الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)

(٣ - ١) مقدمــــة

سبق أن استعـرضنـا طرق تنـظيم البيانات الإحصائية وتلخيصها في جداول تكرارية، وقمنا بتمثيل هذه الجداول التكرارية بيانيا. ومع أن الطرق كانت مفيدة جدا في توضيح شكل التوزيعات التكرارية للبيانات الإحصائية وطبيعتها بصفة عامة، إلا أنـه لا يمكن استخـدامهـا لتـزويدنا بمقاييس عددية محددة، للمقارنة بين أشكال التـوزيعـات المختلفـة. وقـد دعت الحاجة إلى مثل هذه المقاييس لدراسة ما يسمى مقاييس النزعة المركزية (أو المتوسطات). وهذه المقاييس عبارة عن قيم مثلى تقترب منها معـظم البيانات الإحصائية، أو تتركز حولها، أو تتوزع بالقرب منها. ولحساب هذه القيم أو المقاييس التي تعبر عن مختلف البيانات، وتساعد على المقارنة بين مدى نزعتها نحو مراكز معينة. سنتعرض بشيء من التفصيل إلى أهم هذه المقاييس، وهي الوسط الحسابي (المتوسط)، والوسيط، والمنوال، والوسط الهندسي، والوسط التوافقي بالإضافة إلى بعض مقاييس النزعة المركزية الأقل شيوعا مثل العشير والمئين. وسوف نتناول في هذا الفصـل كل مقياس على حدة موضحين طريقة حسابه وأهم مميزاته وعيوبه مع التمثيل لبعض استخداماته.

(٣ - ٢) الوسط الحسابي (المتوسط)

يعتبر الوسط الحسابي من أهم وأبسط مقاييس النزعة المركزية، لأنه يدخل في كثير من عمليات التحليل الإحصائي، مثل المقارنة بين المجموعات المختلفة وغيرها.

ويمكن تعريف الوسط الحسابي بأنه القيمة التي لو أعطيت لجميع المفردات لكان مجموعها يساوي مجموع القيم الأصلية للمفردات ويمكن حساب الوسط الحسابي بطريقتين تبعا لطبيعة البيانات المدروسة، وذلك في الحالتين التاليتين:

أ) البيانات غير المبوبة ب) البيانات المبوبة

(٣ - ٢ - ١) الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة

يعرف الوسط الحسابي في حالة البيانات غير المبوبة بأنه مجموع «مجـ» للمشاهدات مقسوما على عددها «ن» أي أنه إذا كان لدينا المشاهدات أو القراءات

$$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots\ldots ، س_ن$$

فإن الوسط الحسابي الذي سوف يرمز له بالرمز $\bar{س}$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \ldots + س_ن}{ن} = \frac{مجـ\ س}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

مثال (١)

عند دراسة الأجور اليومية لمجموعتين من العمال غير المؤهلين في مؤسستين كان الأجر اليومي بالريال السعودي كالآتي:

أجور عمال المؤسسة الأولى س:

٣٠، ٤٠، ٤٥، ٤٠، ٣٥، ٣٠، ٣٠، ٤٠

أجور عمال المؤسسة الثانية ص:

١٥، ٣٠، ٢٥، ٤٠، ٣٠، ٤٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لأجور العمال لكل مؤسسة.

لإيجاد الوسط الحسابي فإننا نستخدم العلاقة (١) السابقة لنجد أن:

$$\bar{س} = \frac{٣٠ + ٤٠ + ٤٥ + ٤٠ + ٣٥ + ٣٠ + ٣٠ + ٤٠}{٨}$$

$$= \frac{٢٩٠}{٨} = ٣٦,٢٥ \text{ ريالا}$$

$$\bar{ص} = \frac{١٥ + ٣٠ + ٢٥ + ٤٠ + ٣٠ + ٤٠}{٦}$$

$$= \frac{١٨٠}{٦} = ٣٠ \text{ ريالا}$$

نلاحظ أنه عند إضافة مقدار ثابت أو طرحه أ مثلا إلى كل قراءة من البيانات المعطاة، فإن قيمة الوسط الحسابي للقراءات الجديدة يكون أكبر أو أصغر من الوسط الحسابي للقراءات الأصلية، بمقدار هذا الثابت على التوالي. وعادة ما يسمى هذا المقدار الثابت الوسط الفرضي، ويمكن توضيح ذلك رياضيا كما يلي:

نفرض أن القراءات الأصلية هي:

$س_١، س_٢، \ldots\ldots\ldots\ldots س_ن$

وبإضافة أو طرح وسط فرضي ا من هذه القيم تكون القيمة الجديدة للقراءات هي:

$ح_١، ح_٢، \ldots\ldots\ldots\ldots، ح_ن$

حيث

$ح_١ = س_١ \pm ا \text{ ، } ح_٢ = س_٢ \pm ا \text{ ، } \ldots\ldots \text{ ، } ح_ن = س_ن \pm ا$

فيكون

$\bar{س} = \bar{ح} \pm ا$ .... (٢)

مثال (٢)

احسب متوسط أجور العمال للمؤسسة الأولى مثال (١) باستخدام وسط فرضي ا = ٣٠. بطرح ا = ٣٠ من جميع القيم الأصلية فتكون القيم الجديدة لأجور العمال في المؤسسة الأولى كالتالي:

٠، ١٠، ١٥، ١٠، ٥، ٠، ٠، ١٠

$$\bar{ح} = \frac{٠ + ١٠ + ١٥ + ١٠ + ٥ + ٠ + ٠ + ١٠}{٨}$$

$= ٦,٢٥$ ريالا

وبذلك يكون

$$\bar{س} = \bar{ح} + ا = ٦,٢٥ + ٣٠ = ٣٦,٢٥ \text{ ريالا}$$

وهي نفس النتيجة السابقة في مثال (١)

(٣ ـ ٢ ـ ٢) الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

إذا كان لدينا جدول يمثل توزيعا تكراريا لبيانات ما بحيث إن مراكز فئاته هي :

$$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_م$$

والتكرارات المناظرة لهذه الفئات هي :

$$ك_١ ، ك_٢ ، \ldots\ldots ، ك_م$$

(حيث إن م عدد الفئات) فإننا في هذه الحالة يعرَّف الوسط الحسابي $\bar{س}$ على إنه مجموع حاصل ضرب مراكز كل فئة في التكرار المناظر لها مقسوما على مجموع تكرار الفئات.

ويمكن أن نعبر عن ذلك رياضيا بالصيغة التالية :

$$\bar{س} = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + \ldots\ldots + ك_م س_م}{ك_١ + ك_٢ + \ldots\ldots + ك_م}$$

$$= \frac{مجـ ك س}{مجـ ك}$$

$$= \frac{مجـ ك س}{ن}$$

حيث ن = مجـ ك

= مجموع التكرارات

مثال (٣)

احسب الوسط الحسابي للأجر اليومي لمجموعة من العمال المعطاة في مثال (٢) في الفصل الثاني السابق والذي تكون بياناته كما يلي :

جدول التوزيع التكراري للأجر اليومي لمجموعة من العمال

فئات الأجور	٢٥ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٤	٣٥ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٤	٤٥ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٤
التكرار(عددالعمال)	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

ولتبسيط عملية الحساب يمكن عمل جدول على الصورة التالية :

فئات الأجور	مراكز الفئات (س)	التكرار (ك)	ك س
٢٥ ـ ٢٩	٢٧	٥	١٣٥
٣٠ ـ ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦
٣٥ ـ ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠
٤٠ ـ ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦
٤٥ ـ ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦
٥٠ ـ ٥٤	٥٢	٦	٣١٢
المجمـــوع	ـ	٥٠	١٩٩٥

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{١٩٩٥}{٥٠} = ٣٩,٩ \text{ ريـال}$$

ويمكن حل المثال السابق بطريقة أخرى، وذلك باستخدام الوسط الفرضي، وليكن ا، وعـادة ما يختـار قيمة الثابت ا مساويا لمركز الفئة التي يقابلها أكبر تكرار. ويكون في هذا المثال ا = ٤٢ حيث أكبر تكرار ك = ١٣ وبذلك يصبح جدول تبسيط الحسابات كما يلي :

فئات الأجور	س	ك	ح = س - ٤٢	ك ح
٢٥ ـ ٢٩	٢٧	٥	- ١٥	- ٧٥
٣٠ ـ ٣٤	٣٢	٨	- ١٠	- ٨٠
٣٥ ـ ٣٩	٣٧	١٠	- ٥	- ٥٠
٤٠ ـ ٤٤	٤٢	١٣	٠	٠
٤٥ ـ ٤٩	٤٧	٨	٥	٤٠
٥٠ ـ ٥٤	٥٢	٦	١٠	٦٠
المجمـــوع	ـ	٥٠	ـ	- ١٠٥

$$\bar{ح} = \frac{مجـ ك ح}{مجـ ك}$$

$$= \frac{-١٠٥}{٥٠} = -١,٢$$

وحيث إن $\bar{س} = \bar{ح} + أ$

∴ $\bar{س}$ = -١,٢ + ٤٢ = ٣٩,٩ ريال

نلاحظ أن قيمة الوسط الحسابي $\bar{س}$ باستخدام الطريقة المباشرة هو نفسه قيمة الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي.

والملاحظ كذلك أنه إذا قسمنا جميع الانحرافات (ح) على مقدار ثابت فإن الوسط الحسابي للانحرافات ($\bar{ح}$) هو نفسه الوسط الحسابي للقيم الجديدة مضروبا في هذا المقدار الثابت. وعادة ما يكون هذا المقدار الثابت عبارة عن طول الفئة «ل» وذلك في حالة الفئات المنتظمة.

الآن يمكن حل المثال السابق، وذلك باستخدام الوسط الفرضي ا وبالقسمة على طول الفئة ل. تسمى مثل هذه الطريقة أحيانا بالطريقة المختصرة، ويكون حل المثال السابق كما يلي:

فئات الأجور	س	ك	ح = س - ٤٢	$\bar{ح} = \frac{ح}{٥}$	ك $\bar{ح}$
٢٥ ـ ٢٩	٢٧	٥	- ١٥	- ٣	- ١٥
٣٠ ـ ٣٤	٣٢	٨	- ١٠	- ٢	- ١٦
٣٥ ـ ٣٩	٣٧	١٠	- ٥	- ١	- ١٠
٤٠ ـ ٤٤	٤٢	١٣	٠	٠	٠
٤٥ ـ ٤٩	٤٧	٨	٥	١	٨
٥٠ ـ ٥٤	٥٢	٦	١٠	٢	١٢
المجموع	ـ	٥٠	ـ	ـ	- ٢١

$$\bar{\bar{ح}} = \frac{\text{مجـ ك } \bar{ح}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{-٢١}{٥٠} \quad -٠,٤٢$$

$$\because \quad \bar{س} = \text{ل} \bar{\bar{ح}} + \text{ا}$$

$$\bar{س} = ٥ \, (-٠,٤٢) + ٤٢$$

$$= -٢,١ + ٤٢$$

$$= ٣٩,٩$$

والوسط الحسابي الناتج باستخدام الطريقة المختصرة هو نفسه الوسط الحسابي المعتاد

(٣ ـ ٢ ـ ٣) مميزات الوسط الحسابي

١ ـ يأخذ جميع القيم في الاعتبار.

٢ ـ يستخدم في معظم التحليلات الإحصائية لسهولة التعامل معه.
٣ ـ لا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات.

(٣ ـ ٢ ـ ٤) عيوب الوسط الحسابي

١ ـ يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة) للبيانات.
٢ ـ يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.
٣ ـ لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية.
٤ ـ لا يساوي في الغالب أيًّا من القيم الداخلة في حسابه، فقد يحتوي على جزء كسري لبيانات مكونة من أعداد صحيحة، وذلك في حالة البيانات المنفصلة، مثل عدد المواليد في مجتمع ما وعدد السفن في ميناء ما. . . الخ.

(٣ ـ ٢ ـ ٥) الوسط الحسابي المرجح

عند حساب قيمة الوسط الحسابي أعطينا جميع القراءات نفس الأهمية، ونفس الوزن، وإن كان من الصعب تبرير ذلك في بعض تطبيقات الحياة العملية. وذلك لأن بعض القيم لها أهمية أكبر من الأخرى، فمثلا عند، إيجاد متوسط دزجات طالب في المواد المختلفة له فليس من المعقول مساواة درجة مادة تدرس في ساعتين بمادة تدرس في أربع ساعات كل أسبوع أو ثلاث ساعات لذلك كان لا بد من إعطاء أوزان لدرجات المواد المختلفة حسب الساعات الأسبوعية. ويسمى حساب الوسط الحسابي في هذه الحالة بالوسط الحسابي المرجح، ويرمز له بالرمز $\bar{س}_م$. ويعرف بأنه مجموع حاصل ضرب القراءات في الأوزان المناظرة لها مقسوما على مجموع أوزان القراءات. ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا بالصيغة التالية:

إذا كان لدينا مجموعة القراءات

$$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots\ldots\ldots ، س_ن$$

ولتكن الأوزان المناظرة لها هي:

$$و_١ ، و_٢ ، \ldots\ldots\ldots\ldots ، و_ن$$

فإن الوسط الحسابي المرجح يعطى بالعلاقة

$$\bar{س}_م = \frac{و_١ س_١ + و_٢ س_٢ + \ldots + و_ن س_ن}{و_١ + و_٢ + \ldots\ldots + و_ن}$$

$$= \frac{مجـ و س}{مجـ و}$$

مثال (٤)

إذا كانت درجات أحد الطلاب في أربع مواد هي

٤٠ ، ٧٠ ، ٦٦ ، ٨٥

وكانت الساعات الدراسية الأسبوعية لهذه المواد بالترتيب هي كالتالي:

٣ ، ٢ ، ٤ ، ٣

والمطلوب إيجاد قيمة الوسط المرجح لدرجات هذا الطالب.

$$\therefore \bar{س}_م = \frac{مجـ و س}{مجـ و}$$

$$\therefore \bar{س}_م = \frac{٤٠ \times ٣ + ٧٠ \times ٢ + ٦٦ \times ٤ + ٨٥ \times ٣}{٣ + ٢ + ٤ + ٣}$$

$$= \frac{٧٧٩}{١٢} = ٦٤,٩٢ \text{ درجة}$$

مثال (٥)

إذا كانت تقديرات أحد طلاب جامعة الملك سعود في أحد الفصول الدراسية هي:

أ ، د ، جـ ، هـ ، ب

وكانت الساعات الدراسي المعتمدة لهذه المواد على الترتيب هي:

٢ ، ٤ ، ٣ ، ٣ ، ٢

والمطلوب إيجاد المعدل الفصلي لهذا الطالب.

الحـــل

من المعروف أن حساب الساعات المعتمدة في جامعة الملك سعود يأخذ نظام النقاط التالي: ا = ٥، ب = ٤، جـ = ٣، د = ٢، هـ = ١

فيكون المعدل الفصلي

$$\bar{س}_م = \frac{٥ \times ٢ + ٢ \times ٤ + ٣ \times ٣ + ١ \times ٣ + ٤ \times ٢}{٢ + ٤ + ٣ + ٣ + ٢}$$

$$= \frac{٣٨}{١٤} = ٢,٧١$$

(٣ ـ ٣) الوسيـــط

يعرف الوسيط للبيانات الإحصائية بأنه القيمة العددية التي تقسم تلك البيانات إلى مجموعتين متساويتين بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا، وسوف نتناول طريقة حساب الوسيط في كل من الحالتين:

أ) البيانات غير المبوبة ب) البيانات المبوبة

(٣ ـ ٣ ـ ١) الوسيط للبيانات غير المبوبة

لإيجاد القيمة العددية للوسيط نفرض أن عدد البيانات أو القراءات يساوي ن، ولحساب قيمة الوسيط لا بد من التمييز بين حالتين، وهما عندما تكون «ن» عددًا صحيحًا فرديًا، أو عندما تكون ن عددًا صحيحًا زوجيًا

أولا: في حالة كون «ن» عددًا فرديًا

نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا مثلا، ويكون قيمة الوسيط فيه القراءة التي رتبتها $\frac{ن + ١}{٢}$

مثال (٦)

إذا كان الإنفاق الأسبوعي لعينة من الأسر عددها ٩ بمئات الريالات كما يلي

١ ، ٤ ، ٢ ، ٧ ، ٣ ، ١٠ ، ١٣ ، ٨ ، ٤

ونود إيجاد الوسيط لهذه القراءات.

لإيجاد الوسيط نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا ونحصل على:

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، $\boxed{٤}$ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ١٣

نلاحظ أن عدد القراءات (ن) = ٩ أسر أي «فردي»

أي أن رتبة الوسط $= \frac{ن + ١}{٢} = \frac{٩ + ١}{٢} = ٥$

ومن ذلك نجد أن قيمة الوسيط هي القراءة رقم ٥، وتساوي ٤ أي أن وسيط الإنفاق الأسبوعي للأسر = ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ ريالا.

ثانيا: في حالة كون «ن» عددًا زوجيًا:

نقوم بترتيب البيانات تصاعديا كما في الحالة السابقة. فيكون الوسيط بعد ذلك عبارة عن متوسط القراءتين اللتين رتبتاهما

$\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$

مثال (٧)

إذا كان إنتاج مجموعة من العمال في أحد المصانع بالقطعة يوميا هو:

٢٠ ، ٢٥ ، ٢١ ، ٢٩ ، ٣٥ ، ٢١ ، ٤٠

والمطلوب إيجاد الوسيط للإنتاج اليومي.

نرتب البيانات تصاعديا كالتالي:

٢٠ ، ٢١ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠

ن (عدد القراءات) = ٨ عمال

ويلاحظ أن عدد القراءات ن عدد زوجى وبذلك نحسب الرتبتين

$$\frac{ن}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

$$\frac{ن}{٢} + ١ = ٤ + ١$$

$$= ٥$$

وبالتالي فإن قيمة الوسيط هي متوسط القراءتين الرابعة والخامسة أي أن

$$\text{الوسيط} = \frac{٢٥ + ٢٩}{٢}$$

$$= \frac{٥٤}{٢}$$

= ٢٧ قطعة

(٣ - ٣ - ٢) الوسيط في حالة البيانات المبوبة

أما في حالة البيانات المبوبة فيمكن إيجاد الوسيط بطريقة الحساب أو بالطريقة البيانية، وسوف نتناول كل طريقة على حدة.

أولاً: الطريقة الحسابية لإيجاد الوسيط

لحساب الوسيط بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

١ - نكوّن الجدول المتجمع الصاعد وذلك باستخدام الحدود الحقيقية للفئات.

٢ - نوجد رتبة الوسيط وهي $\frac{ن}{٢}$ سواء كانت ن فردية أم زوجية حيث إن «ن» في هذه الحالة هي عبارة عن مجموع القراءات.

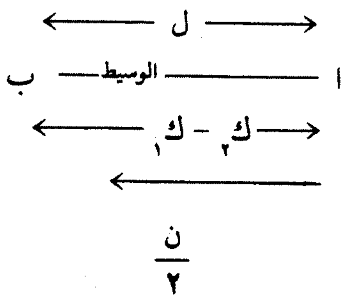
٣ - نحدد مكان الوسيط بعد معرفة مكان $\frac{ن}{٢}$ بين التكرارات المتجمعة في الجدول، ونضع خطًا أفقيًا مثل (⟵) يمر هذا الخط داخل الفئة الوسيطية. وتكون بذلك بداية الفئة «ا» فوق الخط أما نهاية الفئة الوسيطية فستكون تحت الخط مباشرة. أما بالنسبة للتكرارات فنرمز للتكرار المتجمع السابق للفئة الوسيطية أي فوق الخط بالرمز «$ك_١$» ونرمز للتكرار المتجمع اللاحق للفئة الوسيطية أي تحت الخط بالرمز «$ك_٢$». بعد ذلك يمكن إيجاد طول الفئة الوسيطية وليكن «ل».

٤ ـ يمكن حساب قيمة الوسيط بإجراء تناسب بين الأبعاد والتكرارات كما يلي :

$$\frac{\text{الوسيط} - \text{ا}}{\text{ل}} = \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٢} - \text{ك}_{١}}$$

ومن ذلك نحصل على

$$\text{الوسيط} = \text{ا} + \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٢} - \text{ك}_{١}} \,.\, \text{ل}$$



مثال (٨)

احسب الوسيط لأجور العمال في مثال (٣)

لإيجاد ذلك نكوّن أولا الجدول المتجمع الصاعد للبيانات كما يلي :

ن = ٥ + ٨ + ١٠ + ١٣ + ٨ + ٦ = ٥٠

$$\frac{\text{ن}}{٢} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$$

أي أن تكرار الوسيط يساوي ٢٥ ، ويقع بين التكرارين المتجمعين الصاعدين ٢٣ ، ٣٦ ونضع خطا أفقيا كما هو موضح بالجدول، وعليه يكون

ا = ٣٩,٥

$\text{ك}_{١}$ = ٢٣

$\text{ك}_{٢}$ = ٣٦

ل = ٤٤,٥ − ٣٩,٥ = ٥

الجدول المتجمع الصاعد لأجور العمال

حـدود الفئـات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٥ ,٢٤	٠
أقل من ٥ ,٢٩	٥
أقل من ٥ ,٣٤	١٣
أقل من ٥ ,٣٩ ا	٢٣ $ك_١$
أقل من ٥ ,٤٤	٣٦ $ك_٢$
أقل من ٥ ,٤٩	٤٤
أقل من ٥ ,٥٤	٥٠

ومن القانون السابق

$$\text{الوسيط} = ا + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \, ل$$

$$= ٣٩,٥ + \frac{٢٥ - ٢٣}{٣٦ - ٢٣} \times ٥$$

$$= ٣٩,٥ + \frac{١٠}{١٣}$$

$$= ٣٩,٥ + ٠,٧٧$$

= ٤٠,٢٧ ريالا

ثانيا: الطريقة البيانية لإيجاد الوسيط

يمكن إيجاد الوسيط بيانيا برسم المنحنى المتجمع الصاعد، أو برسم المنحنى المتجمع الهابط (النازل)، أو برسمهما معا في رسم واحد، ويمكن تحديد قيمة الوسيط في كل حالة من الحالات الثلاث كما يلي:

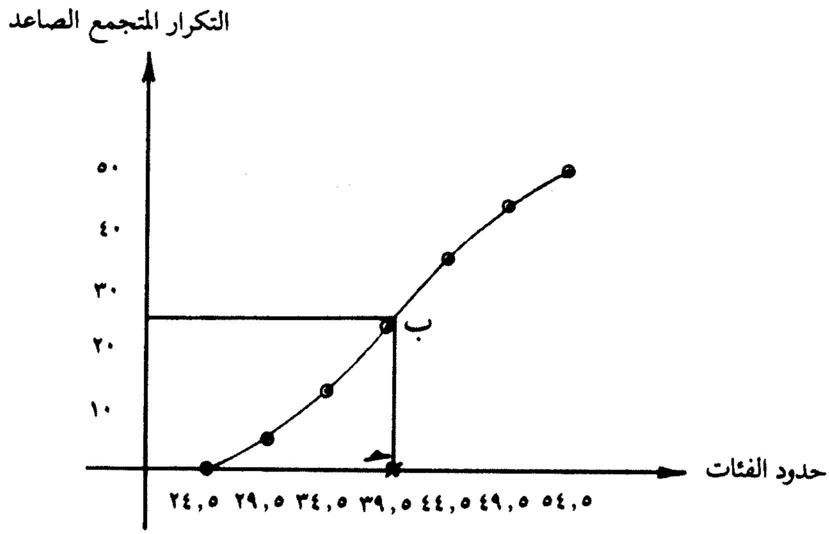
١) **الوسيط من المنحنى المتجمع الصاعد**: نرسم المنحنى المتجمع الصاعد من الجدول المتجمع الصاعد كما سبق شرحه، ونحدد بعد ذلك مكان «$\frac{ن}{٢}$» على المحول الرأسي الذي يمثل التكرارات المتجمعة، ويقابل المنحنى المتجمع الصاعد في نقطة، ولتكن «ب» ثم نسقط من ب عمودا رأسيا يقابل محور الفئات في نقطة، ولتكن جـ. فتكون القيمة التي تقع عليها «جـ» على محور الفئات هي الوسيط التي تقسم البيانات إلى قسمين متساويين كما سنوضح في المثال التالي.

مثال (٩)

لنفرض أن المطلوب إيجاد الوسيط بيانيا للأجر اليومي للعمال المعطاة بياناته في مثال (٨)، وذلك باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد.

الحـــل

نرسم أولا المنحنى المتجمع الصاعد كما يلي:



شكل (٣ ـ ١): المنحنى المتجمع الصاعد لأجور العمال اليومية

نحدد قيمة $\frac{ن}{٢}$ وفي هذه الحالة

$$\frac{ن}{٢} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$$

ومن ثم نحدد النقطة ٢٥ على محور التكرار المتجمع الصاعد ونرسم منها خطًا مستقيمًا يوازي محور الفئات، ليلتقي بالمنحنى المتجمع الصاعد في نقطة ب مثلا. نسقط العمود كما أوضحنا سابقا من ب على محور الفئات، ومن الشكل السابق نجد أن:
قيمة الوسيط عند النقطة جـ = ٤٠ ريالا تقريبا.

٢) الوسيط من المنحنى المتجمع الهابط: نرسم المنحنى المتجمع الهابط من الجدول المتجمع الهابط كما سبق شرحه، ونتبع الخطوات السابقة نفسها في رسم المنحنى المتجمع الصاعد، وكذلك إيجاد قيمة الوسيط من الرسم، ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (١٠)

أوجد الوسيط بيانيا باستخدام المنحنى المتجمع الهابط من بيانات مثال (٨) التي تمثل الأجر اليومي للعمال.

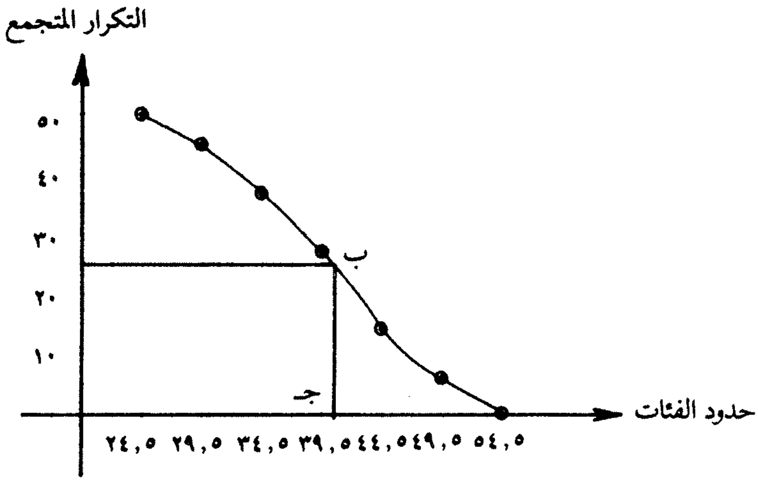
الحـــل

نكوّن أولا الجدول المتجمع الهابط كما يلي:

الجدول المتجمع الهابط لأجور العمال

حدود الفئات	التكرار المتجمع الهابط
٢٤,٥ فأكثر	٥٠
٢٩,٥ فأكثر	٤٥
٣٤,٥ فأكثر	٣٧
٣٩,٥ فأكثر	٢٧
٤٤,٥ فأكثر	١٤
٤٩,٥ فأكثر	٦
٥٤,٥ فأكثر	صفر

ثم نرسم المنحنى المتجمع الهابط كما يلي:



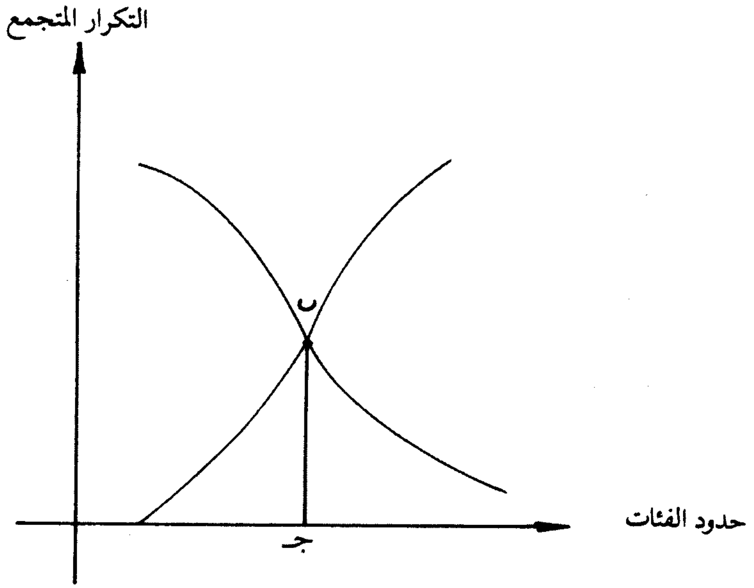
شكل (٣ ـ ٢): المنحنى المتجمع الهابط لأجور العمال

وبالمثل يمكن تحديد النقطة $\frac{ن}{٢}$ على محور التكرار المتجمع الهابط، وكذلك النقطة «ب» على المنحنى، ومن ذلك نجد أن النقطة «جـ» الواقعة على محور الفئات التي تساوي تقريبا قيمة الوسيط بالطريقة البيانية هي ٤٠ ريالا.

٣) إيجاد الوسيط بيانيا باستخدام تقاطع المنحنى المتجمع الصاعد، والمتجمع الهابط معا: نرسم أولا كلا من المنحنى المتجمع الصاعد، والمنحنى المتجمع الهابط على نفس المحورين، ومن نقطة تقاطع المنحنى ولتكن «ب» نسقط عمودًا رأسيًا على محور الفئات، فيلتقي معه في نقطة «جـ» التي تعطينا القيمة البيانية للوسيط، كما هو موضح بالشكل (٣ ـ ٣) التالي.

مثال (١١)

أوجد الوسيط بيانيا باستخدام كلٍّ من المنحنى المتجمع الصاعد، والمنحنى المتجمع الهابط لأجور العمال اليومية من بيانات مثال (٨). باستخدام جدولي التكرار



شكل (٣ - ٣): تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط

المتجمع الصاعد، والتكرار المتجمع الهابط كما في مثال (٩)، ومثال (١٠) نجد أن الشكل المناظر لهما على نفس المحورين هو شكل (٣ - ٤).

ومن ذلك نجد أن قيمة الوسيط من الرسم تساوي ٤٠ ريالا تقريبا.

(٣ - ٣ - ٣) مميزات الوسيط

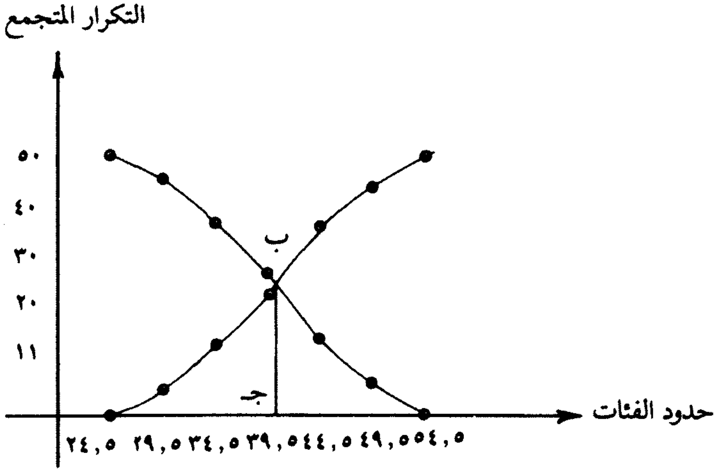
١ - لا يتأثر بالقيم الشاذة، وذلك لأنه من المتوسطات الموضعية أي أنه يتأثر بمواضع القراءات.

٢ - يمكن إيجاد الوسيط في حالة البيانات الوصفية التي لها صفة الترتيب، والتوزيعات التكرارية المفتوحة للبيانات الكمية.

(٣ - ٣ - ٤) عيوب الوسيط

١ - لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.

٢ - لا يسهل التعامل معه في التحاليل الإحصائية.



شكل (٣ ـ ٤) : تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط لأجور العمال اليومية

ويمكن الإشارة إلى أن الوسيط أكبر من الوسط الحسابي في حالة البيانات الملتوية جهة اليسار وأقل من الوسط الحسابي في حالة البيانات الملتوية جهة اليمين ويساوي الوسط في حالة البيانات المتماثلة، ومن مميزات الوسيط كذلك أن مجموع الإنحرافات المطلقة عن الوسيط أقل ما يمكن مقارنة بأي نقطة أخرى كما سنرى فيما بعد.

(٣ ـ ٤) المنـــوال

يعرف المنوال بأنه القيمة التي يكون لها أكبر تكرار في عينة من البيانات الإحصائية. وإذا كانت لدينا عينة من البيانات ووجدنا فيها قراءة واحدة تتكرر أكثر من غيرها فإن هذه القراءة تكون المنوال، ويقال لهذه البيانات : إنها **وحيدة المنوال**. وإذا وجدنا في عينة من البيانات قراءتين لهما تكراران متساويان وأكبر من باقي التكرارات يقال لهذه البيانات : إنها **ثنائية المنوال**. وإذا كان لعينة من البيانات أكثر من قراءتين لهما نفس عدد التكرارات وأكبر من باقي التكرارات فإن هذه البيانات يقال لها : **متعددة المناويل**. أما إذا كان لا يوجد في البيانات قيمة تتكرر أكثر من غيرها فإنه يقال في هذه الحالة : إن البيانات **عديمة المنوال**، أو لا يوجد لها منوال.

وفي حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية) نجد أن القيم تذوب في داخل الفئات، ومن هنا فلا توجد قراءات أو قيم منوالية، ولكن يكون لدينا فئات منوالية.

وتعرَّف الفئة المنوالية في الجداول التكرارية بأنها الفئة التي يناظرها أكبر تكرار. وقد يكون لعينة من البيانات «ملخصة في توزيع تكراري» فئة منوالية واحدة أو أكثر من فئة منوالية أو لا يوجد لها أي فئة منوالية (يحدث ذلك في حالة تساوي التكرارات في جميع الفئات). ونحسب المنوال عادة في حالة الفئات المتساوية الطول أو المنتظمة، وفي حالة عدم انتظام أطوال الفئات فإنه يجب أولا أن نعدل التكرارات، لأنه ربما يكون أكبر تكرار قبل التعديل ليس بأكبر تكرار بعد التعديل. ونقوم بتعديل التكرارات كما سبق شرحه، وذلك بقسمة التكرار على طول الفئة المناظرة له. وسوف نوضح فيما يلي وباستخدام الأمثلة طرق حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة والبيانات المبوبة.

(٣ ـ ٤ ـ ١) المنوال في حالة البيانات غير المبوبة

مثال (١٢)

احسب المنوال لأعمار عينة من الطلاب في المرحلة الابتدائية وكانت كالتالي:

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ٨ ، ٦

نلاحظ في عينة القراءات السابقة أن القيمة ٦ تتكرر ٤ مرات، وأكثر من غيرها من القيم، وبذلك يكون المنوال كالتالي:

المنـوال = ٦ سنوات

مثال (١٣)

أوجد المنوال لأعمار عينة من الطلاب في المرحلة الابتدائية

وكانت: ٧ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ٨

نلاحظ في عينة القراءات السابقة أن القيمتين ٦ ، ٧ متساويتا التكرار حيث يتكرر كل منها ثلاث مرات، وأكثر من غيرهما، وعليه فإنه يوجد لهذه العينة من الأعمار منوالان هما ٦ ، ٧ سنوات.

مثال (١٤)

أوجد المنوال لعينة من الطلاب أعمارهم بالسنوات هي :

٥ ، ٦ ، ٩ ، ١٠ ، ١٤ ، ١١ ، ١٢

لا يوجد في هذه البيانات قراءة مكررة أكثر من غيرها، ولذلك فإنه لا يوجد لها منوال، أي أن العينة عديمة المنوال.

(٣ ـ ٤ ـ ٢) المنوال في حالة البيانات المبوبة

في هذه الحالة يمكن إيجاد المنوال حسابيا أو بيانيا، وسوف نتناول شرح كل طريقة على حده.

أ) المنوال حسابيا

توجد عدة طرق لحساب المنوال، وأبسطها أن يكون المنوال مركز الفئة المنوالية، وهي طريقة تقريبية. وتكون هذه الطريقة دقيقة إذا كان التكرار السابق للتكرار المنوالي مساويا للتكرار اللاحق للتكرار المنوالي ونعتبر إمكان حدوث ذلك من الناحية العملية قليلا جدا. ونذكر طريقة أخرى تعتبر من أفضل الطرق وهي ما تسمى طريقة بيرسون للفروق ويمكن تلخيصها كما يلي:

١ ـ نحدد الفئة المنوالية التي يناظرها أكبر تكرار، ونرمز لتكرارها بالرمز ك .

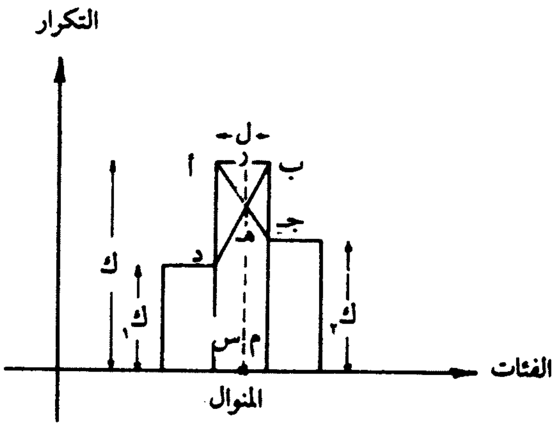
٢ ـ نوجد بداية الفئة المنوالية وليكن أ (باستخدام الحدود الحقيقية أو الفعلية للفئات).

٣ ـ نوجد التكرار السابق للتكرار المنوالي، وليكن $ك_١$ و التكرار اللاحق للتكرار المنوالي $ك_٢$، ونحسب طول الفئة المنوالية وليكن ل، ونطبق العلاقة التالية :

$$\text{المنوال} = \text{أ} + \frac{\text{ك} - \text{ك}_١}{٢\text{ك} - \text{ك}_١ - \text{ك}_٢} \times \text{ل}$$

يمكن استنتاج علاقة حساب المنوال السابقة كما يلي:

١ ـ نرسم المدرج التكراري للفئة المنوالية واللفئتين السابقة واللاحقة لها كمايلي :



شكل (٣ ـ ٥): المدرج التكراري للفئة المنوالية

٢ ـ من تشابه المثلثين أ ب جـ، ر ا هـ نجد أن:

$$\frac{\text{ا ر}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ر هـ}}{\text{ب جـ}}$$

ومن تشابه المثلثين ا ب د، أ ر هـ نجد أن:

$$\frac{\text{ب ر}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ر هـ}}{\text{ا د}}$$

بقسمة العلاقة الثانية على العلاقة الأولى نحصل على:

$$\frac{\text{ا ر}}{\text{ب ر}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ب جـ}}$$

أي أن:

$$\frac{\text{س}}{\text{ل} - \text{س}} = \frac{\text{ك} - \text{ك}_1}{\text{ك} - \text{ك}_2}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\text{س} = \frac{\text{ك} - \text{ك}_1}{2\text{ك} - \text{ك}_1 - \text{ك}_2}\ \text{ل}$$

ويحسب المنوال عن النقطة م من العلاقة.

المنوال = ا + س

وهي نفس العلاقة التي سبق ذكرها.

مثال (١٥)

أوجد المنوال للأجر اليومي لعينة من العمال حسب البيانات الواردة في مثال (٣) والموضحة بالجدول التالي:

جدول التوزيع التكراري للأجور لمجموعة من العمال

فئات الأجور	٢٥ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٤	٣٥ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٤	٤٥ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٤
التكرار (عدد العمال)	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

نلاحظ من الجدول السابق أن الفئات منتظمة الأطوال وعليه فإنها لا تحتاج إلى تعديل التكرارات لها. وتكون الفئة المنوالية بالحدود الفعلية هي (٣٩,٥ ـ ٤٤,٥)، والتكرار المنوالي ك = ١٣، وعليه فإن ا = ٣٩,٥ ريالا، ل = ٥، $ك_١$ = ١٠، $ك_٢$ = ٨

وبذلك يكون:

$$\text{المنوال} = ا + \frac{ك - ك_١}{٢ك - ك_١ - ك_٢} \; ل$$

$$= ٣٩,٥ + \frac{١٣ - ١٠}{٢ \times ١٣ - ١٠ - ٨} \times ٥$$

$$= ٣٩,٥ + \frac{١٥}{٨}$$

$$= ٣٩,٥ + ١,٨٨$$

$$= ٤١,٣٨ \text{ ريالا}$$

مثال (١٦):

أوجـد المنـوال للإنفـاق الشهري بمئات الريالات لمجموعة من الأسر كما هو موضح بالجدول التالي:

الجدول التكراري للإنفاق لمجموعة من الأسر

فئات الانفاق	٧ـ٩	١٠ـ١٢	١٣ـ١٨	١٩ـ٢٢	٢٣ـ٢٥
التكـــرار	٤	٩	١٢	١٠	٥

نلاحظ أن الفئات في الجدول التكراري غير متساوية الطول. ولهذا فإنه يلزم تعديل التكرارات حتى نستطيع تحديد الفئة المنوالية، وهي التي يناظرها أكبر تكرار بعد التعديل كما يلي:

فئات الإنفاق	التكرار (ك)	طول الفئة (ل)	التكرار المعدل $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$
٧ ـ ٩	٤	٣	١,٣٣
١٠ـ١٢	٩	٣	٣
١٣ـ١٨	١٢	٦	٢
١٩ـ٢٢	١٠	٤	٢,٥
٢٣ـ٢٥	٥	٣	١,٦٧

نلاحظ من الجدول التكراري المعدل أن الفئة المنوالية هي (٩,٥ ـ ١٢,٥) والتي يقـابلهـا أكـبر تكرار معدل وهو ٣، وعليه فيمكن حساب المنوال حيث يكون

$\text{ا} = \text{٩,٥}$، $\text{ك} = \text{٣}$، $\text{ك}_1 = \text{١,٣٣}$، $\text{ك}_2 = \text{٢}$، $\text{ل} = \text{٣}$

$$\text{المنوال} = \text{ا} + \frac{\text{ك} - \text{ك}_1}{\text{٢ك} - \text{ك}_1 - \text{ك}_2} \times \text{ل}$$

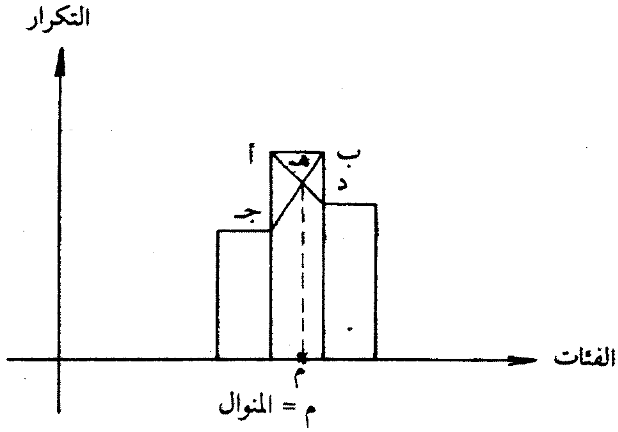
$$= \text{٩,٥} + \frac{\text{٣} - \text{١,٣٣}}{\text{٦} - \text{١,٣٣} - \text{٢}} \times \text{٣}$$

$$= ٩,٥ + \frac{٥,٠١}{٢,٦٧} = ١١,٣٨ \text{ بمئات الريالات}$$

أي أن المنوال = ١١,٣٨ × ١٠٠ = ١١٣٨ ريالا

ب) المنوال بيانيا

يمكن حساب المنوال بيانيا، وذلك برسم المدرج التكراري من الجدول التكراري مباشرة، وذلك في حالة الفئات المتساوية الطول (المنتظمة)، وأحيانا يكتفي برسم ثلاثة مستطيلات من المدرج التكراري، وهي المستطيل الممثل للفئة المنوالية، والمستطيلان السابق واللاحق له، ونصل أ د، ب جـ كما هو موضح بشكل (٣ ـ ٦) فنحصل على نقطة التقاطع، ولتكن هـ. نسقط عمودًا رأسيًا من نقطة هـ على محور الفئات ليلتقي معه في نقطة م التي تساوي قيمتها من محور الفئات قيمة المنوال.



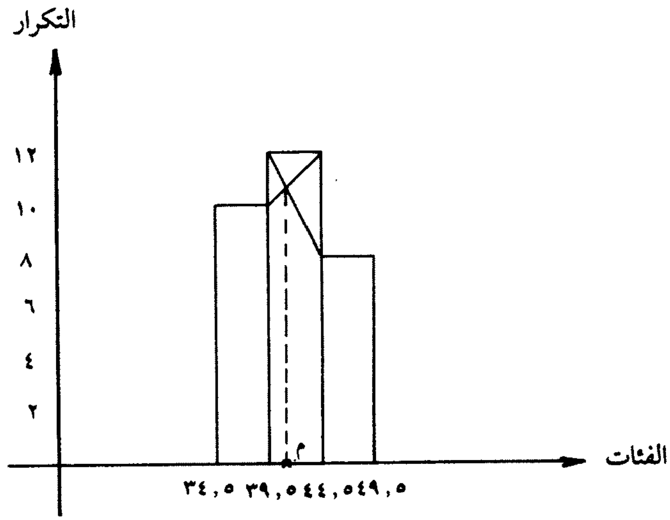
شكل (٣ ـ ٦): المدرج التكراري للفئة المنوالية

أما في حالة الفئات غير المنتظمة أي غير المتساوية الطول نوجد المنوال من المدرج التكراري المعدل، ويمكن الاكتفاء بثلاثة مستطيلات، وذلك باتباع الخطوات السابقة نفسها في حالة الفئات المنتظمة، وسوف نوضح ذلك بالأمثلة التالية.

مثال (١٧)

أوجد المنوال بيانيا للأجر اليومي لعينة العمال حسب البيانات المعطاة في مثال (١٥).

نرسم المستطيل للفئة (٥, ٣٩ ـ ٥ , ٤٤) والمستطيل السابق واللاحق له كما يلي :



شكل (٣ ـ ٧) : المدرج التكراري للفئة المنوالية لأجور العمال

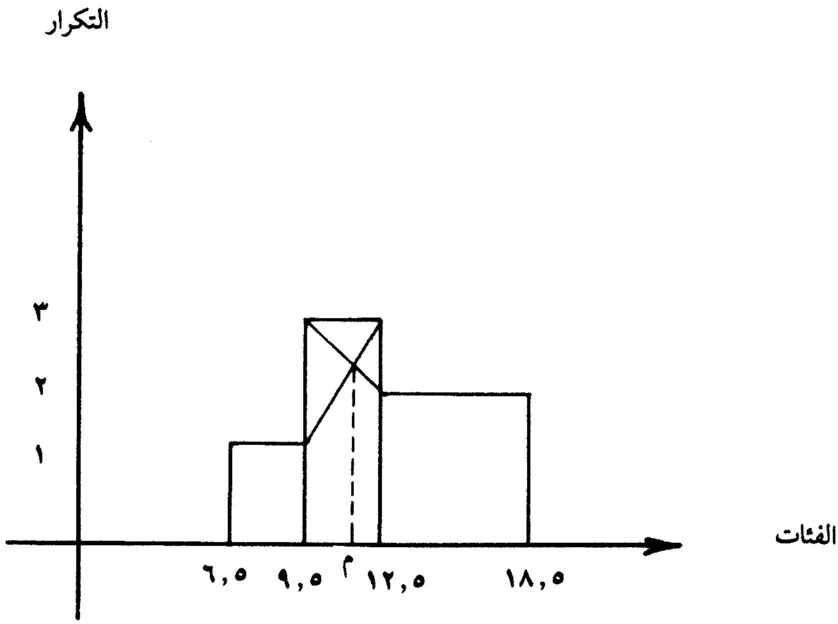
نصل النقاط حسب ما وضحنا سابقا ، ومن ثم نسقط عمودا من نقطة التقاطع على محور الفئات فنجد قيمة المنوال كالتالي :

المنـــوال = ٤١ تقريبا

مثال (١٨) :

أوجد المنوال بيانيا للإنفاق الشهري لعينة الأسر المعطاة حسب بيانات مثال (١٦).

نرسم أولا المستطيل المنوالي على الفئة المنوالية (٩,٥ ـ ١٢,٥) التي يناظرها أكبر تكرار معدل، وهو يساوي ٣، وكذلك المستطيل السابق واللاحق له كما يلي:



شكل (٣ ـ ٨): المدرج التكراري المعدل للفئة المنوالية

المنوال عند نقطة م = ١١,١ بمئات الريالات.

أي أن المنوال = ١١,١ × ١٠٠ = ١١١٠ ريالات.

(٣ ـ ٤ ـ ٣) مميزات المنوال

١ ـ لا يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).

٢ ـ يمكن حسابه للبيانات الوصفية، وكذلك في حالة الجداول التكرارية المفتوحة للبيانات الكمية.

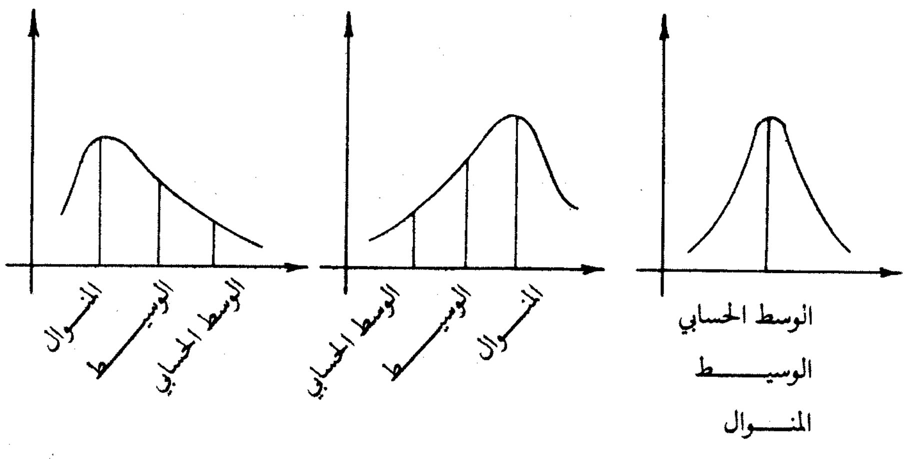
(٣ ـ ٤ ـ ٤) عيوب المنوال

١ ـ لا يأخذ في الاعتبار جميع القيم في الحساب.

٢ ـ قد تكون لعينة البيانات أكثر من قيمة منوالية، وبذلك يكون المنوال متعدد القيم، وبذلك يصعب التعامل معه في التحليل الإحصائي.

(٣ ـ ٥) العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

يلاحظ أنه في حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة الوحيدة المنوال نجد أن المقاييس الثلاثة تكون متطابقة، أي متساوية القيمة. ولكن في حالة عدم التماثل، أي عند وجود التواء نحو اليمين أو نحو اليسار تختلف قيم المقاييس الثلاثة عن بعضها. ويكون الوسط الحسابي أكبر المقاييس السابقة في حالة الالتواء نحو اليمين، يليه الوسيط، ثم المنوال، وهو أصغر المقاييس الثلاثة في هذه الحالة، كما سنوضح ذلك في شكل (٣ ـ ٩). وإذا كان الالتواء نحو اليسار نجد أن الوسط الحسابي أصغرها، ويليه الوسيط ثم المنوال أكبر المقاييس الثلاثة في هذه الحالة.



شكل (٣ ـ ٩): العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال بيانيا

أما في حالة الالتواء البسيط نحو اليمين أو اليسار توجد علاقة تجريبية بين المقاييس الثلاثة كما يلي:

$$\left(\frac{\text{الوسط الحسابي - المنوال}}{٣}\right) = \text{الوسط الحسابي - الوسيط}$$

وهذه العلاقة غير صحيحة في حالة الإلتواء الكبير.

(٣ - ٦) الوسط الهندسي والتوافقي

(٣ - ٦ - ١) الوسط الهندسي

لقد لاحظنا فيما سبق أن الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة، أي القيم الكبيرة جدا، أو القيم الصغيرة جدا مقارنة ببقية القراءات، ولذا دعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس تكون أقل تأثرا بالقيم الشاذة، وخاصة المتطرفة نحو الكبر. ومن هذه المقاييس الوسط الهندسي الذي يعطي قيما أدق من الوسط الحسابي في دراسة بعض الظواهر التي تزيد مفرداتها بمعدلات ثابتة مثل ظاهرة النمو السكاني، ونمو الكائنات الحية الأخرى، أو ظاهرة النمو الاقتصادي وغيرها. ومن المعروف أنه إذا كان لدينا قراءتان ا، ب فإن وسطهما الهندسي يعرف بالمقدار $\sqrt{ا \times ب}$ أما وسطهما الحسابي فهو المقدار $\frac{ا + ب}{٢}$ ، وبوجه عام فإنه إذا كان لدينا القراءات ولتكن:

$س_١$، $س_٢$، . . . . $س_ن$

فإن الوسط الهندسي لهذه القراءات يعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{الوسط الهندسي } \bar{هـ} = \sqrt[ن]{س_١ \times س_٢ \times \ldots\ldots\ldots \times س_ن}$$

وفي حالة البيانات المبوبة إذا كانت لدينا التكرارات

$ك_١$، $ك_٢$، . . . .، $ك_م$

ولها مراكز فئات:

$س_١$، $س_٢$، . . . .، $س_م$ على الترتيب

فإن الوسط الهندسي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{الوسط الهندسي } \bar{هـ} = \sqrt[ن]{س_١^{ك_١} \times س_٢^{ك_٢} \times \ldots\ldots\ldots \times س_م^{ك_م}}$$

حيث إنَّ ن = مجـ ك .

مثال (١٩)

أوجد الوسط الهندسي لأعمار عينة مكونة من ٧ طلاب في المرحلة الابتدائية وهي ٣، ٥، ٦، ٦، ٧، ١٠، ١٢

الحـــل

الوسط الهندسي $\bar{هـ} = \sqrt[٧]{٣ \times ٥ \times ٦ \times ٦ \times ٧ \times ١٠ \times ١٢}$

وعادة تستخدم اللوغاريثمات لتسهيل عملية الحساب، ولذلك

$$لو \bar{هـ} = \frac{١}{٧}(لو ٣ + لو ٥ + ٢ لو ٦ + لو ٧ + لو ١٠ + لو ١٢)$$

وباستخدام جدول للوغاريثمات (٧) في نهاية الكتاب نجد أن

$$لو \bar{هـ} = \frac{١}{٧}(٠,٤٧٧١ + ٠,٦٩٩٠ + ١,٥٥٦٣ + ٠,٨٤٥١ + ١,٠٠٠٠ + ١,٠٧٩٢)$$

$$\therefore لو \bar{هـ} = ٠,٨٠٨١$$

وبالكشف في جدول الأعداد المقابلة للوغاريثمات يمكن إيجاد الوسط الهندسي أي أنَّ

$\bar{هـ} = ٦,٤٣$ سنوات

عند حساب الوسط الحسابي $\bar{س}$ يكون:

$$\bar{س} = \frac{٣ + ٥ + ٦ + ٦ + ٧ + ١٠ + ١٢}{٧} = ٧ \text{ سنوات}$$

أي أن الوسط الهندسي أصغر من الوسط الحسابي.

(٣ ـ ٦ ـ ٢) الوسط التوافقي

يعتبر الوسط التوافقي من المقاييس التي تحد من تأثير القيم المتطرفة وخاصة في حالـة التـطرف نحـو الكبر. ويلاحظ أن تأثير الوسط التوافقي أكبر من تأثير الوسط الهندسي في الحد من القيم المتطرفة نحو الكبر، لأن قيمته لنفس البيانات تكون أصغر من قيمة الوسط الهندسي.

ويعرَّف الوسط التوافقي ونرمز له بالرمز $\bar{ت}$ في حالة البيانات غير المبوبة كما يلي:

إذا كانت لدينا القراءات:

$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_ن$

فإن:

$$\frac{١}{\bar{ت}} = \frac{١}{ن} \left(\frac{١}{س_١} + \frac{١}{س_٢} + \cdots + \frac{١}{س_ن} \right)$$

$$= \frac{١}{ن} \left(مجـ \frac{١}{س} \right)$$

أما في حالة البيانات المبوبة فإنه إذا كانت لدينا التكرارات التالية:

$ك_١ ، ك_٢ ، \ldots\ldots ، ك_م$.

ولها مراكز الفئات التالية:

$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_م$ على الترتيب.

فإن الوسط التوافقي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{١}{\bar{ت}} = \frac{١}{ن} \left(\frac{ك_١}{س_١} + \frac{ك_٢}{س_٢} + \cdots + \frac{ك_م}{س_م} \right)$$

$$= \frac{١}{ن} \left(مجـ \frac{ك}{س} \right)$$

حيث إن $ن = مجـ ك$.

مثال (٢٠)

احسب الوسط التوافقي $\bar{ت}$ لمجموعة أعمار الطلاب المعطاة حسب بيانات **مثال (١٩)**.

من تعريف الوسط التوافقي

$$\frac{١}{\bar{ت}} = \frac{١}{ن} \left(\frac{١}{س_١} + \frac{١}{س_٢} + \cdots + \frac{١}{س_ن} \right)$$

باستخدام البيانات الإحصائية المعطاة، ولذلك نجد أن:

$$\frac{١}{\bar{ت}} = \frac{١}{٧} \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٧} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٢} \right)$$

$$\frac{١}{\bar{ت}} = \frac{٥٠١}{٢٩٤٠}$$

وبالتالي يمكن إيجاد الوسط بصورة مباشرة أي أن

$$\bar{ت} = \frac{٢٩٤٠}{٥٠١} = ٥,٨٧ \text{ سنوات}$$

ومما سبق نجد أن الوسط الحسابي $\bar{س}$ = ٧ سنوات

والوسط الهندسي للبيانات نفسها = ٦,٤٣ سنوات

والوسط التوافقي للبيانات نفسها = ٥,٨٧ سنوات (وهو أقل المتوسطات الثلاثة في المقدار).

(٣ - ٧) تمارين

١ - اذكر مميزات المتوسطات التالية:

ا - الوسط الحسابي.

ب - الوسيط.

جـ - المنوال.

د - الوسط الهندسي.

هـ - الوسط التوافقي.

٢ - إذا كانت القيم ٦، ٧، ٩، ١٠ للمتغير س. فاحسب التالي:

مجـ س، (مجـ س)^٢، مجـ (س - ٨)، مجـ (س - ٨)^٢، $\frac{١}{٤}$ مجـ س،

$$\frac{١}{٣} \left(\text{مجـ س}^٢ - \frac{(\text{مجـ س})^٢}{٤} \right)$$

٣ ـ الجدول التالي يعطي قيما للمتغيرين س، ص

س	٤	٥	٨	٤	٩
ص	٢-	٣	٥	٢	٧

ا ـ احسب

مجـ س، مجـ ص، مجـ $س^{٢}$، مجـ $ص^{٢}$، مجـ س ص.

ب ـ أي العلاقات التالية صحيح وأيها غير صحيح (استخدم القيم السابقة في الإثبات)

١) مجـ ٥ س = ٥ مجـ س

٢) مجـ (س + ص) = مجـ س + مجـ ص

٣) مجـ $(س + ص)^{٢}$ = مجـ $س^{٢}$ + مجـ $ص^{٢}$

٤) مجـ $س^{٢}$ = مجـ س . مجـ س

٤ ـ البيانات التالية تمثل أوزان لمجموعة من الأطفال بالكيلوجرام بعد سنة من الولادة

٧، ٨، ٧، ٧، ٩، ١٠، ٩، ٩، ١٠

احسب

ا) متوسط أوزان الأطفال.

ب) الوسيط للأوزان.

جـ) المنوال للأوزان.

د) احسب الوسط الهندسي للأوزان.

٥ ـ لدينا أربع عينات من الطلبة كل عينة مكونة من ١٢، ١٥، ١٣، ١٨ طالبا وكان متوسط أطوال العينات هو ١,٧٢ من المتر، ١,٥ من المتر، ١,٤٧ من المتر، ١,٦١ من المتر على الترتيب.

ا) اوجد متوسط أطوال الطلاب في العينات الأربعة مجتمعة.

ب) أوجد الوسيط لأطوال العينات الأربعة مجتمعة.
جـ) أوجد المنوال لأطوال العينات الأربعة مجتمعة.

٦ - من المعلوم أن الامتحان النهائي لأي مقرر له وزن يعادل ثلاثة أمثال امتحان الأعمال الفصلية، فإذا كانت درجات طالب في الامتحان النهائي لمادة ما هي ٧١ وفي امتحاني الأعمال الفصلية هما ٥٧، ٨١. فاحسب متوسط درجات هذا الطالب في هذه المادة.

٧ - من المعلوم أن تقديرات النجاح أو الرسوب في المواد الدراسية بالجامعة هي ا، ب، جـ، د، هـ ذات نقاط ٥، ٤، ٣، ٢، ١ على الترتيب والجدول الآتي يمثل عدد الساعات الدراسية التي اجتازها والتقديرات التي حصل عليها طالب ما في كلية العلوم.

جدول التوزيع التكراري للتقديرات

عدد الساعات	التقدير
١٥	ا
٣٦	ب
٢٥	جـ
٢٠	د
٦	هـ

احسب المعدل التراكمي لهذا الطالب.

٨ - يوجد مقياس من مقاييس النزعة المركزية يتأثر أكثر من غيره في الالتواء في التوزيعات التكرارية المختلفة. اذكر هذا المقياس واشرح السبب.

٩ ـ الجدول الآتي يبين توزيع أطوال ٤٠ من أوراق نبات الغار بالملليمتر

جدول التوزيع التكراري لأطوال أوراق نبات الغار

الطول بالملليمتر	التكـــرار
١١٨ ـ ١٢٦	٣
١٢٧ ـ ١٣٥	٥
١٣٦ ـ ١٤٤	٩
١٤٥ ـ ١٥٣	١٢
١٥٤ ـ ١٦٢	٥
١٦٣ ـ ١٧١	٤
١٧٢ ـ ١٨٠	٢

أوجد المقادير التالية :

ا) الوسط الحسابي لأطوال أوراق نبات الغار.

ب) الوسيط لأطوال أوراق نبات الغار حسابيا وبيانيا.

جـ) المنوال لأطوال أوراق نبات الغار حسابيا وبيانيا.

د) احسب الوسط الهندسي والوسط التوافقي.

١٠ـ الجدول الآتي يمثل الدخل بمئات الريالات لعدد من الأسر

جدول التوزيع التكراري للدخل لمجموعة من الأسر

فئات الدخل	٢٠ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٩	٦٠ فأكثر
عدد الأسر	٧	١٢	١٥	١٠	٦

احسب ما يلي :

ا) الوسيط لدخل الأسر.

ب) المنوال لدخل الأسر.

جـ) هل يمكن حساب الوسط الحسابي للدخل؟ ولماذا؟

١١ـ أوجد المنوال للتقديرات الآتية لمجموعة من الطلاب

أ، ب، ب، جـ، د، جـ، د، ب، د

د، د، هـ، د، هـ، جـ، جـ، د

١٢ـ الجدول التالي يمثل أوزان عينة من طلاب جامعة الملك سعود مقربة لأقرب كيلوجرام.

جدول التوزيع التكراري لأوزان عينة من طلاب جامعة الملك سعود

مراكز الفئات للوزن	٤٢	٤٧	٥٢	٥٧	٦٢	٦٧
عـدد الطـلاب	٣	١٠	١٩	١٢	٤	٢

ا) اوجد الوسط الحسابي للأوزان.

ب) اوجد الوسيط حسابيا وبيانيا.

جـ) اوجد المنوال حسابيا وبيانيا.

د) اوجد الوسط الهندسي والوسط التوافقي للأوزان.

١٣ ـ ا) قارن بين مجموعة البيانات التالية من حيث تمركزها

المجموعة الأولى: ٢٥، ٢٣، ٢٦، ٢٥، ٢٤، ٢٧، ٢٦، ٢٤، ٢٥

المجموعة الثانية: ٢٢، ٢٩، ٢٨، ٢١، ٢٢، ٢٥، ٢٨، ٢٩، ٢٦

ب) المتوسط الحسابي لمجموعة من البيانات يتأثر بالقيم المتطرفة ـ ناقش هذه الظاهرة مع ذكر أمثلة على ذلك.

جـ) هل تعتبر الوسيط أفضل من المتوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية للبيانات السابقة؟ اذكر السبب.

١٤ ـ إذا كانت مجـ $س^2$ = ١٠٠ و مجـ س (س − ١) = ٨٠ لعينة مكونة من خمس وحدات، أوجد الوسط الحسابي لهذه العينة.

١٥ - ا) اثبت أن :

$\text{مج}\ (س - \bar{س}) = \text{صفر}$

ب) إذا كان ا وسطا فرضيا وكانت ح = س - ا.

عندئذ فاثبت أن :

$$\bar{س} = ا + \frac{\text{مج}\ ح}{ن}$$

١٦- يحتوي الجدول التالي على تلخيص وسائل الوصول لستين شخصا إلى إحدى المدن بالمملكة.

جدول التوزيع التكراري لوسائل النقل

وسيلة النقل	حافلة	سفينة	طائرة	سيارة	وسائل أخرى
عدد الوافدين	١٣	١٢	٢٥	٧	٣

اوجد مقياسًا مناسبًا للنزعة المركزية وحدد قيمته.

١٧- الحمولة القصوى لأحد المصاعد كانت ٢٠٠٠ كجم، قرر ما إذا كانت الحمولات التالية أكبر من طاقة المصعد؟

ا) إذا صعد ٢٣ شخصًا، وزن كل منهم ٧٥ كجم؟

ب) إذا صعد ١٥ شخصا وزن كل منهم ٧٣ كجم و ٩ آخرون، وزن كل منهم ٩٥ كجم.

١٨- إذا كانت أسعار أربعة أنواع من الفاكهة ٢٠، ٢٧، ٤٢، ٣٧ ريالا على التوالي للصندوق الواحد. إذا باع أحد التجار ٥٠ صندوقا من النوع الأول، ١٥٦ صندوقا من النوع الثاني، ٢٨٦ صندوقا من النوع الثالث، و ٩ صناديق من النوع الرابع. فأوجد متوسط سعر البيع للصندوق الواحد.

١٩- الجدول التالي يبين متوسط دخل العمال في إحدى المؤسسات الصناعية، وذلك حسب مهنة كل منهم.

جدول التوزيع التكراري لمتوسط الدخل الأسبوعي للعمال حسب المهنة

المهنـــة	عدد العمال	متوسط الدخل الأسبوعي للعامل بالريال السعودي
عمال التصنيع	٩٨٨٠٠	٩٠٠
عمال المناجم	٢٣٥٠٠	١٢٠٠
عمال التشييد	٣٩٣٠٠	٨٠٠

أوجد متوسط الدخل الأسبوعي لـ ١٦١٦٠٠ عامل يعملون بهذه المؤسسة.