

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

(١٠ - ١) مقدمة

لقد سبق لنا في الفصول السابقة دراسة فراغ العينة، وكيفية إيجاد عناصره. وكذلك دراسة الحوادث واحتمالات هذه الحوادث، وفي هذا الفصل سندرس أحد المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمال وهو ما يسمى المتغير العشوائي، واحتمالات حدوث قيمه. وكيفية إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية المناظرة لها.

(١٠ - ٢) المتغير العشوائي المتقطع

يعرّف المتغير العشوائي بصفة عامة بأنه دالة (تقابل) تعرّف على فراغ العينة S . وتكون قيم المتغير العشوائي (أو المجال المقابل له) s (S) عبارة عن مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية. فإذا كان المجال المقابل منتهياً أو غير منتهٍ وقابلاً للعد فإن المتغير في هذه الحالة يسمى المتغير العشوائي المتقطع أو الوثاب.

ومن أمثلة المتغيرات المتقطعة عدد وحدات العينة في إنتاج إحدى الآلات، عدد الحوادث المرورية في مدينة ما خلال شهر، عدد الركاب الذين يصلون إلى محطة الحافلات خلال ساعة من الزمن، عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقود ن من المرات وهكذا...

وعادة يرمز للمتغير العشوائي بالرمز s والقيم التي يأخذها هذا المتغير بالرموز

$s_1, s_2, \dots, s_r, \dots$

حيث $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r \geq \dots$

والاحتمالات $h(s_1), h(s_2), \dots, h(s_r), \dots$

وأحياناً تكتب $h(s_1), h(s_2), \dots, h(s_r), \dots$

وتسمى دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع.

وهي تحقق الخاصيتين التاليتين معاً.

١ - جميع قيمها موجبة أو تساوي الصفر أي $h(s) \geq 0$.

٢ - مجموع الاحتمالات لجميع قيم المتغير العشوائي تساوي ١

$$\sum_{s=1}^{\infty} h(s) = 1$$

وسوف نوضح كيفية إيجاد قيم المتغير العشوائي المتقطع ودالة التوزيع الاحتمالي له بالأمثلة التالية.

مثال (١)

إذا ألقيت قطعة عملة متزنة مرتين متتاليتين، وكان المتغير العشوائي s عبارة عن عدد الصور التي تظهر، فأوجد قيم هذا المتغير العشوائي ودالة التوزيع الاحتمالي له.

فراغ العينة s الناتج من إلقاء قطعة العملة مرتين يكون كالتالي:

$s = \{ (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) \}$

المتغير $s =$ عدد الصور، فيكون قيم s لكل عنصر من عناصر فراغ العينة

s كالتالي:

$s = 2$ للعنصر (ص، ص)

$s = 1$ للعنصر (ص، ك)

$s = 1$ للعنصر (ك، ص)

$s = 0$ للعنصر (ك، ك)

أي أن قيم المتغير العشوائي $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ هي صفر ، ١ ، ٢

ويمكن التعبير عن قيم المتغير العشوائي من الجدول التالي :

ش	(ص ، ص)	(ص ، ك)	(ك ، ص)	(ك ، ك)
س	٢	١	١	صفر

أي أن $s = (ش) = \{ صفر ، ١ ، ٢ \}$ المجال المقابل للمتغير العشوائي وتكون قيم دالة التوزيع الاحتمالي لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي ، بالرجوع إلى فراغ العينة كالتالي :

$$\begin{aligned} \text{ح (صفر)} &= \text{ح (س = صفر)} = \text{ح [(ك ، ك)]} = \frac{1}{4} \\ \text{ح (١)} &= \text{ح (س = ١)} = \text{ح [(ص ، ك) ، (ك ، ص)]} = \frac{2}{4} \\ \text{ح (٢)} &= \text{ح (س = ٢)} = \text{ح [(ص ، ص)]} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ويمكن وضع قيم دالة التوزيع الاحتمالي أو بعبارة أخرى القيم الممكنة للمتغير العشوائي والاحتمالات المناظرة لها في الجدول التالي :

س	صفر	١	٢
ح (س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

مثال (٢)

إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة وكان المتغير العشوائي s يمثل قيمة الرقم الذي يظهر على الوجه الأعلى فأوجد المجال المقابل للمتغير العشوائي وكذلك دالة توزيعه الاحتمالي .

المجال المقابل س (ش) = { ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ }
 ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي نلخص قيمها في الجدول التالي:

٦	٥	٤	٣	٢	١	س
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	ح (س)

مثال (٣)

إذا ألقِيَ حجرا نردٍ مرة واحدة وكان المتغير العشوائي س يمثل مجموع رقمي الوجهين اللذين يظهران إلى أعلى فأوجد المجال المقابل لهذا المتغير العشوائي ، وكذلك دالة توزيعه الاحتمالي .

عند إلقاء حَجْرِي نردٍ يكون فراغ العينة باستخدام شبكة التربيع كالتالي:

٦	٦, ١	٦, ٢	٦, ٣	٦, ٤	٦, ٥	٦, ٦
٥	٥, ١	٥, ٢	٥, ٣	٥, ٤	٥, ٥	٥, ٦
٤	٤, ١	٤, ٢	٤, ٣	٤, ٤	٤, ٥	٤, ٦
٣	٣, ١	٣, ٢	٣, ٣	٣, ٤	٣, ٥	٣, ٦
٢	٢, ١	٢, ٢	٢, ٣	٢, ٤	٢, ٥	٢, ٦
١	١, ١	١, ٢	١, ٣	١, ٤	١, ٥	١, ٦
	١	٢	٣	٤	٥	٦

الحجر الأول

المجال المقابل للمتغير العشوائي س (ش) يكون كالتالي:

س (ش) = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

ودالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي يمكن تلخيص قيمها بالجدول التالي:

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ح (س)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(١٠ - ٢ - ١) التوقع والتباين

إذا كان لدينا متغير عشوائي س يأخذ القيم التالية:

س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ، س_ن

وكانت قيم دالة التوزيع الاحتمالي لهذه القيم هي

ح (س_١) ، ح (س_٢) ، ، ح (س_ن) على الترتيب

فإن التوقع للمتغير العشوائي س ويرمز له بالرمز μ (س) ويقراً توقع س يعطى

كالتالي:

$$(س) = س_١ ح (س_١) + س_٢ ح (س_٢) + \dots + س_ن ح (س_ن)$$

$$= \sum_{r=1}^n س_r ح (س_r) \quad (١)$$

أما تباين المتغير العشوائي س ويرمز له بالرمز σ^2 (س) ويقراً تباين س يعطى

كالتالي:

$$\sigma^2 (س) = [س_١ - \mu]^2 ح (س_١) + [س_٢ - \mu]^2 ح (س_٢) + \dots + [س_ن - \mu]^2 ح (س_ن)$$

$$= \sum_{r=1}^n [س_r - \mu]^2 ح (س_r) \quad (٢)$$

ويمكن تبسيط (٢) لتصبح في الصورة التالية:

$$\sigma^2 = \sum_{r=1}^n س_r^2 ح (س_r) - (\mu)^2 \quad (٣)$$

والجذر التربيعي للتباين يسمى الانحراف المعياري، ونرمز له بالرمز σ

مثال (٤)

أوجد التوقع (μ) والتباين (σ^2)، والانحراف المعياري (σ) للمتغير العشوائي

س في مثال (١) السابق

يمكن تلخيص خطوات الحل كما في الجدول التالي:

٢	١	صفر	س
٤	١	صفر	س ^٢
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	ح (س)

$$\mu = \sum_{j=1}^n \text{مجموع } s_j \text{ ح (س } j)$$

$$= \text{صفر} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^n \text{مجموع } s_j^2 \text{ ح (س } j) - (\mu)^2$$

نجد أولاً:

$$\sum_{j=1}^n \text{مجموع } s_j^2 \text{ ح (س } j) = \text{صفر}^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = 1,5$$

$$= 1,5$$

بالتعويض بهذه القيمة يكون لدينا

$$\sigma^2 = 1,5 - 1^2 = 0,5$$

$$= 0,5$$

ومن ذلك نجد أن

$$\sigma = \sqrt{0,5} = 0,71$$

مثال (٥)

أوجد التوقع (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) للمتغير العشوائي

س في مثال (٣) السابق

نلخص الحل في الجدول التالي :

١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	س
١٤٤	١٢١	١٠٠	٨١	٦٤	٤٩	٣٦	٢٥	١٦	٩	٤	س ^٢
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	ح (س)

نعلم أن :

$$\mu = \sum_{r=1}^n \text{س}_r \cdot \text{ح}(\text{س}_r)$$

$$\frac{1}{36} \times 12 + \dots + \frac{2}{36} \times 3 + \frac{1}{36} \times 2 =$$

$$7 =$$

أما التباين فهو :

$$\sigma^2 = \sum_{r=1}^n \text{س}_r^2 \cdot \text{ح}(\text{س}_r) - \mu^2$$

نحسب أولاً المقدار

$$\sum_{r=1}^n \text{س}_r^2 \cdot \text{ح}(\text{س}_r) = \frac{1}{36} \times 144 + \dots + \frac{2}{36} \times 9 + \frac{1}{36} \times 4 =$$

$$54,83 =$$

ومن ذلك نجد أن :

$$5,83 = 54,83 - 54,83 = \sigma^2$$

أي أن :

$$2,41 = \sqrt{5,83} = \sigma$$

(١٠ - ٣) المتغير العشوائي المتصل

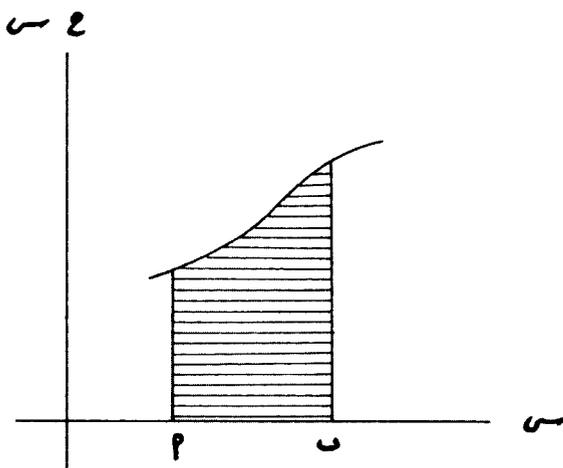
سبق لنا دراسة المتغير العشوائي المتقطع ، وذكرنا أن المجال المقابل له منتهٍ أو غير منتهٍ ، ولكنه قابل للعد . والمتغير العشوائي المتصل (المستمر) هو الذي يكون مجاله المقابل غير قابل للعد . أي أن قيم المتغير تكون هي جميع القيم لفترة ما (أ ، ب) مثلاً .

ومن أمثلة المتغير العشوائي المتصل أوزان أو أطوال مجموعة من الطلاب أو الدخل السنوي لمجموعة من الأسر أو أعمار الزوجات لمجموعة من الأسر أو درجات الحرارة في فترة ما . . . إلخ . فإذا قمنا بدراسة ظاهرة الوزن لمجموعة من الطلاب فإن المتغير العشوائي الذي يمثل وزن طالب ما يختلف من طالب إلى آخر . ويمكن أن يأخذ أي قيمة داخل فترة (أ ، ب) . فإذا وجدنا وزن طالب ما s_1 وطالب آخر s_2 فإنه يمكن أن نجد طالباً ثالثاً وزنه s_3 يقع بين s_1 ، s_2 مهما كانت القيمتان s_1 ، s_2 قريبتين من بعضهما . ولهذا فإن المتغير s الذي يمثل الوزن يكون متصلاً ومن ذلك يمكن ملاحظة أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل أي قيمة محددة يساوي صفرًا ، ولذلك لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير المتصل بجدول كما سبق أن فعلنا في حالة المتغير العشوائي المتقطع . نعبّر عادة عن احتمال المتغير العشوائي المتصل بدالة احتمال ، ومقدار الاحتمال عبارة عن المساحة المحصورة تحت المنحنى الخاص بتلك الدالة ومحور السينات ، وتسمى هذه الدالة دالة الكثافة الاحتمالية ، ونرمز لها بالرمز d (س) التي تحقق الشرطين التاليين :

$$١ - d(س) \leq \text{صفر أي قيم دالة الكثافة موجبة دائماً.}$$

$$٢ - \int_{-\infty}^{\infty} d(س) دس = ١ \text{ أي أن المساحة تحت المنحنى لدالة كثافة الاحتمال يساوي واحدًا صحيحًا.}$$

ولإيجاد احتمال أن يقع المتغير في الفترة [أ ، ب] نحسب المساحة المظللة والموضحة بالرسم وتسمى ح (أ \geq س \geq ب)



شكل (١٠ - ١): المساحة تحت المنحنى للفترة (أ إلى ب)

حيث إن
ح (أ \geq س \geq ب) = \int_b^a د (س) دس

مثال (٦)

أثبت أن الدالة التالية

$$\left. \begin{array}{l} \text{صفر} \geq \text{س} \geq 2 \\ \text{صفر} \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

خلاف ذلك

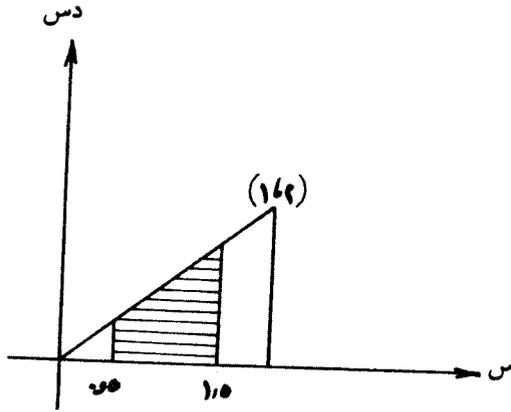
تكون دالة كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة ح (١ \geq س \geq $\frac{3}{4}$). هذه الدالة دائما موجبة أي تحقق الشرط الأول وهو د (س) \leq ٠ وذلك لجميع قيم س داخل الفترة من

$$2 \geq \text{س} \geq 0$$

وان

$$\text{صفر} \int_{\frac{1}{4}}^2 \text{س} دس = 1$$

الدالة د (س) هي دالة كثافة احتمال وتوضح بالرسم



شكل (١٠-٢): إيجاد قيمة ح $(\frac{3}{4} \geq س \geq \frac{1}{4})$

ملحوظة: التكامل السابق هو مساحة المثلث القائم الزاوية التي قاعدته طولها ٢

$$\text{وارتفاعه } ١ \text{ أي أن المساحة} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

ولإيجاد الاحتمال ح $(\frac{3}{4} \geq س \geq \frac{1}{4})$ والموضح بالجزء المظلل في الرسم بطريقتين كالتالي

$$(١) \text{ ح } (\frac{3}{4} \geq س \geq \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{2}{3} س \, دس = \frac{2}{3} \left[\frac{س^2}{2} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \left[\frac{3^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right] = \frac{1}{3} \times \frac{8}{4} = \frac{2}{3}$$

$$(٢) \text{ مساحة شبه المنحرف المظلل في الرسم} = \text{ح } (\frac{3}{4} \geq س \geq \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{4} = \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right] \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(١٠ - ٣ - ١) حساب التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل

يمكن حساب التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل مثل ما سبق بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع ، وذلك باستبدال الرمز μ للمثل للمجموع بالرمز μ للمثل للتكامل ويكون

$$(٤) \dots\dots\dots \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$$

$$(٥) \dots\dots\dots \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (\mu)^2 = \sigma^2$$

مثال (٧)

احسب التوقع والتباين لدالة المتغير العشوائي المتصل الذي دالة كثافته الاحتمالية معطاة في مثال (٦) السابق .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$$

$$\therefore \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[-\frac{3}{1} e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^{\infty} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \int_0^{\infty} \left[-\frac{x}{6} e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^{\infty} = \sigma^2$$

$$\therefore \sigma^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \int_0^{\infty} \left[\frac{x^2}{8} e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{9} = \frac{16}{9} - 2 = \frac{16}{9} - \frac{36}{9} = -\frac{20}{9}$$

ملاحظة

سبق لنا دراسة المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة والتوزيعات الاحتمالية لها بصفة عامة . ودراسة التوزيعات الاحتمالية تساعدنا في الحصول على النتائج التي

تستخدم في الاستدلال الإحصائي الذي بواسطته تتخذ القرارات على أساس علمي سليم .

وفيما يلي نكتفي بدراسة بعض التوزيعات المهمة التي لها تطبيقات كثيرة في الحياة العملية مثل توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون للمتغير العشوائي المتقطع والتوزيع المعتدل (الطبيعي) للمتغير العشوائي المتصل .

(١٠ - ٤) توزيع ذي الحدين

توجد كثير من الظواهر في الحياة تكون النتائج الممكنة لها واحدة من اثنتين إحداهما تسمى نجاحًا وتحدث باحتمال ح والثانية تسمى فشلاً وتحدث باحتمال ل حيث إن $ل = ١ - ح$. وعند تكرار هذه التجربة عددًا من المرات ولتكن ن فإننا نحصل في كل مرة إما على حالة نجاح باحتمال ح ، أو فشل باحتمال قدره ل . والمتغير العشوائي س الذي يمثل عدد مرات النجاح من هذا النوع يقال إنه يتبع توزيع ذي الحدين .

التوزيع الاحتمالي ح (س) لتوزيع ذي الحدين يعطى بالعلاقة التالية

$$ح(س) = \binom{ن}{س} ح^س ل^{ن-س} \quad (٦) \dots\dots\dots$$

حيث إن س = صفر ، ١ ، ٢ ، ، ن

ويستخدم هذا التوزيع في الحياة العملية لكثير من الظواهر مثل المعيب والسليم في الإنتاج، والتدخين وعدم التدخين لمجموعة من طلاب الجامعة، النجاح والرسوب في الامتحان لمجموعة من الطلاب، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها، إصابة هدف معين أو عدم إصابته وهكذا . . الخ .

ويمكن حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير الذي يتبع توزيع

ذي الحدين كالتالي :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\text{مجم} \text{ ن}}{\text{ن} - \text{صفر}} \text{ س ح (س)} \\ \mu &= \frac{\text{مجم} \text{ ن}}{\text{ن} - \text{صفر}} \text{ س (س) ح س ل ن - س} \\ \therefore \mu &= \text{ن ح} \end{aligned}$$

(٧)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\text{مجم} \text{ ن}}{\text{ن} - \text{صفر}} (\text{س} - \mu)^2 \text{ ح (س)} \\ &= \frac{\text{مجم} \text{ ن}}{\text{ن} - \text{صفر}} \text{ س}^2 \text{ ح (س)} - (\mu)^2 \\ &= \frac{\text{مجم} \text{ ن}}{\text{ن} - \text{صفر}} \text{ س}^2 \text{ ح س ل ن - س} - \text{ن}^2 \text{ ح}^2 \\ &= \text{ن ح ل} \\ \sigma &= \sqrt{\text{ن ح ل}} \end{aligned}$$

(٨)

(٩)

مثال (٨)

إذا ألقيت قطعة نقود متزنة مرتين فأوجد قيم المتغير العشوائي س الذي يمثل ظهور عدد الصور، وكذلك التوزيع الاحتمالي، والتوقع (μ) والتباين (σ^2) له بطريقتين مختلفتين.

سبق لنا في مثال (١) إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ح (س) كما هو موضح

بالجدول التالي :

س	صفر	١	٢
ح (س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

لقد وجدنا من مثال (٤) أن التوقع $\mu = 1$ و $\sigma^2 = 0,5$ ،
 وباستخدام توزيع ذي الحدين ليكون احتمال ظهور الصورة ح $= \frac{1}{4}$ وعدم ظهور
 الصورة ل $= \frac{1}{4}$ وعدد الرميات ن = ٢

وحيث إن المجال المقابل للمتغير العشوائي س هو المجموعة { صفر ، ١ ، ٢ } وحيث
 إن المتغير العشوائي = عدد الصور، ويتبع توزيع ذي الحدين فإن دالة التوزيع الاحتمالي
 له هي :

$$ح(س) = \binom{ن}{س} ح^س ل^{ن-س} \quad \text{حيث س = صفر، ١، ٢}$$

وبالتعويض عن قيم س نجد أن :

$$ح(صفر) = \binom{٢}{صفر} \left(\frac{1}{4}\right)^{صفر} \left(\frac{1}{4}\right)^{٢-٢} = \frac{1}{4}$$

$$ح(١) = \binom{٢}{١} \left(\frac{1}{4}\right)^١ \left(\frac{1}{4}\right)^{٢-١} = \frac{1}{2}$$

$$ح(٢) = \binom{٢}{٢} \left(\frac{1}{4}\right)^٢ \left(\frac{1}{4}\right)^{٢-٢} = \frac{1}{4}$$

وبالتعويض عن ن ، ح يمكن إيجاد التوقع والتباين لهذا التوزيع كما يلي :

$$\mu = ن ح = ٢ \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\sigma^2 = ن ح ل = ٢ \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 0,5$$

وهي نفس النتائج السابقة .

مثال (٩)

أوجد احتمال ظهور عدد ٤ صور عند إلقاء قطعة نقود متزنة عشر مرات متتالية ،
 وكذلك التوقع والتباين للمتغير العشوائي س الذي يمثل عدد ظهور الصور.

الحل

في هذا المثال يصعب كتابة عناصر فراغ العينة لكبر عدد نقاط فراغ العينة، ويكون من السهل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين بدون الحاجة لمعرفة جميع عناصر فراغ العينة.

من المثال لدينا:

$$n = 10, \quad s = 4, \quad h = l = \frac{1}{2}$$

ونعلم أن دالة التوزيع الاحتمالية

$$h(s) = \binom{n}{s} h^s l^{n-s} \quad \text{حيث } s = \text{صفر، ١، ٢، \dots، } n$$

ولقيمة $s = 4$ يكون الاحتمال هو:

$$h(4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} = 0,29$$

ولإيجاد التوقع والتباين والانحراف المعياري نكتب:

$$\mu = n h = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \quad \text{صور}$$

$$\sigma^2 = n h l = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2,5$$

$$\sigma = \sqrt{2,5} = 1,58 \quad \text{صور}$$

مثال (١٠)

إذا كان ١٠٪ من انتاج أحد مصانع مصابيح الإضاءة غير سليم، وسحبنا عينة

مكونة من ٤ مصابيح فأوجد ما يلي:

(أ) احتمال أن يكون من بينها مصباح تالف .

(ب) احتمال أن يوجد مصباح تالف على الأقل .

الحل

نفرض أن المتغير العشوائي س = عدد المصابيح التالفة ويتبع توزيع ذي الحدين حيث إن $n = 4$ ، $p = 0.1$ ، $q = 0.9$ ، ودالة التوزيع الاحتمالية هي :

$$P(S) = \binom{4}{s} p^s q^{4-s} \quad \text{حيث } s = 0, 1, 2, 3, 4$$

أي أن

$$\begin{aligned} \text{أ) } P(S=1) &= \binom{4}{1} (0.1)^1 (0.9)^{4-1} = 0.29 \\ \text{ب) } P(S \leq 1) &= P(S=0) + P(S=1) = 0.6561 + 0.2916 = 0.9477 \end{aligned}$$

مثال (١١)

لنفرض أنه يوجد من بين كل ٥٠٠ سيارة من إنتاج مصنع معين لإنتاج السيارات ٥٠ سيارة غير سليمة أي غير صالحة للاستعمال، سحبت عينة مكونة من ٤ سيارات من إنتاج ذلك المصنع، أوجد احتمال أن يكون من بينها ثلاث سيارات غير صالحة للاستعمال.

الحل

نفرض أن المتغير العشوائي س يمثل عدد السيارات غير الصالحة ويتبع توزيع ذي الحدين من المثال لدينا :

$$P(S) = \binom{n}{s} p^s q^{n-s} \quad \text{حيث } n = 500, p = 0.1, q = 0.9$$

ودالة التوزيع الاحتمالية لمتغير يتبع توزيع ذي الحدين هي :

$$P(S) = \binom{n}{s} p^s q^{n-s} \quad \text{حيث } s = 0, 1, 2, \dots, n$$

مثال (١٢)

إذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية على أحد الطرق هو حادث واحد فأوجد احتمال أن يحدث في يوم ما حادثان .

الحل

المتغير العشوائي X يمثل عدد الحوادث اليومية على الطريق، ويتبع توزيع بواسون بدالة احتمال:

حيث $X = 0, 1, 2, \dots$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

وفي مثالنا الحالي $\lambda = 1$ ، $X = 0, 1$ وبذلك يكون:

$$P(X=1) = \frac{e^{-1} 1^1}{1!} = 0, 368$$

نتيجة

عندما يكون الاحتمال $P(X=x)$ صغيراً جداً (أقل من ٠,٠٥)، X كبيراً جداً (أكبر من ٣٠) في توزيع ذي الحدين فإن توزيع ذي الحدين يؤول إلى توزيع بواسون ويكون الثابت $\lambda = X$ ، وتعتبر هذه النتيجة مهمة في الحياة العملية وفي كثير من التطبيقات، ونوضح ذلك بالأمثلة التالية .

مثال (١٣)

إذا كانت نسبة المعيب في مصنع مصابيح كهربية هي ٢٪ فإذا أخذنا عينة عشوائية مكونة من ٣٠٠ مصباح فأوجد احتمال أن يوجد في هذه العينة مصباح واحد على الأكثر معيب .

الحل

لاحظ أن $P(X=0) = 0, 78$ و $P(X=1) = 0, 22$ وبالتالي فإن توزيع

المتغير العشوائي S والذي يمثل عدد المصابيح المعيبة يمكن تقريبه بتوزيع بواسون حيث

$$P = 0.02 \times 300 = 6 = n$$

$$\therefore P(S) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^s}{s!} \quad \text{حيث } s = \text{صفر، ١، ٢، ...}$$

$$\therefore P(\text{صفر}) = \frac{e^{-6} 6^0}{0!} = 0.00248$$

$$P(1) = \frac{e^{-6} 6^1}{1!} = 0.01487$$

$$P(\text{ح (على الأكثر مصباح معيب)}) = P(0) + P(1)$$

$$P(S \geq 1) = 0.01487 + 0.00248 = 0.01735$$

مثال (١٤)

كتاب يحتوي على ٤٠٠ صفحة وعلم أن عدد الأخطاء المطبعية به هو ٢٠٠ خطأ موزعة على صفحات الكتاب. أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة على ٣ أخطاء فقط.

الحل

المتغير العشوائي S يمثل عدد الأخطاء في الصفحة

$$P = \frac{1}{400} \quad \text{هو احتمال الحصول على صفحة بها أخطاء، } n = 200$$

$$P = 0.0025 = \frac{1}{400} \times 200 = n$$

$$P(S) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^s}{s!} \quad \text{حيث } s = \text{صفر، ١، ٢، ...}$$

$$P(3) = \frac{e^{-0.5} 0.5^3}{3!} = 0.0126$$

(١٠-٦) التوزيع المعتدل (الطبيعي)

يعتبر التوزيع المعتدل (أو الطبيعي) من أهم التوزيعات الإحصائية وهو توزيع متصل، وأن معظم الظواهر الطبيعية تتبع التوزيع المعتدل مثل ظاهرة الطول والوزن والذكاء في الإنسان... إلخ والمنحنى التكراري لهذا التوزيع متماثل حول المتوسط (أن يتطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال) ومعظم المشاهدات تتركز حول المتوسط، وطرفاه يتقاربان من المحور الأفقي ويمتدان إلى ما لا نهاية، والمساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح ويتحدد المنحنى تماماً بمعرفة المتوسط (μ) والانحراف المعياري (σ) وتعطى دالة كثافة الاحتمال د (س) كالتالي.

$$د(س) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{س - \mu}{\sigma} \right)^2} \quad (١١) \dots\dots$$

حيث إن $-\infty < س < \infty$ ، $-\infty < \mu < \infty$ ، $0 < \sigma < \infty$ ،

ولقد وجد أن نسب البيانات على جانبي محور التماثل أي الخط المار بالمتوسط (تو)

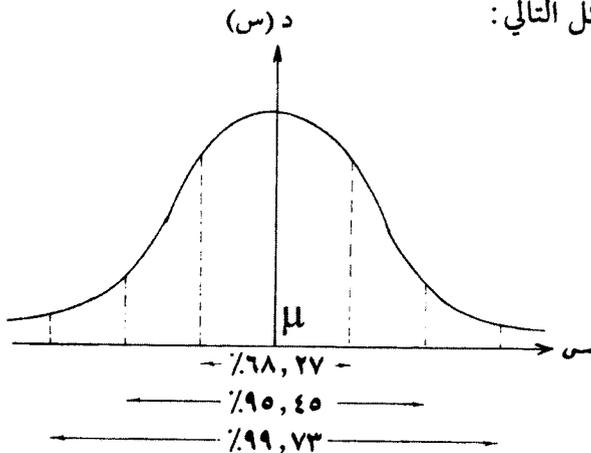
تكون كالتالي:

٢٧, ٦٨٪ تقريبا تقع في الفترة ($\mu - \sigma$ ، $\mu + \sigma$)

٤٥, ٩٥٪ تقريبا تقع في الفترة ($\mu - 2\sigma$ ، $\mu + 2\sigma$)

٧٣, ٩٩٪ تقريبا تقع في الفترة ($\mu - 3\sigma$ ، $\mu + 3\sigma$)

كما هو موضح بالرسم في الشكل التالي:

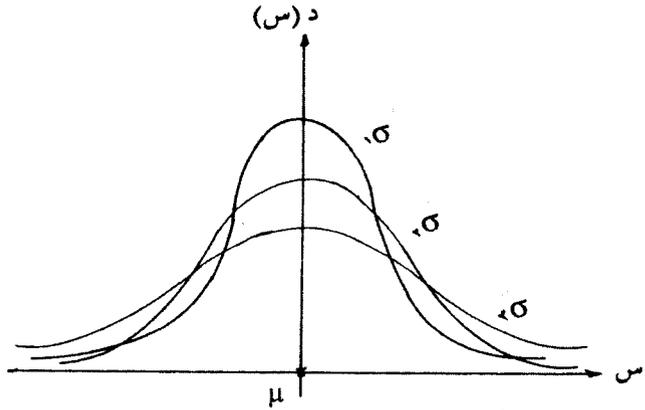


شكل (١٠-٣)

نسب الإحتمالات حول محور التماثل (المتوسط μ)

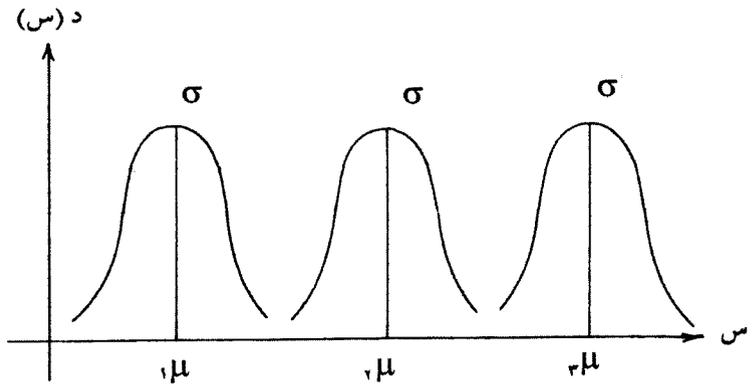
من هذه النسب السابقة نلاحظ ما يأتي

- ١ - إذا كان لدينا مجموعة من التوزيعات لها نفس المتوسط (μ) وتختلف القيم للانحراف المعياري (σ) لكل توزيع فيكون لها جميعا محور تماثل واحد وهو المحور المار بالمتوسط (μ) وتزداد درجة التفلطح للتوزيع كلما ازدادت قيمة (σ) كما هو موضح بالشكل التالي حيث: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.



شكل (١٠ - ٤): أشكال المنحنى الطبيعي بمتوسط ثابت تو وانحراف معياري متغير

- ٢ - أما إذا كانت المجموعة من التوزيعات لها الانحراف المعياري نفسه ولها متوسطات مختلفة حيث $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$ فإن شكل التوزيعات يكون كالتالي



شكل (١٠ - ٥): بعض أشكال المنحنى الطبيعي بانحراف معياري ثابت μ ومتوسط متغير

(١٠ - ٦ - ١) التوزيع المعتدل القياسي (المعياري)

يعرف التوزيع المعتدل القياسي بأنه توزيع معتدل له متوسط يساوي الصفر وله انحراف معياري يساوي الواحد الصحيح (أي أن $\mu = \text{صفر}$ ، $\sigma = ١$).

وسوف نرسم للمتغير العشوائي الذي له توزيع معتدل قياسي بالرمز $ص$ والقيم التي يأخذها بالرمز $ص_١$ ، $ص_٢$ ، ... ، ولدالة كثافته بالرمز $ق(ص)$ ، حيث

$$ق(ص) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{ص^2}{2\sigma^2}} ، \quad \infty > ص > -\infty$$

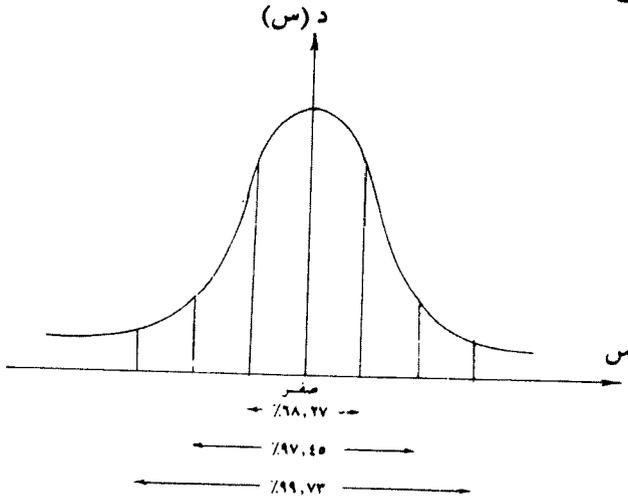
وهذا التوزيع يكون متماثلاً حول المحور الرأسي المار بنقطة الأصل وتكون نسب البيانات له كالتالي:

٢٧ ، ٦٨٪ في الفترة (-١ ، ١)

٤٥ ، ٩٧٪ في الفترة (-٢ ، ٢)

٧٣ ، ٩٩٪ في الفترة (-٣ ، ٣)

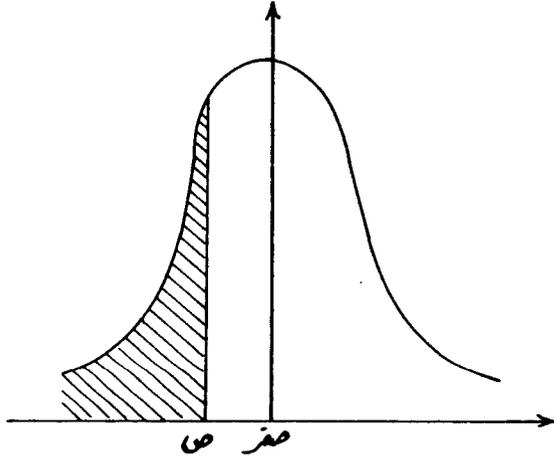
ونوضح النسب السابقة على المنحنى التكراري للتوزيع المعتدل القياسي كما يلي:



شكل (١٠ - ٦): نسب الاحتمالات حول محور التماثل ($\mu = \text{صفر}$)

والمساحة تحت هذا المنحنى تساوي الواحد الصحيح وأن معظمها يقع داخل الفترة $(-٣ ، ٣)$ ونادراً ما نجد قيمة تقع خارج هذه الفترة ولقد حسب الإحصائيون جداول احصائية تعطى قيمة المساحة تحت المنحنى المعتدل القياسي من جهة اليسار لأي قيمة من قيم المتغير العشوائي داخل الفترة $(-٣ ، ٣)$ والممثلة لقيمة الاحتمال المعطى كالتالي:

ح $(ص \geq ص) = ق(ص) = \int_{-\infty}^{ص} ق(س) دس$ (١٢)
 ونوضح بالرسم قيمة الاحتمال المعطى بالعلاقة (١٢) وهو عبارة عن الجزء المظلل كالتالي



شكل (١٠ - ٧): قيمة ح $(ص \geq ص)$

والجداول المعطاة في نهاية الكتاب جدول رقم (٢) تعطى قيمة ق $(ص)$ لقيم المتغير العشوائي ص داخل الفترة $(-٣ ، ٣)$ وذلك حتى الكسر المئوي لقيم ص كما سيتضح في الأمثلة التالية.

ملحوظة:

يوجد عدد غير نهائي من التوزيعات المعتدلة الممثلة لتوزيعات كثير من الظواهر الطبيعية المختلفة، مثل ظاهرة الوزن، أو ظاهرة الطول، أو ظاهرة الذكاء

للإنسان . . . الخ ، ويكون لها متوسطات مختلفة وكذلك انحرافات معيارية مختلفة ،
وتختلف هذه المتوسطات والانحرافات المعيارية من مجتمع إلى آخر .

يمكن تحويل كل هذه التوزيعات إلى توزيع واحد وهو التوزيع المعتدل
القياسي . إذا علمنا لأي توزيع متوسطه (μ) وانحرافه المعياري (σ) فإن القيمة
المعيارية $ص$ المناظرة لأي قيمة $س$ مثلاً لهذا التوزيع تعطى بالعلاقة التالية

$$ص = \frac{\mu - س}{\sigma} \quad (١٣) \dots\dots\dots$$

مثال (١٥)

إذا كان متوسط أوزان مجموعة من طلاب الجامعة هو ٦١ كجم وانحراف
معيارى هو ٤ فأوجد القيم المعيارية لأوزان عدد الطلاب التي كانت أوزانهم هي ٥٠ ،
٥٨ ، ٦٧ ، ٧٢ .

حيث إن المتوسط $\mu = ٦١$ والانحراف المعياري $\sigma = ٤$

$$\frac{٦١ - ٥٠}{٤} = \frac{\mu - س}{\sigma} = \text{القيمة المعيارية للطلاب الأول هي } ص_١$$

$$٢,٧٥ = \frac{١١}{٤} =$$

$$١,٧٥ = \frac{٧}{٤} = \frac{٦١ - ٥٨}{٤} = \text{القيمة المعيارية للطلاب الثاني } ص_٢$$

$$١,٥ = \frac{٦}{٤} = \frac{٦١ - ٦٧}{٤} = \text{القيمة المعيارية للطلاب الثالث } ص_٣$$

$$٢,٧٥ = \frac{١١}{٤} = \frac{٦١ - ٧٢}{٤} = \text{القيمة المعيارية للطلاب الرابع } ص_٤$$

مثال (١٦)

باستخدام البيانات في مثال (١٥) أوجد أوزان الطلاب الحقيقية إذا علم أن الأوزان القياسية لهم هي -٣، -٢، -١، ٧، حيث إن القيم المعيارية تعطى بالعلاقة التالية

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = ص$$

أي أن

$$س = \mu + ص \sigma$$

الوزن الحقيقي المناظر للقيمة -٣، -٢ يكون س_١، حيث

$$س_١ = (-٣، -٢) \times ٤ + ٦١ =$$

$$= ٦١ - ١٢ = ٤٩$$

$$= ٤٩، ٨ كجم$$

والوزن المناظر للقيمة المعيارية ٧، ١ هو س_٢ ويعطى كالتالي

$$س_٢ = ٧ \times ٤ + ٦١ =$$

$$= ٦٧، ٨ كجم .$$

مثال (١٧)

باستخدام الجداول الإحصائية أوجد قيم الاحتمالات التالية

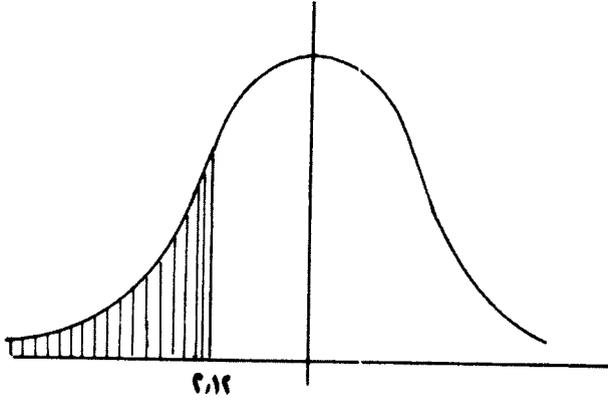
$$ق (-١٢٠، ٢) \text{ و } ق (١، ٣٣)$$

لإيجاد قيمة الاحتمال ق (-١٢٠، ٢) نبحث في العمود الأول من الجدول عن

القيمة -١، ٢، ثم نتحرك أمام هذه القيمة أفقياً حتى نصل إلى العمود الرأسي الذي رأس عنوانه الرقم ٠، ٠٢ فتكون هي المساحة المطلوبة أي أن

$$ق (-١٢٠، ٢) = ٠، ٠١٧٠٠$$

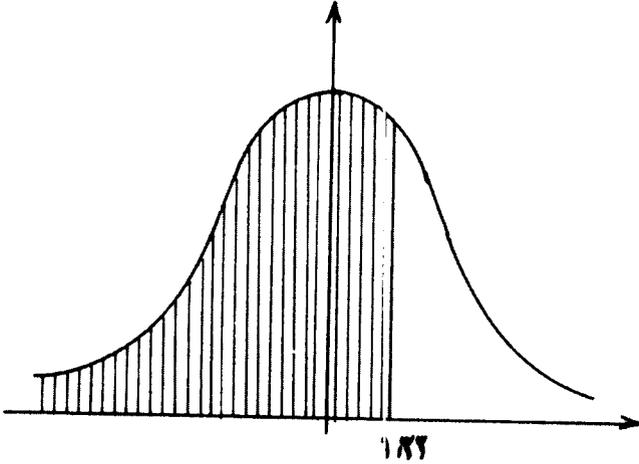
ونوضح هذه المساحة بالرسم كالتالي:

شكل (١٠-٨): قيمة ح (ص $\geq 2,12$).

وكذلك لإيجاد الاحتمال ق (١,٣٣) نبحث في العمود الأول عن القيمة ١,٣ ثم نتحرك أفقياً حتى نصل إلى العمود الرأسى تحت الرقم ٠,٠٣ فيكون الاحتمال هو:

$$0,90658 = (1,33) \text{ ق}$$

ونوضحه بالجزء المظلل في الرسم التالي :

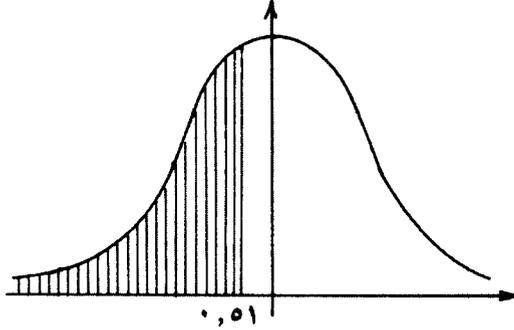
شكل (١٠-١): قيمة ح (ص $\geq 1,33$).

مثال (١٨)

إذا كان المتغير العشوائي V له توزيع معتدل قياسي فأوجد قيم الاحتمالات التالية $P(V \geq 0,51)$ و $P(0,3 \leq V \leq 1,91)$

لتسهيل حساب الاحتمال المطلوب نرسم المنحنى الطبيعي القياسي ونحدد على المحور الأفقي قيم V ثم نظلل المساحة التي على يسار القيمة V كما يلي:

ح $P(V \geq 0,51)$ توضح بالرسم كالتالي:

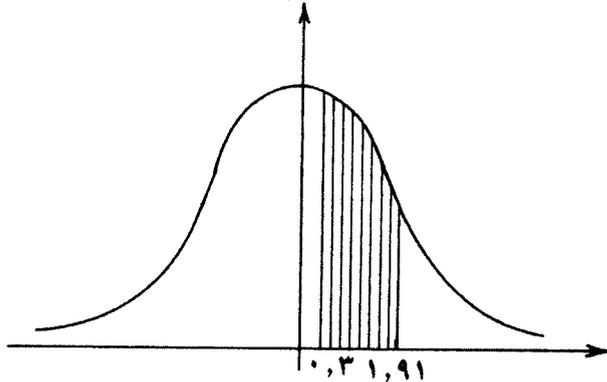


شكل (١٠-١٠) قيمة ح $P(V \geq 0,51)$

أي أن

$$P(V \geq 0,51) = Q(0,51) = 0,3050$$

ح $P(0,3 \leq V \leq 1,91)$ توضح بالرسم كالتالي:



شكا (١١-١٠): قيمة ح $P(0,3 \leq V \leq 1,91)$

$$\begin{aligned} \text{ح } (0,3) \geq \text{ص } \geq (1,91) &= \text{ق } (1,91) - \text{ق } (0,3) \\ &= 0,61790 - 0,97193 = \\ &= 0,35597 \end{aligned}$$

مثال (١٩)

إذا كانت درجات مجموعة مكونة من ٥٠٠ طالب في أحد المواد تتبع التوزيع المعتدل بتوقع قدره ٧٠ درجة وانحراف معياري قدره ٥ درجات فاحسب عدد الطلاب فيما يلي:

- ١ - الحاصلون من ٦٦ درجة إلى ٧٦ درجة
- ب - الحاصلون على أكثر من ٨٠ درجة
- ج - الحاصلون على أقل من ٦٠ درجة

الحل

لحل هذا المثال نجد على الترتيب ما يلي:

١) لإيجاد عدد الطلاب نوجد المساحة المحصورة بين القيم المعيارية فتكون التكرار النسبي، وبضرب هذا التكرار النسبي في عدد الطلاب نحصل على عدد الطلاب المطلوب

$$0,8 = \frac{4}{5} = \frac{70 - 66}{5} = \text{درجة ٦٦ بالوحدات المعيارية}$$

$$1,2 = \frac{6}{5} = \frac{70 - 76}{5} = \text{درجة ٧٦ بالوحدات المعيارية}$$

$$\text{ح } (66 \geq \text{ص } \geq 76) = \text{ح } (0,8 \geq \text{ص } \geq 1,2)$$

$$= \text{ق } (1,2) - \text{ق } (0,8) =$$

$$= 0,8849 - 0,2119 = 0,6730$$

$$\text{عدد الطلاب الحاصلين من ٦٦ درجة إلى ٧٦} = 0,673 \times 500 =$$

$$\approx 337 \text{ طالب}$$

$$\text{ب) } ٨٠ \text{ درجة بالوحدات المعيارية} = \frac{٧٠ - ٨٠}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

$$\text{ح (س} < ٨٠) = ١ - \text{ح (س} \geq ٨٠)$$

$$= ١ - \text{ح (ص} \geq ٢)$$

$$= ١ - \text{ق (٢)}$$

$$= ١ - ٩٧٧٢٥٠$$

$$= ٠,٠٢٢٧٥$$

$$\text{عدد الطلاب الحاصلين على أكثر من } ٨٠ \text{ درجة} = ٠,٠٢٢٧٥ \times ٥٠٠$$

$$= ١١ \text{ طالبا}$$

$$\text{ج) } ٦٠ \text{ درجة بالوحدات المعيارية} = \frac{٧٠ - ٦٠}{٥} = ٢$$

$$\text{ح (س} \geq ٦٠) = \text{ح (ص} \geq ٢)$$

$$= ٠,٠٢٢٧٥$$

$$\text{عدد الطلاب الحاصلين على أقل من } ٦٠ \text{ درجة} = ٠,٠٢٢٧٥ \times ٥٠٠$$

$$\approx ١١ \text{ طالبا}$$

(١٠-٧) تمارين

١ - اوجد التوقع (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) لكل من التوزيعات التالية:

(١)

٧	٣	٢	س
$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٣}$	ح (س)

(ب)

ص	٣-	٢-	٤	٥
ح (ص)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(ج)

ع	١	٢	٣	٤	٥
ح (ع)	٠,٢	٠,١	٠,٢	٠,١	٠,٤

٢ - صنعت قطعة نقود بحيث كان ح (ص) = $\frac{2}{3}$ ، ح (ك) = $\frac{1}{3}$ القيت هذه القطعة ثلاث مرات فإذا كان س هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الصور. اوجد التوزيع الاحتمالي وتوقع وتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

٣ - إذا كان احتمال أن يكسب الفريق ١ في أي مباراة هو $\frac{3}{4}$. فإذا لعب الفريق ١ أربع مباريات فأوجد احتمال أن يكسب هذا الفريق

١ (مباريتان فقط .

ب) مباراة واحدة على الأقل .

ج) أكثر من نصف المباريات .

٤ - عين توقع (متوسط) عدد الأولاد في مجتمع الأسر التي بها ستة أطفال بفرض أن احتمال أي طفل في الأسرة بنت مساوٍ لاحتمال أن يكون ولدًا، ما هو احتمال أن يكون لدى الأسرة عدد من الأولاد مساوٍ لمقدار هذا التوقع؟

٥ - إذا كان توزيع بواسون يعطى كالتالي

ح (س ، م) = $\frac{e^{-\lambda} \lambda^s}{s!}$ حيث س = صفر، ١، ٢، ... ، م < صفر

فأوجد الاحتمالات التالية :

$$\text{ح } \left(\frac{1}{4}, 3\right), \text{ح } (2, 4), \text{ح } (1, 7)$$

٦ - إذا كانت نسبة المصابين بمرض معين في بلد ما 0.002 . ما هو احتمال عدم

وجود أي مصاب بهذا المرض في حي يسكنه 4000 نسمة؟

٧ - إذا كان هناك 400 خطأ مطبعي موزعة على صفحات كتاب به 300 صفحة

أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة

أ (على خطأ واحد أو أكثر.

ب) على ثلاثة أخطاء بالضبط.

٨ - إذا كان المتغير العشوائي X له توزيع طبيعي قياسي Q (ص) فأوجد قيم

الاحتمالات التالية باستخدام الجداول الإحصائية :

$$\text{أ } Q(0, 21).$$

$$\text{ب } Q(2, 15).$$

$$\text{ج } Q(-1, 12).$$

$$\text{د } P(X \geq 1, 24).$$

$$\text{هـ } P(X < 0, 81).$$

$$\text{و } P(-1, 12 \leq X \leq 0, 62).$$

٩ - إذا كانت 300 ورقة من أوراق نبات الغار لها توزيع معتدل بمتوسط $\mu = 142$

ملليمتر، وانحراف معياري $\sigma = 10$ ملم، فأوجد عدد الأوراق التالية :

أ (ما بين 140 ملم، 150 ملم

ب) أكبر من 160 ملم

ج) أقل من 130 ملم.

١٠- إذا كان 20% من انتاج آلة لصناعة المسامير تالف . . فأوجد احتمال أن يكون من

بين 4 مسامير أختيرت عشوائياً.

أ (مسمار واحد تالف.