

توزيع المعاينة والتقدير واقتبارات الفروض

(١١ - ١) مقدمة

لقد سبق لنا في الفصل الأول تعريف المجتمع الإحصائي والعينة الإحصائية والأخيرة عبارة عن جزء من المجتمع. تعرضنا كذلك إلى طرق لأخذ العينات مثل العينة العشوائية البسيطة، والعينة الطبقية وغيرها والأسباب التي أدت إلى أخذ العينات. والمجتمع الإحصائي عادة يحتوي على معالم تكون غير معلومة مثل المتوسط والتباين... إلخ. ويرغب الباحثون عادة في تقدير مثل هذه المعالم من البيانات المأخوذة من العينات، وذلك بحساب متوسط العينة كتقدير لمتوسط المجتمع، وكذلك تباين العينة كتقدير لتباين المجتمع... إلخ. وتسمى التقديرات المحسوبة من العينة الإحصائيات. وتستخدم الإحصائيات هذه لتقدير معالم المجتمع، وذلك بأخذ أحد أسلوبين هما التقدير بنقطة أو التقدير بفترة، والتي تسمى عادة فترة الثقة. وتستخدم الإحصائيات في تحديد ما إذا كانت الاختلافات المشاهدة بين عينتين ترجع إلى تقلبات الصدفة أو إلى اختلافات معنوية فعلاً وهذا يتطلب دراسة ما يسمى باختبارات المعنوية، والفروض، والتي تساعد في اتخاذ القرارات. ولدراسة تقدير المعالم بفترة الثقة واختبارات الفروض لا بد لنا أولاً من دراسة توزيعات المعاينة.

(١١ - ٢) توزيع المعاينة للأوساط

إذا كان لدينا مجتمع محدود عدد مفرداته N وأخذنا كل العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n ، وحسبنا لكل منها الوسط الحسابي \bar{x} ، ثم وضعنا هذه الأوساط

في جدول تكراري فإننا نحصل على ما يسمى توزيع المعاينة للأوساط. وهذا التوزيع يكون قريباً جداً من التوزيع المعتدل، ومتوسطه يساوي متوسط المجتمع (μ)، وتباينه يكون أقل من تباين المجتمع (σ^2). فإذا رمزنا لمتوسط توزيع المعاينة للأوساط بالرمز $\mu(\bar{s})$ وتباين توزيع المعاينة للأوساط بالرمز $\sigma^2(\bar{s})$ فإننا نحصل على

$$\mu(\bar{s}) = \mu \quad (1) \dots\dots\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان حجم المجتمع صغيراً} \\ \left(\frac{\sigma^2}{n} \right) \left(\frac{n-1}{n} \right) \\ \dots\dots\dots (2) \\ \text{إذا كان حجم المجتمع كبيراً} \\ \frac{\sigma^2}{n} \end{array} \right\} = \sigma^2(\bar{s}) \quad (ب)$$

ملاحظة

الجذر التربيعي لتباين توزيع المعاينة للأوساط يسمى الخطأ المعياري وسوف نرمز له بالرمز $\sigma(\bar{s})$.

ويمكن التحقق من العلاقتين (1)، (2) السابقتين بالمثال التالي.

مثال (1)

مجتمع يحتوي على أوزان خمسة أطفال في سن الرضاعة كالتالي:

٢ ، ٥ ، ٣ ، ٤ ، ٦ كجم

احسب متوسط التوزيع العيني للأوساط وكذلك الخطأ المعياري لكل العينات الممكنة المكونة من طفلين وتحقق من العلاقتين (1)، (2)

الحل

يمكن تلخيص الحل كالتالي:

العينات والأوساط الحسابية المناظرة لها

الوساط الحسابي \bar{x} لكل عينة	جمع العينات الممكنة
٣,٥	(٥, ٢)
٢,٥	(٣, ٢)
٣	(٤, ٢)
٤	(٦, ٢)
٤	(٣, ٥)
٤,٥	(٤, ٥)
٥,٥	(٦, ٥)
٣,٥	(٤, ٣)
٤,٥	(٦, ٣)
٥	(٦, ٤)
٤٠,٠	المجموع

وتكون القيمة المتوقعة للوسط هي:

$$\mu = (\bar{x}) = \frac{40}{10} = 4 \text{ كجم}$$

$$\text{متوسط المجتمع } \mu = \frac{1}{6} (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4 \text{ كجم}$$

$$\therefore \mu = (\bar{x})$$

أي أن العلاقة (١) تكون صحيحة

ولحساب الخطأ المعياري σ (\bar{x}) نكوّن الجدول التالي:

ك س	ك س	ك	س
٦,٢٥	٢,٥	١	٢,٥
٩,٠٠	٣,٠	١	٣
٢٤,٥	٧,٠	٢	٣,٥
٣٢,٠٠	٨,٠	٢	٤
٤٠,٥	٩,٠	٢	٤,٥
٢٥,٠٠	٥,٠	١	٥
٣٠,٢٥	٥,٥	١	٥,٥
١٦٧,٥	٤٠,٠	١٠	المجموع

$$\sigma^2 (\bar{s}) = \frac{1}{n} \sum k^2 s - \left(\frac{\sum k s}{n} \right)^2$$

$$= \frac{1}{10} (167,5) - \left(\frac{40}{10} \right)^2 =$$

ومن ذلك يكون

$$\sigma^2 (\bar{s}) = ٠,٧٥$$

$$\sigma (\bar{s}) = \sqrt{٠,٧٥} = ٠,٨٦٦$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (s - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{10} [(٤-٦)^2 + (٤-٤)^2 + (٤-٣)^2 + (٤-٥)^2 + (٤-٢)^2] =$$

$$= \frac{1}{10} (٤ + ٠ + ١ + ١ + ٤) =$$

$$\therefore \sigma^2 (\bar{s}) \neq \sigma^2$$

$$\text{وأن } \sigma^2 (\bar{s}) > \sigma^2$$

$$\text{نحسب المقدار } \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{2-5}{1-5} \right) \frac{2}{2} = \left(\frac{2-n}{1-n} \right) \frac{\sigma^2}{n}$$

وهو يساوي σ^2 (\bar{s}) أي أن العلاقة (٢) تكون محققة .

(١١ - ٣) توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين

إذا كان لدينا مجتمعان مستقلان متوسط كل منهما μ_1 ، μ_2 وتباين كل منهما σ_1^2 ، σ_2^2 على الترتيب، وقد يكون المجتمع الأول، على سبيل المثال، أوزان طلاب جامعة الملك سعود أو أطواهم، والمجتمع الثاني أوزان طلاب جامعة الملك فهد للبترول والمعادن أو أطواهم. فإذا أخذنا عينة من المجتمع الأول حجمها n_1 ، وكان متوسطها \bar{s}_1 وعينة من المجتمع الثاني حجمها n_2 وكان متوسطها \bar{s}_2 فإن

$$(٣) \quad \mu_2 - \mu_1 = (\bar{s}_2 - \bar{s}_1) \mu = (\bar{s}_2 - \bar{s}_1) \mu \dots \dots \dots (٣)$$

$$(ب) \quad \text{تباين } (\bar{s}_2 - \bar{s}_1) = \sigma^2 = (\bar{s}_2 - \bar{s}_1) \sigma^2 = \frac{1}{n_1} \sigma_1^2 + \frac{1}{n_2} \sigma_2^2 \dots \dots \dots (٤)$$

بفرض أن حجم كل من المجتمعين كبير.

مثال (٢)

إذا كان متوسط أوزان طلاب جامعة الملك سعود هو ٦٢ كجم والانحراف المعياري لأوزان الطلاب هو ٤ كجم. وكان متوسط أوزان طلاب جامعة الملك فهد للبترول والمعادن هو ٦٥ كجم وانحراف معياري قدره ٥ كجم أخذت عينة من جامعة الملك سعود حجمها ٤٠ طالبا. ثم أخذت عينة من طلاب جامعة الملك فهد للبترول والمعادن حجمها ٣٠ طالبا فاحسب التوقع والخطأ المعياري للفرق بين متوسطي العينتين.

الحل

نفرض أن متوسط العينة الأولى \bar{x}_1 ومتوسط العينة الثانية \bar{x}_2 ومتوسط المجتمع الأول $\mu_1 = 62$ كجم، ومتوسط المجتمع الثاني $\mu_2 = 65$ كجم وحيث إن:

$$\mu_2 - \mu_1 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \mu = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \mu$$

$$65 - 62 = 3 \text{ كجم}$$

نفرض أن تباين المجتمع الأول $\sigma^2 = 16 = 4^2$

وتباين المجتمع الثاني $\sigma^2 = 25 = 5^2$

عندئذ يكون:

$$\frac{25}{30} + \frac{16}{40} = \frac{2\sigma^2}{n} + \frac{1\sigma^2}{n} = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \sigma^2 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \sigma^2$$

ومن ذلك نجد أن:

$$1,23 = 0,83 + 0,4 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \sigma^2$$

ويكون الخطأ المعياري

$$1,109 = \sqrt{1,23} = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \sigma$$

(١١ - ٤) توزيع المعاينة للنسبة

سندرس فيما يلي حالتين من توزيع المعاينة للنسبة.

(١١ - ٤ - ١) توزيع المعاينة للنسبة (ح)

أحيانا يكون المجتمع الإحصائي ذا صفتين فقط. فمثلاً عند دراسة ظاهرة التدخين فإن المجتمع ينقسم إلى قسمين: أشخاص يدخنون، وآخرون لا يدخنون. وكذلك عند دراسة إنتاج مصنع معين فإن وحدات الإنتاج تنقسم إلى نوعين: وحدات سليمة (صالحة للاستخدام)، وأخرى معيبة (غير صالحة للاستخدام)، . . . الخ فإذا كان حجم المجتمع محل الدراسة هون وعدد العناصر التي لها الخاصية الأولى في

هذا المجتمع هو μ فيكون عدد العناصر التي لها الخاصية الأخرى هو $n - 1$. وتكون نسبة عناصر المجموعة التي لها الخاصية الأولى من المجتمع تساوي $\frac{1}{n}$ ، وسوف نرمز لها بالرمز h ، فإذا أخذنا كل العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n ، وحسبنا لكل عينة النسبة h ، فإن التوزيع العيني لـ h يقترب من التوزيع الطبيعي ويكون له توقع $\mu(h, h)$ وتباين $\sigma^2(h, h)$ يعطى كالتالي

$$\mu(h, h) = \mu(h, h) = \frac{1}{n} = h \quad (5) \dots\dots\dots$$

$$\text{وتباين } (h, h) = \sigma^2(h, h) = \frac{h(1-h)}{n} \quad (6) \dots\dots\dots$$

مثال (٣)

إذا كانت نسبة المعيب في إنتاج إحدى الماكينات هو ٢٠٪ أخذت عينة مكونة من ٣٠ وحدة فاحسب قيمة الاحتمال أن يكون بها نسبة معيب قدرها ١٦٪.

الحل

$$\text{نسبة المعيب في المجتمع } h = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$\mu(h, h) = h = 0,2$$

$$\text{تباين } (h, h) = \sigma^2(h, h) = \frac{h(1-h)}{n} = \frac{0,2(1-0,2)}{30}$$

$$= \frac{0,16}{30} = 0,0053$$

ومن ذلك يكون الخطأ المعياري

$$\sigma(h, h) = \sqrt{0,0053} = 0,073$$

والإحصائية هي:

$$\text{تتبع التوزيع الطبيعي القياسي } Q(h, h) = \frac{h-d}{\sigma(h, h)}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\left(\frac{0,2 - 0,16}{0,073} \geq \text{ص} \right) \text{ح} = (0,16 \geq \text{ح}, \text{د})$$

ومنه نجد أن:

$$\text{ح} (\text{ص} \geq -0,55) = \text{ق} (-0,55) = 0,2912$$

أي أن الاحتمال المطلوب = 0,29 تقريباً.

(١١ - ٤ - ٢) توزيع المعاينة لفروق النسب (ح_د - ح_١)

نفرض أن لدينا مجتمعين مستقلين وكان حجم المجتمع الأول n_1 وعدد العناصر التي تتميز بالخاصية الأولى a_1 . وحجم المجتمع الثاني n_2 وعدد العناصر التي تتميز بالخاصية الأولى أيضا a_2 . فإنه يكون لدينا نسبة الخاصية الأولى للمجتمع الأول $\frac{a_1}{n_1}$. وكذلك نسبة الخاصية الأولى للمجتمع الثاني $\frac{a_2}{n_2}$. يلاحظ بأن توزيع المعاينة للفروق بين النسبتين (ح_د - ح_١) يقترب من التوزيع الطبيعي بتوقع وتباين كما هو موضح فيما يلي:

$$\mu (\text{ح}_\text{د} - \text{ح}_\text{١}) = \mu (\text{ح}_\text{د} - \text{ح}_\text{١}) = \mu_\text{د} - \mu_\text{١}$$

$$\sigma^2 (\text{ح}_\text{د} - \text{ح}_\text{١}) = \frac{\sigma_\text{د}^2}{n_\text{د}} + \frac{\sigma_\text{١}^2}{n_\text{١}}$$

حيث إن n_1 ، n_2 هما حجم كل من العينة الأولى والثانية على الترتيب.

مثال (٤)

إذا كان لدينا إنتاج آلتين، وكانت نسبة المعيب للألة الأولى هو ١٨٪ والمعيب للألة الثانية هو ١٤٪. سحبت عيتان من إنتاج الآلتين حجمهما ٤٠، ٦٠ وحدة على الترتيب. فإذا كانت نسبة المعيب للعينة الأولى هو p_1 ونسبة المعيب في العينة الثانية هو p_2 .

فاحسب قيمة الاحتمال $P(ح_1 - ح_2 \geq 0,1)$.

الحل

ولحل المثال نجد أولاً:

أن توقع نسبة المعيب للعينة الأولى هو:

$$0,18 = \mu(ح_1) = \text{مت}(ح_1)$$

وأن توقع نسبة المعيب للعينة الثانية هو:

$$0,14 = \mu(ح_2) = \text{مت}(ح_2)$$

$$\sigma^2(ح_1 - ح_2) = \sigma^2(ح_1) + \sigma^2(ح_2)$$

$$= \frac{(ح_1 - 1) \cdot ح_1}{n_1} + \frac{(ح_2 - 1) \cdot ح_2}{n_2}$$

$$= \frac{(0,14 - 1) \cdot 0,14}{60} + \frac{(0,18 - 1) \cdot 0,18}{40}$$

$$= 0,0057$$

ومن ذلك يكون الخطأ المعياري هو:

$$0,075 = \sqrt{0,0057} = \sigma(ح_1 - ح_2)$$

والاحتمال المطلوب $P(ح_1 - ح_2 \geq 0,1)$

ومن ذلك تكون الإحصائية المراد حسابها هي:

$$ص = \frac{(ح_1 - ح_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(ح_1 - ح_2)}$$

نتبع توزيعاً طبيعياً قياسيًّا ق (ص)

$$ح(ح_1 - ح_2 \geq 0,1) = ح(ص \geq \frac{0,1 - 0,04}{0,075})$$

$$= ح(ص \geq 0,8)$$

$$= ق(0,8) = 0,7881$$

أي أن:

الاحتمال المطلوب = ٠,٧٩ تقريباً

(١١ - ٥) التقدير الإحصائي

سبق لنا دراسة بعض التوزيعات الإحصائية مثل توزيع ذي الحدين، وتوزيع بواسون والتوزيع المعتدل. ولاحظنا بعض المعالم المجهولة في هذه التوزيعات مثل ح في توزيع ذي الحدين، م في توزيع بواسون، و μ ، σ في التوزيع المعتدل. فإذا كان المجتمع الإحصائي يتبع توزيعاً معيناً من هذه التوزيعات، فإننا نرغب في تقدير معالم هذا التوزيع من العينة المأخوذة من هذا المجتمع. يوجد نوعان من التقدير هما التقدير بنقطة إذا قُدِّرت معلمة المجتمع برقم واحد. والتقدير بفترة وهو أن تكون معلمة المجتمع واقعة بين رقمين. وتسمى هذه الفترة فترة الثقة، وتعتبر فترة الثقة أفضل إحصائياً من التقدير بنقطة لأنها تكون مصحوبة بمعنوية أو دقة التقدير. ولتوضيح معنى التقدير نأخذ المثال التالي على سبيل المثال.

إذا كان متوسط أوزان عينة من طلاب جامعة الملك سعود هو $\bar{x} = 65$ كجم فإن هذا يعني التقدير بنقطة لمتوسط مجتمع طلاب جامعة الملك سعود (μ). أما إذا كان متوسط أوزان طلاب الجامعة (μ) يقع بين القيمتين 65 ± 3 أي أن (μ) تقع بين الوزنين 62، 68 فإن هذا التقدير يسمى التقدير بفترة. وعادة ما تكون الفترة التي يقع داخلها المتوسط (μ) ذات احتمال مثل 0,9، 0,95، 0,99... إلخ، ونكتب الاحتمال في المثال السابق ح ($62 \geq \mu \geq 68$) = 0,9 أو 0,95... إلخ.

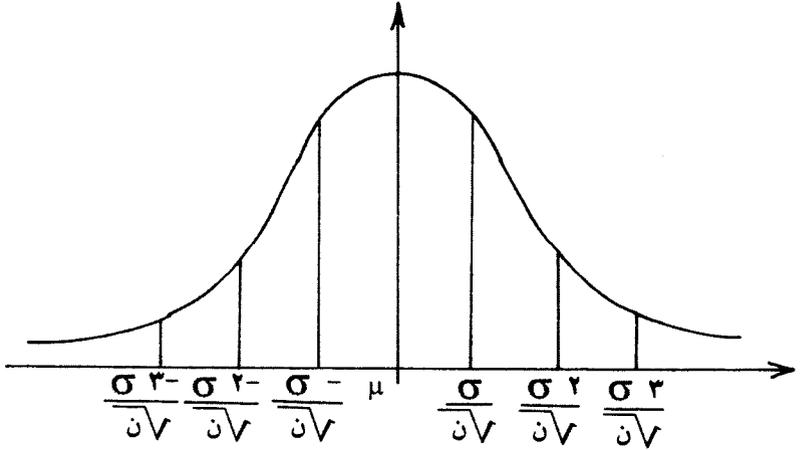
وسوف نستعرض فيما يلي تقدير فترة الثقة لكل من الأوساط والنسب والفرق بين متوسطين والفرق بين نسبتين.

(١١ - ٥ - ١) تقدير فترة الثقة للأوساط الحسابية (μ)

لقد سبق أن وجدنا أن توزيع المعاينة للأوساط يقترب من التوزيع المعتدل بتوقع $\mu = (\bar{S})$ ، وخطأ معياري يساوي $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. وأن نسبة عدد المتوسطات \bar{S} على جانبي محور التماثل المار بمتوسط التوزيع للمعاينة $\mu = (\bar{S})$ تتعين كالتالي:

$$\begin{aligned} & ٢٧, ٦٨\% \text{ تقريبا تقع في الفترة } \left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right), \\ & ٤٥, ٩٥\% \text{ تقريبا تقع في الفترة } \left(\mu - ٢ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \mu + ٢ \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right), \\ & ٧٣, ٩٩\% \text{ تقريبا تقع في الفترة } \left(\mu - ٣ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \mu + ٣ \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right), \end{aligned}$$

كما هو موضح بالرسم في الشكل التالي:



شكل (١١ - ١): نسب الإحتمالات حول محور التماثل تو

والنقطتان اللتان تبعدان عن μ بمقدار ٢ خطأ معياري تكون $\mu - ٢ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \mu + ٢ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. ولذلك فإن الفترة $\left(\mu - ٢ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \mu + ٢ \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$ تحتوي على ٩٥% من الأوساط الحسابية \bar{S} . وعندما يكون الوسط μ غير معلوم فإننا نستخدم الفترة التالية $\left(\bar{S} - ٢ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{S} + ٢ \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$ كتقدير بفترة لمعلمة

المجتمع (μ) بدرجة ثقة ٩٥٪ بأن يقع الوسط (μ) داخل هذه الفترة ويكتب احتمال التقدير بفترة الثقة عند احتمال يساوي ٠,٩٥ كالتالي:

$$ح (س - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + س) = ٠,٩٥$$

ويكتب تقدير حدود فترة الثقة بصفة عامة كالأوساط مثلاً كالتالي:

$$\bar{س} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث احتمال التقدير بفترة في هذه الحالة أكبر أو يساوي ١ - أ ويوضح كالتالي:

$$ح (س - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + س) = ١ - أ$$

وتكون درجة الثقة مساوية ١٠٠ (١ - أ)٪ لمتوسط المجتمع تو واقع داخل هذه الفترة. وتكون أ عبارة عن قيم موجبة صغيرة مثل ٠,٠١، ٠,٠٥، ... وهكذا وتسمى أ بمستوى المعنوية لفترة الثقة. والقيم ص هي قيم معيارية تحدد من الجداول الإحصائية للتوزيع المعتدل المعياري (القياسي) لكل قيمة من قيم أ ويكتب تقدير فترة الثقة للأوساط المعاينة بصفة عامة كالتالي:

$$\bar{س} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وذلك عندما يكون الانحراف المعياري للمجتمع (σ) معلوم ونوضح طريقة الحساب بالمثال التالي.

مثال (٥)

إذا كان متوسط طول عينة مكونة من ٤٠٠ ورقة من نبات الغار هو ١٤٢ ملم. وكان معلومًا أن الانحراف المعياري لأوراق الغار هو ١٦ ملم فأوجد ٩٥٪، ٩٩٪ حدود ثقة لمتوسط طول أوراق نبات الغار.

الحل

يمكن حساب ٩٥٪ حدود ثقة لمتوسط أطوال أوراق نبات الغار كالتالي:
حيث أن $\bar{x} = 142$ ملم ، $n = 400$ ورقة ، $\sigma = 16$ ملم ، $\alpha = 0,05$ ،
ص...٢٥ = ١,٩٦ إذا.

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{n}{\alpha}}} \\ = 142 \pm \frac{16}{\sqrt{400}} \\ = 142 \pm 0,8$$

أي أن

تقدير الحد الأعلى = ١٤٣,٥٧ ملم
تقدير الحد الأدنى = ١٤٠,٤٣ ملم

ولإيجاد ٩٩٪ حدود ثقة لمتوسط طول أوراق نبات الغار نكتب ما يلي

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{n}{\alpha}}} \\ = 142 \pm \frac{16}{\sqrt{400}} \\ = 142 \pm 0,8$$

أي أن

تقدير الحد الأعلى = ١٤٤,٠٦ ملم
تقدير الحد الأدنى = ١٣٩,٩٤ ملم

(١١ - ٥ - ٢) تقدير فترة الثقة للنسبة ح

سبق أن ذكرنا أن توزيع المعاينة للنسب يقترب من التوزيع المعتدل بتوقع $\mu (ح) =$ ح والخطأ المعياري $\sigma (ح)$ يكون أقل من الانحراف المعياري للمجتمع σ ، وبذلك تكون تقدير فترة الثقة للنسبة ح عند مستوى معنوية أ بدرجة ثقة قدرها ١٠٠(١ - أ)٪ تعطى كالتالي:

تقدير فترة الثقة للنسبة ح = $ح \pm ص \frac{١}{٢} \sigma (ح)$

$$\sigma (ح) = \frac{ح(١-ح)}{ن} \sqrt{}$$

∴ تقدير فترة الثقة للنسبة ح هو:

$$ح \pm ص \frac{١}{٢} \sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}}$$

$$ح - ص \frac{١}{٢} \sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}} \leq ح \leq ح + ص \frac{١}{٢} \sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}}$$

ونوضح طريقة حساب تقدير فترة الثقة للنسب بالمثال التالي.

مثال (٦)

في دراسة بالعينة لأعداد المدخنين في إحدى الجامعات . . أخذت عينة مكونة من ١٠٠ طالب، وجد أن ١٨٪ منهم يدخنون.

احسب تقدير حدود الثقة لنسبة المدخنين من طلاب الجامعة عند درجة ثقة تساوي ٩٥٪، ٩٩٪.

الحل

حساب ٩٥٪ حدود ثقة لنسبة المدخنين من طلاب الجامعة نجد أن

$$ح = ٠,١٨ ، ص = ١,٩٦ ، ن = ١٠٠ طالب$$

ومن ذلك نكتب

$$ح, ١,٩٦ \pm \frac{ح(ح-١)}{ن} \sqrt{\frac{٠,٨٢ \times ٠,١٨}{١٠٠}}$$

$$\frac{٠,٨٢ \times ٠,١٨}{١٠٠} \sqrt{١,٩٦ \pm ٠,١٨} =$$

$$٠,٠٣٨ \times ١,٩٦ \pm ٠,١٨ =$$

$$٠,٠٧ \pm ٠,١٨ =$$

ومن ذلك يكون

تقدير الحد الأعلى = ٠,٢٥ أي ٢٥٪ من الطلاب

تقدير الحد الأدنى = ٠,١١ أي ١١٪ من الطلاب

ولحساب ٩٩٪ حدوداً لنسبة المدخنين من طلاب الجامعة حيث

ص... = ٢,٥٨ تكون

$$ح, ٢,٥٨ \pm \frac{ح(ح-١)}{ن} \sqrt{\frac{٠,٨٢ \times ٠,١٨}{١٠٠}}$$

$$\frac{٠,٨٢ \times ٠,١٨}{١٠٠} \sqrt{٢,٥٨ \pm ٠,١٨} =$$

$$٠,٠٣٨ \times ٢,٥٨ \pm ٠,١٨ =$$

$$٠,٠٩٨ \pm ٠,١٨ =$$

أي أن

تقدير الحد الأعلى = ٠,٠٩٨ + ٠,١٨ = ٠,٢٧٨ أي ٢٧,٨٪ من الطلاب

تقدير الحد الأدنى = ٠,٠٩٨ - ٠,١٨ = ٠,٠٨٢ أي ٨,٢٪ من الطلاب

(١١ - ٥ - ٣): تقدير فترة الثقة بين متوسطين ($\mu_1 - \mu_2$)

سبق أن تكلمنا عن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين ووجدنا أنه يقترب من التوزيع المعتدل، وأن التوقع $\mu = (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)$ ، وأن الخطأ المعياري له

$$\sigma \sqrt{(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)^2} = \sigma \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

وبذلك يمكن تقدير حدود الثقة للفرق بين متوسطين عند مستوى معنوية أ بدرجة ثقة ١٠٠ (١ - أ)٪ كالتالي:

$$(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \pm \frac{ص}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي.

مثال (٧)

لدراسة إنتاجية الأرض للقمح في المناطق المختلفة بالمملكة. أخذنا منطقتين مختلفتين فوجدنا أن متوسط إنتاج الفدان الواحد من القمح هو ١٤٠٠ صاع للمنطقة الأولى لعينة مكونة من ١٥٠ فداناً. وأن متوسط إنتاج الفدان من القمح هو ١٢٠٠ صاع للمنطقة الثانية لعينة مكونة من ١٠٠ فدان بانحراف معياري قدره ٩٠ صاعاً للمنطقة الأولى، وانحراف معياري قدره ٥٠ صاعاً للمنطقة الثانية.

احسب ٩٥٪ حدود ثقة للفرق بين متوسطي إنتاج القمح للمنطقتين.

الحل

لحساب ٩٥٪ حدود ثقة للفرق بين متوسطي الإنتاج من القمح تعطى كالتالي

$$\text{حدود الثقة} = (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) \pm 1,96 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

حيث إن

$$\bar{س}_1 = 1400 \text{ صاع} , \bar{س}_2 = 1200 \text{ صاع}$$

$$\sigma_1 = 90 \text{ صاعا} , \sigma_2 = 50 \text{ صاعا}$$

$$n_1 = 150 \text{ فدان} , n_2 = 100 \text{ فدان}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\text{حدود الثقة} = (1200 - 1400) \pm 1,96 \sqrt{\frac{50^2}{100} + \frac{90^2}{150}}$$

$$= 200 \pm 1,96 \sqrt{25 + 54}$$

$$= 200 \pm 1,96 \times 8,89$$

$$= 200 \pm 17,42$$

وبذلك يكون

تقدير الحد الأعلى لفرق متوسطي الإنتاج = 217,42 صاعا

تقدير الحد الأدنى لفرق متوسطي الإنتاج = 182,58 صاعا

(١١ - ٥ - ٤): تقدير فترة الثقة للفرق بين نسبتين ($ح_1 - ح_2$)

سبق أن علمنا أن توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين يقترب من التوزيع المعتدل

بمتوسط ($ح_1 - ح_2$) وخطأ معياري يساوي

$$\sigma_{(ح_1 - ح_2)} = \sqrt{\frac{ح_1(1-ح_1)}{n_1} + \frac{ح_2(1-ح_2)}{n_2}}$$

وبذلك يمكن تقدير فترة الثقة للفرق بين نسبتين ($ح_1 - ح_2$) عند مستوى معنوية أ

وبدرجة ثقة قدرها ١٠٠(١ - أ)٪ كالتالي:

$$\text{فترة الثقة} = (C_1 - C_2) \pm \sqrt{\frac{C_1(C_1-1)}{n_1} + \frac{C_2(C_2-1)}{n_2}} \sqrt{ص \frac{1}{2}}$$

ويمكن توضيح طريقة الحساب لهذه الفترة بالمثال التالي .

مثال (٨)

في دراسة لمعرفة الفرق بين نسبتين لوجود عقار «البنادول» في الصفات التي تعطى في مستشفين في منطقتين مختلفتين بالمملكة وجد في عينة مكونة من ٤٠٠ وصفة للمستشفى الأول ٢٠٠ وصفة تحتوى على عقار «البنادول» . كما وجد في عينة مكونة من ٥٠٠ وصفة للمستشفى الثاني ١٠٠ وصفة تحتوي على عقار «البنادول» .

احسب ٩٩٪ حدود الثقة للفرق بين نسبي «البنادول» في صفات كل من المستشفين .

الحل

لحساب ٩٩٪ حدود الثقة للفرق بين نسبي «البنادول» كالتالي :

$$\text{حدود الثقة} = (C_1 - C_2) \pm \sqrt{\frac{C_1(C_1-1)}{n_1} + \frac{C_2(C_2-1)}{n_2}} \sqrt{ص \frac{1}{2}} = 2,58 \pm$$

حيث إن

$$C_1 = \frac{200}{400} = 0,5 \quad , \quad n_1 = 400$$

$$C_2 = \frac{100}{500} = 0,2 \quad , \quad n_2 = 500$$

$$\therefore \text{حدود الثقة} = (0,2 - 0,5) \pm \sqrt{\frac{(0,2-1)0,2}{500} + \frac{(0,5-1)0,5}{400}} \sqrt{ص \frac{1}{2}} = 2,58 \pm$$

$$= 0,0003 + 0,0006 \sqrt{2,58 \pm 0,3} =$$

$$= 0,03 \times 2,58 \pm 0,3 =$$

$$= 0,077 \pm 0,3 =$$

وبذلك نجد أن

تقدير الحد الأعلى للفرق بين النسبتين = ٣٧٧, ٠ أي ٧, ٣٧٪

تقدير الحد الأدنى للفرق بين النسبتين = ٢٢٣, ٠ أي ٣, ٢٢٪

(١١ - ٦) اختبارات الفروض

بعد أن أوضحنا توزيع المعاينة وتقدير حدود الثقة للأوساط والنسبة والفرق بين الأوساط والفرق بين النسب فقد حان الوقت لدراسة موضوع اختبارات الفروض الذي يعتبر الموضوع الأساسي الثاني في الإحصاء.

وتعتبر اختبارات الفروض محاولة إلى الوصول لقرار معين سواء كان بالرفض أو القبول لغرض معين متعلق بإحدى معالم المجتمع مثل النسبة ح في حالة ما إذا كان المجتمع يتبع توزيع ذي الحدين أولاً، σ إذا ما كان المجتمع يتبع التوزيع المعتدل. ويمكن مقارنة القيمة المفروضة لمعلمة المجتمع بالقيمة المقدرة لهذه المعلمة من العينة، فإذا ما كانت الفروق صغيرة (مقارنة بقيم القراءات) فإنها تعزى إلى الصدفة وتسمى فروق غير معنوية، وإذا ما كانت الفروق كبيرة (مقارنة بقيم القراءات) فإنه يمكن أن تسمى فروقاً حقيقية أو معنوية. وبذلك يمكن تسمية اختبارات الفروض بالاختبارات المعنوية. فعلى سبيل المثال إذا أخذنا عينة مكونة من ١٦ طالباً من طلاب جامعة الملك سعود، وحسبنا متوسط الوزن للعينة \bar{x} ، وكانت قيمة \bar{x} تساوي ٦٥ كجم وإذا افترض الباحث أن متوسط الوزن لمجتمع الطلاب في الجامعة تويساوي ٦٨ كجم، وأن الانحراف المعياري نحر لوزن مجتمع الطلاب معروف ويساوي ٦ كجم. والمطلوب معرفة صحة اختبار الفرض بأن $\mu = ٦٨$ أو لا، وسوف نرمز له فر، ويسمى الفرضية الأولية أو فرض العدم. حيث نفترض عدم وجود فرق حقيقي بين متوسط المجتمع الحقيقي والقيمة المفروضة وأن الفروق المشاهدة في العينة إنما تعزى إلى الصدفة. ولاختبار ذلك نكوّن إحصائية يكون توزيعها معروفاً حتى نتمكن من اتخاذ قرار بشأن الفرض فر من حيث القبول أو الرفض. والإحصائية التالية

$$ص = \frac{\bar{x} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{n}\right)} \quad (٨)$$

بالنسبة لأوزان عينة من طلاب الجامعة التي سبق ذكرها. نعلم مما سبق أن هذه الإحصائية تتبع التوزيع المعتدل القياسي، ويمكن أن نقسم مجال تغير هذه الإحصائية (ص) السابقة إلى منطقتين، المنطقة الأولى تسمى منطقة القبول وهي التي يكون فيها مقدار احتمال حدوث الإحصائية (ص) كبيراً عندما يكون اختبار الفرض (فر) صحيحاً، والمنطقة الثانية تسمى منطقة الرفض للفرض فر، وذلك عندما يكون احتمال حدوث الإحصائية (ص) قليلاً أو نادر الحدوث عندما يكون الفرض فر صحيحاً وأي فرض آخر يختلف عن فر يسمى الفرض البديل، ويرمز له بالرمز فر. وفي حالة أوزان طلاب الجامعة يمكن أن يكون الفرض البديل (فر) أحد الفروض التالية

$$\mu \neq \mu_0 \quad \text{أو} \quad \mu > \mu_0 \quad \text{أو} \quad \mu < \mu_0.$$

(١١ - ٦ - ١): الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

ينتج عن أي قرار إحصائي نوعان من الخطأ. فإذا رفضنا الفرضية الأولية أو فرض العدم (فر). وكان صحيحاً نكون قد ارتكبنا خطأ من النوع الأول باحتمال قدره أ وأحياناً تسمى أ مستوى المعنوية وتأخذ قيمة صغيرة مثل ٠,٠١ أو ٠,٠٥ أو ٠,١ وبناء على قيمة أ وتوزيع الإحصائية ص يمكن أن نحدد منطقتي الرفض والقبول لفرض العدم (فر). أما الخطأ من النوع الثاني فهو أن نقبل فرض العدم (فر) عندما يكون غير صحيح، ونرمز لهذا النوع من الخطأ بالرمز ب.

يمكن توضيح منطقتي الرفض والقبول لفرض العدم (فر) حسب نوع الفرض البديل (فر) ويمكن توضيح ذلك باستخدام المتوسط (تو) كالتالي:

أ - الفرض البديل بطرفين

عندما يكون فرض العدم فر. والفرض البديل فر. على الصورة التالية

$$\text{فر: } \mu = \mu_0$$

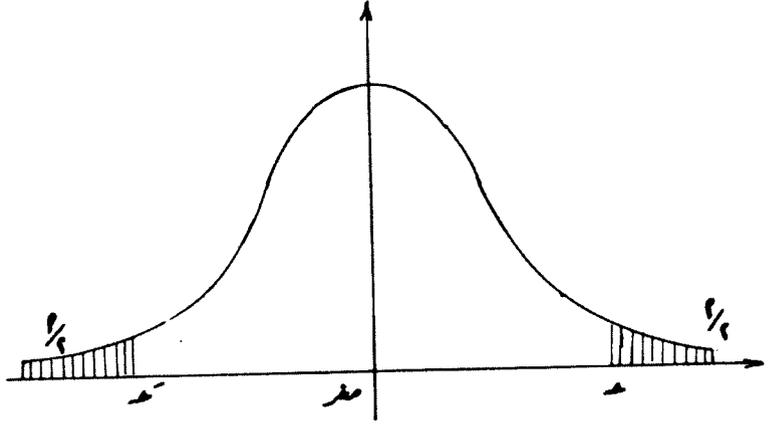
$$\text{فر: } \mu \neq \mu_0$$

وفي مثال أوزان الطلاب يكون

$$\text{فر}_1 : \mu = 68 ,$$

$$\text{فر}_2 : \mu \neq 68$$

فإنه يكون نصف الخطأ من النوع الأول على طرفي التوزيع للإحصائية ص كما هو موضح بالجزء المظلل في الرسم التالي



شكل (١١ - ٢): منطقة الرفض لغرض العدم من الطرفين

ويكون الاحتمال H (ص \geq ج - ج) = ح (ص < ج) = $\frac{1}{4}$

ب - الفرض البديل ذو الطرف الأعلى

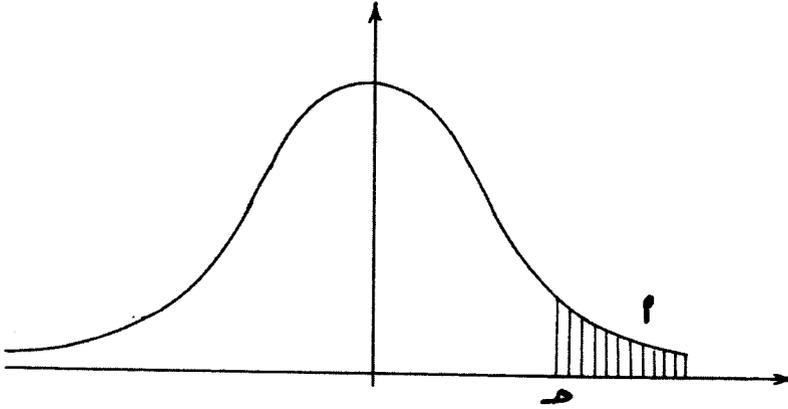
وهو عندما يكون فر_1 ، فر_2 على الصورة التالية :

$$\text{فر}_1 : \mu = \mu_0 , \text{فر}_2 : \mu < \mu_0$$

وفي مثال أوزان الطلاب

$$\text{فر}_1 : \mu = 68 , \text{فر}_2 : \mu < 68$$

فإن الخطأ من النوع الأول أ يكون على الطرف الأعلى لتوزيع الإحصائية ص كما هو موضح بالجزء المظلل في الرسم التالي



شكل (١١ - ٣): منطقة الرفض لفرض العدم من الطرف الأيمن

ويكون الاحتمال α (ص < ج) = أ

ج- الفرض البديل بالطرف الأدنى

وهو عندما يكون فر، ، فر على الصورة التالية:

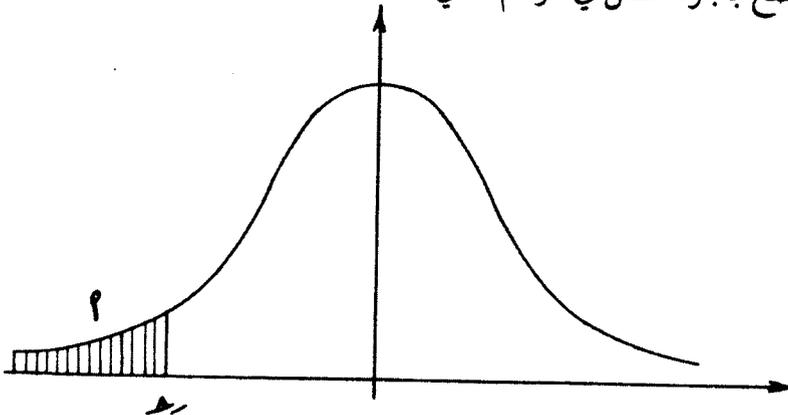
فر: $\mu = \mu_0$ ، فر: $\mu > \mu_0$

وفي مثال أوزان الطلاب يكون

فر: $\mu = 68$ ، فر: $\mu > 68$

ويكون الخطأ من النوع الأول أ عند الطرف الأدنى لتوزيع الإحصائية ص كما

هو موضح بالجزء المظلل في الرسم التالي



شكل (١١ - ٤): منطقة الرفض لفرض العدم من الطرف الأيسر

ويكون الاحتمال ح (ص > -ج) = أ

والقيم ج ، -ج تسمى الحدود الحرجة التي تفصل بين منطقتي الرفض والقبول لفرض العدم فر. عندما يكون صحيحًا. وعندما $أ = ٠,٠٥$ فإن القيم الحرجة للإحصائية ص عندما يكون الفرض البديل ذا طرفين تكون ج = $١,٩٦$ ، -ج = $-١,٩٦$ وعندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد أعلى أو أدنى فإن قيمة ج = $١,٦٤٥$ أو -ج = $-١,٦٤٥$ وحيث إن الإحصائية (٨) تتبع التوزيع الطبيعي القياسي، وتقع قيم ص المحسوبة من (٨) خارج منطقة القبول أي خارج الحدود $١,٩٦$ ، $-١,٩٦$. عندما يكون الفرض البديل فر. من طرفين فإننا نرفض فر. عند مستوى معنوية $٠,٠٥$ أو ٥% أي أنه يكون هناك ٥ فرص في كل ١٠٠ فرصة، إننا سوف نرفض الفرض فر. عندما يكون صحيحًا. وإننا سنكون واثقين بنسبة ٩٥% أننا سنتخذ القرار الصحيح. وتسمى النسبة ٩٥% بدرجة الثقة في اتخاذ القرار الصحيح. وعندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد هو الطرف الأعلى وتقع قيم ص المحسوبة من (٨) خارج منطقة القبول أي ص $< ١,٦٤٥$ فإننا نرفض فر. بمستوى معنوية قدره $٠,٠٥$ وعندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد هو الطرف الأدنى وتقع قيم ص المحسوبة من (٨) خارج منطقة القبول أي أن ص $> ١,٦٤٥$ فإننا نرفض فر. بمستوى معنوية قدره $٠,٠٥$. وبالمثل عندما تكون $أ = ٠,٠١$ من طرفين أو من طرف واحد، والجداول التالي يبين قيم ص الحرجة لبعض قيم (أ) أي بعض مستويات المعنوية الأخرى، ويمكن الحصول عليها من الجداول الإحصائية للتوزيع الطبيعي القياسي في نهاية الكتاب [جدول رقم (٢)].

المستويات المعنوية وقيم ص الحرجة للفرض البديل من طرف واحد وطرفين

مستوى المعنوية أ	٠,١	٠,٠٥	٠,٠١	٠,٠٠٥	٠,٠٠٢
قيم ص الحرجة للفرض البديل من طرف واحد	$١,٢٨ \pm$	$١,٦٤٥ \pm$	$٢,٣٣ \pm$	$٢,٥٨ \pm$	$٢,٨٨ \pm$
قيم ص الحرجة للفرض البديل من طرفين	$١,٦٤٥ \pm$	$١,٩٦ \pm$	$٢,٥٨ \pm$	$٢,٨١ \pm$	$٣,٠٨ \pm$

ولاختبار الفرض فر: $\mu = 68$ لمتوسط أوزان طلاب جامعة الملك سعود ضد الفرض البديل فر: $\mu \neq 68$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0,05$ ، $\alpha = 0,01$ فإننا نحسب الإحصائية ص = $\frac{\bar{x} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{n}\right)}$ كالتالي:

$$1,5 = \frac{6}{\sqrt{16}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (\bar{x}) \sigma \quad , \quad 68 = \mu \quad , \quad 65 = \bar{x}$$

$$2- = \frac{3-}{1,5} = \frac{68 - 65}{1,5} = \text{ص}$$

إذا كانت منطقة الرفض للفرض فر عند مستوى معنوية $0,05$ خارج حدود $\pm 1,96$ ، وحيث إن قيمة ص المحسوبة = $2-$ تقع في منطقة الرفض فإننا نرفض فر. عند مستوى معنوية $0,05$ أو درجة ثقة قدرها 95% وبالتالي يكون قرار الرفض صحيح .

وإذا كانت منطقة الرفض ل فر عند مستوى معنوية $0,01$ خارج حدود $\pm 2,58$ ، حيث إن القيمة ص المحسوبة = $2-$ تقع داخل منطقة القبول للفرض فر. أي أننا لا نستطيع رفض فر عند مستوى معنوية $0,01$ ، وبعبارة أخرى يمكن القول إن قرار عدم الرفض صحيح بدرجة ثقة قدرها 99% .

وعندما تقع قيمة ص المحسوبة بين حدي الرفض لمستوى معنوية $0,05$ ، $0,01$ يقال لهذه القيمة إنها محتملة المعنوية، وعندما تقع قيمة ص المحسوبة خارج حدي الرفض لمستوى المعنوية $0,05$ ، $0,01$ ، يقال لهذه القيمة إنها مرتفعة المعنوية .

وسوف نوضح فيما يلي اختبارات الفروض للإحصائية ص عندما تمثل الأوساط أو النسب أو الفروق بين الأوساط أو الفروق بين النسب وذلك عندما يكون تباين المجتمعات معلوما .

(١١ - ٦ - ٢) اختبارات الفروض للأوساط

عندما يكون تباين المجتمع (σ^2) معلوماً فإن الإحصائية $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ تقترب من التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط = صفر وانحراف معياري = ١ ونرمز لهذه القيم بالرمز $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ص حيث ص

ونبني اختبار الفروض H_0 ، H_1 كالتالي :

فر: $\mu = \mu_0$ ، فر: $\mu \neq \mu_0$ عندما يكون الفرض البديل ذا طرفين
فر: $\mu = \mu_0$ ، فر: $\mu \leq \mu_0$ عندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد

ونختار مستوى المعنوية للاختبار (α) ونختبر ما إذا كانت قيمة الإحصائية ص المحسوبة واقعة داخل منطقة الرفض أو خارجها فإنه يمكن أن نقرر رفضها أو عدم رفضها، ونوضح ذلك بالمثال التالي .

مثال (٩)

أخذت عينة مكونة من ٣٦ عجلًا من مزرعة لتسمين الماشية فوجد أن متوسط الوزن للعينة $\bar{X} = ١٩٠$ كجم .
اختبر الفرض القائل: إن متوسط العجول بالمزرعة $\mu = ٢٠٠$ كجم، إذا علم أن الانحراف المعياري لأوزان العجول بالمزرعة يساوي ١٨ كجم .

الحل

ولحل المثال نكون فرض العدم (H_0) والفرض البديل (H_1) على الصورة التالية
فر: $\mu = ٢٠٠$ كجم ، فر: $\mu \neq ٢٠٠$ كجم

أي أن الفرض البديل ذو طرفين وتكون الحدود الحرجة للاختبار عند مستوى المعنوية ٠,٠١ ، ٠,٠٥ هي (١,٩٦ ، -١,٩٦) ، (٢,٥٨ ، -٢,٥٨) على الترتيب .

∴ $\bar{X} = 190$ كجم، $\mu = 200$ كجم، $n = 36$ عجلًا

$$\frac{10 - \bar{X}}{\frac{18}{\sqrt{6}}} = \frac{200 - 190}{\frac{18}{\sqrt{36}}} = \frac{\mu - \bar{X}}{\sigma} = \text{ص} \quad \therefore$$

$$3,33 - = \frac{10 - \bar{X}}{\frac{18}{\sqrt{6}}} =$$

ومما سبق نلاحظ أن قيمة ص المحسوبة = $3,33$ واقعة خارج حدود القيم الحرجة لكل من مستويي المعنوية $0,05$ ، $0,01$ أي أننا نرفض الفرض فر. عند مستوى المعنوية $0,05$ ، $0,01$ أي أن قيمة ص = $3,33$ عالية المعنوية.

(١١ - ٦ - ٣) اختبارات الفروض للنسبة

الإحصائية ص = $\frac{C - C_0}{\sigma(C)}$ تقترب من التوزيع الطبيعي القياسي وبذلك يمكن أن نكون اختبار الفروض لكل من فر.، فر. كالتالي

فر. : $C = C_0$ ،

عندما يكون الفرض البديل ذا طرفين، فر. : $C \neq C_0$ ،

فر. : $C = C_0$ ،

عندما يكون الفرض البديل ذا طرف واحد، فر. : $C \geq C_0$ ،

ونختار مستوى المعنوية α ونختبر الفرض. إذا كانت قيمة الإحصائية المحسوبة ص واقعة داخل منطقة رفض فر. أو خارجها، ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي.

مثال (١٠)

إذا أخذت عينة مكونة من ٢٠٠ وصفة طبية بإحدى المستشفيات وجد منها ٨٠ وصفة تحتوي على عقار «البنادول». فاختبر الفرض القائل: إن نسبة الوصفات التي بها عقار «البنادول» هي ٥٠٪. وذلك باستخدام $0,01$ مستوى معنوية.

الحل

نكوّن أولاً اختبار الفروض فر، فر كما يلي:

$$\text{فر: } ح = ٠,٥ \quad \text{فر: } ح \neq ٠,٥$$

أي أن الفرض البديل بطرفين، فتكون الإحصائية ص كالتالي

$$\text{ص} = \frac{ح - ح_0}{\sigma(ح)}$$

$$\text{حيث } \sigma(ح) = \sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}}$$

أي أن

$$\text{ح}_0 = ٠,٥ \quad \text{ح}_1 = \frac{٨٠}{٢٠٠} = ٠,٤$$

ومن ذلك نجد أن

$$\text{ص} = \frac{٠,١ - ٠,٥}{\frac{\sqrt{٠,٢٥}}{٢٠٠}} = \frac{٠,٥ - ٠,٤}{\frac{\sqrt{(٠,٥-١)٠,٥}}{٢٠٠}}$$

$$= \frac{٠,١ - ٠,٥}{٠,٠٣٥} = -٢٨,٦$$

منطقة الرفض للفرض عند مستوى معنوية ٠,٠١ أي خارج الحدود الحرجة

٢,٥٨ - ، ٢,٥٨ وقيمة ص المحسوبة = -٢٨,٦ واقعة في منطقة رفض فر.

مما سبق نرفض الفرض القائل إن نسبة الوصفات الطبية التي بها عقار «البنادول»

هي ٥٠٪ وذلك عند مستوى معنوية ٠,٠١ .

(١١ - ٦ - ٤) اختبارات الفروض بين الأوساط

سبق أن أوضحنا أن توزيع المعاينة للفروض بين الأوساط (س_١ - س_٢) يقترب

من التوزيع المعتدل بتوقع $\mu = (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \mu$ ، وخطأ معياري

$$\sigma = (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$
 وبذلك تكون الاحصائية

ص = $\frac{(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \sigma}$ لها توزيع معتدل قياسي بمتوسط = صفر
 وتباين = ١ وإننا نرغب في تكوين اختبار الفروض فر. ، فر عند مستوى معنوية أ كالتالي

الفرض البديل ذو طرفين
 فر: $\mu_1 = \mu_2$ ، $\mu_1 \neq \mu_2$
 الفرض البديل ذو طرف واحد
 فر: $\mu_1 = \mu_2$ ، $\mu_1 \geq \mu_2$
 وباعتبار صحة الفرض فر. فإن القيمة $\mu_1 - \mu_2 = 0$ صفر أي أن العينتين اللتين متوسطهما
 \bar{s}_1 ، \bar{s}_2 مسحوتان من مجتمعتين لهما نفس الوسط الحسابي، ويمكن كتابة
 الإحصائية ص السابقة كالتالي:

$$ص = \frac{\bar{s}_1 - \bar{s}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وبذلك يمكن اختبار فرض العدم (فر.) ضد الفرض البديل (فر.) ، وذلك عند مستوى
 معنوية مناسب ولتوضيح كيفية ذلك ندرس حل المثال التالي .

مثال (١١)

أعطي اختبار لفصلين يتكون الفصل الأول من ٥٠ طالباً ويتكون الفصل الثاني
 من ٦٠ طالباً، وكان متوسط الدرجات للفصل الأول ٦٤ درجة بانحراف معياري قدره
 ٦ درجات . بينما كان متوسط الدرجات للفصل الثاني ٦٦ درجة بانحراف معياري قدره
 ٥ درجات . اختبر الفرض القائل: إنه لا يوجد اختلاف معنوي في أداء الفصلين،
 وذلك عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

الحل

نكوّن صيغة الفروض لـ فر_١ ، فر_٢ كالتالي :

فر_١ : $\mu_1 = \mu_2$ ،

فر_٢ : $\mu_1 \neq \mu_2$ الفرض البديل ذو طرفين

وباعتبار صحة الفرض فر_١ فإن الإحصائية ص تعطى كالتالي :

$$ص = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

حيث

$\bar{س}_1 = ٦٤$ درجة ، $\bar{س}_2 = ٦٦$ درجة

$\sigma_1 = ٦$ درجات ، $\sigma_2 = ٥$ درجات

$n_1 = ٥٠$ طالباً ، $n_2 = ٦٠$ طالباً

$$\therefore ص = \frac{٦٦ - ٦٤}{\sqrt{\frac{٦^2}{٦٠} + \frac{٥^2}{٥٠}}} = \frac{٢}{\sqrt{\frac{٣٦}{٦٠} + \frac{٢٥}{٥٠}}} = \frac{٢}{\sqrt{٠,٤٢ + ٠,٧٢}}$$

$$= \frac{٢}{١,٠٧} = \frac{٢}{١,١٤\sqrt{}} = ١,٨٧-$$

مما سبق نجد أن منطقة الرفض للفرض فر_١ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ خارج الحدود الحرجة ١,٩٦- ، ١,٩٦- ونجد أن قيمة ص المحسوبة هي ص = ١,٨٧- عند مستوى معنوية ٠,٠٥ أي لا نستطيع رفض فر_١ عند معنوية ٠,٠٥ أي لا يوجد فروق معنوية بين أداء الفصلين .

(١١ - ٦ - ٥) اختبار الفروض للفروق بين النسب

سبق أن تكلمنا عن توزيع المعاينة للفرق بين النسب (ح_د - ح_٣) بأنه يقترب من التوزيع المعتدل بتوقع $\mu = (ح_د - ح_٣)$ ونخطأ معياري

$$\sigma (C_1 - C_2) \text{ يساوي } \sqrt{\frac{C_1(C_1-1)}{n} + \frac{C_2(C_2-1)}{n}} \text{ فإن الإحصائية}$$

$$ص = \frac{C_1(C_1-1) - C_2(C_2-1)}{C_1(C_1-1) + C_2(C_2-1)}$$

يكون لها توزيع معتدل قياسي بمتوسط = صفر وتباين = ١.

والآن نقوم بتكوين اختبار الفروض لكل من فر_١، فر_٢ عند مستوى معنوية أ كالتالي.

فر_١: $C_1 = C_2$ ، فر_٢: $C_1 \neq C_2$ الفرض البديل ذو طرفين،

فر_١: $C_1 > C_2$ ، فر_٢: $C_1 \geq C_2$ الفرض البديل ذو طرف واحد

وباعتبار صحة الفرض فر_١ فإن القيمة $C_1 - C_2 =$ صفر أي أن العييتين اللتين نسبتها C_1 ، C_2 مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس النسبة، ويمكن كتابة الإحصائية ص السابقة كالتالي:

$$ص = \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{\frac{C_1(C_1-1)}{n} + \frac{C_2(C_2-1)}{n}}}$$

$$\text{حيث } ح = \frac{n_1 C_1 + n_2 C_2}{n_1 + n_2}$$

وبذلك يمكن اختبار فرض العدم (فر_١) ضد الفرض البديل (فر_٢) عند مستوى معنوية مناسب ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (١٢)

مجموعتان و، ب تتكون المجموعة و من ٨٠ مريضاً بمرض معين، والمجموعة ب تتكون من ١٢٠ مريضاً أعطيت المجموعة و مصلاً فشري منها ٥٠ شخصاً. ولم تعطي المجموعة ب أي مصل فشري منها ٦٠ شخصاً. اختبر الفرض القائل: إن المصل لا يساعد على الشفاء عند مستوى معنوية ٠,٠٥.

الحل

ولدراسة هذا المثال نكوّن أولاً الصيغ المناسبة للفروض فر. ، فر. كما يلي :

فر. : $H_1 = H_2$ ، فر. : $H_1 < H_2$ ، الاختبار البديل من طرف واحد ،
وباعتبار صحة الفرض فر. فإن الإحصائية ص تعطى كالتالي :

$$\text{ص} = \frac{H_2 - H_1}{\sqrt{\frac{H_2(H_2-1)}{n_2} + \frac{H_1(H_1-1)}{n_1}}} \quad \text{حيث } H = \frac{n_2 H_2 + n_1 H_1}{n_2 + n_1}$$

$$0,5 = \frac{60}{20} = H_2 \quad , \quad \frac{5}{8} = \frac{50}{80} = H_1$$

$$120 = n_2 \quad , \quad 80 = n_1$$

$$\therefore H = \frac{110}{200} = \frac{\frac{1}{2} \times 120 + \frac{5}{8} \times 80}{120 + 80} = 0,55$$

$$\text{ص} = \frac{0,125}{\sqrt{\frac{0,45 \times 0,55}{120} + \frac{0,45 \times 0,55}{80}}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{8}}{\sqrt{\frac{0,45 \times 0,55}{120} + \frac{0,45 \times 0,55}{80}}}$$

$$1,74 = \frac{0,125}{0,072} = \frac{0,125}{0,0052} \sqrt{\quad} =$$

مما سبق نجد أن منطقة الرفض للفرض فر. عند مستوى معنوية 0,05 خارج الحدود الحرجة لمنطقة القبول 1,96 - ، 1,96 ، ونجد قيمة ص المحسوبة = 1,74 داخل الحدود الحرجة السابقة أي أننا لا نستطيع رفض الفرض فر. عند مستوى معنوية 0,05 أي أن الفروق المشاهدة للنسبتين H_1 ، H_2 ترجع إلى الصدفة . أي أن المصل غير فعّال .

(١١ - ٦ - ٦) توزيع الأوساط والفروق بين الأوساط للعينات الصغيرة

افترضنا فيما سبق عند تقدير فترات الثقة واختبارات الفروض لكل من الأوساط والفروق بين الأوساط أن تباين المجتمع (σ^2) معلوم. وإذا لم يكن معلوماً فلا بد أن يكون حجم العينات كبيراً ولا يقل حجم العينة ن عن ٣٠ مفردة حتى يمكننا أن نقدر التباين (σ^2) للمجتمع من العينة وليكن (σ^2)، ونستخدم التباين المقدر (σ^2) في الإحصائية ص لكل من الأوساط والفروق بين الأوساط بدلاً من تباين تقرب توزيع الإحصائية ص من التوزيع المعتدل القياسي. وبذلك نتمكن من حساب حدود الثقة للتقدير بفترة وكذلك إجراء اختبارات الفروض كما سبق.

ولكن عندما يكون الانحراف المعياري للمجتمع (σ) غير معلوم لنا وحجم العينات صغيراً (أي أن حجم العينة ن يقل عن ٣٠ مفردة) فإن الإحصائيتين السابقتين

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma} \quad , \quad \frac{(\bar{S}_1 - \bar{S}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{(\bar{S}_1 - \bar{S}_2) \sigma}$$

لا تقرباً من التوزيع المعتدل القياسي ولا نستطيع استخدام الإحصائية ص السابقة لها. وفي هذه الحالة فإن الإحصائيات السابقة تتبع توزيعاً آخر يسمى توزيع تي. وتستخدم في هذه الحالة الإحصائية تي التي تقابل الإحصائية ص فيما سبق. وذلك في حالة بيانات العينة مأخوذة من مجتمع طبيعي.

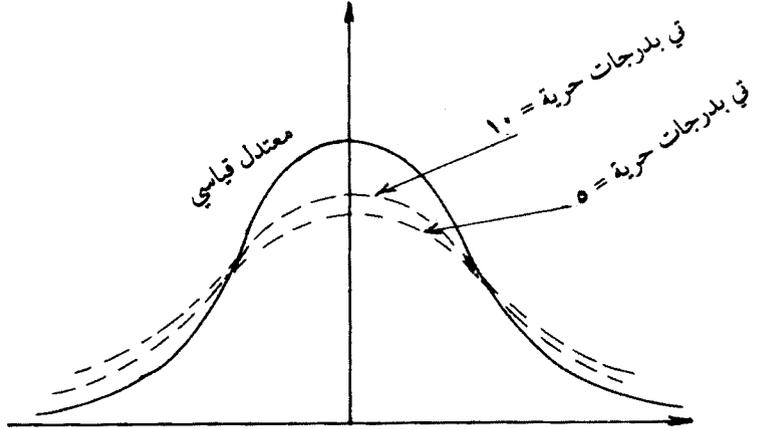
توزيع تي

تعطى دالة كثافة الاحتمال ح (تي) لتوزيع تي كالتالي:

$$ح(تي) = ك \left[1 + \frac{تي^2}{ن-2} \right]^{-\frac{ن-1}{2}}$$

ويسمى المقدار ن-٢ درجات الحرية. ولقد تبين أن هذا التوزيع لا يعتمد إلا على قيمة درجات الحرية (ن-١) بشرط أن المتغير العشوائي الأساس س يتوزع توزيعاً معتدلاً. ويقرب توزيع تي من التوزيع المعتدل القياسي كلما زادت درجات الحرية فعندما تصل كمية درجات الحرية ٣٠ درجة فينطبق توزيع تي على التوزيع الطبيعي القياسي

وتستخدم الإحصائية t في هذه الحالة بدلاً من الإحصائية F . ويعرف توزيع t أيضاً بتوزيع طالب، وهو اسم مستعار لمكتشفه جوست (Gosset) في أوائل القرن العشرين. والشكل التالي يوضح المقارنة بين منحني توزيع t في عند درجات حرية ٥، ١٠، ومنحني توزيع المعتدل القياسي.



شكل (١١ - ٥): منحني توزيع t مقارنةً بمنحني التوزيع الطبيعي

ويمكن إيجاد فترات الثقة واختبارات الفروض باستخدام الإحصائية t في لكل من الأوساط والفروق بين الأوساط كما سيتضح من الأمثلة التالية.

مثال (١٣)

إذا كان لدينا عينة مكونة من أوزان عشرة طلاب بالكجم كالتالي:

٧٩، ٦٣، ٦٥، ٧٤، ٦٩، ٧٠، ٧٣، ٦٨، ٧٦، ٦٣

(١) اختبر ما إذا كانت العينة مأخوذة من مجتمع متوسطه ٦٦ كجم.

(٢) احسب تقديراً لحدود الثقة لمتوسط المجتمع عند مستوى معنوية ٠,٠٥.

الحل

ولحل المثال نحسب أولاً الوسط الحسابي (\bar{x}) للعينة من العلاقة $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$$\bar{s} = \frac{٦٣ + ٧٦ + ٦٨ + ٧٣ + ٧٠ + ٦٩ + ٧٤ + ٦٥ + ٦٣ + ٧٩}{١٠}$$

$$\bar{s} = \frac{٧٠٠}{٧٠} = ٧٠ \text{ كجم}$$

بعد ذلك نحسب التباين للعينة (ع) كتقدير لتباين المجتمع (σ^2) ومنه نحسب الانحراف المعياري (ع) كالتالي:

$$ع^2 = \frac{1}{n-1} \sum (s_i - \bar{s})^2$$

$$\therefore ع^2 = \frac{1}{9} [(٧-٧)^2 + (٦-٧)^2 + (٢-٧)^2 + (٣-٧)^2 + (٠-٧)^2 + (١-٧)^2 + (٤-٧)^2 + (٥-٧)^2 + (٧-٧)^2 + (٩-٧)^2]$$

$$= \frac{1}{9} [٤٩ + ٣٦ + ٤ + ٩ + ٠ + ١ + ١٦ + ٢٥ + ٤٩ + ٨١]$$

$$= \frac{٢٧٠}{9} = ٣٠$$

ومنه نجد أن الانحراف المعياري للعينة هو:

$$ع = ٥,٤٨$$

$$ع_{تر} = \frac{ع}{\sqrt{n}} = \frac{٥,٤٨}{\sqrt{١٠}} = \frac{٥,٤٨}{٣,١٦} = ١,٧٣$$

نكوّن الاختبار لفرض العدم (فر٠) والفرض البديل (فر١) وليكن عند مستوى معنوية $\alpha = ٠,٠٥$ مثلاً. ثم نحسب الإحصائية تي باستخدام مشاهدات العينة والفرض فر٠ كالتالي

$$\text{فر٠: } \mu = ٦٦$$

$$\text{فر١: } \mu \neq ٦٦$$

الفرض البديل ذو طرفين

$$\therefore \text{تي} = \frac{\bar{s} - \mu}{ع_{تر}} = \frac{٦٦ - ٧٠}{١,٧٣} = \frac{٤}{١,٧٣} = ٢,٣١$$

نقارن قيمة تي المحسوبة ٢,٣١ بالقيمة الموجودة بجداول تي (جدول رقم ٣) الموجودة بآخر الكتاب أمام درجات حرية = ن - ١ = ١٠ - ١ = ٩ وتحت مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

قيمة تي من الجدول: تي (أ، ن - ١) = تي (٩، ٠,٠٥) = ٢,٢٦٢ .

مما سبق نجد أن قيمة تي = ٢,٣١ واقعة في منطقة الرفض للفرض فر. عندما يكون صحيحًا وهي خارج الحدود الحرجة لمنطقة القبول فر. وتكون كالتالي (٢,٢٦٢)، (٢,٢٦٢-).

وبذلك نرفض الفرض فر. القائل: إن العينة مأخوذة من مجتمع متوسطه ٦٦ كجم وبهذا نكون قد توصلنا إلى حل الفقرة الأولى من المثال.

ولإيجاد تقدير حدود الثقة لمتوسط المجتمع (μ) عند مستوى معنوية ٠,٠٥ نكوّن فترة الثقة كالتالي:

$$\bar{س} - تي (٩, ٠,٠٥) \frac{ع}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + تي (٩, ٠,٠٥) \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

$$١,٧٣ \times ٢,٢٦٢ + ٧٠ \geq \mu \geq ١,٧٣ \times ٢,٢٦٢ - ٧٠$$

$$٣,٩١ + ٧٠ \geq \mu \geq ٣,٩١ - ٧٠$$

$$٧٣,٩١ \geq \mu \geq ٦٦,٠٩$$

ومن ذلك نجد أن تقديري حديّ فترة الثقة هما:

الحد الأعلى للوزن = ٧٣,٩١ كجم

والحد الأدنى للوزن = ٦٦,٠٩ كجم

مثال (١٤)

- في أحد مراكز البحوث الخاصة بالزراعة، كان المطلوب اختبار متوسط إنتاج نوعين من القمح و، ي.
- فاختير لهذا الغرض ١٨ قطعة من الأرض تتساوي في المساحة والظروف المتشابهة من ناحية الخصوبة والرى والتسميد، وزرع عشر قطع بالقمح من النوع و، وزرعت ثمان القطع الباقية بالقمح من النوع ي، فكان متوسط المحصول لفدان القمح من النوع و ٩٨٠ صاعاً بانحراف معياري هو ٤٠ صاعاً ومتوسط المحصول لفدان القمح من النوع ي ٨٤٠ صاعاً بانحراف معياري هو ٣٠ صاعاً والمطلوب إيجاد ما يلي:
- (١) اختبر ما إذا كان متوسط الإنتاج للفدان لنوع القمح ويساوي متوسط إنتاج الفدان للقمح من النوع ي.
- (٢) احسب تقديراً لحدود الثقة للفرق بين متوسطي الإنتاج للقمح من النوع و والنوع ي عند مستوى معنوية ٠,٠١.

الحل

- حل الفقرة الأولى من المثال نكوّن أولاً صيغ فرض العدم فر. والفرض البديل فر، وليكن عند مستوى معنوية ٠,٠١ مثلاً، ثم نحسب الإحصائية تي باستخدام المشاهدات بالعيتين والفرض فر. كالتالي:
- فر: $\mu_1 = \mu_2$ ، فر: $\mu_1 \neq \mu_2$ (أي أن الفرض البديل بطرفين)

$$T = \frac{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$\frac{2ع(1 - n_2) + 2ع(1 - n_1)}{(2 - n_2 + n_1)} = 2ع$$

$$\begin{aligned} \text{وحيث } \bar{س}_1 &= ٩٨٠ \text{ صاع} & , & \bar{س}_٢ &= ٨٤٠ \text{ صاع} \\ \text{ن}_1 &= ١٠ \text{ قطع} & , & \text{ن}_٢ &= ٨ \text{ قطع} \\ \text{ع}_1 &= ٤٠ \text{ صاعًا} & , & \text{ع}_٢ &= ٣٠ \text{ صاعًا} \\ \text{ع} &= ٢٤ & & & \end{aligned}$$

$$\therefore ١٢٩٤,٧٥ = \frac{٩٠٠ \times ٧ + ١٦٠٠ \times ٩}{٢ - ٨ + ١٠} = ٢٤$$

$$\sqrt{١٢٩٤,٧٥} = \sqrt{٢٤} = \text{ع}$$

$$\text{ع} = ٣٦ \text{ صاعًا تقريبًا}$$

$$\therefore \text{تي} = \frac{٨٤٠ - ٩٨٠}{\frac{١}{٨} + \frac{١}{١٠} \sqrt{٣٦}} = \frac{١٤٠}{١٦,٩٢} = ٨,٢٧$$

نقارن قيمة تي المحسوبة ٨,٢٧ بالقيمة الموجودة بجداول تي أمام درجات الحرية $\text{ن}_١ + \text{ن}_٢ - ٢ = ١٠ + ٨ - ٢ = ١٦$ وتحت مستوى معنوية ٠,٠١ وتكون قيمة تي من الجداول كالتالي:

$$\text{تي} (١٦, ٠, ٠١) = ٢,٩٢$$

مما سبق نجد أن قيمة تي المحسوبة = ٨,٢٧ واقعة في منطقة رفض $F_٠$ وهي خارج الحدود الحرجة لمنطقة القبول لـ $F_٠$ وهي (٢,٩٢ - ٢,٩٢) وبذلك نرفض الفرض $F_٠$ القائل إنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطي إنتاج القمح من النوعين.

ولحل الفقرة الثانية أي لحساب تقدير حدود الثقة للفرق بين متوسطي الإنتاج

لنوعي القمح (١م - ٢م) عند مستوى معنوية الثقة كالتالي:

$$(\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) - \text{تي} (١٦, ٠, ٠١) \text{ ع} (\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) \geq (\bar{م}_١ - \bar{م}_٢)$$

$$\geq (\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) \text{ ع} (\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) + \text{تي} (١٦, ٠, ٠١)$$

$$١٦,٩٢ \times ٢,٩٢ + ١٤٠ \geq \bar{م}_١ - \bar{م}_٢ \geq ١٦,٩٢ \times ٢,٩٢ - ١٤٠$$

$$٤٩,٤١ + ١٤٠ \geq \bar{م}_١ - \bar{م}_٢ \geq ٤٩,٤١ - ١٤٠$$

$$١٨٩,٤١ \geq \bar{م}_١ - \bar{م}_٢ \geq ٩٠,٥٩$$

وبذلك يكون تقديري حديّ فترة الثقة هما:
 الحد الأعلى لفرق المتوسطين هو: ١٨٩,٤١ صاع
 الحد الأدنى لفرق المتوسطين هو: ٩٠,٠٩ صاعاً

(١١ - ٦ - ٧) اختبار الفرق بين متوسطي عييتين غير مستقلتين

استخدمنا في الاختبارات السابقة اختبار الفرق بين عييتين مستقلتين بمعنى أن مفردات العينة الأولى مستقلة عن مفردات العينة الثانية. ولكن قد يحدث في الحياة العملية أن المشاهدات تكون على شكل أزواج مرتبة (س، ص). فمثلاً إذا أخذنا عينة وحصلنا على مشاهدات لها في المرة الأولى كالتالي س_١، س_٢، ...، س_{١٠} ثم نضع هذه العينة تحت تأثير مؤثر ثم نعود مرة ثانية، ونحصل على مشاهدات لها مرة أخرى كالتالي ص_١، ص_٢، ...، ص_{١٠} وبإجراء اختبارات للمقارنة بين مجموعتي القراءتين لنفس المفردات في العينة في المرة الأولى والثانية يمكننا استنتاج تأثير المؤثر على مفردات العينة وفي هذه الحالة ندرس الفرق بين مقدارين غير مستقلين عن بعضهما وهما متوسط القراءات الأولى س_١، س_٢، ...، س_{١٠} ومتوسط القراءات الثانية ص_١، ص_٢، ...، ص_{١٠}.

ويمكن استخدام اختبارتي في هذه الحالة كما يلي:

١ - نوجد الفرق $F = S - V$ ص_١ - ص_٢ للازدواج القيم (س، ص).

٢ - نحسب الوسط الحسابي \bar{F} لهذه الفروق.

٣ - نوجد الانحراف المعياري \bar{F} لهذه الفروق.

٤ - نكوّن الاحصائية تي
$$T = \frac{\bar{F}}{E \sqrt{F}}$$

والإحصائية تي المحسوبة تخضع لاختبارتي (أ، ن - ١)، ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (١٥)

إذا كانت درجات مجموعة مكونة من ٧ طلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات

كما في الجدول:

درجات سبعة طلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
درجة الإحصاء (س)	٦٢	٨٢	٧٧	٥٧	٦٢	٩٠	٨٢
درجة الرياضيات (ص)	٥٣	٧٥	٦٥	٥٥	٦٧	٨٥	٧٩

أوجد كلاً من:

- (١) اختبر ما إذا كان هناك فروق معنوية بين متوسطي درجات الإحصاء والرياضيات .
- (٢) أوجد تقدير لحدود الثقة لمتوسط فرق الدرجات للإحصاء والرياضيات بمستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحل

لحساب المتوسط \bar{f} والانحراف المعياري لها نجع نكوّن الجدول التالي:

رقم الطالب	درجة الإحصاء (س)	درجة الرياضيات (ص)	ف = س - ص	ف - \bar{f}	(ف - \bar{f}) ^٢
١	٦٢	٥٣	٩	٤	١٦
٢	٨٤	٧٥	٩	٤	١٦
٣	٧٧	٦٥	١٢	٧	٤٩
٤	٥٧	٥٥	٢	-٣	٩
٥	٦٢	٦٧	-٥	-١٠	١٠٠
٦	٩٠	٨٥	٥	صفر	صفر
٧	٨٢	٧٩	٣	-٢	٤
المجموع	-	-	٣٥		١٩٤

$$\bar{f} = \frac{\text{مجموع}}{ن} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

$$٣٢,٣ = \frac{١٩٤}{٦} = \frac{١٩٤}{١-٧} = \frac{\text{مجم}(\bar{ف}-ف)}{١-ن} = \text{ع}^٢$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\text{ع} = ٥,٦٨٦$$

نكوّن الاختبار لفرض العدم فر. والفرض البديل فر. وليكن عند مستوى معنوية $\alpha = ٠,٠٥$ ، مثلاً. ثم نحسب الإحصائية تي من مشاهدات العينة والاختبار فر. كالتالي
فر: $\bar{ف} = \text{صفر}$ ، فر: فر: $\bar{ف} \neq \text{صفر}$ (أي أن الفرض البديل ذو طرفين)

$$\text{تي المحسوبة} = \frac{\text{ف}}{\frac{\text{ع}^٢}{\sqrt{ن}}}$$

$$\text{تي المحسوبة} = \frac{٥}{\frac{٥,٦٨٦}{\sqrt{٧}}}$$

$$= ٢,٣٢٧$$

نقارن تي المحسوبة وتساوي $٢,٣٢٧$ بالقيمة الموجودة بجداول تي أمام $١ - ن$ درجات حرية $٦ = ١ - ٧$ ومستوى معنوية $\alpha = ٠,٠٥$ فتكون تي $(٦, ٠, ٠٥) = ٢,٤٤٧$ فنجد أن تي المحسوبة وتساوي $٢,٣٢٧$ ليست واقعة في منطقة الرفض للفرض فر، وهي داخل الحدود الحرجة لمنطقة القبول لفر وهي $(٢,٤٤٧-، ٢,٤٤٧)$. أي لا نستطيع رفض فرض العدم فر، القائل: إنه لا توجد فروق معنوية بين درجات الطلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات.

لإيجاد تقدير حدود الثقة للفرق بين متوسطي درجات الإحصاء والرياضيات
ف عند مستوى معنوية $\alpha = ٠,٠٥$ نكوّن فترة الثقة كالتالي

$$\bar{F} - \text{تي} (٦,٠٠,٠٥) \frac{\bar{C}}{\sqrt{N}} \geq (\mu_1 - \mu_2) \geq \bar{F} + \text{تي} (٦,٠٠,٠٥) \frac{\bar{C}}{\sqrt{N}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$٢,١٤٩ \times ٢,٤٤٧ + ٥ \geq \mu_1 - \mu_2 \geq ٢,١٤٩ \times ٢,٤٤٧ - ٥$$

$$٥,٢٦ + ٥ \geq \mu_1 - \mu_2 \geq ٥,٢٦ - ٥$$

$$١٠,٢٦ \geq \mu_1 - \mu_2 \geq ٠,٢٦ -$$

(١١ - ٧) تمارين

١ - أخذت عينة من ٣٦ طفلاً فكان متوسط الوزن لهذه العينة ٨ كجم وكانت أوزان الأطفال تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ وانحرافاً معيارياً ١,٥ كجم. أوجد فترة الثقة للمتوسط μ عند مستوى معنوية $\alpha = ٠,٠٥$ ، $\alpha = ٠,٠١$.

٢ - لمقارنة متوسط الدخل للأسر في مدينتين مختلفتين أخذت عينة من المدينة الأولى حجمها ٥٠ أسرة فكان متوسط الدخل لها ٤٥٠٠ ريال وعينة من المدينة الثانية حجمها ٨٠ أسرة فكان متوسط الدخل لها ٥٠٠٠ ريال. فإذا علم أن المجتمعين الإحصائيين يخضعان لتوزيعين معتدلين متوسط الأول μ_1 وانحرافه المعياري ٤٠ ريالاً، ومتوسط الثاني μ_2 وانحرافه المعياري ٥٠ ريالاً.

أوجد فترة الثقة للفرق بين المتوسطين عند مستوى معنوية α إذا كانت:

$$(١) \alpha = ٠,٠٥ ، (٢) \alpha = ٠,٠١$$

٣ - إذا كانت نسبة المدخنين في إحدى المدن هي ح، أخذت عينة مكونة من ٣٠٠ من سكان هذه المدينة، فوجد من بينهم ٩٠ مدخنًا، فأوجد فترة الثقة لنسبة التدخين ح عند مستوى معنوية α إذا كانت:

$$(١) \alpha = ٠,٠٥ ، (٢) \alpha = ٠,٠١$$

٤ - عينة مكونة من ٣٠٠ شخص من البالغين و ٤٠٠ شخص من المراهقين الذين شاهدوا برنامجاً تلفزيونياً معيناً، فإذا علم أن ٨٠ من البالغين، و ٢٠٠ من المراهقين يفضلون هذا البرنامج.

فاوجد تقديراً لحدود الثقة للفرق بين نسبة كل من البالغين ونسبة كل المراهقين الذين شاهدوا هذا البرنامج، وذلك عند مستوى معنوية α كالتالي:

$$(1) \alpha = 0,05, \quad (2) \alpha = 0,01$$

٥ - أخذت عينتان من توزيعين معتدلين لهما نفس التباين، وجد أن حجم العينة الأولى $n_1 = 12$ ومتوسطها $\bar{x}_1 = 48$ وتباينها $s_1^2 = 90$ ، وحجم العينة الثانية $n_2 = 8$ ومتوسطها $\bar{x}_2 = 52$ وتباينها $s_2^2 = 120$.

اوجد تقديراً لحدود الثقة للفرق بين المتوسطين $\mu_1 - \mu_2$ عند مستوى معنوية α كالتالي:

$$(1) \alpha = 0,05, \quad (2) \alpha = 0,01$$

٦ - أخذت عينة مكونة من ٣٠٠ طالب من طلاب الجامعة، وجد من بينهم ٥٠ طالباً يستخدمون أيديهم اليسرى في الكتابة.

كّون تقديراً لحدود الثقة لنسبة الطلاب الذين يستخدمون أيديهم اليسرى في هذه الجامعة عند مستوى معنوية $\alpha = 0,05$.

٧ - أخذت عينتان حجماً $n_1 = 90$ ، $n_2 = 120$ من توزيعين وسطاهما μ_1 ، μ_2 ووجد على الترتيب أن:

$$\bar{x}_1 = 55, \quad s_1^2 = 96$$

$$\bar{x}_2 = 65, \quad s_2^2 = 84$$

اختبر الفروض التالية عند مستوى معنوية $\alpha = 0,05$

$$(1) \text{فر: } \mu_1 = 60, \quad \text{فر: } \mu_1 > 60$$

$$(2) \text{فر: } \mu_1 = 60, \quad \text{فر: } \mu_1 \neq 60$$

$$(3) \text{فر: } \mu_1 = \mu_2, \quad \text{فر: } \mu_1 \neq \mu_2$$

$$(4) \text{فر: } \mu_1 = \mu_2, \quad \text{فر: } \mu_1 > \mu_2$$

٨ - قيس الزمن الذي يستغرقه جنديان في فك قطعة من السلاح في ٣٦ حالة لكل منهما، فإذا كانت قياسات كل منهما تخضع لتوزيع طبيعي تباينه ١٤ ثانية وكان الوسط الحسابي لقياسات الجندي الأول ١٣٠ ثانية وللجندي الثاني ١٢٠ ثانية فهل توجد فروق جوهرية بين متوسطي كفاءتهما؟

٩ - مصنع للأدوية يدعي أن دواءً من إنتاجه له فاعلية بنسبة ٨٥٪ في شفاء مرض معين. أخذت عينة مكونة من ١٥٠ شخصاً مصابين بهذا المرض. أدى الدواء إلى شفاء ١٢٠ شخصاً منهم. اختبر ما إذا كان ادعاء المصنع صحيحاً؟

١٠ - متوسط العمر الإنتاجي لعينة من ١٢٠ مصباحاً كهربائياً من إنتاج أحد المصانع هو ١٥٠٠ ساعة وانحرافها ٩٦ ساعة. إذا كان متوسط العمر الإنتاجي لجميع المصابيح المنتجة من المصنع هو μ فاختر الفرض فر. = ١٦٠٠ ساعة من الفرض البديل فر. $\neq 1600$ ساعة مستخدماً مستوى المعنوية إذا كان:

$$(1) \alpha = 0,05 \quad (2) \alpha = 0,01$$

١١ - عينة من ١٢ قياساً لأقطار كرة أعطت متوسط $\bar{x} = 3,4$ ملم وانحراف معياري $\sigma = 0,05$ ملم. اوجد ما يأتي:

أ - اختبر فرض القائل إن العينة مأخوذة من مجتمع متوسطه $\mu = 4,5$ ملم.

ب - اوجد تقدير حدود الثقة لمتوسط المجتمع μ عند مستوى معنوية

$$\alpha = 0,05.$$

١٢ - اختبرت ٨ حبال من إنتاج أحد المصانع لمعرفة قوة مقاومتها للقطع فأظهرت مقاومتها مقدار ٧٥٠٠ ثقل كجم بانحراف معياري قدره ١٢٠ ثقل كجم. بينما يدعي المصنع المنتج أن قوة المقاومة للقطع لإنتاجه من الحبال هي ٧٨٠٠ ثقل كجم. هل يمكن تأييد ادعاء المصنع عند مستوى المعنوية إذا كان:

$$(1) \alpha = 0,05 \quad (2) \alpha = 0,01$$

١٣ - إذا كانت نسبة الذكاء لعينة من ١٢ طالباً في أحد المناطق متوسطها ٩٩ وحدة وانحراف معياري ٨ وحدات. بينما نسبة الذكاء لعينة من ١٤ طالباً في منطقة أخرى كان متوسطها ١٠٨ وحدات وانحراف معياري ١٢ وحدة فهل هناك اختلاف معنوي بين نسب الذكاء في المجموعتين؟ عند مستوى المعنوية:

$$(1) \alpha = 0,05 \quad (2) \alpha = 0,01$$

١٤ - إذا أخذنا عينة مكونة من ٨ أشخاص وقرأنا ضغط الدم س لكل واحد من العينة ثم أعطينا كل شخص دواءً معيناً لمدة معينة ثم أعدنا قراءة الضغط بعد الدواء ص لكل واحد في العينة فكانت النتائج كما في الجدول التالي:

قراءات الضغط لثمانية أشخاص قبل وبعد تناول دواء معين

رقم الفرد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
القراءة س	١٧٠	١٦٠	١٥٠	١٨٠	١٨٥	١٩٠	١٩٥	٢٠٠
القراءة ص	١٦٠	١٥٥	١٤٠	١٦٥	١٧٠	١٧٥	١٨٠	١٨٠

اوجد كلاً من :

- (١) اختبر الفرض القائل إن الفرق بين متوسطي القراءتين غير معنوي عند مستوى معنوية إذا كانت $\alpha = 0,05$ و $\alpha = 0,01$
- (٢) اوجد تقديراً لحدود الثقة للفرق بين متوسطي القراءتين عند مستوى معنوية إذا كانت $\alpha = 0,05$ و $\alpha = 0,01$.

- ١٥- في حالة محاكمة قضائية لشخص متهم بالغش والتزوير فأى من نوعي الخطأ في الحكم يحتمل ظهوره وأي من نوعي الخطأ أهم بالنسبة للمجتمع .
- ١٦- تبين من الامتحانات السابقة في أول فصل للدورة المكثفة في اللغة الانجليزية أن متوسط الدرجات هو ٧٥ بانحراف معياري ١٠ وقد حصل ٦٥ طالباً من خريجي إحدى المدارس الثانوية بمدينة الرياض على متوسط درجات قدره ٧٩ فهل يمكن القول: إن خريجي هذه المدرسة الثانوية أحسن مستوى في اللغة الإنجليزية من بقية الطلاب؟
- ١٧- من عينة عشوائية حجمها ١٩٦ شخصاً مأخوذة من أحد أحياء مدينة ما وجد أن عدد النساء ٤٠ فهل يمكن اختبار الفرض القائل: إن نسبة النساء في هذا الحي ٣٠,٩٥٪ باحتمال ٣,٠٠٪
- ١٨- في إحدى التجارب التي قام بها طلاب قسم الحيوان لمعرفة تأثير غذاء معين على زيادة الوزن، أخذت عينة مكونة من عشرة فئران وأعطيت الغذاء، وكانت أوزانها بعد التغذية بفترة مناسبة هي :
- ٢٦٠، ٣٢٠، ٤٨٠، ٢٨٠، ٣٤٠، ٣٠٠، ٤٦٠، ٤٢٠، ٣٠٠، ٣٦٠.

فهل نستطيع أن نحكم على أن هذه العينة مأخوذة من مجتمع متوسط الوزن فيه
٣٨٠ وذلك باعتبار أن مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ ؟

١٩- اشرح عملياً لماذا لا يمكن الجزم بأن قطعة نقدية متزنة إذا رميت ألف مرة حصلنا
على ٥٥٠ صورة؟