الفصل الرابع

حساب المساحات

(٤,١) مقدمة

في كثير من الأحيان تكون هنالك حاجة ماسة لمعرفة مساحة قطعة أرض ذات حدود معينة. وربما تكون حدود هذه الأرض موقعة على خريطة بمقياس رسم معلوم. وهنالك طرق مختلفة لإيجاد مساحة قطعة الأرض: بعضها يستخدم في إيجاد المساحة من الخريطة وبعضها يستخدم عند القياس المباشر على الطبيعة. وبعضها يناسب الحدود ذات الخطوط المستقيمة التي تشكل أشكال هندسية منتظمة وبعضها يناسب الحدود ذات الخطوط غير المنتظمة.

أما إيجاد المساحة من الخريطة فهي الطريقة الأكثر استعمالاً إذ أن القياسات المطلوبة كلها تتم من على لوحة الخريطة واستخدام مقياس رسم الخريطة إن كان معلوماً دون الرجوع إلى الموقع . إلا أن عيب هذه الطريقة هو تراكم الأخطاء التي تنتج من توقيع الخريطة نفسها و من القياس على الخريطة . ومع أن هذه المشكلة يمكن علاجها باستخدام الطريقة الثانية وهي أخذ القياسات من الموقع مباشرةً إلا أن ذلك يتطلب تكلفة مادية و جهد عملي أكبر ، ولذلك تظل الطريقة الأولى هي الأكثر استعمالاً .

أما التصنيف الآخر لإيجاد المساحة فهو الذي يتم بالنظر إلى طريقة حساب المساحة . وذلك يمكن أن يتم بالطرق الرياضية والتخطيطية والآلية. أما الطرق الرياضية

فيمكن استخدامها مع القياسات التي تتم في الموقع على الأرض كما يمكن استخدامها مع القياسات التي تتم على الخريطة ، وأما الطريقتين الأخريين وهما التخطيطية والآلية فلا بد من استخدامهما مع الحدود الموقعة على الخريطة بالمقياس المعلوم.

(٤,٢) الطرق الرياضية لإيجاد المساحة

إذا كانت المنطقة تحد بحدود هندسية منتظمة فيمكن استخدام النموذج الرياضي المناسب للشكل الهندسي للحدود، أما إذا كانت لا تشكل حدوداً هندسية منتظمة فيمكن استخدام طرق رياضية يتم تطبيقها لإيجاد المساحة تقريبياً.

(٤,٢,١) النماذج الرياضية للأراضي ذات الحدود المنتظمة

هنالك نماذج رياضية تناسب المنطقة ذات الحدود الهندسية المنتظمة مثل تلك التي تشكل شكل مثلث أو مربع أو مستطيل أو معين أو متوازي أضلاع أو شبه منحرف أو أي شكل محدد بخطوط مستقيمة أو دائرية أو قطاع من دائرة أو أي تركيب من هذه الأشكال. وهي وإن كانت معلومة للطالب من دراسته للعلوم الرياضية إلا أننا سنقوم بتقديم بعض منها في هذا الفصل.

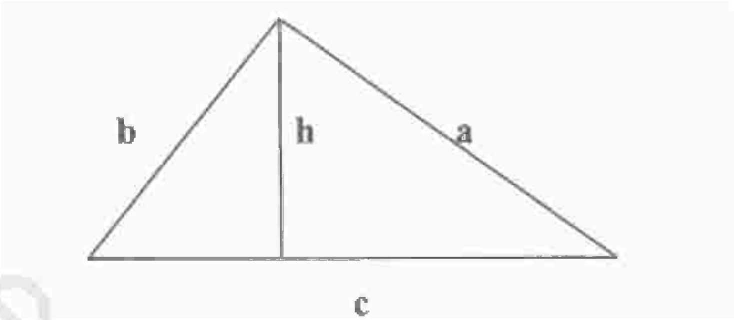
(٤,٢,١,١) المثلث (الشكل رقم ٤,١)

١- إذا تم قياس أضلاع المثلث الثلاثة (a,b,c) فإن مساحة المثلث (A) تحسب من القانون الرياضي التالي:

$$A = [s*(s-a)*(s-b)*(s-c)]^{1/2} \qquad (٤,١)$$

حيث: s هي نصف محيط المثلث

$$s = (a + b + c) / 2$$



الشكل رقم (٤,١). قطعة الأرض على شكل مثلث أطوال أضلاعه a,b,c.

٢- وإذا تم قياس قاعدة المثلث (أحد أضلاعه الثلاثة ، c مثلاً) وتم قياس العمود النازل عليها من الركن المقابل (ارتفاع المثلث h) فإن المساحة A تحسب من القانون التالي:

$$A = (1/2) * c * h \qquad (٤,٢)$$

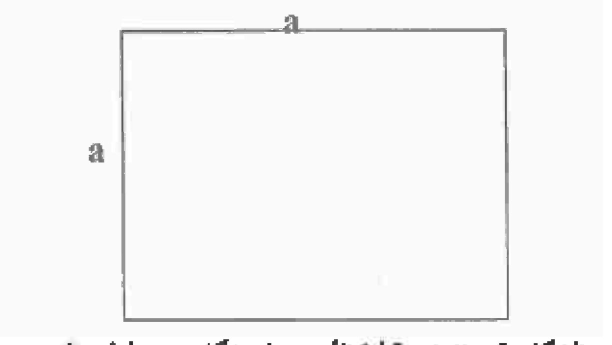
٣- وإذا تم قياس طولي ضلعين متجاورين من المثلث (الضلعين a و b مثلاً) والزاوية المحصورة بينهما (زاوية C) فإن المساحة A تحسب من العلاقة التالية:

$$A = (1/2) * a * b * \sin C \qquad (٤,٣)$$

(٤,٢,١,٢) الأشكال الهندسية غير المثلث

١- المربع: الشكل رقم (٤,٢) إذا كان طول ضلع المربع يساوي a فإن مساحته تساوي الضلع في نفسه:

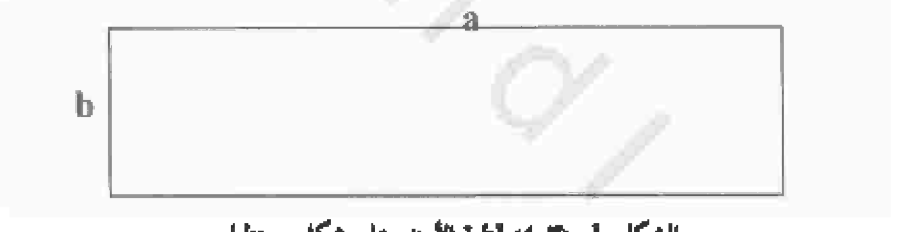
$$A = a^2 \qquad (٤,٤)$$



الشكل رقم (٤,٢). قطعة الأرض على شكل مربع طول ضلعه a.

٢- المستطيل: (الشكل رقم ٤,٣) إذا كان طوله يساوي a وعرضه يساوي b فإن مساحته A هي:

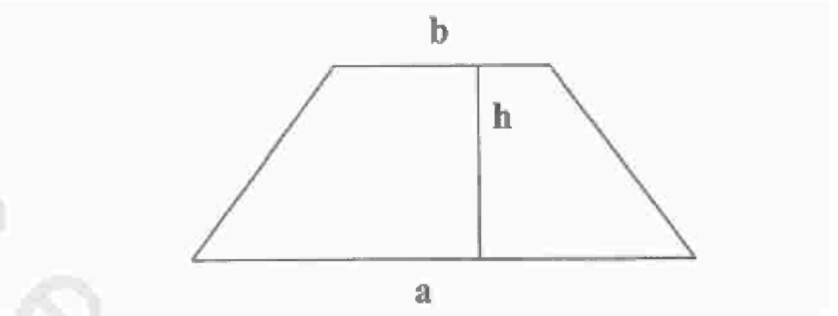
$$A = a * b \qquad (٤,٥)$$



الشكل رقم (٤,٣) قطعة الأرض على شكل مستطيل.

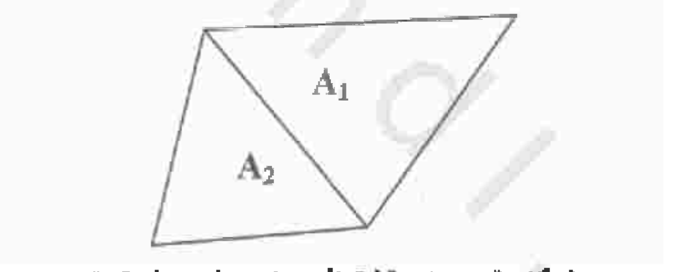
٣- شبه المنحرف: إذا كان طول القاعدة a وطول القاعدة الأخرى الموازية لها يساوي b وارتفاعه (المسافة بين القاعدتين) يساوي h (الشكل رقم ٤,٤) فإن المساحة A هي:

$$A = (1/2) * (a + b) * h \qquad (٤,٦)$$



الشكل رقم (٤,٤). قطعة الأرض على شكل شبه المنحرف.

٤- إذا كان شكل قطعة الأرض يمثل أي شكل هندسي مكون من أكثر من ثلاثة أضلاع مستقيمة (الشكل رقم ٤,٥) ، مثل الشكل الرباعي أو الخماسي أو السداسي، فيمكن تقسيمه إلى مثلثات يتم قياس أضلاعها وحساب مساحة كل مثلث ثم جمع هذه المساحات لإيجاد المساحة الكلية.



الشكل رقم (٤,٥). قطعة الأرض ذات الحدود المستقيمة.

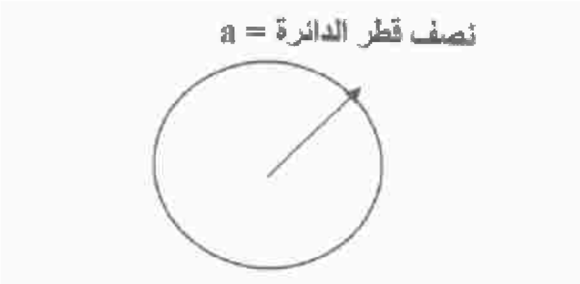
مساحة قطعة الأرض ذات الشكل الرباعي الذي يظهر في الشكل رقم (٤,٥) تساوي مجموع مساحتي المثلثين:

$$A = A1 + A2$$

(٤,٢,١,٣) الشكل الدائري

١- مساحة الدائرة (الشكل رقم ٤,٦) التي نصف قطرها a تحسب من العلاقة:

$$A = \pi * a^2 \qquad (٤,٧)$$



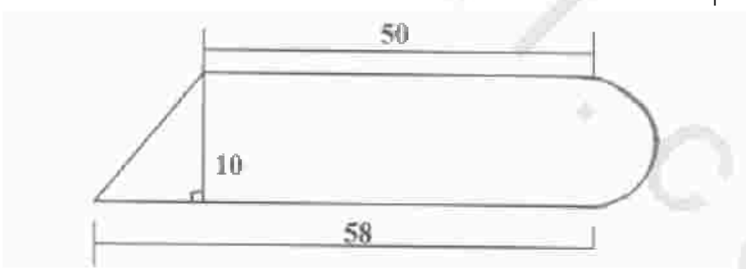
الشكل رقم (٤،٦). قطعة الأرض ذات الشكل الدائري.

٢- مساحة القطاع من هذه الدائرة الذي زاويته عند المركز تساوي α راديان (أو α * 360 درجة ستين):

$$A = \pi * a^2 * \alpha \qquad (٤،٨)$$

مثال (٤،١)

أوجد مساحة قطعة الأرض التي تظهر حدودها في الشكل 7.4 والتي يمكن تقسيمها إلى نصف دائرة قطرها 10 أمتار ومستطيل طوله 50 متراً وعرضه 10 أمتار ومثلث قائم الزاوية.



الشكل رقم (٤،٧). قطعة أرض مكونة من نصف دائرة ومستطيل ومثلث قائم الزاوية.

الحل:

مساحة نصف الدائرة = $0.5 \times \pi \times (10/2)2$

$= 39.27 m^2$

مساحة المستطيل = 50×10 = $500\ m^2$

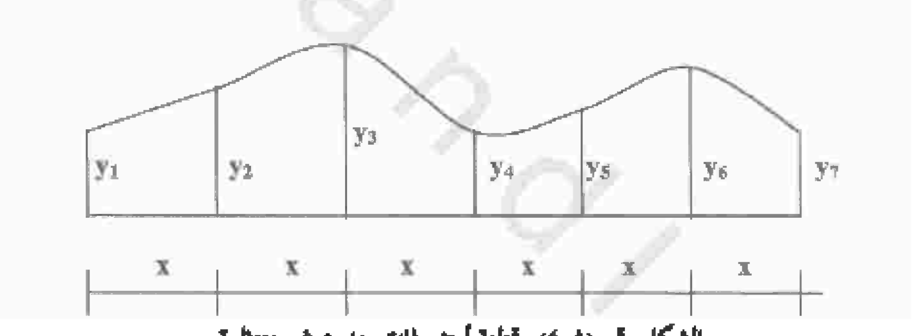
مساحة المثلث قائم الزاوية = $10 \times 8 / 2$ = $40\ m^2$

المساحة الكلية للقطعة = $39.27 + 500.00 + 40.00$

$= 579.27\ m^2$

(٤,٢,٢) النماذج الرياضية للأراضي ذات الحدود غير المنتظمة

في الكثير من الحالات تكون لقطعة الأرض حدود لا تتشكل من خطوط مستقيمة أو أقواس دائرية بحيث يمكن تطبيق النموذج الرياضي المناسب كما تم في الفقرة السابقة. في هذه الحالة نقوم بمد محور على طول المنطقة ونقيم عليه أعمدة –على مسافات متساوية– إلى حدود الأرض كما يتضح في الشكل رقم (٤,٨).



الشكل رقم (٤,٨). قطعة أرض ذات حدود غير منتظمة.

إذا علمنا المسافة بين كل عمود والذي يليه (x مثلاً) و بقياس أبعاد هذه الأعمدة من حدود المنطقة (y_i) لكل عمود i من 1 إلى n عمود (n = 7 في الشكل رقم ٤,٨) يمكن حساب المساحة حساباً تقديرياً بالطريقة التي توائم شكل حدود المنطقة من الطرق التالية:

(٤,٢,٢,١) طريقة متوسط أطوال الأعمدة

نحسب أولاً متوسط أطوال الأعمدة Y من العلاقة:

$$Y = [\,y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n\,]\ /\ n \qquad (٤,٩)$$

ومن ثم نحسب المساحة A من العلاقة التالية:

المساحة الكلية = متوسط أطوال الأعمدة [Y] × طول المحور [x * (n − 1)]

(٤,٢,٢,٢) طريقة أشباه المنحرفات

وهذه الطريقة أكثر دقة من الأولى، ونعتبر فيها أن كل مساحة بين عمودين هي مساحة شبه منحرف ، فمثلاً مساحة الجزء الأول من اليسار هي:

$$A_1 = x * (\,y_1 + y_2\,) / 2$$

ومساحة الجزء الثاني هي:

$$A_2 = x * (\,y_2 + y_3\,) / 2$$

ومساحة الجزء الأخير هي:

$$A_{n-1} = x * (\,y_{n-1} + y_n\,) / 2$$

وبجمع مساحات كل الأجزاء التي تكون المنطقة نوجد المساحة :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_{n-1}$$

أو:

$$A = (x/2) * [\,y_1 + 2 * y_2 + 2 * y_3 + \ldots\ldots + 2 * y_{n-1} + y_n\,] \qquad (٤,١٠)$$

(٤,٢,٢,٣) طريقة سيمبسون

وتعتبر أكثر دقة من سابقتيها إذا كانت حدود المنطقة منحنية أو أشبه بالمنحنى من الخط المستقيم، ويراعى عند تطبيقها أن يكون عدد الأعمدة n عدداً فردياً.

$$A = (x/3) * [\,y_1 + 4*y_2 + 2*y_3 + 4*y_4 + 2*y_5 + \ldots\ldots + 4*y_{n-1} + y_n\,] \qquad (٤,١١)$$

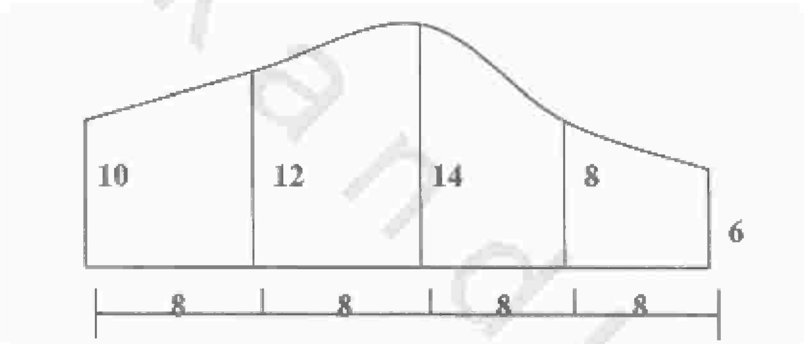
ويمكن صياغتها لفظياً على النحو التالي:

المساحة = (x/3) * (طول العمود الأول + طول العمود الأخير + ضعف مجموع الأعمدة الفردية غير الأول و الأخير + أربعة أضعاف مجموع الأعمدة الزوجية).

ملاحظة: يلاحظ أن الطريقة الثانية يمكن استخدامها لتقدير مساحة القطعة التي تشكل حدودها خطوطاً مستقيمة بين الأعمدة ، في حين أن الطريقة الأخيرة تعبر أكثر عن الحدود التي تكون في شكل منحنى بين الأعمدة.

مثال (٤,٢)

قسمت مساحة قطعة أرض إلى أربعة أجزاء كما هو مبين في الشكل رقم (٤,٩). كل القياسات بالأمتار. أوجد مساحة قطعة الأرض باستخدام كل من الطرق الثلاث.



الشكل رقم (٤,٩). قطعة أرض حدودها غير منتظمة قسمت إلى أربعة أجزاء.

الحل:

١- طريقة متوسط أطوال الأعمدة :

متوسط أطوال الأعمدة Y:

$$Y = [6 + 8 + 14 + 12 + 10] / 5$$
$$= 10m$$

طول المحور = عدد الأجزاء × طول الجزء الواحد = $(n-1) * x$

$$8 \times 4 = 32m$$

المساحة = متوسط أطوال الأعمدة × طول المحور

$32 \times 10 = 320 m^2$

٢- طريقة أشباه المنحرفات:

المساحة = $(8/2)\,[\,10 + 6 + 2x(\,8 + 14 + 12\,)\,]$

$= 4 \times 84$

$= 336\ m^2$

٣- طريقة سيمبسون:

المساحة = $(8/3)\,[\,10 + 6 + 4(8 + 12) + 2x14\,]$

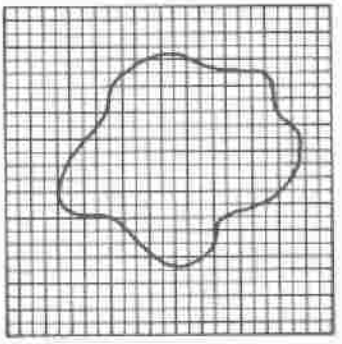
$= 124 \times 8/3$

$= 330.67\ m^2$

(٤,٣) الطرق التخطيطية لإيجاد المساحة

وهذه الطرق تعتبر تقديرية ولا يلجأ إليها إلا في حالة تجنب إجراء الحسابات وأن تكون حدود المنطقة موقعة على خريطة ذات مقياس رسم معلوم. وسنقدم طريقة واحدة منها هي طريقة المربعات.

ونستخدم هنا ورقة رسم بياني شفاف توضع على الخريطة مغطية الجزء الذي تقع فيه المنطقة المراد إيجاد مساحتها (الشكل رقم ٤,١٠). ونقوم بتعداد المربعات الصغيرة داخل حدود المنطقة. ونحتاج للقيام بتقدير لكسر المربعات الغير كاملة. وإذا علمنا عدد المربعات الكلية بكسورها وإذا علمنا المساحة على الأرض التي يغطيها المربع الواحد من مقياس الخريطة يمكن إيجاد المساحة الكلية.



الشكل رقم (٤,١٠). طريقة المربعات التخطيطية لحساب المساحة.

مثال (٤,٣)

إذا كانت حدود قطعة الأرض المتعرجة قد تم توقيعها على خريطة ذات مقياس رسم 1:5000 وتم وضع ورقة رسم شفاف مقسمة إلى مربعات على لوحة الرسم لتغطي حدود المنطقة تماماً كما في الشكل رقم (٤,١٠)، وإذا كان كل مربع عبارة عن $1\ cm^2$. وتم إحصاء عدد المربعات وأجزائها داخل حدود المنطقة فكانت 198.5 مربعاً، فكم تكون مساحة هذه القطعة على الطبيعة؟

الحل:

بما أن مقياس رسم الخريطة هو 1:5000 فإن كل 1cm طولي يمثل 5000cm أو 50m على الطبيعة. ويمثل كل 1 سم مربع ما مقداره 50×50 متراً مربعاً في الطبيعة (2500 متراً مربعاً). أما المساحة التي مقدارها 198.5 سم مربعاً على الخريطة فتمثل 198.5x2500 متراً مربعاً على الطبيعة.

إذن مساحة قطعة الأرض على الطبيعة = 198.5x2500 = 496250 متراً مربعاً

وهذه المساحة يمكن أن يعبر عنها بالهكتار، فحيث أن 1 هكتار = 10000 متر مربع فإن هذه المساحة تعادل 49.625 هكتاراً.

(٤,٤) الطريقة الآلية لإيجاد المساحة (جهاز قياس المساحة)

ومن الطرق المستخدمة في إيجاد المساحة الأرضية للمنطقة ذات الحدود غير المنتظمة والموقعة على الخريطة الطريقة الآلية التي يتم فيها استخدام جهاز يسمى جهاز قياس المساحة (البلانيميتر). ومن أنواع هذا الجهاز جهاز مقياس المساحة الميكانيكي والجهاز الرقمي.

ومن أكثر أجهزة مقياس المساحة الميكانيكية المستخدمة جهاز المقياس القطبي. وكما هو مبين في الشكل رقم (٤,١١) فإن هذا الجهاز يتكون من:

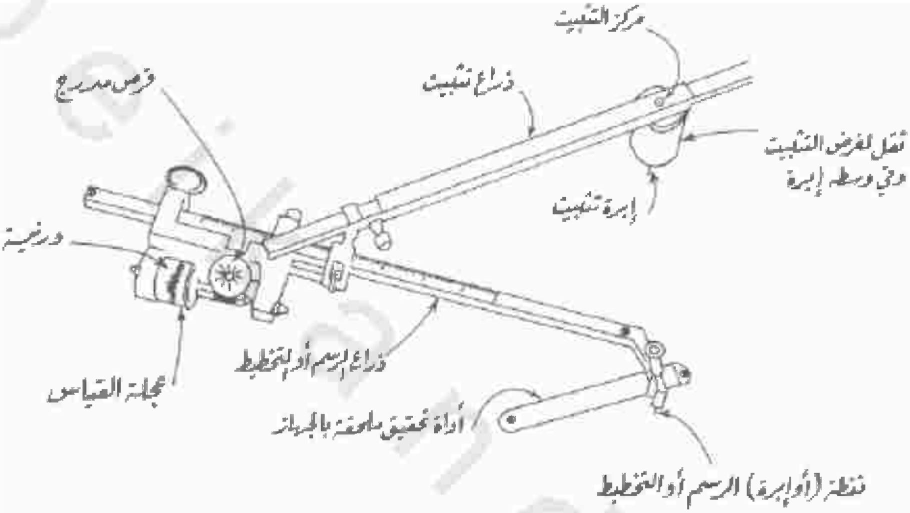
١- ذراع متابعة الحدود: وهو عبارة عن قضيب معدني مدرج وفي أحد طرفيه إبرة عمودية يتم تمريرها على حدود قطعة الأرض المراد إيجاد مساحتها.

٢- ذراع الثقل أو الذراع الثابت ويتصل عند أحد طرفيه بثقل يثبت بواسطة إبرة من أسفله بحيث لا يتحرك من مكانه عند تمرير ذراع متابعة الحدود. وينتهي هذا الذراع عند طرفه الآخر بمخروط يدخل في ثقب صغير في غلاف يبرلق على ذراع متابعة الحدود.

٣- عجلة القياس وهي عجلة رأسية مثبتة على محور أفقي يوازي ذراع المتابعة ويقسم محيطها إلى عشرة أقسام رئيسية ويقسم كل قسم من هذه الأقسام إلى عشرة أقسام متساوية. ويمكن قراءة جزء من عشرة من أحد الأقسام بواسطة ورنية مثبتة بجوار العجلة الرأسية التي تدور على محور أفقي متصل بقرص أفقي مقسم هو الآخر إلى عشرة أقسام عليها مؤشر.

وكلما دارت العجلة الرأسية دورة كاملة دار المؤشر قسماً واحداً على القرص الأفقي، ويوجد بالغلاف المنزلق على ذراع المتابعة ورنية تقرأ لدقة 1/10 من أصغر جزء من أقسام هذا الذراع، ويتحرك الغلاف على الذراع حركة بطيئة وأخرى سريعة بواسطة مسامير خاصة وذلك من أجل وضع ثابت الجهاز على الذراع والذي يكون

محدداً بجدول مرفق مع الجهاز. وتعادل قيمة القسم الواحد على القرص ألف وحدة من وحدات الجهاز. وبالجدول أيضاً عمود لقيم ثابت الجهاز الذي يستخدم مـــع القـــراءة المسجلة لإيجاد المساحة على الأرض بالأمتار المربعة.



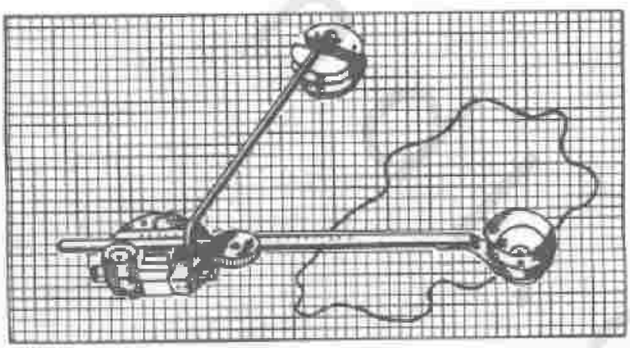
الشكل رقم (٤,١١). أجزاء جهاز مقياس المساحة الميكانيكي [٨].

ولكل جهاز جدول يحوي أربعة أعمدة: العمود الأول يـــبين مقـــاييس الرســـم المستعملة ومقابل كل مقياس رسم الطول الذي يجب تثبيت ذراع المتابعة عليه في العمود الثاني ، ويحوي العمود الثالث المساحة الحقيقية المقابلة لكل وحدة من وحدات قيـــاس الجهاز على لوحة الخريطة وفي العمود الأخير المساحة الحقيقية المقابلة لمقيـــاس الرســـم المستعمل.

(٤,٤,١) طريقة استخدام جهاز قياس المساحة

أولاً يتم اختيار طول ذراع المتابعة المقابل لمقياس رسم الخريطة التي تحوي حدود المنطقة وذلك من الجدول المرافق للجهاز (في بعض الأجهزة يتم طبع الجدول على ظهر

الجهاز نفسه)، ومن ثم يتم تحريك الجزء المعزول على ذراع المتابعة حركة سريعة وبطيئة بواسطة المسامير الخاصة بالملك لضبط طول ذراع المتابعة. الخطوة الثانية هي اختيار نقطة بداية القياس وتعليمها وهي نقطة على حدود المنطقة المبينة على لوحة الخريطة، ويتم اختيارها بحيث يكون الثقل خارج حدود المنطقة وأن تكون إبرة المتابعة في مركز ثقل المساحة تقريباً (الشكل رقم ٤،١٢) وأن يكون ذراع المتابعة عمودياً على ذراع الثقل بقدر الإمكان وأن تكون الزاوية بين الذراعين حدود 30 إلى 150 درجة أثناء تمرير الإبرة على حدود القطعة. ويمكن التحقق من ذلك بإمرار الإبرة على حدود المنطقة بحركة سريعة. وينبه إلى أنه في حالة ما كانت المساحة كبيرة فيمكن تقسيمها إلى عدة أقسام لتحقيق الوضع المطلوب وإيجاد مساحة كل قسم لحدة و من ثم جمع مساحات هذه الأقسام لإيجاد المساحة الكلية.



الشكل رقم (٤،١٢). الوضع الأمثل لوضع الجهاز بالنسبة للخريطة عند بداية القياس [٨].

أما الخطوة الثالثة فهي خطوة القياس وتبدأ بوضع الإبرة على نقطة البداية المختارة وتصفير الجهاز بحيث يكون كل من مؤشر القرص الأفقي وورنية العجلة الرأسية على الصفر ثم تمرير الإبرة على حدود المنطقة في اتجاه عقارب الساعة و ذلك لأن ترقيم العجلة يتزايد مع الدوران في هذا الاتجاه حتى نصل إلى نقطة البداية مرة أخرى. ويتم قراءة الجهاز ومن ثم استخدام معامل الجهاز لتحويل القراءة إلى مساحة على الأرض.

وعلى سبيل المثال إذا كانت المساحة على الطبيعة (بالمتر المربع) المقابلة لوحدة الجهاز تساوي أربعة أمتار مربعة على حسب ما هو في جدول الجهاز فإن مساحة هذه القطعة تساوي 4x7213 = 28852 متراً مربعاً.

أما إذا تم استخدام الجهاز لإيجاد مساحة قطعة أرض على خريطة مرسومة بمقياس رسم غير موجود في جدول الجهاز فإننا نستخدم طول الذراع المقابل لأحد مقاييس الرسم الموجودة في الجدول و تطبق القانون التالي لإيجاد المساحة المطلوبة:

المساحة المطلوبة = المساحة الناتجة x (مقياس الرسم المستعمل ÷ مقياس الرسم الحقيقي)٢

مثال (٤,٣)

استعمل جهاز مقياس المساحة في إيجاد مساحة قطعة أرض على خريطة مقياس رسمها 1:2500 ولكن مقياس الرسم هذا لم يكن موجوداً بجدول الجهاز فقد تم قياس المساحة على أساس مقياس الرسم 1:2000 الموجود بالجدول فكانت المساحة الناتجة 4000 متر مربع ، فما هي المساحة الحقيقية لقطعة الأرض؟

الحل:

المساحة الحقيقية = 4000x(1/2000)2/ (1/2500)2

$= 6250\ m^2$

مثال (٤,٤)

لإيجاد مساحة قطعة أرض مبينة علي خريطة مقياس رسمها 1:2500 تم استخدام جهاز بلانيميتر لا يوجد في الجدول المرافق له المقياس المذكور فاستخدم مقياس الرسم 1:1000 وكانت المساحة التي تمثلها وحدة الورنية لهذا المقياس من الجدول هي $30m^2$. وكانت قراءة الجهاز عند بدء القياس 1800 وبعد تمرير الإبرة على حدود المنطقة خمس مرات سجلت القراءة الأخيرة 4900، أوجد المساحة الحقيقية لقطعة الأرض بالمتر المربع، ثم بالهكتار، ثم بالفدان. (١هكتار = $10000\ m^2$ = 2.39 فدان).

الحل:

عدد وحدات الجهاز لخمس دورات = 4900 – 1800 = 3100

متوسط عدد وحدات الجهاز لدورة واحدة = 3100/5

= 620

المساحة الناتجة من القياس = 30 x 60

= 18600 m^2

المساحة الحقيقية = $\frac{18600x(1/1000)^2}{(1/2500)^2}$

$= 18600 \times (2500)^2/(1000)^2$

$= 116250\ m^2$

= 11.625 هكتاراً

= 27.78 فداناً

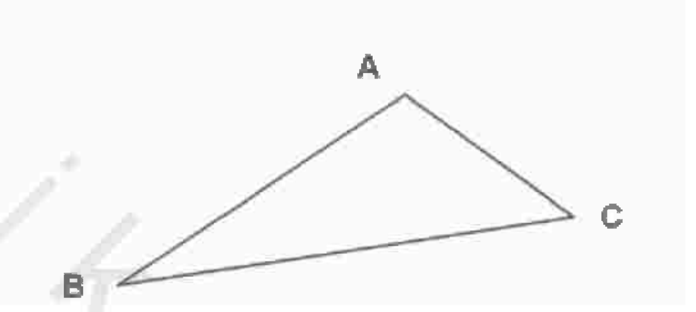
وهنالك مقياس المساحة الرقمي (الشكل رقم ٤,١٣) وقد صمم على نفس المبدأ الرياضي الذي صمم عليه المقياس الميكانيكي القطبي. ولا يوجد فرق في استعمال الجهاز الرقمي إلا أن مقياس الخريطة التي رسمت عليها حدود الأرض يدخل رقمياً في الجهاز قبل استخدامه. وبعد تمريره على حدود المنطقة (في اتجاه عقارب الساعة أيضاً) يعطي قيمة المساحة مباشرة.

الشكل رقم (٤,١٣). مقياس المساحة الرقمي [٩].

(٤,٥) تمارين

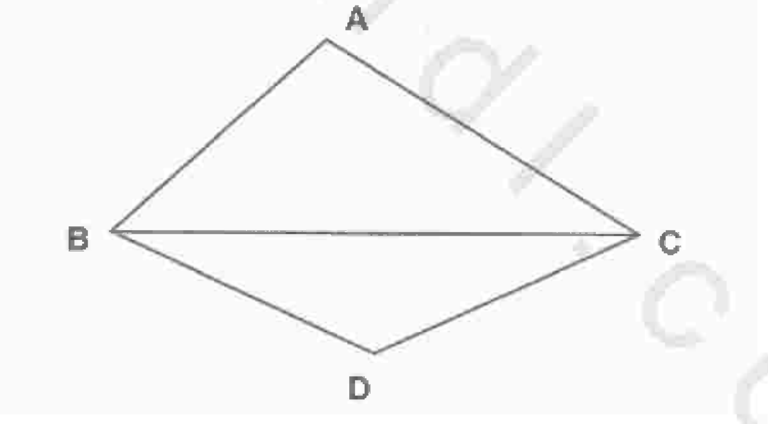
١- احسب مساحة كل من الأشكال الموضحة في الرسومات التالية:

أ)



زاوية A قائمة، طول AB = 40m، طول AC = 30m.

ب)



أطوال الأضلاع: AB = 80m

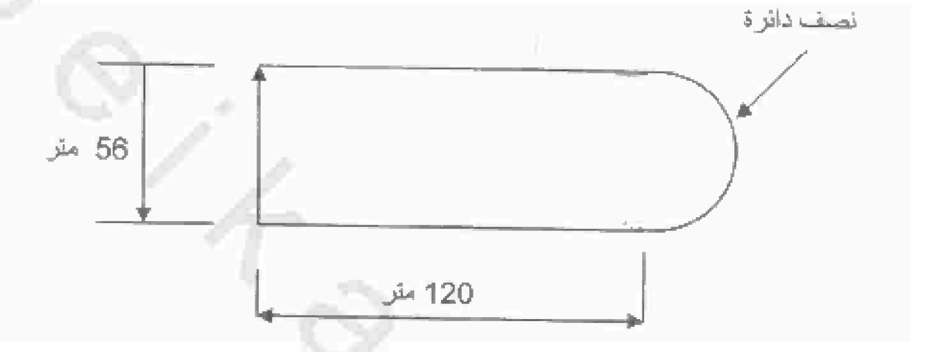
BC = 120m

BD = 60m

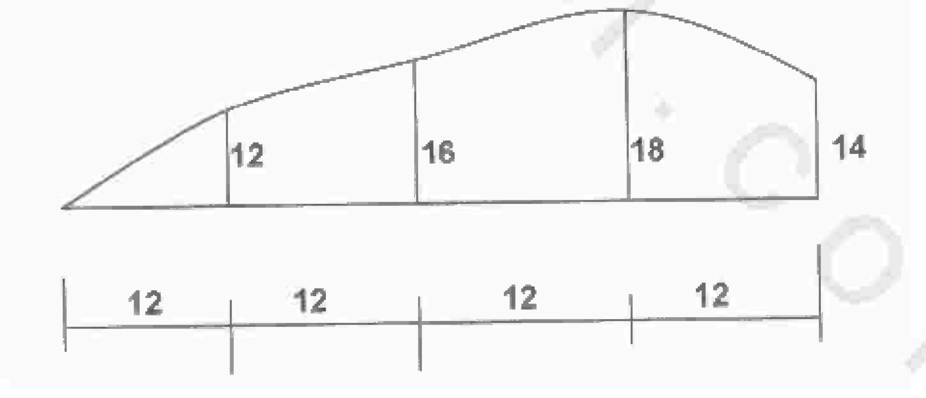
64m = CD

100m = CA

ج)

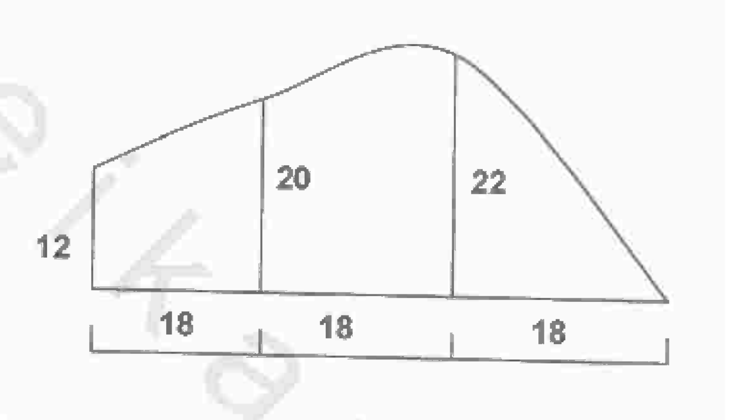


٢- مستخدماً كلاً من طريقة: أ) متوسط الارتفاعات، ب) أشباه المنحرفات، ج) سيمسون، أوجد مساحة قطعة الأرض ذات الحدود المبينة في الشكل التالي علماً بأن البيانات كلها بالأمتار:



٣- اشرح بالتفصيل كيف توجد مساحة قطعة أرض حدودها غير منتظمة وموقعة على خريطة بمقياس رسم معلوم مستخدماً جهاز قياس المساحة.

٤- يبين الشكل التالي حدود قطعة أرض زراعية موقعة على خريطة مساحية بمقياس رسم 1/2000 . أوجد مساحة قطعة الأرض على الطبيعة بالأمتار المربعة علماً بأن البيانات الموضحة كلها بالملم على الخريطة.



٥- يمثل الشكل التالي حدود قطعة أرض موقعة على خريطة بمقياس رسم 1/5000 ، أحسب مساحة قطعة الأرض على الطبيعة مستخدماً طريقة المربعات التخطيطية ثم طريقة جهاز مقياس المساحة.