الفصـــل الرابـــع

مقـــاييس النزعة المركزيـــة

أولا- المتوسطات الإحصائيـــــة

١- المتوسط الحسابـــــي

٢- الوسط الفرضـــــــي

٢- المتوسط المرجـــــح

٣- المتوسط الهندســـــي

٤- المتوسط الهندسي المرجع

٥- الوسط التوافقـــــــي

٦- الوسط التربيعـــــي

ثانيا: الوســـــيـــط

ثالثا: المئيـــنـــــات

رابعا: الربيعـــــات

خامسا: العشيـــرات

سادسا: المنـــــوال

سابعا: العلاقة بين مقايس النزعة المركزية

ثامنا: خواص مقايس النزعة المركزيـــــة

أولا – المتوسطات الإحصائيـــة.

إن وصف الجداول التكرارية وتحديد شكل المنحنيات التي تمثلها، وكذا المقارنة بين المنحنيات لمختلف المتغيرات في الظاهرة المراد دراستها، يتم باستخدام مقاييس خاصة وهي مقاييس النزعة المركزية، مقاس التبعثر والتشتت تم مقاييس الالتواء و التفرطح.

و كلمة نزعة مركزية تعني التمركز و التكثف حول رقم معين، حيث يلاحظ عامة أن قيم الظاهرة تميل دائما إلى التمركز عند قيمة معينة في التوزيع التكراري. لهذا فهناك مقاييس إحصائية تحاول تلخيص البيانات/قيم الظاهرة في رقم واحد يدل عليها ويرمز لها. هذا الرقم يوضح نزعة البيانات إلى التمركز حول فئة معينة، وكلما ابتعدنا عن هذه القيمة فإن عدد البيانات يبدأ في التناقص. ولهذا فهناك من الطرق ما توصلنا إلى تحديد هذا الرقم جبريا أو بالرسم وسوف نعرض فيما يلي أهمها:

١– المتوسط الحسابـــــي:

هو أشهر مقاييس النزعة المركزية الذي يقاس بجمع قيم كل عناصر المجموعة ثم قسمة النتيجة على عدد عناصر المجموعة، بمعنى آخر مجموع القياسات الخاصة بظاهرة معينة على عدد القياسات. ويعتبر المتوسط الحسابي أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما، كما أنه يسهل حسابه.

أ– المتوسط الحسابي في حالة البيانات الغير مبوبة.

إن متوسط عدد من القيم هو خارج قسمة مجموع هذه القيم على عددها ويرمز للمتوسط الحسابي برمز سَ، $\bar{X}$ ويمكن أن يكتب جبريا كالآتي:

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المفـردات}}{\text{عـــــدد المفـــردات}}$$

$$\text{وبالرموز: } \bar{س} = \frac{\text{مج س}}{\text{ن}} \qquad \bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

فلنرمز لأي مفردة من مفردات مجموعة من القيم بالرمز س وإلى عدد القيم بالرمز ن فعندها يكون س١، س٢، س٣....سن، هي القيم المرغوب في حساب متوسطها، الحسابي وهكذا فان:

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + ...س_ن}{ن}$$

:مثـــال

:حساب المتوسط الحسابي للقيم التالية ٨، ٣، ٥، ١٢، ١٠ هو كالتالي

$$\bar{س} = \frac{\text{مج س}}{\text{ن}} = \frac{٨ + ٥ + ٣ + ١٢ + ١٠}{٥} \quad \frac{٣٨}{٥} = ٧،٦$$

في المتوسط الحسابي لابد أن يكون مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي مساوية لصفرا.

وبالتطبيق على المثال السابق نجد:

$$(٧،٦ - ٨) + (٧،٦ - ٣) + (٧،٦ - ٥) + (٧،٦ - ١٢) + (٧،٦ - ١٠) = ٠$$

$$(٠،٤-) + ٤،٦ + ٢،٦ - ٤،٤ - ٢،٤ = (-٧،٢) + ٧،٢ = ٠$$

ب- المتوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة.

أما إذا كانت القيم/البيانات موزعة في جدول توزيع تكراري يحتوي على فئات فنحن هنالا نعرف قيمة كل حالة وإنما نعرف أن كل حالة تنحصر قيمتها بين رقمين هما الحد الأدنى والأعلى للفئة، لذلك علينا افتراض قيمة متساوية لكل أفراد الفئة الواحدة، وذلك

بأن نعطي كل حالة في الفئة قيمة هي مركز تلك الفئة ويحسب المتوسط الحسابي وفق القانون التالي:

$$\bar{س} = \frac{\text{مج س} \times \text{ك}}{\text{مج ك}} \qquad \bar{X} = \frac{\sum Fi \times Ci}{\sum Fi}$$

ويلاحظ أن هذه القاعدة تطبق فقط في حالة الجداول التكرارية المقفلة، أما الجداول التكرارية المفتوحة أي التي لا تتضمن الحد الأعلى أو الأدنى أو كلاهما في التوزيع التكراري فإنه من المستحيل التوصل إلى مراكز هذه الفئات لإيجاد المتوسط الحسابي و سوف نرى لاحقا كيف نصل إلى المتوسط الحسابي في مثل هذا النوع من الجداول.

مثـــال: الجدول التالي يبين توزيع ٦٠ مولودا حيا حسب مدة حمله بالأسبوع. والمطلوب حساب متوسط مدة الحمل لهؤلاء المواليد عن طريق المتوسط الحسابي.

مدة الحمـــــــل	عدد المواليـــــــد
٢٨ – ٣٠	٣
٣١ – ٣٣	٥
٣٤ – ٣٦	٣٠
٣٧ – ٣٩	٢٠
٤٠ – ٤٢	٢
المجموع	٦٠

لحساب المتوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة لابد من حساب منتصفات الفئات والتي تساوي

$$\frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى لها}}{٢}$$

مثلا $\frac{٢٨ + ٣٠}{٢}$ = ٢٩ أسبوعـــا.

ثم نقوم بحساب مجموع كل تكرار مضروبا في مركز الفئة المقابل له أي مجموع ك ×س كما هو مبين في الجدول التالي:

مدة الحمل	عدد المواليد /ك	س	ك × س
٢٨ – ٣٠	٣	٢٩	٨٧
٣١ – ٣٣	٥	٣٢	١٦٠
٣٤ – ٣٦	٣٠	٣٥	١٠٥٠
٣٧ – ٣٩	٢٠	٣٨	٧٦٠
٤٠ – ٤٢	٢	٤١	٨٢
المجموع	٦٠		٢١٣٩

$$\overline{س} = \frac{\text{مج ك×س}}{\text{مج ك}} = \frac{٢١٣٩}{٦٠} = ٣٥،٦٥ \text{ أسبوعا}$$

أي بالتقريب ٣٦ أسبوعا الموافقة لتسعة أشهر، أي أن الأغلبية من هؤلاء الأطفال ولدوا في أوانهم.

٢- الوسط الفرضـــــــي

أ- الوسط الفرضي في حالة البيانات الغير مبوبة.

إذا كانت القيم كبيرة فيمكن اختيار قيمة منها ككمية/ أو قيمة ثابتة ونقوم بطرح القيم الأخرى منها بحيث نحصل على قيم متغير جديد يقسم على عدد القيم ويضاف إلى القيمة المختارة، فنحصل بذلك على المتوسط الحسابي.

الوسط الفرضي = الوسط الفرض + $\frac{\text{مجموع انحرافات القيم عن وسطها الفرضي}}{\text{عدد القيـــــم}}$

أي $\text{سَ} = \text{أ} + \frac{\text{مج ح}}{\text{ن}}$

مثـــال: إيجاد المتوسط الحسابي للقيم التالية: ١٥٠٠٠، ١٨٦٠٠، ١٧٨٠٠، ١٤٥٠٠، ١٩٠٠٠. في هذه الحالة نفترض أن القيمة المختارة للمتوسط هي ١٤٥٠٠ ثم نطرح هذا الرقم من بقية القيم الأخرى فتحصل على ما يلي:

(١٥٠٠٠ - ١٤٥٠٠) + (١٨٦٠٠ - ١٤٥٠٠) + (١٧٨٠٠- ١٤٥٠٠) + (١٤٥٠٠ - ١٤٥٠٠) + (١٩٠٠٠ - ١٤٥٠٠) =

٥٠٠ + ٤١٠٠ + ٣٣٠٠ + ٠ + ٤٥٠٠ = ١٢٤٠٠.

ثم نقسم على عدد المفردات أو القيم هذه النتيجة فنحصل على٥ /١٢٤٠٠ = ٢٤٨٠.

وبهذا يصبح المتوسط الحسابي = ٢٤٨٠ + ١٤٥٠٠ = ١٦٩٨٥٠.

و بالطريقة العادية نجد المتوسط الحسابي في هذا المثال يساوي:

$$\frac{\text{مج س}}{\text{ن}} \qquad \frac{١٥٠٠ + ١٨٦٠٠ + ١٧٨٠٠ + ١٤٥٠٠ + ١٩٠٠٠}{٥} \qquad \frac{٨٤٩٠٠}{٥}$$

= ١٦٩٨٥٠.

وبهذا نرى أننا تحصلنا على نفس النتيجة في كلا الحالتين ويكون مجموع الانحراف عن الوسط دائما يساوي صفرا.

(١٦٩٨٠ – ١٥٠٠٠) + (١٦٩٨٠ – ١٨٦٠٠) + (١٦٩٨٠ – ١٧٨٠٠) + (١٦٩٨٠ – ١٤٥٠٠) + (١٦٩٨٠ – ١٩٠٠٠) = + ١٩٨٠ – ١٦٢٠ + ٨٢٠ – ٢٤٨٠ = ٢٠٢٠

+ ٤٤٦٠ – ٤٤٦٠ = ٠.

ب- الوسط الفرضـــي في حالة البيانات المبوبة:

يمكن حساب المتوسط الحسابي بطريقة أخرى أسهل إذا كان الجدول هو توزيع تكراري منتظم أي تساوت فيه أطوال الفئات، بحيث يصبح طول الفئة هو القاسم المشترك وذلك لتبسيط العملية الحسابية، خاصة في حالة الجداول ذات الفئات العديدة أي التوزيعات التكرارية الطويلة.

وفي هذه الحالة نفترض أن الوسط الفرضي يساوي مركز فئة معينة، بحيث نحسب انحرافات بقية الفئات عن هذا الوسط الفرضي ويستحسن أن يكون هذا الوسط الفرضي المختار في وسط الجدول مقابل أكبر تكرار كلما أمكن ذلك وهذا لتسهيل العمليات الحسابية وبهذا فلوسط الفرضي في حالة البيانات المبوبة تساوي:

$$\text{الوسط الفرضي} = أ + \frac{\text{مجموع حواصل ضرب التكرار} \times \text{انحرافات الفئات عن الوسط الفرضي}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\bar{س} = أ + \frac{\text{مج ك} \times \text{ح}}{\text{مج ك}}$$

وبتطبيق هذا القانون على المثال السابق نجد الوسط الفرضي يكون مساويا إلى:

مدة الحمل	ك	س	ح	ك × ح
٢٨ – ٣٠	٣	٢٩	– ٦	– ١٨
٣١ – ٣٣	٥	٣٢	– ٣	– ١٥

٣٤ – ٣٦	٣٠	٣٥	٠	٠
٣٧ – ٣٩	٢٠	٣٨	+ ٣	٦٠
٤٠ – ٤٢	٢	٤١	+ ٦	١٢
المجمـــوع	٦٠		٠	٣٩

$$\text{سَ} = \text{أ} + \frac{\text{مج ك} \times \text{ح}}{\text{مج ك}} = ٣٥ + \frac{٣٩}{٦٠} = ٣٥،٦٥ \text{ أسبوعا}$$

٣- الوسط الحسابي المرجـــــح.

أ – الوسط المرجح في حالة البيانات الغير مبوبة.

وهذا يستخدم عندما نفاضل بين مفردات توزيع أي ظاهرة في الأهمية، أي إذا علمنا أن بعض مفرداتها تكتسي أهمية بالنسبة للبحث على أخرى، حيث يرجح كل مفردة أو قيمة بأهميتها ويحسب وفق القانون التالي:

$$\text{الوسط المرجـــــح} = \frac{\text{مج س} \times \text{و}}{\text{مج و}}$$

مثـــال: من تحقيق رصده فيه ١٠٠ عائلة وجد ٢٠ عائلة لديها ٤ أطفال ٤٠ لديهم ٥ أطفال، ٣٠ لديهم ٦ أطفال والباقي لديهم ٧ أطفال

إذن الوسط المرجح للأطفال هؤلاء الأسر هو:

$$\frac{\text{مج س×و}}{\text{مج و}}$$

$$= \frac{٥٣٠}{١٠٠} = \frac{(٤ \times ٢٠) + (٥ \times ٤٠) + (٦ \times ٣٠) + ١٠ \times ٧}{١٠٠}$$

٥،٣ طفل لكل عائلة.

٤- الوسط الحسابي بالطريقة المختصرة:

يمكننا كذلك حساب المتوسط الحسابي بطريقة مختصرة سهلة ولإيجاده نقوم مثل في الوسط الفرضي بحساب مراكز الفئات س ثم تحديد وسط فرضي أ والذي يكون مقابل لأكبر تكرارا من مراكز الفئات ثم نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ح وفي الأخير نجد الانحرافات المختصـــــرة.

$$\text{ح} = \frac{\text{ح}}{\text{ل}} \qquad \frac{\text{الانحراف مركز الفئة عن الوسط الفرضي}}{\textbf{طول الفئة}}$$

ثم نجد حاصل ضرب مجموع الانحرافات المختصرة في التكرار المقابل لها.

وبهذا الوسط الحسابي بالطريقة المختصرة يساوي:

$$\text{سَ} = \text{أ} + \frac{\text{مج حَ} \times \text{ك}}{\text{مج ك}} \times \text{ل}$$

وبتطبيق هذه المعادلة على المثال السابق أعلاه نجد أن متوسط مدة حمل هؤلاء المواليد بطريقته المختصرة كما يلي:

مدة الحمل	ك	س	ل	ح	ح	ح × ك
٢٨ – ٣٠	٣	٢٩	٢	– ٦	– ٣	– ٩
٣١ – ٣٣	٥	٣٢	٢	– ٣	– ١،٥	– ٧،٥

٣٤ – ٣٦	٣٠	٣٥	٢	٠	٠	٠
٣٧ – ٣٩	٢٠	٣٨	٢	+ ٣	١،٥	٣٠
٤٠ – ٤٢	٢	٤١	٢	+ ٦	٣	٦
المجمـــوع	**٦٠**			٠	٠	**١٩،٥**

$$\text{سَ} = \text{أ} + \frac{\text{مج حَ} \times \text{ك}}{\text{مج ك}} \times \text{ل}$$

$$٣٥ + \frac{١٩،٥}{٦٠} \times ٢ = ٣٥،٦٥ \text{ أسبوعا}$$

١ – ٨– المتوسط الهندســـــــي:

يستخدم المتوسط الهندسي في حالة المفردات التي تزيد بنسب ثابتة كما دراسة النمو السكاني والاقتصادي ... إلخ حيث يعتبر أنسب المتوسطات في حالة معدلات التغير ويحسب وفق المعادلة التاليـــــة:

أ/– في حالة البيانات غير المبوبـــــــة:

$$\text{لو هـــ} = \frac{١}{\text{ن}} \text{ مج لو س}$$

مثـــــــال: بلغ عدد سكان الجزائر في سنة ١٩٩٠ ٢٥,٠٢٢,٠٠٠ نسمة وفي سنة ٢٠٠٤ حوالي ٣٢١٠٠٠٠٠٠ نسمة. فعدد السكان في منتصف هذه الفترة أي في عام ١٩٩٧ كان:

$$\text{هـــ} \neq \sqrt{(٢٥٠٢٢٠٠٠)\ (٣٢١٠٠٠٠٠)} = ٢٨,٣٢٠,٠٠٠$$

ب/- في حالة البيانات المبوبـــــــة:

يحسب المتوسط الهندسي عندما يكون لدينا جدول مبوب في فئات وفق العلاقة التاليـــة:

$$هـ = \sqrt[ن]{س_1^{ك_1} . س_2^{ك_2} ..... س_ن^{ك_ن}}$$

أي أن $لو\ هـ = \frac{مج\ ك\ لو\ س}{مج\ ك}$

مثـــــال: أحسب الوسط الهندسي للجدول التالي الذي يوضح معدل وفيات الأطفال الرضـــــع

لـــ ٨٠ دولة مثـــــلا.

معدل وفيات الأطفال الرضع	ك	س	لو س	ك × لو س
١٠ – ٢٠	٥	١٥	١،١٨	٥،٨٨
٢٠ – ٣٠	١٥	٢٥	١،٣٩	٢٠،٩٧
٣٠ – ٤٠	٢٠	٣٥	١،٥٤	٣٠،٨٨
٤٠ – ٥٠	١٨	٤٥	١،٦٥	٢٩،٧٦
٥٠ – ٦٠	٢٢	٥٥	١،٧٤	٣٨،٢٩
المجمـــــــوع	٨٠			**١٢٥،٧٨**

$لو\ هـ = \frac{مج\ ك\ لو\ س}{مج\ ك} = \frac{١٢٥،٧٨}{٨٠} = ١،٥٧$ وهو متوسط التغير في معدل وفيات الرضع لـــ ٨٠ دولـــــــة.

- 1 -9المتوسط الهندسي المرجـــــح:

ويحسب وفق الصيغة التاليـــــة:

$$\text{هـ} = \sqrt[\Sigma و]{\text{س}_1^{\text{و}_1} \cdot \text{س}_2^{\text{و}_2} \ldots \text{س}_{\text{ن}}^{\text{و}_{\text{ن}}}}$$

أي أن لو هـ = $\frac{\text{مج و لو س}}{\text{مج و}}$

مثـــــال: أوجد الوسط الهندسي المرجع للبيانات التاليـــة:

السنـــة	عدد الـــــولادات (س)	عدد الوفيات المزايد الجدد (و)
٢٠٠٠	١٧٠,٠٠٠	٩٥
٢٠٠١	١٥٠,٠٠٠	٦٠
٢٠٠٢	١٨٠,٠٠٠	٦٥
٢٠٠٣	١٦٠,٠٠٠	٨٠
٢٠٠٤	١٧٥,٠٠٠	٦٣

الحـــــل:

س	و	لو س	و لو س
١٧٠,٠٠٠	٩٥	٥,٢٣	٤٩٦,٨٩
١٥٠,٠٠٠	٦٠	٥,١٨	٣١٠,٥٦
١٨٠,٠٠٠	٦٥	٥,٢٥	٣٤١,٥٩
١٦٠,٠٠٠	٨٠	٢,٥٠	٤١٦,٣٣
١٧٥,٠٠٠	٦٣	٥,٢٤	٣٣٠,٣١
	٣٦٣		**١٨٩٥,٦٨**

لو هـ = $\frac{\text{مج و لو س}}{\text{مج و}} = \frac{١٨٩٥،٦٨}{٣٦٣} = ٥،٢٢$

١- ١٠- الوسط التوافقـــــــــي:

هو عبارة عن وسط يحسب معدلات زمنية وهو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات قيم المتغير المدروس. ويعتبر أفضل المتوسطات لتمثيل المعدلات في التغير والسرعات وكذلك الأسعار والأثمان ... الخ.

ويحسب وفق الصيغ التاليـــــــة:

أ/- في حالة البيانات غير المبوبـــــــة:

إذا كانت لدينا مجموعة من القيم عددها ن و هي س١ س٢ ... سن فأول خطوة نقوم بها هي إيجاد مقلوب هذه القيم $\frac{١}{س_{١}}$ أي $\frac{١}{س}$ $\frac{١}{س_{ن}}$ .....

وبعد هذا نقوم بتطبيق الصيغـــة التاليـــــة:

$$ق = \frac{ن}{\frac{١}{س_{١}} + \frac{١}{س_{٢}} + \frac{١}{س_{ن}}} = \frac{ن}{\sum \frac{١}{س_{ر}}}$$

مثـــــال: لدينا البيانات التاليـــة ٦، ٨، ١٣، ١٥ والمطلوب حساب متوسطها التوافقي.

$$ق = \frac{٤}{٠,١٧ + ٠,١٢ + ٠,٠٨ + ٠,٠٧}$$

$$= ٩،١٠$$

ب/- في حالة البيانات المبوبـــــــة:

في هذه الحالة يتوجب علينا معرفة مراكز الفئات (س) لأننا سوف نقوم بحساب مقلوبات هذه المراكز أي $\frac{١}{س}$ ثم نقوم بضرب النتيجة في التكرار المقابل لها كما سنوضحه في المثال اللاحق عن المعادلة المطبقة لإيجاده فهي نحو التالي:

$$ق = \frac{مج\ ك}{مج\ \frac{ك}{س}}$$

مثـــــال: الجدول التالي يوضح تطور عدد الوفيات حسب الفئات العمريـــــة.

الفئـــات	ك	س	$\frac{١}{س}$	$\frac{ك \times ١}{س}$
٠ – ٥	١٥	٢،٥	٠،٤	٩
٥ – ١٠	١٣	٧،٥	٠،١٣	١،٦٩
١٠ – ١٥	٢٠	١٢،٥	٠،٠٨	١،٦
١٥ – ٢٠	٣٥	١٧،٥	٠،٠٦	٢،١٠
٢٠ – ٢٥	٥	٢٢،٥	٠،٠٤	٠،٢
المجمـــوع	٨٨			١١،٥٩

$$ق = \frac{مج\ ك}{\frac{مج ك}{س}} = \frac{٨٨}{١١،٥٢} = ٧،٦٤$$

1 -11 - الوسط ألتربيعي:

الوسط ألتربيعي هو الجذر ألتربيعي للوسط الحسابي لمربعات قيم المتغير المدروس.

أ/- في حالة البيانات غير المبوبـــــة:

$$ت = \sqrt{\frac{\Sigma\ س^{٢}}{ن}}$$

مثـــــال: إيجاد الوسط ألتربيعي للقيم التاليـــة: ٥، ٨، ١٧، ٢٠

$$\sqrt{\frac{(٥)^{٢} + (٨)^{٢} + (١٧)^{٢} + (٢٠)^{٢}}{٤}} \quad \sqrt{\frac{٢٥ + ٦٤ + ٢٨٩ + ٤٠٠}{٤}} \quad \sqrt{\frac{٧٧٨}{٤}}$$

ت = = =

= ١٩٤،٥ = ١٣،٩٥

ب/- في حالة البيانات المبوبـــــــة:

$$ت = \sqrt{\frac{مج\ س^{٢}\ ك}{مج\ ك}}$$

مثـــــال: أوجد الوسط ألتربيعي للقيم التاليـــــــة:

الفئات	ك	س	س^{٢}	س^{٢} × ك
١٠ – ٢٠	٣٠	١٥	٢٢٥	٦٧٥٠
٢٠ – ٣٠	٢٥	٢٥	٦٢٥	١٥٦٢٥
٣٠ – ٤٠	١٣	٣٥	١٢٢٥	١٥٩٢٥
٤٠ – ٥٠	٣٥	٤٥	٢٠٢٥	٧٠٨٧٥
٥٠ – ٦٠	١٠	٥٥	٣٠٢٥	٣٠٢٥٠
المجمـــــوع	**١١٣**			**١٣٩٤٢٥**

$$ت = \sqrt{\frac{١٣٩٤٢٥}{١١٣}} = \sqrt{\frac{مج\ س^{٢}\ ك}{\sum ك}} = \sqrt{١٢٣٣،٨٥} = ٣٥،١٣$$

١٢ – ١ – العلاقة بين المتوسطـــــــات:

لو قارنا بين مختلف أنواع المتوسطات السابقـــة الذكر نجد أن:

المتوسط ألتربيعي > المتوسط الحسابي > المتوسط الهندسي > الوسط التوافقي

أي أن ت > س > هـ > ق، وهذه المتراجحة تبقى صحيحة مهما اختلف التوزيع التكراري في بياناتـــه.

مثـــــال: أوجد المتوسط بمختلف الطرق للجدول التالي الذي يبين مدّة زواج ١٠٠ امرأة.

مدة الـــــــزواج	ك
١ – ٥	١٥
٥ – ٩	٣٢
٩ – ١٣	١٨
١٣ – ١٧	٢٢
١٧ – ٢١	١٣
المجمـــــوع	**١٠٠**

١/- حساب الوسط ألتربيعي: ث = $\sqrt{\frac{\sum س^{٢}.ك}{\sum ك}}$

٢/- المتوسط الحسابي: سَ = $\frac{\sum ك\ س}{\sum ك}$

٣/- الوسط الهندسي: هـ = $\sqrt{س_{١}\ ك_{٢}.س_{٢}.ك_{٢}\ ...\ س_{ن}\ ك_{ن}}$ = لو هـ = $\frac{١}{ن}$ $\sum$ ك لو س

٤/- الوسط التوافقي: ق = $\frac{\sum ك}{\sum \frac{ك}{س}}$

مـــدة الزواج	ك	س	ك.س	س٢	ك.س٢	١/س	ك.١/س
١ – ٥	١٥	٣	٤٥	٩	١٣٥	٠،٣٣	٥
٥ – ٩	٣٢	٧	٢٢٤	٤٩	١٥٦٨	٠،١٤	٤،٥٧
٩ – ١٣	١٨	١١	١٩٨	١٢١	٢١٧٨	٠،٠٩	١،٦٤
١٣ – ١٧	٢٢	١٥	٣٣٠	٢٢٥	٤٩٥٠	٠،٠٧	١،٤٧
١٧ – ٢١	١٣	١٩	٢٤٧	٣٦١	٤٦٩٣	٠،٠٥	٠،٦٨
المجموع	١٠٠		١٠٤٤		١٣٥٢٤		١٣،٣٦

بالتعويض في القوانين السابقة نجد ت = $\sqrt{\frac{١٣٥٢٤}{١٠٠}}$ = ١١،٦٣ سنـــة.

سَ = $\frac{١٠،٤٤}{١٠٠}$ = ١٠،٤٤ سنـــــة.

ق = $\frac{١٠٠}{١٣،٣٦}$ = ٧،٤٨ سنـــــة.

- **2 الوسيـــــــــــط:**

الوسيط هو القيمة التي تقسم مجموعة من القيم إلى قسمين متساويين أي أن تكون القيم الأكبر منها مساوية للقيم الأصغر منها بحيث تكون قيم المتغير مرتبة تصاعديا أو تنازليا، بمعنى آخر هو القيمة التي تقع في منتصف سلسلة مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا بحيث يكون عدد المفردات الأصغر منها مساوية لعدد المفردات الأكبر منهـــــا.

2 -1 - الوسيط في حالة البيانات الغير مبوبـــــــة:

نقوم بترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا ثم نأخذ القيمة التي تقع في الوسط تماما إذا كان مجموع عدد البيانات فرديا، أما إذا كان مجموع عدد أفراد البيانات زوجيا فإن الوسيط هو القيمة الناتجة عن جمع القيمتين اللتين تقعان في الوسط وقسمة النتيجة على اثنيـــــن.

مثـــــــال ١: في حالة عدد البيانات فرديـــــا.

إذا كانت أعمار تسعة أفراد هي ١٥، ٣٢، ٤٤، ٢٨، ٣٣، ١٧، ٢٣، ٣٠، ١٨ فوسيط أعمارهم هو:

أولا: نقوم بترتيب القيم ترتيبا تصاعديا أو تنازليا، ثم نأخذ القيمة التي تقسم السلسلة إلى قسمين متساويين كما يلي: ١٥، ١٧، ٢٣، ٢٨، ٣٠، ٣٢، ٣٥، ٤٤.

فالوسيط هو السن ٢٨ سنة لأنه يقسم التوزيع إلى جزئيين متساويين ٤ أفراد قبله و٤ أفراد بعده.

وعلى هذا يصبح ترتيب الوسيط عندما يكون عدد القيم فرديا عبارة عن محصلة قسمة عدد الحالات / البيانات + ١ تقسيم ٢، ثم إذا حدث وتحصلنا على كسورا عشرية فسنقوم بتقريب الناتج إلى أقرب عدد صحيح لمعرفة ترتيب الوسيط.

$\frac{ن + ١}{٢}$ $\frac{٩ + ١}{٢}$

وفي المثال السابق يصبح ترتيب الوسيط هو ____ = ____ = ٥

وبالفعل أخذ الوسيط الرتبة الخامسة في السلسلة المرتبة تصاعديا السابقة.

مثـــــال ٢: في حالة وجود بيانات زوجية العـــــدد

أما إذا كان العدد زوجيا فسوف تصبح هناك قيمتين للوسيط وعلينا أن نأخذ متوسطها.

ومثال ذلك إذا زدنا قيمة أخرى للمثال السابق وليكن فردا عاشرا سنه يبلغ ٣١ سنة فسيصبح الوسيط حينها ١٥، ١٧، ١٨، ٢٣، ٢٨، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٤٤.

لهذا نحسبه أو بالأحرى نجده عن طريق أخذ المتوسط لهذين الوسطين أي:

و = $\frac{٢٨ + ٣٠}{٢}$ = ٢٩ سنـــة.

أما عن رتبته فتساوي ____ = $\frac{١ + ١٠}{٢}$ = ٥،٥

وبالفعل ٢٩ سنة أخذ المرتبة ٥،٥ في السلسلة المرتبة تصاعديا.

أما عن مرتبة القيم التي تدخل في حساب قيمة الوسيط فهي $\frac{ن}{٢}$ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

و $\frac{ن}{٢}$ + ١ = $\frac{١٠}{٢}$ + ١ = 5.5 ≈ ٦ وبالفعل ٢٨ أخذ الرتبة ٥ و ٣٠ المرتبة السادسة.

- 2 - 2حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبـــــة:

أما إذا كانت المعطيات مرتبة في جدول تكراري ذو فئات فحساب الوسيط يكون أولا بحساب رتبته.

حيث أن رتبة الوسيط تساوي رتبة الوسيط في حالة البيانات المبوبـــة = $\frac{ن}{٢}$

ثم نقوم بالبحث عن هذه الرتبة أما في التكرار المجتمع الصاعد أن النازل أم التكرار المجتمع النسبي الصاعد أم النازل ... الخ، لهذا فهناك عدة طرق الحساب الوسيط نذكر منها.

٢ – ٢ – ١ الطريقة الأولـــى:

مثـــــال:لدينا الجدول التالي الذي يبين وزن ١٠٠ مولود جديد والمطلوب حساب وسيط تلك الأوزان.

الوزن عند الولادة بالغرام	ك
١٠٠٠ – ١٥٠٠	٣
١٥٠٠ – ٢٠٠٠	٦
٢٠٠٠ – ٢٥٠٠	١٢
٢٥٠٠ – ٣٠٠٠	١٨
٣٠٠٠ – ٣٥٠٠	٢٥
٣٥٠٠ – ٤٠٠٠	١٨
٤٠٠٠ – ٤٥٠٠	١٠
٤٥٠٠ – ٥٠٠٠	٨
المجمـــــوع	١٠٠

الطريقة الأولـــــى:

الوسيـــــط = الحد الأدنى للفئة الوسطية + $\frac{\text{رتبة الوسيط – التكرار المجتمع الصاعد للفئة قبل الوسطية}}{\text{تكرار الفئة الوسطية}}$ × طول الفئة الوسطية

الفئـــــات	ك	ك المجتمع الصاعد	التكرار النسبي	التكرار المجتمع النسبي	ك المجتمع النازل	ك المجتمع النسبي النازل
١٠٠٠ – ١٥٠٠	٣	٣	٠،٠٣	٠،٠٣	١٠٠	١
١٥٠٠ – ٢٠٠٠	٦	٩	٠،٠٦	٠،٠٩	٩٧	٠،٩٧
٢٠٠٠ – ٢٥٠٠	١٢	٢١	٠،١٢	٠،٢١	٩١	٠،٩١
٢٥٠٠ – ٣٠٠٠	١٨	٣٩	٠،١٨	٠،٣٩	٧٩	٠،٧٩
٣٠٠٠ – ٣٥٠٠	٢٥	٦٤	٠،٢٥	٠،٦٤	٦١	٠،٦١
٣٥٠٠ – ٤٠٠٠	١٨	٨٢	٠،١٨	٠،٨٢	٣٦	٠،٣٦
٤٠٠٠ – ٤٥٠٠	١٠	٩٢	٠،١٠	٠،٩٢	١٨	٠،١٨
٤٥٠٠ – ٥٠٠٠	٨	١٠٠	٠،٠٨	١	٨	٠،٠٨
المجمـــــوع	١٠٠					

أول شيء نقوم به لحساب الوسط هو إيجاد رتبته وفي هذا المثال نجدها تقدر بـــ

$\frac{\text{ن}}{٢}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

إذا ألقينا نظرة على التكرار المجتمع الصاعد نجد هذه الرتبة ضمتها فئة وزن ٣٠٠٠ – ٣٥٠٠ لوجود ٦٤ طفل، إذ أن التكرار المجتمع قبل هذه الفئة ٣٩ طفل في فئة ٢٥٠٠ – ٣٠٠٠ غ أي أن ترتيب الوسط لا يغطي هذه الفئة بل يقع في الفئة ٣٠٠٠ – ٣٥٠٠ وبتطبيق القانون السابق لإيجاد الوسيط نجد أن

$$\text{و} = \text{حـــو} + \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ن س}}{\text{ك و}} \times \text{ل} = ٣٠٠٠ + \frac{٥٠ - ٣٩}{50} \times ٥٠٠ =$$

٣٠٠٠ + (٠،٤٤ × ٥٠٠٠) = ٣٢٢٠ غ.

٢ – ٢ – 2 الطريقة الثانيـــــــــة:

وفي هذه الطريقة نقوم باستخدام التكرار المجتمع النازل بدل التكرار المجتمع الصاعد ويصبح بذلك القانون كالآتي:

الوسيط =

$$\text{الحد الأعلى للفئة الوسطية} - \frac{\text{رتبة الوسيط – التكرار المجتمع النازل للفئة بعد الوسطي}}{\text{الوسطية}} \times \text{طول الفئة}$$

تكرار الفئة الوسطية

وبتطبيق القانون على المثال السابق نجد ويساوي

$$\text{و} = ٣٥٠٠ - \frac{٥٠ - ٣٦}{٢٥} \times ٥٠٠ = ٣٥٠٠ - ٢٨٠ = ٣٢٢٠ \text{ غ}$$

٢ – ٢ – 3 الطريقة الثالثـــــــة:

وهذه الطريقة تسمى بالطريقة النسبية لهذا فعند استعمالها لا بد من حساب التكرار النسبي وقانونها كالآتي :

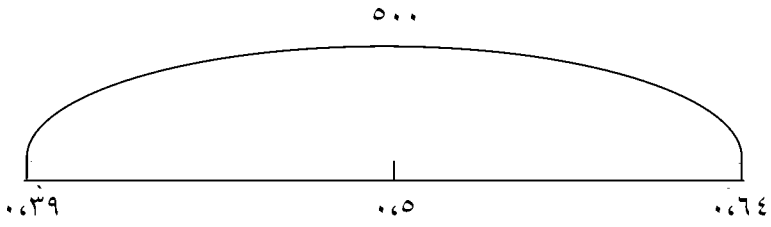
$$\text{الوسيط} = \text{قيمة الحد الأدنى للفئة الوسطية} + \frac{\text{مجال الفئة الوسطية}}{\text{التكرارات النسبية للفئة الوسطية}} \left[٠،٥ - \text{التكرارات النسبية المجتمعة الصاعدة للفئة قبل الوسطية} \right]$$

وبتعويض هذه المعادلة على المثال السابق نجد:

و = ٣٠٠٠ + $\frac{٥٠٠}{٠،٢٥}$ (٠،٥ – ٠،٣٩) = ٣٠٠٠ + ٢٠٠٠ (٠،١١) = ٣٢٢٠ غ

٢ – ٢ – ٤ الطريقة الرابعـــــة:

وهي طريقة بيانية نسبيا وهي كالتالـــــي:



و = ٣٠٠٠ ـس

٠،٥٠ – ٠،٣٩ = ٠،١١

لدينـــا ٠،٢٥ ⟵ ٥٠٠غ

٠،١١ ⟵ س

س = $\frac{٠،١١ \times ٥٠٠}{٠،٢٥}$ = ٢٢٠ غ.

و = ٣٠٠٠ + ٢٢٠ = ٣٢٢٠ غ.

٢ – ٢ – ٥ الطريقة الخامســـــة:

وهي طريقة نسبية كذلك وتحسب وفق القانون التالـــــي:

الوسيط = الفئة الوسطية = الحد الأدنى للفئة الوسطية + $\frac{\text{٠،٥ – التكرار المجتمع الصاعد النسبي السابق للفئة الوسطية}}{\text{التكرار النسبي للفئة الوسطية}}$ × **طول**

$$\text{و} = ٣٠٠٠ + \frac{٠،٥ - ٠،٣٩}{٠،٢٥} \times ٥٠٠ = ٣٠٠٠ + ٢٢٠ = ٣٢٢٠ \text{ غ}$$

٢ – ٢ – ٦ الطريقة السادســة:

وهي طريقة تقريبية كذلك ويحسب الوسيط فيها كما يلـــي:

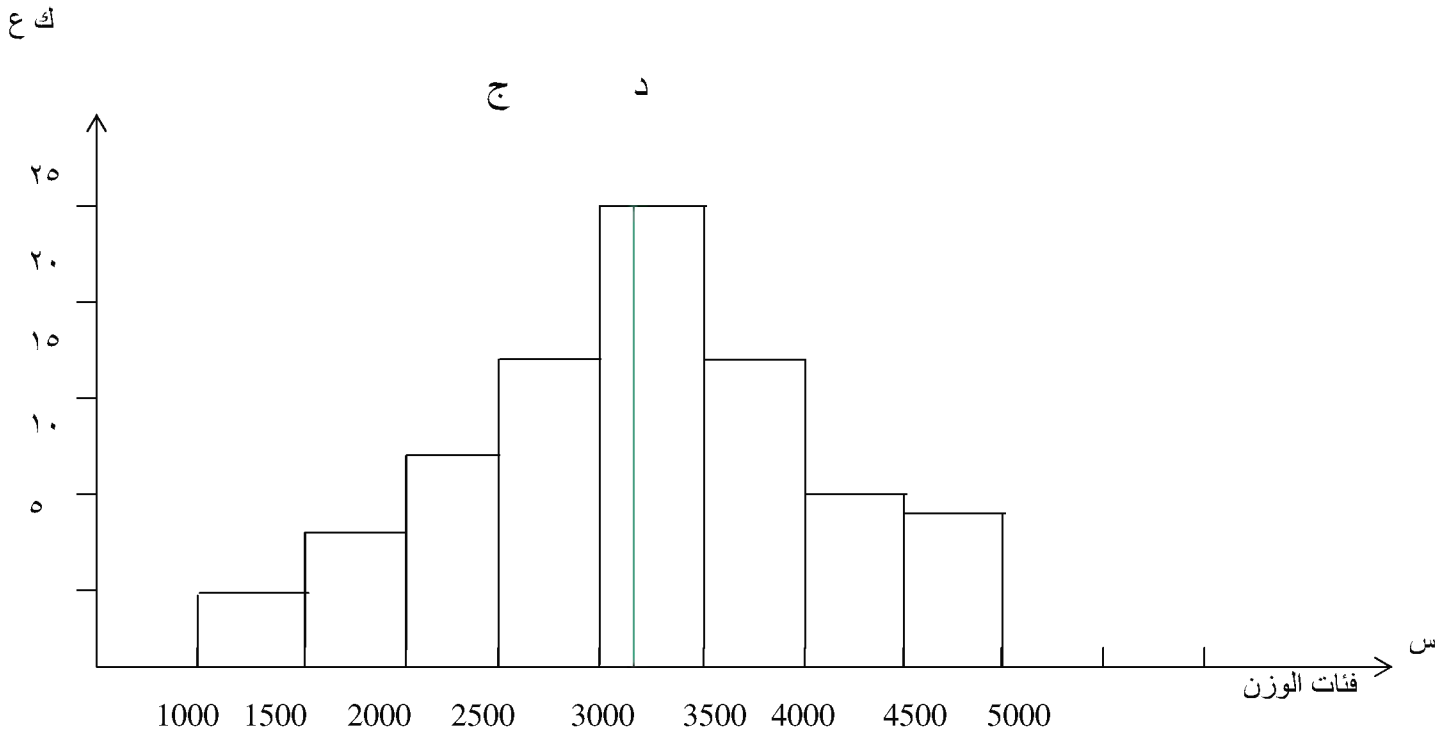
إن التكرارات المجتمعة قبل الفئة الوسطية تساوي ٣٩.

إذن نأخذ ١١ طفل من ذوي وزن ٣٠٠٠ – ٣٥٠٠ والبالغ عددهم ٢٥ طفل ويصبح الوسيط بذلك يقدر بـــ:

$$\text{و} = ٣٠٠٠ + \frac{١١}{٢٥} (٣٥٠٠ - ٣٠٠٠) = ٣٠٠٠ + (٠،٤٤) (٥٠٠) = ٣٢٢٠\text{ع}.$$

٢ – ٢ – ٧ الطريقة السابعـــــة:

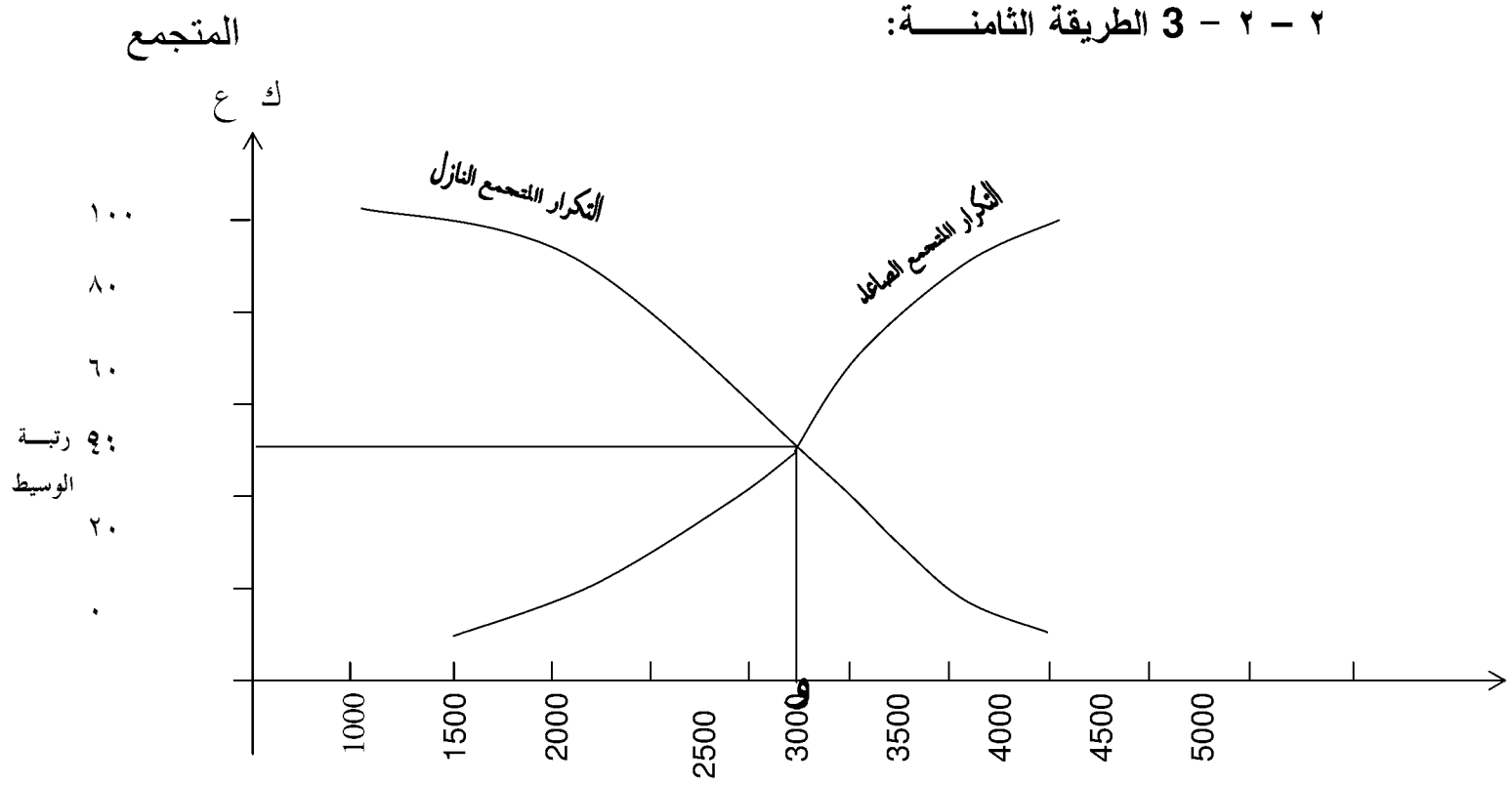
وهي عن طريقة رسم المدرج التكراري للبيانات كما يلـــــي:



لدينا من الرسم أو = (أب) = (٥٠٠) = ٢٠٠

أو = ٣٠٠٠ + ٢٢٠ = ٣٢٢٠ غ.

٢ – ٢ – 3 الطريقة الثامنـــــة:



كما توجد طرق أخرى لإيجاد الوسيط لكن هذه أهمها.

٢– ٣– ترتيب الوسيط عند الفئة التي لا تكرار لهـــــا:

إذا صادفنا ترتيب الوسيط عند فئة منعدمة التكرار فمن الصعب الاستعانة بإحدى القوانين السالفة الذكر لهذا نقوم بحسابه كما يلـــــي:

مثـــــال: لدينا الجدول التالي الذي يبين توزيع مجموعة من الأفراد حسب سنهم والمطلوب إيجاد الوسيط أي وسيط سنهم.

السـنـــــن	ك
١٠ – ٢٠	٨
٢٠ – ٣٠	١٨
٣٠ – ٤٠	٣٤
٤٠ – ٥٠	٠
٥٠ – ٦٠	٢٠
٦٠ – ٧٠	٨
٧٠ – ٨٠	١٦
٨٠ – ٩٠	١٦
المجمـــوع	١٢٠

لحساب الوسيط في هذه الحالة نقوم بحساب التكرار المجتمع الصاعد والنازل وطبعا نقوم بحساب رتبة الوسيط التي تساوي $\frac{ن}{٢}$ $= \frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠

السن	ك	ك الصاعد	ك الضابط
١٠ – ٢٠	٨	٨	١٢٠
٢٠ – ٣٠	١٨	٢٦	١١٢
٣٠ – ٤٠	٣٤	٦٠	٩٤
٤٠ – ٥٠	٠	٦٠	٦٠
٥٠ – ٦٠	٢٠	٨٠	٦٠
٦٠ – ٧٠	٨	٨٨	٤٠
٧٠ – ٨٠	١٦	١٠٤	٣٢
٨٠ – ٩٠	١٦	١٢٠	١٦
المجموع	**١٢٠**		

نلاحظ من هذا الجدول أن التكرار المتجمع الصاعد يصل إلى ٦٠ عند فئة ٣٠– ٤٠ وهي الفئة الوسيطة بما أن رتبة الوسيط هي ٦٠ إذن فتوجد ضمنها ثم يظل كما هو في الفئة التي تليها لأن تكرارها متساويا لصفر، إذن فالوسيط يقع في نهاية الفئة ٣٠– ٤٠. وإذا ما نظرنا إلى التكرار المتجمع النازل فنجد أن رتبة الوسيط ٦٠ عند الفئة التي تمتد أطرافها من ٥٠– ٦٠ ثم يظل ثابتا في الفئة التي تسبقها، إذن فالوسيط يقع في بداية الفئة ٥٠– ٦٠ أي أن ترتيب الوسيط بهذا يقع بين ٤٠– ٥٠ وهي حدود الفئة المنعدمة التكرار لهذا فالوسيط في مثل هذه الحالة مركز الفئة التي لاتكرار لها أي أن الوسيط = $\frac{٤٠+٥٠}{٢}$

= ٤٥

٤- المئينـــــــات:

هو عبارة عن تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري إلى مئة جزء متساوي فالمئين الأول م١ هو القيمة التي يسبقها ١% من البيانات ويليها ٩٩% من القيم وهذا بافتراض أن البيانات مرتبة مسبقا ترتيبا تصاعديا والمئين الأربعون ٤٠ م٤٠ هو القيمة التي يسبقها ٤٠% من البيانات ويليها ٦٠% وبالطبع بالافتراض أن هذه البيانات/القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا.

المئين في حالة البيانات المبوبـــــــة:

ويحسب وفق المعادلة التالية في حالة التكرار المجتمع الصاعد

$$\text{المئين} = \text{الحد الأدنى للفئة المئينة} + \frac{\text{ترتيب المئين} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة المئينة}}{\text{تكرار الفئة المئينة}} \times \text{طول الفئة}$$

مثـــــال: أحسب المئين لتوزيع ١٢٠ فرد حسب سنهم المطلوب حساب م٣٠

السـن	ك	ك الصاعد	ك النازل
١٠ – ٢٠	٨	٨	١٢٠
٢٠ – ٣٠	١٨	٢٦	١١٢
٣٠ – ٤٠	٣٤	٦٠	٩٤
٤٠ – ٥٠	١٨	٧٨	٦٠
٥٠ – ٦٠	٢	٨٠	٤٢
٦٠ – ٧٠	٨	٨٨	٤٠
٧٠ – ٨٠	١٦	١٠٤	٣٢
٨٠ – ٩٠	١٦	١٢٠	١٦
المجمـــوع	١٢٠		

$$\text{ع}_{30}$$

لإيجاد المئين نستخرج ترتيب م٣٠ = ـــــ × ١٢٠ = ٣٦.

١٢٠

٣٦ - ٢٦

إذا م٣٠ = ٣٠ + ـــــــ × ١٠ = ٣٢،٩٤ـــ

٦٠- ٢٦

٤ - الربيعيات:

يقصد بالربيعيات في التحليل الإحصائي هي تقسيم مساحة منحنى التوزيع التكراري إلى أربعة أجزاء متساوية، حيث يوجد ثلاث ربيعيات مرتبة من اليسار إلى اليمين وهـــــي:

- الربيع الأول أو الأدنى م٢٥.
- الربيع الثاني أو الوسيط م٥٠.
- الربيع الثالث أو الأعلى م٧٥.

ففي بعض الأحيان نحتاج إلى معرفة القيمة إلي تقع عند ربع السلسلة الإحصائية الصاعد أم النازلة لمجموعة من البيانات مثلما نعمل في الوسيط أين كنا نبحث عن القيمة التي تقيم السلسلة الإحصائية إلى جزأين متساويتين.

تعريف الربيع الأدنـــى: هو القيمة التي يقل عنها ربيع القيم ويزيد عنها¾ القيم ويمكن إيجاده بعد ترتيب البيانات تصاعديا أم تنازليا:

في حالة البيانات المبوبـــــــة:

رتبة الربيع الأدنى ر١ = ـــــ

ن
٤

أما قيمته فتحسب وفق المعادلة التاليـــــة:

قيمة ر١ =

الحد الأدنى لفئة الربيع الأول + (ترتيب الربيع الأول – التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الربيعية) / تكرار االفئة الربيعية × طول الفئة الربيعية

وبتطبيق القانون على الجدول أعلاه نجد ر١ تقدر بما يلي:

- رتبة ر١ = $\frac{ن}{٤}$ = $\frac{١٢٠}{٤}$ = ٣٠

ر١ = ٣٠ + $\frac{٣٠ - ٢٦}{٦٠ - ٢٦}$ × ١٠ = ٣٠ + $\frac{٤}{٣٤}$ × ١٠ = ٣١،١٨ سنة

الربيع الأعلى/ الثالـــــث:

وهو القيمة التي يسبقها ثلاث أرباع القيم ¾ ويليها الربع أي ربع القيم ويحسب كما يلي:

إن رتبة ر٣ في هذه الحالة تحسب وفق المعادلة التالية ر٣ = $\frac{٣ن}{٤}$ وهناك حالتين لإيجاده مثـــل ر١.

في حالة التكرار المتجمع الصاعـــــد:

ر٣ = الحد الأدنى لفئة الربيع الثالث + $\frac{\text{ترتيب الربيع الثالث – التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الثالث}}{\text{تكرار فئة الربيع الثالث}}$ × طول الفئة الربيعية

وبالتطبيق على المثال أعلاه نجد رتبة ر٣ = $\frac{٣ \times ١٢٠}{٤}$ = ٩٠

إذن الفئة الربيعية الثالثة هي: ٧٠ – ٨٠.

وبالتعويض في القانون نجد: ر٣ = ٧٠ + $\frac{٩٠ - ٨٨}{١٢٠ - ٨٨}$ × ١٠ = ٧٠،٠٩

أي أن ٧٥% من هؤلاء الأفراد يقل سنهم عن ٧٠،٠٩ سنة وأن ٢٥% منهم يزيد عن ٧٠،٠٩ سنة.

5 - العشيـــــــــرات:

نقصد به تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع التكراري إلى عشرة أقسام متساوية وكل قسم نسميه عشير، فمثلا العشير الرابع هو القيمة التي يسبقها ١٠/٤ من البيانات ويليها ١٠/٦ منها طبقا بافتراض دائما ترتيب البيانات تصاعديا.

في حالة البيانات المبوبة: ويحسب كما يلي:

$$\text{رتبة العشير} = \frac{\text{العشير المطلوب}}{١٠} \quad \frac{\text{مجموع ك}}{}$$

أما قيمته فتحسب وفق المعادلة التاليـــــــة:

$$\text{قيمة العشير} = \text{الحد الأدنى لفئة العشير} + \frac{\text{رتبة العشير} - \text{التكرار المتجمع السابق للفئة العشرية}}{\text{تكرار الفئة العشرية}} \times \text{طول الفئة العشيرية}$$

وبتطبيق القانون على المثال السابق نجد العشير الثالث مثلا يقدر بـــ:

$$\text{رتبة العشير الثالث} = م_{٣} = \frac{٣}{١٠} \times ١٢٠ = ٣٦$$

$$م_{٣} = ٣٠ + \frac{٣٦ - ٢٦}{٦٠ - ٢٦} \times ١٠ = ٣٢،٩٤$$

٦ - المنـــــــــوال:

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر انتشارا أو الأكثر تكرارا وشيوعا بين القيم وهذا هو الأساس الذي بناءا عليه يعتبر المنوال وسطا ممثلا للقيم التي حسب لأجلها وعلى ذلك فإن تحديده يتوقف على تكرار القيم المجموعة الإحصائية ويتم إيجاد المنوال

حسابيا وعن طريق الرسم إلا أن قيمة المنوال قد لا توجد، وحتى وأن وجدت في بعض الأحيان قد لا تكون واحدة في السلسلة الإحصائية أو الجدول التكراري.

أ/ في حالة البيانات غير المبوبـــــــــة:

إذا لم يتكرر أي من القيم فلا يوجد منوالا.

مثال ١: لدينا البيانات التالية: ٣، ٥، ٨، ١٠، ١٢، ١٥، ١٦.

لا يوجد منوال لهذه القيم حيث أيا من القيم لم يتكرر أكثر من مرة.

مثال ٢: إذا تكرر أحد القيم فيكون منوال واحد فقط مثلا في السلسلة التالية ٢، ٢، ٥، ٧، ٩، ٩، ٩، ١٠، ١٠، ١١، ١٢، ١٨.

فالمنوال هو رقم ٩ لأنه هو الذي تكرر كثيرا ٣ مرات عن القيم الأخرى

مثال ٣: كما يمكن أن نأخذ السلسلة الإحصائية منوالين فأكثر كما هو مبين في المثال التالي: ٢، ٣، ٤، ٤، ٤، ٥، ٥، ٧، ٧، ٧، ٩.

إذا هذه السلسلة لديها منوالين هما ٤، ٧ ويسمى المنوال في هذه الحالة بالمنوال المزدوج.

ب/ في حالة البيانات المبوبـــــــــة:

إن طريقة حساب المنوال في هذه الحالة تختلف عن كيفية استخراجه من البيانات المبوبة وهناك عدة طرق لحسابه من بينها ما يلي:

مثال: أوجد المنوال السن الأكثر شيوعا لعينة متكونة من ١٧٠ امرأة موزعة حسب سنها عند أول زواج.

السـن عنـد أول زواج	ك
١٥ – ١٨	١٠
١٨ – ٢١	٢٠
٢١ – ٢٤	٢٥
٢٤ – ٢٧	٣٠
٢٧ – ٣٠	٤٠
٣٠ – ٣٣	٢٠
٣٣ – ٣٦	١٨
٣٦ – ٣٩	٥
٣٩ – ٤٢	٢
المجمـــــــوع	١٧٠

الطريقة الأولـــــــــى:

باعتبار مركز الفئة ذات أكبر تكرار في الجدول التكراري، ومن الجدول السابق نلاحظ أن المنوال هذا التوزيع هو مركز الفئة ٢٧ – ٣٠ وهو بذلك: $\frac{٢٧ + ٣٠}{٢}$ = ٢٨،٥ سنة، وذلك لأن تكرارها هو أكبر تكرار في الجدول.

إذن قدر بـــ ٤٠ امرأة متزوجة ما بين سن ٢٧ – ٣٠ سنة، والواضح أن هذه الطريقة هي تقريبية فهي تفترض تماثل التوزيع على جانبي مركز الفئة المنوالية.

الطريقة الثانيـــــــــة:

وهي طريقة حسابية نستخدم من خلالها الصيغة التاليـــــــة:

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{\text{تكرار الفئة بعد المنوالية}}{\text{تكرار الفئة بعد المنوالية} + \text{تكرار الفئة قبل المنوالية}}$ × طول الفئة المنوالية

$$\text{مو} = \text{أ} + \frac{\text{ك}_٢}{\text{ك}_٢ + \text{ك}_١} \times \text{ل}$$

وبتطبيق هذا القانون على المثال السابق نجد المنوال يساوي:

$$\text{مو} = ٢٧ + \frac{٢٠}{٣٠ + ٢٠} \times ٣ = ٢٧،٩٩ \text{ سنة}$$

الطريقة الثالثـــــــــة:

وهي طريقة الفروق وواضع هذه الطريقة هو كار ل برسون وهي لا تختلف كثيرا عن سابقتها فهي تهتم بالفروق بين التكرارات أكثر مما تهتم بالتكرارات نفسها ذلك لأن الخطوة الأولى في هذه الطرقة تنحصر في إيجاد الفرق بين التكرارات الفئة المنوالية

والفئتين اللتين حولها، ووضع المنوال يتحدد في هذه الطرقة بالفرق بين تكرار الفئة المنوالية والتي حولها وبتالي يحسب المنوال بهذه الطريقة وفق لصيغة التالية:

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{تكرار الفئة قبل المنوالية}}{(\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{تكرار الفئة قبل المنوالية}) + (\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{تكرار الفئة بعد المنوالية})} \times \text{طول الفئة المنوالية}$$

$$\text{مو} = \text{أ} + \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_1 + \text{ف}_2} \times \text{ل}$$

وبتطبيق قانون برسون على المثال نجد مو $= ٢٧ + \frac{٣٠ - ٤٠}{(٣٠-٤٠) + (٢٠-٤٠)} \times ٣ =$ ٢٧،٩٩ سنة

نلاحظ أن المنوال محسوبا بكلتا الطريقتين الثانية والثالثة متساوي إلا أنه مع الطريقة الأولى لا يساويه وهذا ليس بغريب حيث أن الطريقة الأولى كما قلنا تقريبية وعدم الدقة أو التفاوت في النتيجة يرتفع كلما كان مدى الفئة طويلا.

الطريقة الرابعـــــــــــة:

وهي طريقة الرافعة إذ أنها تنظر إلى الفئة المنوالية على أنها تمثل رافعة تتجاوزها قوة يعبر عنها تكرار الفئة قبل المنوالية ومقاومة يعبر عنها بتكرار الفئة بعد المنوالية وعلى هذا يمكن تحديد موضع المنوال أو قيمته عند نقطة ارتكازها/ الرافعة، وبالنظر إلى المثال السابق يصبح المنوال يقدر بما يلي:

لما كان قانون الرافعة يساوي:

القوة × ذراع = المقاومة × ذراع

فإن التكرار السابق للفئة المنوالية × س = التكرار اللاحق للفئة المنوالية × (١٠ – س)

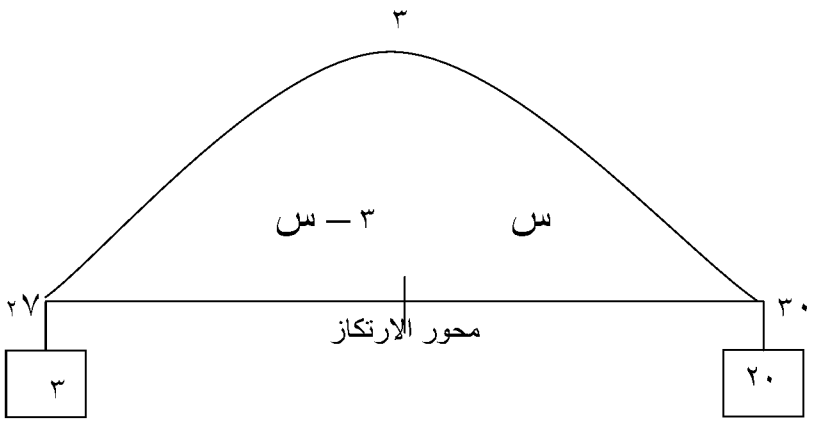
بالتعويض نجد: ٣٠ × س = ٢٠ × ٣ – س

٣٠ س = ٦٠ – ٢٠ س

٣٠ س + ٢٠ = ٦٠

$$\text{٥٠ س} = \text{٦٠} \quad \text{س} = \frac{\text{٦٠}}{\text{٥٠}} = \text{١،٢}$$

إذا فالمنوال = ٢٧ + ١،٢ = ٢٨،٢ سنة



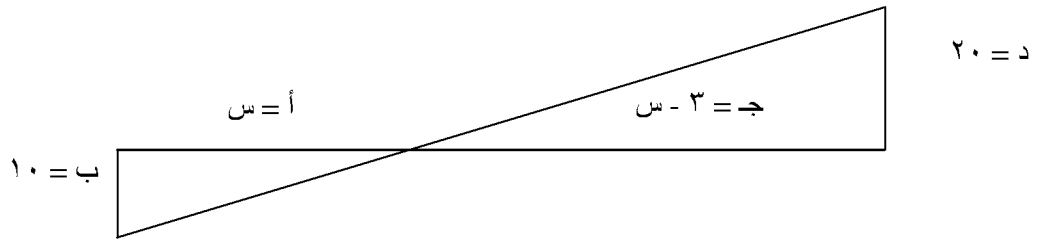
الطريقة الخامســـــة:

وهي طريقة المحاور، ونستعملها لإيجاد المنوال بفرض أن قيمة المنوال تقع على بعد س من بداية الفئة وعلى بعد ٣ – س من نهايتها بحيث يصبح المنوال = ٣٠ + س وبما أن: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

$$\frac{\text{س}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٣– س}}{\text{٢٠}} \quad \text{أي: ٢٠ س} = \text{٣٠} - \text{١٠ س} \Leftarrow \text{٢٠ س} + \text{١٠ س} = \text{٣٠}$$

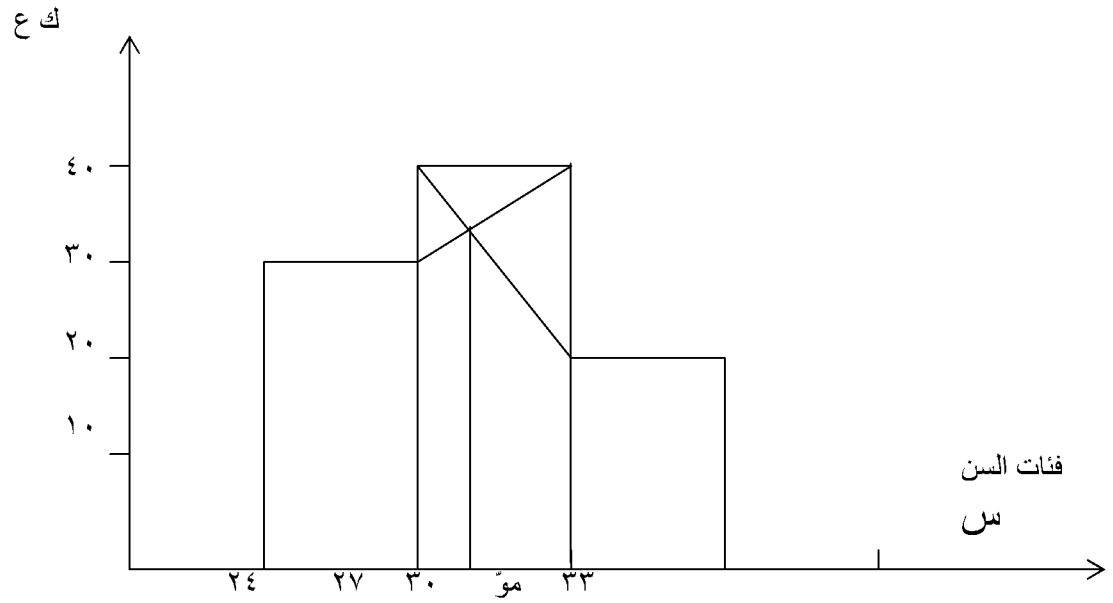
$$\Leftarrow \text{٣٠ س} = \text{٣٠} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{٣٠}}{\text{٣٠}} = \text{١}$$

المنوال = ٢٧ + ١ = ٢٨ سنة.



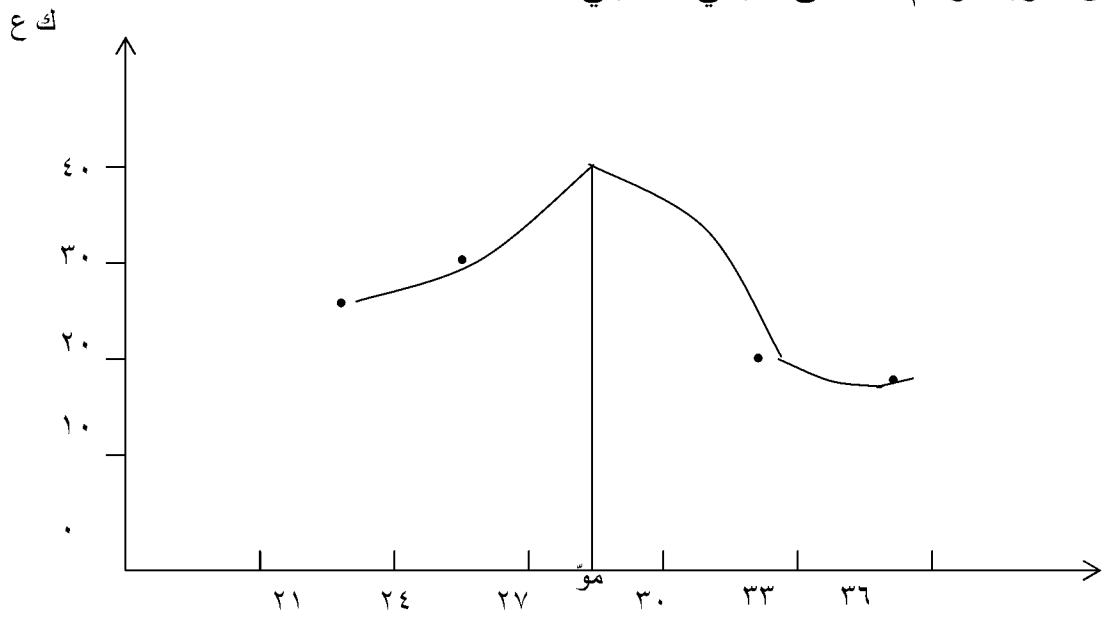
الطريقة السادســـــة:

وهي طريقة تستعمل عن طريقة الرسم المدرج التكراري كما يلي:



الطريقة السابعـــــة:

عن طريقة رسم المنحنى البياني كما يلي:



إيجاد المنوال في حالة البيانات الكمية المفصلـــــــــة:

إن أكبر تكرار يقابل المتغيرات المنفصلة في جدول تكراري هو المنوال كما نلاحظه من هذا الجدول الذي يبين عدد الأبناء لمجموعة من العائلات.

عدد الأبناء في العائلة	عدد العائلات
٠	٣
١	٧
٢	١١
٣	١٤
٤	٢٠
٥	١٦
٦	١٢
٧	٧
المجموع	**٩٠**

وفي هذا الجدول ذوي أن المنوال فيه موجود عند القيمة ٤ أي أربعة أطفال في العائلة وعلى ذلك يكون المنوال ٤ مباشرة دون إجراء عمليات حسابية كما هو في حالة البيانات الكمية المتصلة فبمجرد ملاحظة التكرارات فأكبرها في التوزيع مثل ما هو في هذا الجدول ٢٠ عائلة القيمة التي تقابلها هو المنوال.

إيجاد المنوال من البيانات الكيفيـــــــة:

استجوبت عينة من عمال مؤسسة ما فكان توزيعهم حسب حالتهم المدينة كالآتي:

الحالـــة المدنيـــــة	ك
أعزب	٣٠
متزوج	٣٠
مطلق	١٢
أرمل	١٠
المجمـــــوع	**٨٢**

المنوال في هذا التوزيع هو القيمة التي تقابل أكبر تكرار وهم إذن العمال العزاب والمتزوجين إذن فهذا التوزيع يحتوي على منوال مزدوج.

المنوال في التوزيعات التكرارية الغير منتظمة:

إيجاد المنوال في التوزيعات التكرارية الغير منتظمة لابد من تعديل التكرارات ثم نطبق أي من الصيغ السالفة الذكر، كما هو مبين في المثال التالي:

مثـــــال: أوجد المنوال من الجدول التالي الذي يبين مدة أقدميه العمال في مهنتهم في مؤسسة ما.

الفئات	ك	س	$\frac{ك}{س}$	الفرق
١٠ – ١٢	٥	٢	٢،٥	
١٢ – ١٦	١٢	٤	٣	
١٦ – ٢٠	١٧	٤	٤،٢٥	
٢٠ – ٢٥	٤٠	٥	٨	٣،٧٥
٢٥ – ٣٥	٢١	١٠	٢،١	٥،٩
المجمـــــو ع	٩٥			

يتضح من التوزيع هذا أن الفئة المنوالية هي: ٢٠ – ٢٥ لأنها مقابلة لأكبر تكرار معدل والمقدر بـــ ٨

ولإيجاد المنوال يجب إعداد جدول مثل ما سبق لتعديل التكرارات ويصبح بعدها المنوال:

$$مو = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{ك_{٢}}{ك_{١} + ك_{٢}} \times ل$$

$$مو = ٢٠ + \frac{٣،٧٥}{٥،٩ + ٣،٧٥} \times ٥ = ٢١،٩٤ \text{ سنة}$$

٧- العلاقة بين مقاييس النزعة المركزيـــــــة:

تكمن الإحصائيين من إيجاد علاقة تقريبية بين المتوسطات الثلاثة: المتوسط الحسابي، الوسيط –المنوال– وتستخدم هذه العلاقة عندما يتعذر استخراج إحداها كما يحدث عندما يراد إيجاد المتوسط الحسابي من الجدول التكرارية المفتوحة أين لا يمكنا معرفة مركز الفئة الأولى والأخيرة في الجدول مثلا.

وسوف نعرض فيما يلي طبيعة العلاقة التقريبية في الحالات التاليـــــــة:

١- إذا كان التوزيع التكراري متماثلا تماما:

يكون التوزيع التكراري متماثلا تماما إذا كان المنحنى الذي يمثله يتماثل حول المحور الرأسي، أين يقسم المنحنى إلى جزئيين متطابقين، وهذا النوع من التوزيعات تنقص فيه التكرارات بالتماثل على جانبي أكبر تكرار فيه وهذا ما يسمى بالمنحنى الإعتدالي.

أحسب المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال وكذا قسم برسم المنحنى التكراري للجدول التالـــــي:

الفئـــــات	ك
١٠ – ١٥	٢
١٥ – ٢٠	١٥
٢٠ – ٢٥	٢٠
٢٥ – ٣٠	٢٦
٣٠ – ٣٥	٢٠
٣٥ – ٤٠	١٥
٤٠ – ٤٥	٢
المجمـــــــوع	١٠٠

الحـــــــل:

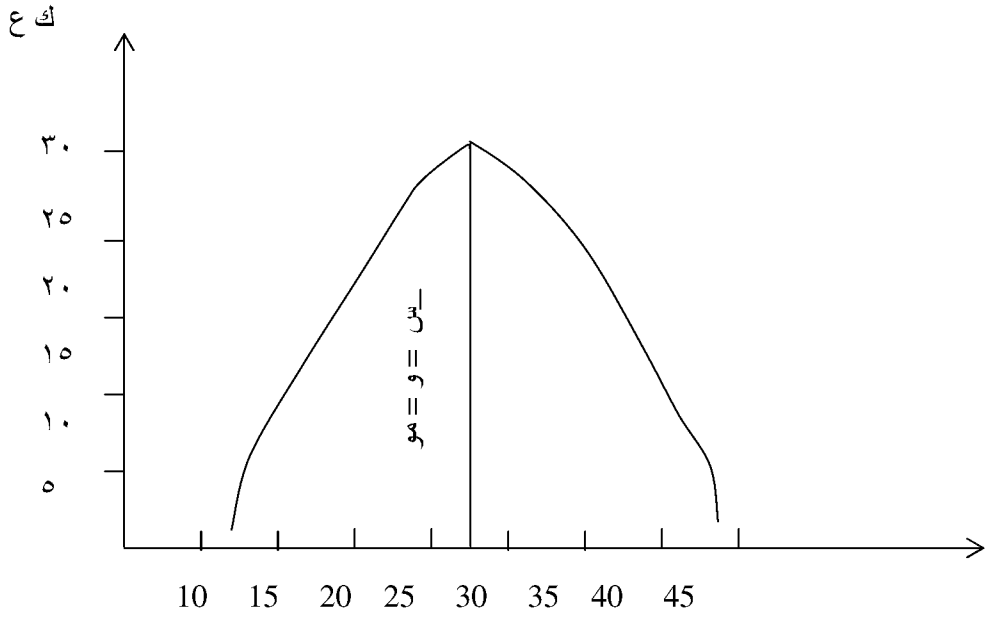
الفئـــــات	ك	س	ك × س	ك م الصاعد	ك م نازل
١٠ – ١٥	٢	١٢،٥	٢٥	٢	١٠٠
١٥ – ٢٠	١٥	١٧،٥	٢٦٢،٥	١٧	٩٨
٢٠ – ٢٥	٢٠	٢٢،٥	٤٥٠	٣٧	٨٣
٢٥ – ٣٠	٢٦	٢٧،٥	٧١٥	٦٣	٦٣
٣٠ – ٣٥	٢٠	٣٢،٥	٦٥٠	٨٣	٣٧
٣٥ – ٤٠	١٥	٣٧،٥	٥٦٢،٥	٩٨	١٧
٤٠ – ٤٥	٢	٤٢،٥	٨٥	١٠٠	٢
المجمـــوع	١٠٠		٢٧٥٠		

$$\text{س} = \frac{\text{مج ك س}}{\text{مج ك}} = \frac{٢٧٥٠}{١٠٠} = ٢٧،٥$$

$$\text{الوسيط} = \text{حـــ و} + \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ن س}}{\text{ك و}} \times \text{ل} = ٢٥ + \frac{٥٠ - ٣٧}{٢٦} \times ٥ = ٢٧،٥$$

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_1 + \text{ف}_2} \times \text{ل} = ٢٥ + \frac{٢٠}{٢٠+٢٠} \times ٥ = ٢٧،٥$$

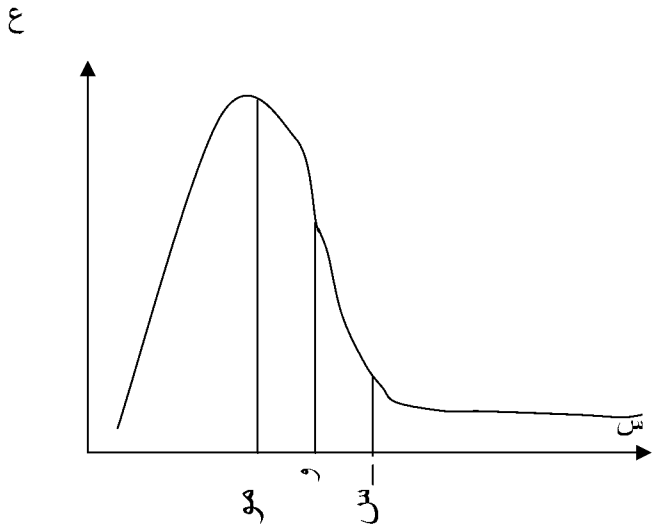
وفي هذه الحالة نجد أن المنحنى يتخذ شكلا اعتدالي كما وجدنا س = مو = و = ٢٧،٥ معنى هذا أن جميع مقاييس النزعة المركزية تنطبق على بعضها البعض وتتساوى جميعا في التوزيع التكراري المعتدل.



إذا كانت التوزيعات التكرارية قريبة من التماثل أو ملتوية بطريقة غير شديدة لاحظ أن بعض التكرارات لا تمثل توزيعا معتدلا حول قيمة متوسطة بل تتوزع بطريقة غير معتدلة في الجدول، وفي هذا النوع من الجداول تختلف قيم كل من الوسط/المتوسط الوسط والمنوال حسب نوع الالتواء الموجب والسالب.

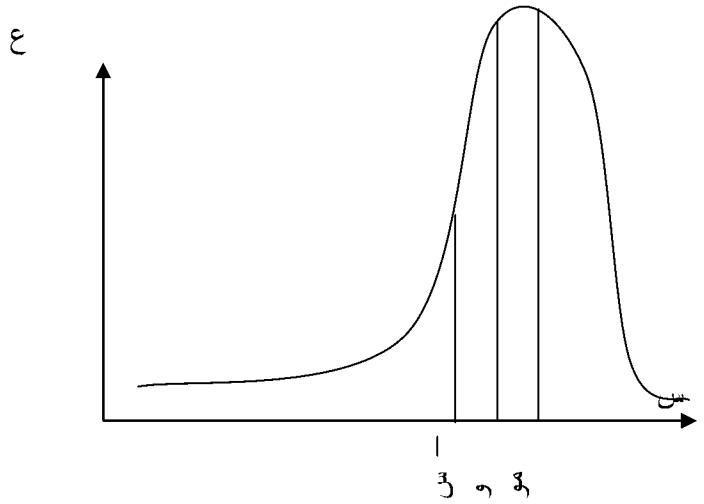
أ/- عندما يكون التوزيع التكراري ملتويا التواء موجب ٥ > ٠

في هذه الحالة يمتد الطرف الطويل للمنحنى إلى الجهة اليمنى ويصبح ترتيب مقاييس النزعة المركزية كما يلي المتوسط، الوسط،ثم المنوال أي أن س، و، مو.



ب/- عندما يكون التوزيع التكراري ملتويا التواء سالب ٥ < ٠

في هذه الحالة يمتد الطرف الطويل إلى الجهة اليسرى ويصبح حينها ترتيب مقاييس النزعة المركزية كما يلي المنوال، الوسيط، المتوسط- أي أن مو، و، سَ.



٨ - خواص مقاييس النزعة المركزية الثـــــــلاث:

٨-١- الوسط الحسابي أو المتوسط الحسابي:

- إن المجموع الجبري لانحرافات مجموعة من القيم عن وسطها الحسابي يساوي دائما صفرا.
- Σ ح = ٠.
- يستغل في حساب المتوسط الحسابي جميع قيم التوزيع لذلك فهو أدق المتوسطات الثلاث وأكثر تباتا.
- يستخرج المتوسط الحسابي كذلك لاستعماله في معاملات أخرى كمقاس التشتت إلا أن عيوب تكمن في المتغيرات.
- أنه لا يمكن استعماله في البيانات المتغيرات الكيفية.
- لا يمكن حسابه في الجداول التكرارية المفتوحة.

- يتأثر بالقيم الشاذة، أي الكبيرة جدا أو الصغيرة جدا عن بقية قيم الجدول التكراري.

٨-٢- الوسيط أو الأوســـــــط:

- إن قيمة الوسيط على العكس من الوسط الحسابي لا تتأثر بالقيم الشاذة لهذا في حالة وجود مثل هذه القيم يفضل استخدام الوسيط.
- يمكن حساب الوسيط من الجداول التكرارية- المفتوحة لأننا في حسابه لا نحتاج لمعرفة مراكز الفئات مثل حالة المتوسط الحسابي.
- يمكن إيجاد قيمة الوسيط من خلال الرسم البياني كالمنحني المتجمع الصاعد والنازل.
- إذا كان البحث يهتم بمعرفة ما إذا كانت قيمة معينة تقع في النصف العلوي أو السفلي من التوزيع.

٨-٣- المنـــــــــــــوال:

- يعتبر المنوال المقياس الوحيد الذي يمكن استعماله لإيجاد تمركز المتغيرات الكيفية.
- ويمتاز المنوال بسهولة حسابه وسرعته، ولما كان المنوال يدل على الدرجة الأكثر شيوعا لذلك فهو يصلح لمعالجة المشاكل التي تهدف إلى معرفة تركيز الظاهرة وموقعها وخاصة في النواحي الديموغرافية، إلا أن حساب المنوال يكون بطرق تقريبية وعموما يفضل المنوال في الحالات التالية.
- إذا أريد الحصول على معامل مركزي في أقصى وقت ممكن دون الاهتمام كثيرا بالدقة في حسابه إذا كان هدف الباحث معرفة القيمة التي يتفق عليها أغلب أفراد المجموعة / العينة.

تمرينات

التمرين لأول:

أحسب متوسط أوزان ١٠٠ طالب التالي.بالطريقة العادية و عن طريق الوسط الفرضي.

الوزن بالكلغ	التكرارات (ك)
٦٠ – ٦٢	٥
٦٣ – ٦٥	١٨
٦٦ – ٦٨	٤٢
٦٩ – ٧١	٢٧
٧٢ – ٧٤	٨
المجموع	**١٠٠**

الحل: إيجاد مراكز الفئات ثم مجموع مراكز الفئات مضروبا في التكرارات المقابلة لها.كما هو مبين في الجدول ثم الانحرافات عن مراكز الفئات.

الوزن بالكلغ	ك	س	ك × س	ح	ك × ح
٦٠ – ٦٢	٥	٦١	٣٠٥	– ٦	– ٣٠
٦٣ – ٦٥	١٨	٦٤	١١٥٢	– ٣	– ٥٤
٦٦ – ٦٨	٤٢	٦٧	٢٨١٤	٠	٠
٦٩ – ٧١	٢٧	٧٠	١٨٩٠	+٣	٨١
٧٢ – ٧٤	٨	٧٣	٥٨٤	+٦	٤٨
المجموع	**١٠٠**		**٦٧٤٥**	**٠**	**٤٥**

$$\overline{س} = \frac{مج(ك \times س)}{مج(س)} = \frac{6745}{100} = ٦٧,٤٥ \text{ كلغ}$$

عن طريق الوسط الفرضي $س = أ + \frac{مج(ك \times ح)}{مج(ك)}$

$$= ٦٧ + \frac{6745}{100} = ٦٧,٤٥ \text{ كلغ}$$

التمرين الثاني:

حدد متوسط مدة أقدميه السكن لـــ ٧٠ عائلة في منطقة معينة، موزعين حسب الفئات التالية:

المدة	ك
٥٠ – ٦٠	٨
٦٠ – ٧٠	١٠
٧٠ – ٨٠	١٦
٨٠ – ٩٠	١٥
٩٠ – ١٠٠	١٠
١٠٠ – ١٢٠	٨
١٢٠ – ١٨٠	٣
المجموع	**٧٠**

الحل: حساب مراكز الفئات ثم ضربها في التكرار المقابل لها كما يلي:

المدة	ك	س	ك × س
٥٠ – ٦٠	٨	٥٥	٤٤٠
٦٠ – ٧٠	١٠	٦٥	٦٥٠
٧٠ – ٨٠	١٦	٧٥	١٢٠٠
٨٠ – ٩٠	١٥	٨٥	١٢٧٥
٩٠ – ١٠٠	١٠	٩٥	٩٥٠
١٠٠ – ١٢٠	٨	١١٠	٨٨٠
١٢٠ – ١٨٠	٣	١٥٠	٤٥٠
المجموع	**٧٠**		**٥٨٤٥**

ملاحظة: نلاحظ أن الفئات في هذا الجدول غير متساوية و رغم هذا فلم نقم بتعديل التكرارات، لأنه ما بهمنا هو مركز الفئة و بالتالي سيكون متوسط مدة إقامة هؤلاء العائلات في تلك المنطقة هو كالتالي بالطريقة العادية:

$$\overline{س} = \frac{مج(ك \times س)}{مج(س)} = \frac{5845}{70} = ٨٣,٥ \text{ سنة}$$

المتوسط الحسابي المرجح = $\frac{\text{مج ك} \times \text{و}}{\text{مج و}}$

مثـــــــال: لدينا ثلاث مصالح للتوليد في ثلاث مستشفيات.

المصلحة الأولى: أ/- عدد النساء اللواتي وضعن عددهن ٢٠ عدد المتوفيات و٠٥.

المصلحة الثانية: ب/- عدد النساء اللواتي وضعن عددهن ٢٥ عدد المتوفيات و٠٣.

المصلحة الثالثة: ج/- عدد النساء اللواتي وضعن عددهن ٣٠ عدد المتوفيات و٠٤.

والمطلوب حساب المتوسط الحسابي المرجح.

$$\text{سَ} = \frac{\text{مج ك و}}{\text{مج و}}$$

المصالـــح	ك	و	ك × و
أ	٢٠	٥	١٠٠
ب	٢٥	٣	٧٥
ج	٣٠	٤	١٢٠
المجمـــوع		**١٢**	**٢٩٥**

$$\text{سَ} = \frac{\text{مج ك و}}{\text{مج ك}} = \frac{٢٩٥}{١٢} = ٢٤،٥٨$$

التمرين الثالث:

أوجد وسيط مدة زواج ٢٠٠ زوج عن طريق التكرار المتجمع الصاعد.

المدة	ك
٠ – ٤	٣١
٤ – ٨	٣٦
٨ –١٢	٤٠
١٢ – ١٦	٦٠
١٦ – ٢٠	٢٠
٢٠ – ٢٤	١٣
المجموع	**٢٠٠**

الحل:

المدة	ك	ك المتجمع الصاعد
٠ – ٤	٣١	٣١
٤ – ٨	٣٦	٦٧
٨ –١٢	٤٠	١٠٧
١٢ – ١٦	٦٠	١٦٧
١٦ – ٢٠	٢٠	١٨٧
٢٠ – ٢٤	١٣	٢٠٠
المجموع	**٢٠٠**	

$$\text{و} = \text{د و} + \frac{\frac{\text{ن}}{2} - (\text{ن})(\text{س})}{\text{ك}_{\text{و}}} \times \text{ف}$$

١- حساب رتبة الوسيط $\frac{\text{ن}}{2} = \frac{200}{2} = ١٠٠$

∴ الفئة الوسيطة ٨ – ١٢ لأنها تحتوي على تكرار ١٠٧

∴ و = ٨ + $\frac{67 - 100}{40}$ × ٤ = ١١,٣ سنة

التمرين الرابع:

الجدول التالي يبين لنا توزيع مجموعة من المرضى في المستشفى مصابين بمرض السرطان حسب سنهم.و المطلوب حساب منوال السن عند هؤلاء المصابين حسب طريقة الفروق **لكارل بارسون.**

السن	ك
٢٠- ٣٠	٣٢
٣٠ – ٤٠	٤٠
٤٠ – ٥٠	٥٠
٥٠ – ٦٠	٣٠
٦٠ – ٧٠	٢٥
٧٠ – ٨٠	١٥
٨٠ – ٩٠	٢٠
المجموع	**٢١٢**

مو = أ+ $\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}$ × ل

نلاحظ أن أكبر تكرار في هذا التوزيع هو ٥٠ إذا الفئة المنوالية هي ٤٠ – ٥٠ و بتطبيق القانون نجد مو = ٤٠ + $\frac{40-50}{(40-50)(30-50)}$ × ١٠ = ٤٣,٣٣ سنة