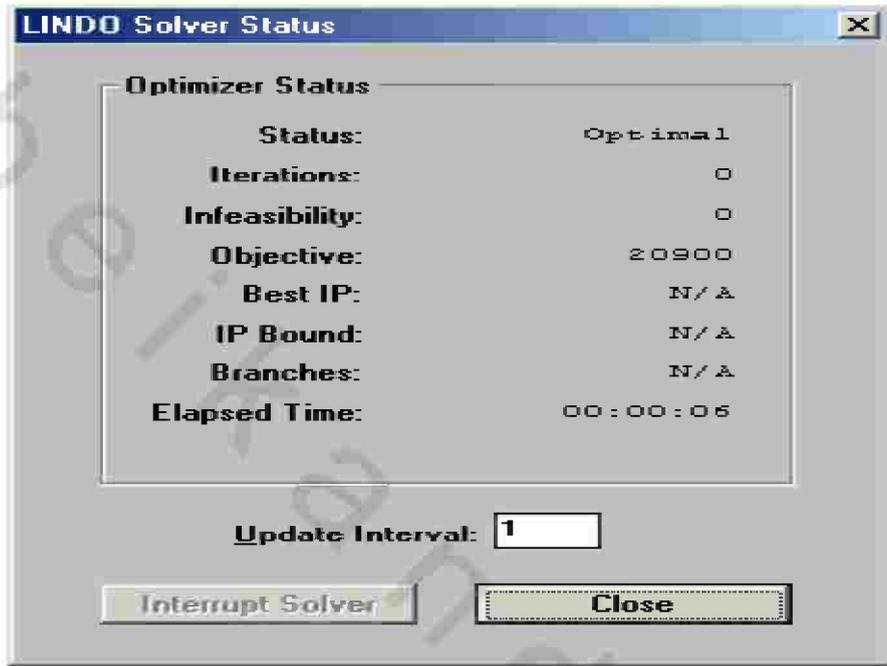
وعند التأكد من كتابة الصياغة بشكل صحيح نأتي إلى حلها بالذهاب إلى قائمة

حل (solve) ثم اختيار أمر حل (Solve). وعند حلها تخرج نافذة تؤكد وجود حل

أمثل (Optimal) للمشكلة من أول تشغيل ويسرعة جدا ويجزء من الثانية

(Elapsed time). ونجد أن الحل الأمثل مطابق لنفس الحل الذي سبق وأن قمنا به

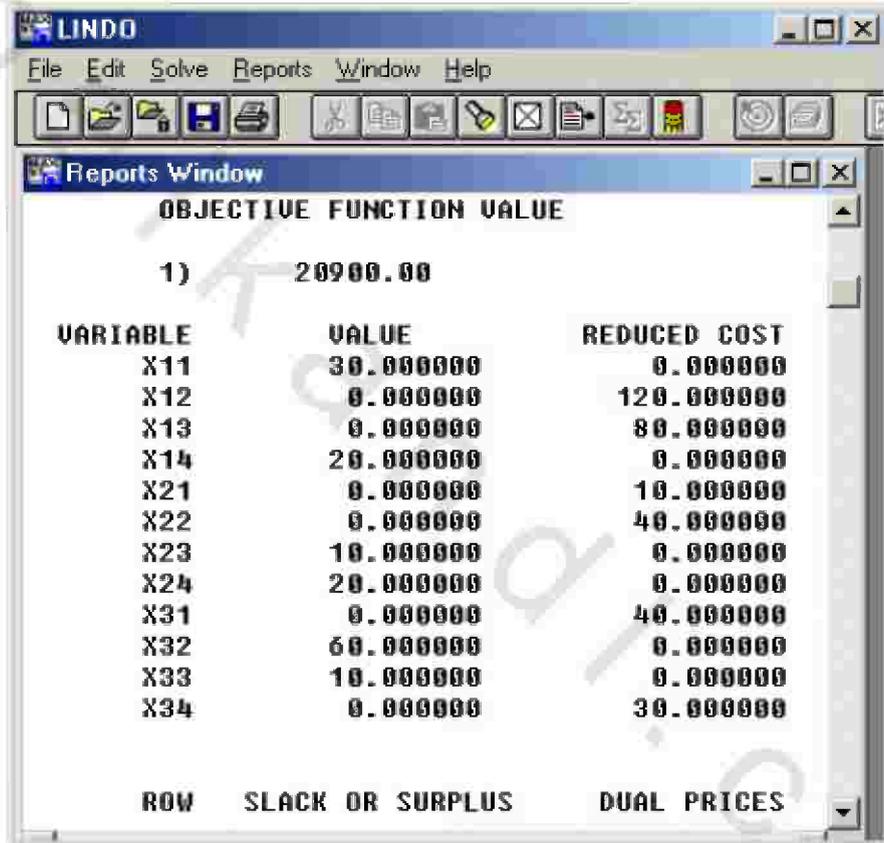
باستخدام جداول النقل وهو (20900) ريال هي أقل تكلفة ممكنة:



ويرافق نافذة وجود الحل السابقة نافذة أخرى من يرغب أن يعمل تحليل الحساسية لهذه المشكلة يمكن للمستخدم التأشير عليها بالإيجاب أو النفي حسب رغبة المستخدم كما في التالي:



خامساً: تفسير الحل وهو كما يظهر من نافذة تقارير الحل (Reports window) من قائمة إطار (windows)



The screenshot shows the LINDO Reports Window. The title bar reads "LINDO" and the menu bar includes "File", "Edit", "Solve", "Reports", "Window", and "Help". The toolbar contains various icons for file operations and solving. The main content area is titled "Reports Window" and displays the following information:

**OBJECTIVE FUNCTION VALUE**

1) 20900.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	30.000000	0.000000
X12	0.000000	120.000000
X13	0.000000	80.000000
X14	20.000000	0.000000
X21	0.000000	10.000000
X22	0.000000	40.000000
X23	10.000000	0.000000
X24	20.000000	0.000000
X31	0.000000	40.000000
X32	60.000000	0.000000
X33	10.000000	0.000000
X34	0.000000	30.000000

At the bottom of the window, the following text is visible: "ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES".

سادساً: معرفة عدد الوحدات المنقولة من كل مركز إنتاج إلى كل مركز توزيع ومن الشكل السابق نجد أن عدد الوحدات المنقولة هي كما يلي:

X11=30  
X14=20  
X23=10  
X24=20  
X32=60  
X33=10

ويوضعها في الجدول الخاص بالنقل تكون كما يلي:

\ To من From \	مكة		المدينة		جدة		الرياض		العرض Supplies
الدمام	30	150		180		190		130	50
الظهران		200		140	10	150	20	170	30
الجبيل		250	60	120	10	170		220	70
Demands الطلب	30		60		20		40		150

وهذا هو نفس الحل الذي تم التوصل إليه بطريقة جداول النقل.

## حل مسائل النقل والتخصيص

1- الحل بالتفصيل:

أ) نبحث عن أقل التكاليف في كل صف

التغليف	تعبئة الطلبات	التوريد	الوظيفة\ الموظف	
0	11	4	إبراهيم	26
0	16	13	عبد العزيز	24
0	12	6	محمد	27

ب) نبحث عن أقل التكاليف في كل عمود

التغليف	تعبئة الطلبات	التوريد	الوظيفة\ الموظف	
0	0	0	إبراهيم	26
0	5	9	عبد العزيز	24
0	1	2	محمد	27
	11	4		92

ج) نقوم بتغطية جميع الأصفار بأقل الخطوط:

التغليف	تعبئة الطلبات	التوريد	الوظيفة\ الموظف	
<del>0</del>	<del>0</del>	<del>0</del>	<del>إبراهيم</del>	<del>26</del>
0	5	9	عبد العزيز	24
0	1	2	محمد	27
	11	4		92

د): بما أن عدد الخطوط (2) أقل من عدد الوظائف (3) نقوم بالبحث عن أقل قيمة غير مغطاة بخط. نطرح هذه القيمة من جميع القيم غير المغطاة، ونضيفها إلى القيم التي غطيت بخطين، والقيم المغطاة بخط واحد فقط تظل على ما هي عليه:

الوظيفة الموظف	التوريد	تعبئة الطلبات	التغليف	
إبراهيم	0	0	1	26
عبد العزيز	8	4	0	24
محمد	1	0	0	27

93

(ف) بما أن عدد الخطوط = عدد الوظائف إذا وصلنا إلى الحل الأمثل وهو كما يلي:

الوظيفة الموظف	التوريد	تعبئة الطلبات	التغليف	
إبراهيم	X	0	1	
عبد العزيز	8	4	X	
محمد	1	X	0	

93

أقل تكلفة ممكنة، إبراهيم للتوريد، عبد العزيز للتغليف، محمد لتعبئة الطلبات

2- الحل:

نرمز بالرمز  $x_{ij}$  لتخصيص العامل  $i$  على الماكينة  $j$

$$\min 20 x_{11} + 25 x_{12} + 22 x_{13} + 28 x_{14} + 15x_{21} + 18 x_{22} + 23 x_{23} + 17x_{24}.....$$

subject to:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} = (0, 1)$$

## 3- الحل:

	التسليم		العريجات		السويدي		Dummy		
الملز	100	25	20	34	130	27	-8	0	250
العليا	+13	30	+6	32	+9	28	50	0	50
ام الحمام	+16	33	20	26	+8	27	120	0	140
السليمانية	+11	27	160	25	+6	30	+1	0	160
الطلب	100		200		130		170		

الحل غير أمثل لوجود قيم سالبة في الخلايا الفارغة.

الخلية الداخلة: هي الخلية الملز - dummy.

الخلية الخارجة: هي الملز - العريجات.

وللوصول إلى الحل الأمثل علينا الانتقال إلى جدول جديد ثم الاستمرار في

تقييم الخلايا حتى تكون جميع نتائج التقييم موجبة.

4- الحل:

	النسيم		العريجات		السويدي		Dummy		
		25		34		27		0	
الملز	80		+12		+4		170		250
		30		32		28	-5	0	
العليا	20		+5		30				50
		33		26		27		0	
أم الحمام	+3		40		100		-4		140
		27		25		30		0	
السليمانية	-1		160		+4		-3		160
الطلب	100		200		130		170		

5- الحل:

إلى من	v1=7 العليا	v2=6 الملز	v3=16 العميق	v4=9 منفوحة	العرض
السويدي	17	16	16	9	50
U1=0	+10	+10	10	40	
أم الحمام	8	20	17	12	55
U2=1	20	+13	35	+2	
النسيم	15	10	20	25	45
U3=4	+4	35	10	+12	
الطلب	20	35	55	40	150