

## الفصل الخامس

### التوزيع الطبيعي

#### (٥-١) مقدمة

رأينا في الفقرة (٣-٥) أن المتغيرات العشوائية المستمرة تولد فضاء عينة مستمرا، بمعنى أن نقاطه تكون متراسة بعضها إلى بعض كنقاط محور موجه. وبالتالي فإنها، بالإضافة إلى كونها لا نهائية في عددها، غير قابلة للعد. وكأمثلة تقليدية على متغيرات عشوائية مستمرة، نذكر أطوال البشر وأوزانهم، وأخطاء القياس في تجربة مخبرية، وعمر مصباح كهربائي، إلخ. كما رأينا في تلك الفقرة أنه للحصول على نموذج احتمالي لمتغير عشوائي مستمر،  $X$ ، نبدأ باختيار منحني مستمر يمثل ما سميناه بدالة الكثافة الاحتمالية، وأن مثل هذه الدالة، ولنرمز لها بـ  $f(x)$ ، يجب أن تحقق شرطين:

$$1- f(x) \geq 0، \text{ مهما يكن } x،$$

$$2- \text{المساحة تحت } f(x) \text{ تساوي الواحد تماما.}$$

وعندئذ يكون احتمال أي حادثة عددية مثل  $a < X < b$ ، حيث  $a$ ،  $b$ ، عدنان محددان، هو المساحة تحت منحنى الكثافة فوق الفترة  $(a, b)$  من محور السينات. وكنتيجة لذلك نجد أن احتمال أن يفترض المتغير  $X$  قيمة معينة،  $a$ ، مثلا، أي  $P(X = a)$ ، هو المساحة تحت المنحنى فوق النقطة  $a$ ، وهي صفر. وهكذا فإن مثل

هذا الحل لمشكلة إيجاد نموذج احتمالي لفضاء عينه مستمر يحتم علينا القول إن احتمال أن يكون لمتغير عشوائي مستمر قيمة معينة هو احتمال يساوي الصفر. وهذا تعبير واقعي عن استحالة توصل الإنسان إلى أجهزة قياس دقيقة بصورة مطلقة.

وبينما تتخذ منحنيات الكثافة أشكالا مختلفة نلاحظ أن عددا كبيرا من المتغيرات العشوائية التي نواجهها في حياتنا العامة لها منحني كثافة، أو منحني تكرار، له تقريبا شكل الجرس، أو، كما نعبّر عن ذلك إحصائيا، له بصورة تقريبية شكل منحني التكرار الطبيعي، أو شكل التوزيع الطبيعي.

وبصورة عامة لنفرض أننا لاحظنا، في مجتمع القياسات لظاهرة معينة، ميلا واضحا إلى التناظر والاعتدال، بمعنى أن القياسات المتطرفة التي تمثل فرط زيادة أو فرط نقصان، هي قياسات نادرة. ويزداد تكرار ظهور القياس في ذلك المجتمع كلما اقتربت قيمة القياس من المتوسط. فالقيمة المتوسطة في المجتمع والقيم المجاورة لها هي القياسات الأكثر تواترا، بينما تكون القياسات البعيدة عن المتوسط زيادة أو نقصانا نادرة الظهور. وبعبارة أخرى، لنفرض أن الوسطية والاعتدال هي السائدة في مجتمع القياسات لظاهرة معينة، فعندئذ نقول إن النموذج الاحتمالي المناسب لهذه الظاهرة هو نموذج «التوزيع الطبيعي». وقد برزت تسمية «الطبيعي» في القرن الثامن عشر في سياق نظرية «أخطاء القياسات» عندما وجد أنه في تجربة يسير كل شيء فيها سيرا طبيعيا (normally)، ستكون أخطاء القياسات خاضعة للتوزيع الاحتمالي الذي يتخذ منحني الكثافة فيه شكل الجرس (أو شكل منحني جاوس). وتجدر هنا ملاحظة أنه عندما تتوافر كفاءة المجرب ومقدرته على إجراء القياسات بصورة سليمة، وتتوافر إلى جانب ذلك سلامة الأجهزة المستخدمة، وسلامة الظروف التي تتم تحتها التجربة، فإن الأخطاء ستتذبذب بصورة قريبة من التناظر بين أخطاء بالزيادة وأخطاء بالنقصان، وستكون الأخطاء الفاحشة بالزيادة أو بالنقصان نادرة، بينما تتمركز معظم نتائج القياسات حول القيمة الحقيقية، التي تشكل المتوسط، وقريبا منها. وينبغي ألا تملّي التسمية أي شكل من أشكال خصوصية هذا التوزيع لعلوم الطبيعة، فهو يلعب، في

الواقع، دورا أعم من ذلك بكثير وأوسع، وهو بين التوزيعات الاحتمالية، بمختلف أنواعها ومسمياتها، علم بارز، إليه تستند، بصورة رئيسة، العديد من الطرق الإحصائية، وبدونه تضيق الحلبة الواسعة لتطبيقات الإحصاء في الحياة المعاصرة. وسنجد فيما يسمى «نظرية النهاية المركزية» أن مجموع عدد كبير من المركبات العشوائية، هو دائما متغير عشوائي ينزع، تحت شروط عامة جدا، إلى الخضوع للتوزيع الطبيعي، وذلك بصرف النظر عن طبائع تلك المركبات العشوائية التي تمثل كل منها متغيرا عشوائيا له توزيعه الاحتمالي الخاص. وقد رأينا في الفصل الثاني أن المعايير الإحصائية المهمة يعبر عنها بدلالة مجموع متغيرات، فمثلا،  $n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ ، و  $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ، كما رأينا في الفصل الرابع أن عدد النجاحات،  $x$ ، في تجربة ثنائية ما هو إلا مجموع عينة حجمها  $n$  مأخوذة من مجتمع بيرنولي. وهذا يشير بوضوح إلى الأهمية الخاصة لهذا التوزيع في مباحث الإحصاء.

### (٥ - ٢) دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي

تعرف دالة الكثافة الإحتمالية للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; \begin{matrix} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < \mu < +\infty \\ 0 < \sigma < +\infty \end{matrix}$$

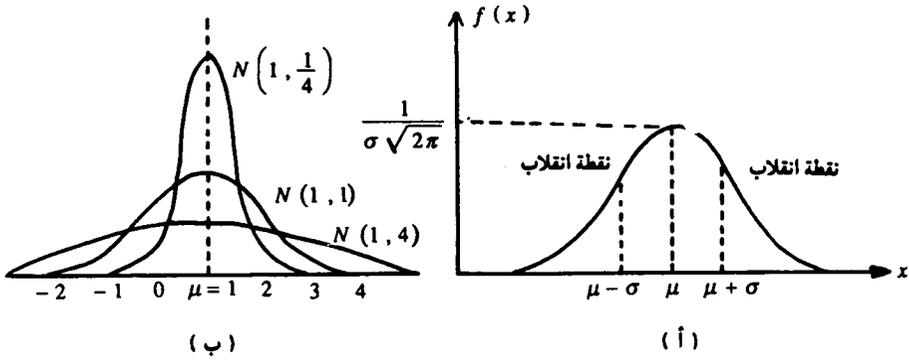
وهي دالة منحني له شكل الجرس (انظر الشكل ٥ - ١) حيث :

$\pi$  عدد ثابت يساوي تقريبا 3.1416 ،

$e$  عدد ثابت يساوي تقريبا 2.7183 ،

$\mu$  عدد ثابت يمكن أن يكون أي عدد حقيقي ،

$\sigma$  عدد ثابت يمكن أن يكون أي عدد حقيقي موجب .



شكل (٥ - ١)

والدالة أعلاه لا تحدد منحنيًا واحدًا بعينه وإنما تحدد الشكل العام لعائلة من المنحنيات . إذ كلما حددنا لـ  $\mu$  قيمة ولـ  $\sigma$  قيمة نحصل على منحني محدد تمامًا . ولذلك يسمى كل من الثابتين  $\mu$  ،  $\sigma$  معلمة .

ويمكن البرهان على أن المعلمة  $\mu$  تمثل متوسط التوزيع الاحتمالي ، أي  $E(X) = \mu$  ، وأن المعلمة  $\sigma$  تمثل الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي ، أي  $V(X) = \sigma^2$  . وللمنحنيات الطبيعية المختلفة متوسطات مختلفة ، وانحرافات معيارية مختلفة ، إلا أن المتوسط  $\mu$  والانحراف المعياري  $\sigma$  لمنحن طبيعي معين محددان تمام التحديد وثابتان . وهكذا نجد أن تحديد قيمة لـ  $\mu$  وقيمة لـ  $\sigma$  يحدد تمامًا منحنيًا ، وعلى العكس كل منحني من عائلة المنحنيات الطبيعية (منحنيات جاوس أو المنحنيات على شكل جرس) تحدد تمامًا قيمة لـ  $\mu$  وقيمة لـ  $\sigma$  . وهذا يلقي بعض الضوء على سبب تسمية  $\mu$  و  $\sigma$  معلمات . ويُبرهن في الحساب التكاملي أن المساحة تحت المنحني

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

يساوي  $\sigma\sqrt{2\pi}$  تمامًا . وبالتالي فإن المساحة تحت المنحني الطبيعي  $f(x)$  ، كما عرفناه أعلاه تساوي الواحد تمامًا .

ونلاحظ أن المنحني متناظر حول المستقيم  $x = \mu$  الموازي للمحور الرأسي . لأن الدالة  $f$  تأخذ القيمة نفسها في نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى النقطة  $x = \mu$  ، فلو حسبنا ، مثلاً ،  $f(\mu + a)$  و  $f(\mu - a)$  لوجدنا :

$$f(\mu + a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu + a - \mu}{\sigma} \right]^2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\sigma^2}}$$

$$f(\mu - a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{\mu - a - \mu}{\sigma} \right]^2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\sigma^2}}$$

فالنقطة  $x = \mu$  على المحور الأفقي هي النقطة التي يتمركز عندها التوزيع ( $E(X) = \mu$ ) ، وينتشر على جانبيها بصورة متناظرة .

ومن دراستك السابقة للدالة الرأسية  $e^{-t}$  ، مثلا ، تذكر أنه إذا كان الأس  $t$  موجبا دوما ، كما هو الحال في الدالة  $f(x)$  هنا حيث  $t = \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2$  ، فإن أكبر قيمة لـ  $e^{-t}$  تساوي الواحد ، وهي القيمة الموافقة لـ  $t = 0$  ، (في مثالنا  $x = \mu$ ) . وتتناقص قيمة  $e^{-t}$  مع تزايد  $t$  وتنتهي إلى الصفر (أي تتقارب إلى المحور الأفقي) عندما تزداد  $t$  إلى اللانهاية . وهكذا فإن دالة الكثافة  $f(x)$  تبلغ نهايتها العظمى عند  $x = \mu$  وتكون قيمتها عندئذ :

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\mu - \mu}{\sigma} \right)^2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

وللمنحنى  $f(x)$  نقطتا إنقلاب عند  $x = \mu + \sigma$  و  $x = \mu - \sigma$  (أنظر الشكل ١ - ٥ (أ)). لتصور في الشكل ١ - ٥ (أ) أن المنحنى عبارة عن سلك رفيع وشديد المرونة . فإذا ضغطنا على القمة سينتشر السلك انتشارا أوسع على جانبي  $\mu$  ، أي يأخذ شكلا أكثر انبساطا باعتبار أن المساحة تحت السلك يجب أن تبقى دائما ثابتة ومساوية للواحد . وإذا رفعنا القمة إلى أعلى فسيقبل انبساط المنحنى ويتضاءل انتشاره على جانبي  $\mu$  . ونرى في الشكل ١ - ٥ (ب) تمثيلا يوضح الفكرة . وقد استخدم الرمز  $N(\mu, \sigma^2)$  للدلالة على توزيع طبيعي بمتوسط  $\mu$  وتباين  $\sigma^2$  ، وهكذا يعني  $N\left(1, \frac{1}{4}\right)$  توزيعا طبيعيا بمتوسطه  $\mu = 1$  وتباينه  $\sigma^2 = \frac{1}{4}$  ، وللمنحنيات الثلاثة في الشكل (١ - ٥) ب المتوسط نفسه وهو 1 . وعندما ارتفعت قمة المنحنى  $N(1, 1)$  تضاءل انتشاره على جانبي المتوسط  $\mu = 1$  وبالتالي قل  $\sigma^2$  من 1 إلى  $\frac{1}{4}$  ، وعلى العكس عندما انخفضت قمة المنحنى ، اتسع

انتشاره على جانبي  $\mu$  وازداد تباينه من 1 إلى 4 . ولو عدنا إلى قيمة  $f(x)$  العظمى وهي  $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  لتبين لنا أن القيم الصغيرة لـ  $\sigma$  تعني قمة مرتفعة، أي توزيعا أقل انتشارا حول متوسطه، وأن القيم الكبيرة لـ  $\sigma$  تعني قمة منخفضة، أي توزيعا أكثر انتشارا على جانبي المتوسط . ولما كان التباين، كما نعلم من الفصلين الثاني والرابع، مقياسا لمدى انتشار التوزيع على جانبي المتوسط، فإن هذه الملاحظة توضح أن  $\sigma^2$  يمثل تباين التوزيع الأمر الذي ذكرناه منذ قليل كنتيجة يمكن إثباتها رياضيا باستخدام الحساب التكاملي وبطرق تعتبر فوق مستوى هذا الكتاب .

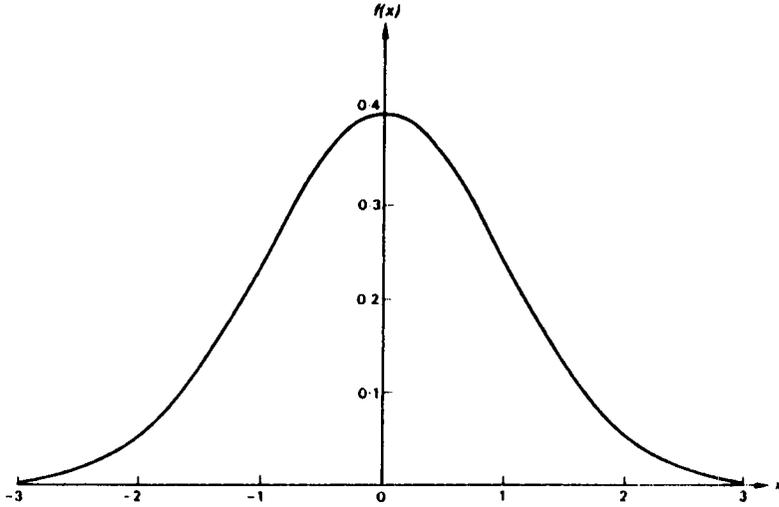
ومن بين أسرة المنحنيات الطبيعية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; \begin{array}{l} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < \mu < +\infty \\ 0 < \sigma < +\infty \end{array}$$

سنختار منحنيًا خاصًا هو ذلك المنحنى الذي يكون متوسطه  $\mu = 0$  وانحرافه المعياري  $\sigma = 1$  . وتمييزًا لهذا المنحنى، الذي سيلعب دورًا هامًا في تطبيقات التوزيع الطبيعي سنطلق عليه اسم المنحنى الطبيعي المعياري . وإذا استخدمنا الحرف  $Z$  للمتغير الطبيعي المعياري فستصبح معادلة المنحنى أعلاه بعد وضع  $\mu = 0$ ،  $\sigma = 1$  على الشكل

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} ; -\infty < Z < +\infty .$$

ونجد في الشكل (٥ - ٢) الرسم البياني لهذا المنحنى . وتجدر ملاحظة أنه متناظر بالنسبة إلى المحور الرأسي . وما دامت المساحة تحت المنحنى بكامله من  $Z = -\infty$  إلى  $Z = +\infty$  هي الواحد تمامًا فالمساحة على اليمين من  $Z = 0$  تساوي المساحة على اليسار من  $Z = 0$  وكل منهما تساوي النصف .



شكل (٥-٢) المنحنى الطبيعي المعياري

## تمارين (٥-١)

(١) اكتب دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي مفترضا القيم التالية للمتوسط والتباين:

- أ - المتوسط يساوي 3 ، والتباين يساوي 4 .
  - ب - المتوسط يساوي 0 ، والتباين يساوي 5 .
  - ج - المتوسط يساوي -2 ، والتباين يساوي 1 .
  - د - المتوسط يساوي -6 ، والتباين يساوي 10 .
- حدد في كل حالة أين تقع قمة المنحنى وحاول أن تخطط رسما تقريبا له .

(٢) متغير عشوائي  $X$  دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{18}x^2} ; -\infty < x < +\infty .$$

ما متوسطه وانحرافه المعياري؟

(٣) متغير عشوائي  $X$  دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = c e^{-\frac{(x-4)^2}{6}} ; -\infty < x < +\infty .$$

ما قيمة  $c$  ؟

(٥ - ٣) المساحات تحت منحنى الكثافة الطبيعي

ذكرنا أن معادلة منحنى الكثافة الطبيعي ، كما وردت في مستهل الفقرة السابقة ، لا تمثل منحنيا واحدا ، بل عائلة من المنحنيات لا حصر ولا عد لأعضائها . ووضع جدول للمساحات خاص بكل منها أمر غير ممكن . وسنجد الآن أنه يمكن وضع جدول واحد كاف لحساب المساحات تحت أي منحنى كثافة طبيعي . وأسهل طريقة لتحقيق ذلك هي أن نحسب المساحات الواقعة ضمن عدد محدد من الانحرافات المعيارية على جانبي المتوسط . وبما أن المنحنى متناظر يمكن التبسيط بإقامة جدول للمساحات تحت المنحنى بين  $\mu$  والنقاط  $x$  الواقعة على اليمين من  $\mu$  . وإذا فرضنا نقطة  $x$  أكبر من  $\mu$  فإن المسافة بين  $x$  و  $\mu$  هي  $x - \mu$  ، وإذا عبرنا عنها بدلالة الانحراف المعياري  $\sigma$  ، ولنفرض أنها تساوي  $Z$  مرة الانحراف المعياري  $\sigma$  ، فيمكننا أن نكتب  $x - \mu = Z\sigma$  ، وإذا قسنا المسافات على محور الفواصل بوحدة قياس تساوي  $\sigma$  (وعندها يكون  $\sigma = 1$  حكما) فإن قيمة المسافة  $x - \mu$  مقاسة بالوحدة الجديدة تصبح  $Z$  أي تساوي  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  . وهكذا نكتب المتغير الجديد  $Z$  بدلالة المتغير  $X$  على الشكل :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ونلاحظ أنه يوافق كل قيمة لـ  $X$  قيمة واحدة لـ  $Z$  والعكس بالعكس . وأن  $Z$  ليس إلا القيمة المعيارية لـ  $X$  . وفي الواقع ، لو حسبنا  $E(Z)$  و  $V(Z)$  لوجدنا :

$$E(Z) = E\left[\frac{1}{\sigma} (X - \mu)\right] = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} [E(X) - \mu] = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

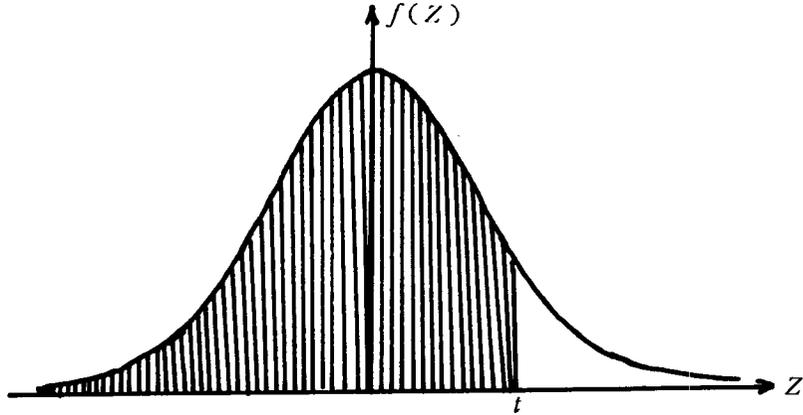
أي أن للمتغير  $Z$  متوسطا يساوي الصفر وانحرافا معياريا يساوي الواحد ، ويمكن البرهان على أن التوزيع الاحتمالي لـ  $Z$  هو التوزيع الطبيعي . وبذلك يكون

منحنى الكثافة الموافق لـ  $Z$  عضوا في أسرة المنحنيات الطبيعية، وبالذات ذلك العضو المقابل لـ  $\mu = 0$  و  $\sigma = 1$ . وهو بالضبط منحنى الكثافة المذكور في ختام الفقرة (٢-٥):

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} ; -\infty < Z < +\infty .$$

وربما أصبح واضحا الآن سبب تسمية هذا المنحنى بالمنحنى الطبيعي المعياري.

ويقدم جدول التوزيع الطبيعي في الملحق، المساحات تحت هذا المنحنى إلى اليسار من نقطة معينة  $Z = t$ . ونقصد المساحة المظللة في الشكل (٣-٥).



شكل (٣-٥) دالة التوزيع المتجمع للمتغير الطبيعي المعياري  $Z$

وبالعودة إلى جدول التوزيع الطبيعي المشار إليه في الملحق، نلاحظ أن قيم  $Z$  في الجدول تبدأ من الصفر بفاصل قدره 0.01 بين كل قيمة والقيمة التي تليها. وهكذا تكون كل قيمة لـ  $Z$  معطاة برقمين عشرين. ويتضمن العمود الأول قيما لـ  $Z$  بفاصل يساوي 0.1 من قيمة إلى القيمة التي تليها. وتشكل هذه القيم عناوين لسطور الجدول، إذ نبدأ بالسطر 0 يليه السطر 0.1، فالسطر 0.2، وهكذا حتى نصل إلى السطر 3.4. أما المنزلة العشرية الثانية من قيمة  $Z$  فهي معطاة في السطر الأفقي الأول من الجدول، وتشكل عناوين لأعمدة الجدول، بدءا من العمود الثاني حتى العمود الأخير، وهكذا

نجد العمود 0.00 يليه العمود 0.01 ، يليه العمود 0.02 ، وهكذا حتى نصل إلى العمود 0.09 وهو العمود الأخير. وكل عدد في صلب الجدول ، وهو ملتقى سطر مع عمود ، يمثل المساحة تحت منحنى الكثافة المعياري وإلى اليسار من قيمة  $Z$  التي يحددها عنوان السطر حتى الرقم العشري الأول ويستكمل عنوان العمود رقمها العشري الثاني . وهكذا فإن العدد 0.8212 الواقع في ملتقى السطر 0.9 مع العمود 0.02 ، يمثل المساحة تحت منحنى الكثافة الواقعة إلى اليسار من  $Z = 0.92$  ، أي المساحة تحت المنحنى وفوق الفترة الممتدة بين  $-\infty$  والنقطة 0.92 من المحور  $Z$  . وعلى العكس ، إذا أردنا المساحة الواقعة إلى اليسار من  $Z = 1.96$  ، مثلاً ، ندخل الجدول وفق السطر 1.9 والعمود 0.06 فنجد عند ملتقاهما العدد 0.9750 وهو المساحة المطلوبة . وإذا كانت قيمة  $Z$  معطاة بأكثر من رقمين عشريين فإننا نحصرها بين قيمتين مذكورتين في الجدول ثم نقوم بعملية تناسب طردي ، (عملية استيفاء) .

والأسئلة الوجيهة التي تطرح نفسها هنا هي :

١ - إذ يقتصر الجدول على القيم الموجبة لـ  $Z$  ، ما العمل لو كانت القيمة المعطاة لـ  $Z$  سالبة؟

٢ - ما العمل لو كان المطلوب هو المساحة إلى اليمين من قيمة لـ  $Z$  سالبة أو موجبة؟

٣ - ما العمل لو كان المطلوب هو المساحة بين أي قيمتين لـ  $Z$  ؟

وللإجابة عن هذه التساؤلات نعود إلى التعريف في (٣ - ٦ - ٢) لدالة التوزيع

المتجمع ، ونكتب : المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري الواقعة إلى اليسار من

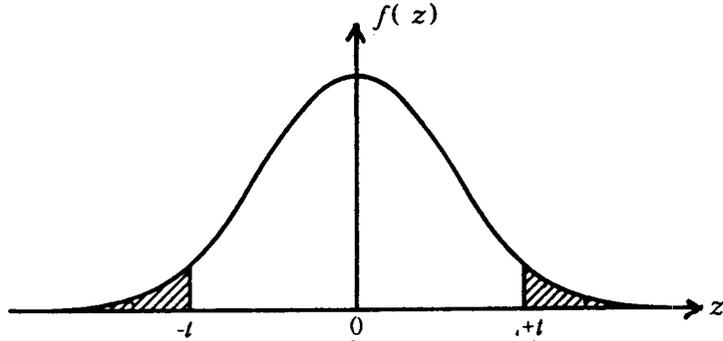
$$P(Z \leq t) = F(t) = \text{النقطة } t$$

وتتمتع هذه الدالة  $F(t)$  بالخاصة المهمة التالية :

$$F(-t) = 1 - F(t)$$

وهي نتيجة مباشرة لتناظر المنحنى الطبيعي المعياري بالنسبة إلى المحور الرأسي .

إذ لو نظرنا إلى الشكل (٥ - ٤) لوجدنا أن  $F(-t)$  يساوي المنطقة I المظللة على اليسار من



شكل (٤-٥)

$Z = -l$  وأن  $F(l)$  هي مجموع المنطقة المظلمة في أقصى اليسار والمنطقة غير المظلمة في الوسط. و  $1 - F(l)$  يساوي بوضوح المنطقة المظلمة في أقصى اليمين، وبما أن المنطقتين المظلمتين متساويتان بحكم التناظر فإن  $F(-l) = 1 - F(l)$ . ولإيجاد  $F(-l)$  يكفي إذن حساب  $F(l)$  من الجدول الموصوف أعلاه، حيث  $l$  موجبة، ثم نطرح القيمة الناتجة من 1 وهذا يجيب عن السؤال الأول.

ومن خاصة الحادثتين المتتامتين،  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ، نجد مباشرة أن:

$$P(Z > l) = 1 - P(Z \leq l) = 1 - F(l)$$

وهذا يجيب عن السؤال الثاني.

وللإجابة عن السؤال الثالث، لنفرض أن المطلوب هو حساب

$$P(a < Z \leq b)$$

فمن الواضح أنه يمكن التعبير عن الحادثة  $(Z \leq b)$  كإتحاد حادتين منفصلتين

على الشكل

$$(Z \leq b) = (Z \leq a) \cup (a < Z \leq b)$$

ومنه:

$$P(Z \leq b) = P(Z \leq a) + P(a < Z \leq b)$$

أي:

$$F(b) = F(a) + P(a < Z \leq b)$$

أو

$$P(a < Z \leq b) = F(b) - F(a)$$

وبما أن الاحتمال الموافق لنقطة في التوزيعات المستمرة يساوي الصفر فيمكن كتابة

$$P(a \leq Z < b) = P(a < Z \leq b) = P(a \leq Z \leq b) = P(a < Z < b)$$

مثال (٥ - ١)

احسب  $P(Z \leq 1.35)$  ،  $P(Z > 0.5)$  ،  $P(Z < -1.79)$  ،  $P(Z \geq -0.68)$  ،

$P(-1.85 < Z < -0.16)$  ،  $P(-0.1 < Z < 2.5)$  ،  $P(1 < Z < 3.27)$

الحل

$$P(Z \leq 1.35) = F(1.35) = 0.09115$$

(ندخل الجدول وفق السطر 1.3 والعمود 0.05).

$$P(Z > 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

(ندخل الجدول وفق السطر 0.5 والعمود 0.00).

$$P(Z < -1.79) = F(-1.79) = 1 - F(1.79) = 1 - 0.9633 = 0.0367$$

(ندخل الجدول وفق السطر 1.7 والعمود 0.09).

$$P(Z \geq -0.68) = 1 - P(Z < -0.68) = 1 - F(-0.68)$$

$$= 1 - [1 - F(0.68)] = F(0.68) = 0.7517$$

(ندخل الجدول وفق السطر 0.6 والعمود 0.08).

$$P(1 < Z < 3.27) = F(3.27) - F(1)$$

$$= 0.9995 - 0.8413 = 0.1582$$

$$P(-0.1 < Z < 2.5) = F(2.5) - F(-0.1)$$

$$= F(2.5) - [1 - F(0.1)]$$

$$= F(2.5) + F(0.1) - 1$$

$$= 0.9938 + 0.5398 - 1 = 1.5336 - 1 = 0.5336$$

$$\begin{aligned}
P(-1.85 < Z < -0.16) &= F(-0.16) - F(-1.85) \\
&= [1 - F(0.16)] + [1 - F(1.85)] \\
&= 2 - F(0.16) - F(1.85) \\
&= 2 - 0.5636 - 0.9678 = 2 - 1.5314 = 0.4686
\end{aligned}$$

لاحظ أننا نعود إلى الجدول عندما يكون المطلوب  $F(d)$  حيث  $d$  عدد موجب .

مثال (٥ - ٢)

احسب  $c$  بحيث يكون

$$\begin{aligned}
P(Z > c) = 0.9292 \quad , \quad P(Z < c) = 0.2981 \quad , \quad P(Z \leq c) = 0.8264 \\
P(-c < Z < c) = 0.90 \quad P(-c < Z < c) = 0.9500
\end{aligned}$$

الحل

$$P(Z \leq c) = F(c) = 0.8264$$

والعدد  $c$  هو قيمة  $Z$  في جدول التوزيع الطبيعي المعياري التي يقع إلى اليسار منها مساحة تساوي 0.8264 . ونبحث في صلب الجدول عن هذه القيمة لنجدها بالذات وعندئذ نحدد قيمة  $Z$  المطلوبة من السطر والعمود الموافقين ، أو نحصرها بين عددين في الجدول ثم نستنتج قيمة  $Z$  المطلوبة بعملية تناسب طردي (استيفاء) . وفي حالتنا هنا نجد أن 0.8264 واقع في السطر 0.9 والعمود 0.04 وتكون القيمة  $c$  المطلوبة 0.94 .

$$P(Z < c) = 0.2981 \Leftrightarrow F(c) = 0.2981$$

وإذا كانت قيمة  $F(c)$  أصغر من 0.5 فمن الواضح أن  $c$  ستكون سالبة . ولكن الجدول لا يجوي القيم السالبة لـ  $Z$  . وفي مثل هذه الحالة نأخذ:

$$F(-c) = 1 - F(c) = 1 - 0.2981 = 0.7019$$

ونبحث في صلب الجدول عن 0.7019 فنجده في السطر 0.5 والعمود 0.03 وتكون  $c = 0.53$  أو  $-c = -0.53$  .

$$P(Z > c) = 0.9292 \Leftrightarrow 1 - F(c) = 0.9292$$

أي

$$F(-c) = 0.9292 \Leftrightarrow -c = 1.47 \Leftrightarrow c = -1.47$$

$$P(-c < Z < c) = 0.95 \Leftrightarrow F(c) - F(-c) = 0.95$$

ومنه

$$F(c) - [1 - F(c)] = 0.95$$

$$2F(c) = 1.95, F(c) = 0.975, c = 1.96.$$

$$P(-c < Z < c) = 0.90 \Leftrightarrow 2F(c) = 1.90$$

أي

$$F(c) = 0.95$$

ولدينا من الجدول

$$Z = 1.64 \text{ تقابل } 0.9495$$

$$Z = 1.65 \text{ تقابل } 0.9505$$

ومنه

تزايد Z	تزايد المساحة
0.01	0.001
?	0.0005

$$Z \text{ التزايد المطلوب في } Z = \frac{0.0005 \times 0.01}{0.001} = 0.005$$

وتكون قيمة Z المطلوبة هي

$$1.64 + 0.005 = 1.645$$

وسنصطلح على كتابة  $Z_\alpha$  لتعني قيمة المتغير الطبيعي المعياري التي يقع إلى اليمين منها مساحة تساوي  $\alpha$ . أي أن  $F(Z_\alpha) = 1 - \alpha$ . وبهذا المعنى يكون:

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = F(Z_{\alpha/2}) - F(-Z_{\alpha/2})$$

$$= 2F(Z_{\alpha/2}) - 1 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha$$

وعلى سبيل المثال:

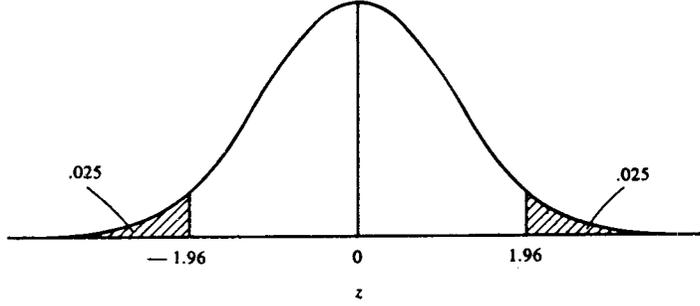
$Z_{0.025}$  هي قيمة Z التي تحصر إلى اليمين منها مساحة تساوي 0.025. ويكون

$$P(-Z_{0.025} < Z < Z_{0.025}) = 0.95$$

وقد رأينا في المثال السابق أن

$$Z_{0.025} = 1.96$$

(أنظر الشكل ٥-٥).



شكل (٥-٥)

لقد تعلمنا حتى الآن كيف نحسب احتمالات حوادث معبراً عنها بدلالة المتغير المعياري  $Z$  ، وذلك بالاستفادة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري . ولكن كيف نستفيد من هذا الجدول نفسه لحساب احتمالات حوادث معبر عنها بدلالة متغير طبيعي غير معياري ،  $X$  ، مثلاً؟ بالطبع لا يمكننا حساب مثل هذه الاحتمالات إلا إذا حددنا منحنى الكثافة للمتغير  $X$  تحديداً تاماً . أي علمنا متوسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  . وعند معرفة قيمة  $\mu$  وقيمة  $\sigma$  يصبح الأمر في غاية السهولة ، إذ نقوم بمعايرة  $X$  ، أي نكتب :

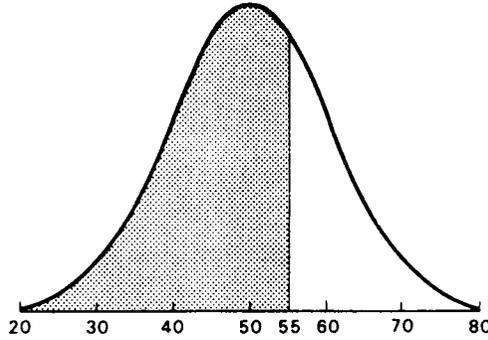
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ونحول العبارة الاحتمالية بدلالة  $X$  إلى عبارة احتمالية مكافئة بدلالة  $Z$  ، ثم نعود إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري ، الذي تدربنا لتونا على كيفية استخدامه ، لحساب المطلوب وفيما يلي توضيح عملي للفكرة .

يقدم اختصاصي في علم النفس نصائح حول أفضل المهن أو الوظائف المناسبة لفتى . ولهذا الغاية يقدم للفتى عدداً من الاختبارات . أحدها ، مثلاً ، اختبار يهدف إلى قياس مهارات التحدث أو المهارات الشفهية . لنفرض أن درجة الفتى في هذا

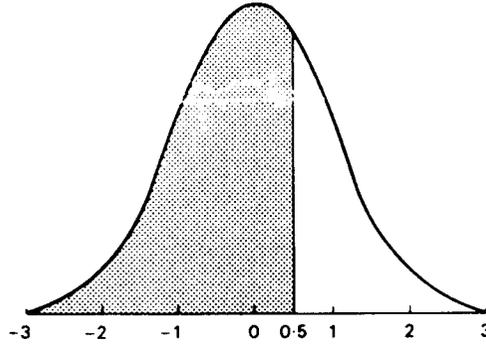
الاختبار كانت 55 . فهذا الرقم لذاته ليس له أي مدلول بالنسبة إلينا . إلا أن الاختصاصي النفسي يعلم توزيع درجات هذا الاختبار بالنسبة للرجال في المجتمع بصورة عامة . فمثل هذه الاختبارات قد استخدمت في الماضي على نطاق واسع وقدمت لعينة تمثيلية كبيرة من الرجال والنساء . وبالنسبة إلى الرجال تتوزع درجات هذا الاختبار، بصورة تقريبية، وفق التوزيع  $N(50, 10^2)$  . (في الواقع يتعمد مصممو هذه الاختبارات وضعها بحيث تتوزع الدرجات الناتجة عنها طبيعياً، على وجه التقريب) . وتوزيع هذه الدرجات مع درجة الفتى مبينة في الشكل (٥ - ٦) . وما يهم الاختصاصي النفسي حقا هو كيف يمكن مقارنة هذا الرجل مع بقية الرجال في المجتمع . ويمكن تلخيص هذه المقارنة بسهولة من خلال النسبة المثوية للرجال الذين يتوقع حصولهم على درجات في هذا الاختبار أسوأ من 55 وللحصول على هذه النسبة نحسب المساحة تحت منحنى الكثافة للتوزيع  $N(50, 100)$  الواقعة إلى اليسار من النقطة 55 وبمعايرة الدرجة 55 تأخذ القيمة :

$$Z = \frac{55 - 50}{10} = 0.5$$



شكل (٥ - ٦) : التوزيع  $N(50, 100)$  لدرجات اختبار المهارة الشفهية، والمساحة المظللة هي احتمال الحصول على درجة أقل من 55 .

والمساحة المطلوبة هي إذا المساحة الواقعة إلى اليسار من النقطة 0.5 تحت منحنى الكثافة الطبيعي المعياري والمبينة في الشكل (٥ - ٧) . وهي تساوي من الجدول ١ في



شكل (٧-٥) درجة الاختبار بعد معايرتها .

الملحق 0.6915 . وهكذا نستنتج أن 69% من المجتمع يتوقع حصولهم على درجة أسوأ، و 31% من المجتمع يتوقع حصولهم على درجة أفضل وهذا يحدد بوضوح موقعه النسبي من الآخرين .

ولو فرضنا أن درجة هذا الشاب كانت 40 في اختبار لقياس المهارات الحسابية . وهذا الاختبار مصمم بدوره بحيث يكون توزيع الدرجات الناتجة عنه  $N(50, 100)$  . وبمعايرة هذه الدرجة نجد أنها تصبح في سلم القياس المعياري :

$$Z = \frac{40 - 50}{10} = -1$$

وبالعودة إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن

$$F(Z) = F(-1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

وهكذا نتوقع أن ينال 16% فقط من المجتمع درجات أسوأ، وأن ينال 84% درجات أفضل .

وبصورة عامة، تسمى معايرة متغير طبيعي  $X$  توزيعه  $N(\mu, \sigma^2)$  ، أي التحويل من  $X$  إلى المتغير الطبيعي  $Z$  وفق العلاقة

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

تعبيراً عن قيمة المتغير  $X$  وفق سلم القياس المعياري . وهو سلم قياس يعتبر  $\mu$  مبدأ للقياسات ، ويعتبر الانحراف المعياري  $\sigma$  وحدة قياس . وعندما لا نهتم بقيمة  $X$  لذاتها بل بموقع  $X$  النسبي من المتوسط  $\mu$  ، فإن القيمة  $Z$  توضح لنا بالضبط هذا الموقع النسبي ومنطوق العبارة الجبرية  $Z\sigma = X - \mu$  ، هو أن موقع  $X$  يجيد عن النقطة  $\mu$  بمقدار  $Z$  مرة الانحراف المعياري .

مثال (٥ - ٣)

إذا كانت درجات حاصل الذكاء تتوزع طبيعياً بمتوسط يساوي 100 وانحراف معياري يساوي 15 ، فما نسبة الناس ذوي درجة ذكاء :  
 ا- فوق 125 ، تحت 80 ، بين 70 و 130 ؟

الحل

لنرمز لدرجة حاصل الذكاء بـ  $X$  ، فلدينا بالفرض أن توزيع  $X$  هو  $N(100, 152)$  . والمطلوب

$$\begin{aligned} P(X > 125) &= 1 - F\left(\frac{125 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{125 - 100}{15}\right) \\ &= 1 - F(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 \end{aligned} \quad \text{أ-}$$

والنسبة المطلوبة هي 4.75% .

$$\begin{aligned} P(X < 80) &= F\left(\frac{80 - \mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{80 - 100}{15}\right) \\ &= F(-1.33) = 1 - F(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918 \end{aligned} \quad \text{ب-}$$

والنسبة المطلوبة هي 9.18% .

$$\begin{aligned} P(70 < X < 130) &= F\left(\frac{130 - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{70 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= F\left(\frac{130 - 100}{15}\right) - F\left(\frac{70 - 100}{15}\right) = F(2) - F(-2) \\ &= 2F(2) - 1 = 2(0.9772) - 1 = 1.9544 - 1 = 0.9544 \end{aligned} \quad \text{ج-}$$

والنسبة المطلوبة هي 95.44% .

وكثيرا ما نستخدم علاقة المعايرة،  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  ، بطريقة عكسية. فنحن نعرف أو نحدد سلفا قيمة  $Z$  ، أي القياس المطلوب على السلم المعياري ، ونريد القياس المقابل له على السلم الأصلي (قبل المعايرة). فلنفرض ، مثلا ، أن لدى مدير شركة وظيفة شاغرة ، وهو لا يقبل مرشحين لهذه الوظيفة إلا إذا كانوا في مهاراتهم الحسابية من الربع الأعلى في المجتمع . ولترجمة رغبته هذه بدلالة الدرجة الدنيا التي ينبغي أن يناها المرشح في اختبار المهارات الحسابية ، نقوم بما يلي ، مفترضين أن درجات الاختبار تتبع التوزيع  $N(50, 100)$  . نحدد من عبارة «المرشح من الربع الأعلى في المجتمع في مهاراته الحسابية» قيمة  $Z$  ، وذلك لأن هذه العبارة مكافئة للمعادلة  $F(Z) = 0.75$  ، ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد ، باستخدام الاستيفاء ، أن

$$Z = 0.67 + \left(\frac{14}{31}\right)(0.01) = 0.6745$$

وبالتالي

$$X = \mu + Z\sigma = 50 + 10(0.6745) = 56.745$$

وبالتدوير إلى أقرب عدد صحيح ، نستنتج أن الدرجة المطلوبة هي 57 وهكذا لا يقبل طلب متقدم لهذه الوظيفة إلا إذا كانت درجته في اختبار المهارات الحسابية 57 أو أكثر.

مثال (٥ - ٤)

بالإشارة إلى المثال (٥ - ٣) وتوزيع درجات حاصل الذكاء . لنفرض أن الحكومة تقدم تعليما خاصا للخمسة في المائة الأدنى في حاصل ذكائهم . وتقدم تعليما جامعيًا للـسبعة في المائة الأعلى في حاصل ذكائهم . أوجد القيم المعيارية  $Z$  المقابلة لهذه النسب ثم استنتج الحدود الفاصلة في درجات حاصل الذكاء لأولئك الذين يتطلبون تعليما خاصا ، ولأولئك الذين يدخلون الجامعات .

الحل

لنفرض أن القيمة المعيارية المقابلة لنسبة جماعة التعليم الخاص هي  $a$  ، والمقابلة لنسبة جماعة التعليم الجامعي هي  $b$  فعندئذ:

$$P(Z \leq a) = 0.05, F(a) = 0.05, F(-a) = 0.95, -a = 1.645, a = -1.645.$$

$$P(Z > b) = 0.07; 1 - F(b) = 0.07, F(b) = 0.93$$

$$b = 1.47 + 8(0.01)/14 = 1.47 + 0.0057 = 1.4757$$

ويكون الحد الأعلى لدرجة حاصل الذكاء لأولئك الذين يتطلبون تعليماً خاصاً ،  
مقرباً إلى أقرب عدد صحيح هو:

$$X = \mu + a\sigma = 100 + 15(-1.645) = 75$$

والحد الأدنى لدرجة حاصل الذكاء لأولئك الذين يدخلون الجامعات ، مقرباً إلى  
أقرب عدد صحيح ، هو:

$$X = \mu + b\sigma = 100 + 15(1.4757) = 122$$

مثال (٥-٥)

إذا كان  $X$  متغيراً طبيعياً متوسطه  $\mu = 56$  وانحرافه المعياري  $\sigma = 3$  ،  
فاحسب  $P(53 < X < 59)$  ،  $P(X > 65)$  ،  $P(X \leq 60.5)$

الحل

$$\begin{aligned} P(X \leq 60.5) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{60.5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{60.5 - 56}{3}\right) \\ &= F\left(\frac{60.5 - 56}{3}\right) = F(1.5) = 0.9332 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 65) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{65 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{65 - 56}{3}\right) \quad \text{و} \\ &= 1 - F\left(\frac{65 - 56}{3}\right) = 1 - F(3) = 1 - 0.9987 = 0.0013 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(53 < X < 59) &= F\left(\frac{59 - 56}{3}\right) - F\left(\frac{53 - 56}{3}\right) \quad \text{و} \\ &= F(1) - F(-1) = 2F(1) - 1 \\ &= 2(0.8413) - 1 = 1.6826 - 1 = 0.6826 . \end{aligned}$$

مثال (٦-٥)

ليكن  $X$  متغيراً عشوائياً يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 2 وتباين  
يساوي 16 . والمطلوب حساب احتمالات الحوادث العددية التالية :

$$P(-1 < X < 35), P(X > 1), P(X < 3)$$

الحل

$$\begin{aligned}
P(X < 3) &= F\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{3-2}{4}\right) \\
&= F(0.25) = 0.5987. \\
P(X > 1) &= 1 - F\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{1-2}{4}\right) \\
&= 1 - F(-0.25) = F(0.25) = 0.5987 \\
P(-1 < X < 3.5) &= F\left(\frac{3.5-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{-1-\mu}{\sigma}\right) \\
&= F\left(\frac{3.5-2}{4}\right) - F\left(\frac{-1-2}{4}\right) \\
&= F(0.375) - F(-0.75) \\
&= F(0.375) - [1 - F(0.75)] \\
&= F(0.375) + F(0.75) - 1
\end{aligned}$$

ولحساب  $F(0.375)$  نأخذ منتصف الطريق بين  $F(0.37)$  و  $F(0.38)$  ، أي منتصف الطريق بين 0.6443 و 0.648 وهو إلى أربعة أرقام عشرية 0.6462 . وهكذا يكون

$$P(-1 < X < 3.5) = 0.6462 + 0.7734 - 1 = 0.4196$$

مثال (٧-٥)

في عملية تعبئة آلية لعبوات السكر، من المفترض أن تضع الآلة في كل عبوة 2 كغ من السكر. وبالطبع يتغير ما تضعه الآلة من عبوة إلى أخرى بشكل عشوائي. إذا افترضنا أن ما تضعه الآلة بالفعل هو متغير  $N(\mu, \sigma^2)$ .

أ - تشير السجلات السابقة للإنتاج إلى أن  $\sigma = 0.2$  ، وإلى أن احتمال أن تتضمن عبوة أقل من 2 كغ هو 0.01 . أوجد قيمة  $\mu$  التي تعمل الآلة وفقا لها . (أي القيمة المتوسطة لما تضعه هذه الآلة في العبوة الواحدة على المدى الطويل .)

ب - إذا قمنا بعملية تحسين لعمل الآلة تتوخى تخفيض  $\sigma$  (أي إنتاج عبوات أكثر تجانسا من حيث الوزن) مع بقاء  $\mu$  كما هو . كم يجب أن تكون قيمة  $\sigma$  بحيث نطمئن إلى أن احتمال عبوة بأقل مما ينبغي من السكر هو 0.001 ؟

الحل

أ- لترمز بـ  $X$  لوزن السكر الفعلي في العبوة . والمطلوب هو حساب  $\mu$  علما أن

$$P(X < 2) = 0.01$$

و  $\sigma = 0.02$  . ولكن

$$P(X < 2) = F\left(\frac{2 - \mu}{0.02}\right) = 0.01$$

أو

$$F\left(\frac{\mu - 2}{0.02}\right) = 0.99$$

ومن الجدول نجد أن :

$$\frac{\mu - 2}{0.02} = 2.33$$

أو

$$\mu = 0.02 (2.33) + 2 = 2.047$$

ب- إذا اشتغلت الآلة وفقا لـ  $\mu = 2.047$  فعندئذ يكون  $X$  متغيرا  $N(2.047, \sigma^2)$  .

ونريد قيمة  $\sigma$  بحيث يكون :

$$P(X < 2) = 0.001$$

ولكن الآن :

$$P(X < 2) = F\left(\frac{2 - 2.047}{\sigma}\right)$$

إذا نريد  $\sigma$  بحيث يكون

$$F\left(\frac{-0.047}{\sigma}\right) = 0.001$$

أو

$$F\left(\frac{0.047}{\sigma}\right) = 0.999$$

ومن الجدول نجد :

$$\frac{0.047}{\sigma} = 3.09$$

أي أن

$$\sigma = \frac{0.047}{3.09} = 0.015$$

مثال (٥-٨)

مفترضاً أن طول الذكر البالغ  $X$ ، مقاساً بالسنتيمتر، هو متغير  $N(175, 56.25)$ . كيف يحدد مهندس ارتفاع أبواب الغرف في فيلا يقوم بتصميمها بحيث لا يضطر أكثر من 2% من الرجال إلى طأطأة رؤوسهم عند الدخول أو الخروج؟

الحل

لنفرض أن ارتفاع الباب  $a$  سم فيكون المطلوب تحديد قيمة  $a$  بحيث يكون:

$$P(X > a) \leq 0.02$$

ولكن

$$P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - F\left(\frac{a-175}{7.5}\right) \leq 0.02$$

وبالتالي يكون

$$F\left(\frac{a-175}{7.5}\right) \geq 0.98$$

ومن الجدول نجد أن:

$$\frac{a-175}{7.5} \geq 2.057$$

وهكذا يكون:

$$a \geq 175 + 2.057(7.5) = 190.43$$

أي أن ارتفاع الباب ينبغي أن يكون 190.5 سم على الأقل.

تمارين (٥-٢)

(١) باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أحسب الاحتمالات التالية، حيث  $Z$  المتغير

الطبيعي المعياري  $N(0, 1)$ .

$$P(Z \leq 1.2), \quad P(-0.9 < Z < 0), \quad P(0.3 < Z < 1.56), \quad P(|Z| < 0.2),$$

$$P(-1.3 < Z < 1.74), \quad P(Z > -0.75), \quad P(Z \leq -0.32).$$

(٢) أوجد المساحة تحت منحنى كثافة التوزيع الطبيعي المعياري الواقعة:

أ- إلى اليسار من 1،

ب- إلى اليسار من 2 ،

ج- بين 1 و 2 ،

د- إلى اليمين من -0.5 ،

هـ- إلى اليسار من -1 ،

و- بين -1 و +1 .

(٣) أوجد العدد  $c$  بحيث يكون :

أ-  $P(Z < c) = 0.8643$  ،

ب-  $P(Z < c) = 0.2266$  ،

ج-  $P(Z \geq -c) = 0.6554$  ،

د-  $P(Z < c) = 0.05$  ،

هـ-  $P(-c < Z < c) = 0.90$  ،

و-  $P(-c < Z < c) = 0.95$  ،

ز-  $P(-c < Z < c) = 0.99$  .

(٤) إذا رمزنا بـ  $Z_\alpha$  لقيمة المتغير الطبيعي المعياري  $Z$  التي تركز إلى اليمين منها مساحة

تساوي  $\alpha$  ، فاحسب  $Z_{0.10}$  ،  $Z_{0.01}$  ،  $Z_{0.02}$  ،  $Z_{0.05}$  ،  $Z_{0.025}$  ،  $Z_{0.005}$  .

(٥) متغير عشوائي  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي  $N(16, 7)$  ، احسب

$P(|X - 16| > 3)$  .

(٦) متغير عشوائي  $X$  يتبع التوزيع  $N(50, 25)$  ، احسب :

$P(X > 62)$  ،  $P(X < 8)$  ،  $P(X = 60)$  ،  $P(X > 5)$  ،  $P(X < 40)$  .

(٧) تتوزع معدلات مجتمع كبير من طلبة الكليات تقريبا وفق التوزيع  $N(2.4, 0.64)$  . ما

نسبة الطلاب الذين تتجاوز معدلاتهم 3.0 ؟ (المعدل التام هو 4) .

(٨) بالإشارة إلى المسألة السابقة إذا شطبت أسماء الطلاب الذين تقل معدلاتهم عن 1.9

فكم ستبلغ نسبة الأسماء المشطوبة؟

٩) متغير عشوائي  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي . إذا كان  $E(X^2) = 68$  و  $P(X < 10) = 0.8413$  فاحسب  $\mu$  و  $\sigma$  .

١٠) بتوزع عمر نوع من الغسالات مقدرا بالسنوات وفق التوزيع الطبيعي  $N(3.1, 1.2)$  . إذا كانت الغسالات مكفولة لمدة سنة، فما هي نسبة الغسالات المباعة التي سيضطر المصنع إلى استبدالها بغسالة جديدة؟

١١) وجدنا أن الفترة الزمنية الضرورية لإتمام اختبار ذكاء مخصص لطلبة الكليات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 دقيقة وانحراف معياري يساوي 12 دقيقة . كيف يجب تحديد زمن الاختبار إذا أردنا إتاحة وقت كاف لإتمام الاختبار لـ 90% من الطلاب المتقدمين؟

١٢) نظمت آلة لتقديم شراب مرطب بحيث تضع، في المتوسط،  $\mu$  أونزة في الكأس الواحدة . إذا كان ما تضعه بالفعل في الكأس الواحدة متغيرا طبيعيا بانحراف معياري  $\sigma = 0.3$  أونزة . فما القيمة التي ينبغي تحديدها لـ  $\mu$  بحيث تفيض الكؤوس ذات السعة 8 أونزة بنسبة 1% فقط؟

١٣) وزن بيضة الدجاج بالغرام يتوزع وفق التوزيع الطبيعي  $N(60, 225)$  . وتصنف البيضة «صغيرة» إذا قل وزنها عن 45 غراما، إذا رغبت أن يصنف باقي البيض بالتساوي بين عادي وكبير، اقترح الوزن الذي يفصل بين هذين الصنفين مقربا إلى أقرب غرام .

١٤) تتوزع أوزان قوالب الصابون في مصنع طبيعيا . وفي الأسبوع الماضي كان وزن  $\frac{2}{3}\%$  من القوالب المصنوعة أقل من 90.5 غراما بينما زاد وزن 4% من القوالب على 100.25 غراما . والمطلوب :  
أ - أوجد متوسط وتباين توزيع وزن القالب، والنسبة المئوية للقوالب التي يتوقع أن تزن أقل من 88 غراما .

ب - إذا خفضنا تباين الوزن بنسبة الثلث فما هي النسبة المئوية من إنتاج الأسبوع القادم التي تتوقع أن يقل وزنها عن 88 غراما . مفترضا أن المتوسط لم يتغير؟

١٥) يقدر أن 1400 راكبا ممن يبذلون قطارهم في محطة معينة يهدفون بصورة منتظمة إلى اللحاق بقطار الخامسة والنصف مساء ، وأن 50 راكبا يصلون قبل الساعة الخامسة وعشرين دقيقة مساء ، موعد فتح البوابة الخاصة بهذا القطار، وأن 70 راكبا يفوتهم القطار عند التزامه التام بموعد المغادرة . مفترضا أن زمن وصول الراكب إلى المحطة متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي ، أحسب متوسط هذا التوزيع وتباينه . ومن ثم قدر:

أ - موعد فتح البوابة بحيث لا يزيد عدد المنتظرين أمامها على عشرين راكبا .  
ب - عدد المستبدلين الذين سيفوتهم القطار في يوم يغادر فيه (على غير المتوقع) قبل الوقت المحدد بدقيقتين .

١٦) يغادر رجل منزله كل صباح الساعة السابعة كي يصل إلى عمله في الساعة الثامنة . وقد وجد خلال فترة طويلة أنه يتأخر عن عمله بنسبة مرة في كل أربعين مرة . وبدأ يغادر المنزل في الساعة السادسة وخمس وخمسين دقيقة فوجد خلال فترة مماثلة أنه يتأخر مرة في كل مائة مرة . بفرض أن الزمن الذي تستغرقه الرحلة يتوزع طبيعيا كيف ينبغي أن يحدد موعد المغادرة بحيث لا يتأخر أكثر من مرة كل ما تتي مرة؟

١٧) في كتاب معين يمكن اعتبار عدد الكلمات في الصفحة الواحدة متغيرا طبيعيا ، على وجه التقريب ، بمتوسط 800 كلمة وانحراف معياري 50 كلمة . إذا اخترت عشوائيا ثلاث صفحات فما احتمال ألا تتضمن أي منها ما بين 830 إلى 845 كلمة؟

١٨) في بلد معين ، متوسط طول الذكر البالغ 170 سم بانحراف معياري 10 سم ، ومتوسط طول الأنثى البالغة 160 سم بانحراف معياري 8 سم ، وبالنسبة لكل

من الجنسين يعتبر التوزيع الطبيعي نموذجا مناسباً لوصف تغير الطول . بفرض أن الطول ليس من العوامل التي تؤخذ في الاعتبار عند اختيار الزوجة أو الزوج . أحسب احتمال أن زوجاً وزوجته اخترناهما عشوائياً سيكون كل منهما أطول من 164 سم .

(١٩) في بستان للبرتقال متوسط وزن الثمرة 19.3 أونزة بانحراف معياري 2.3 أونزة .

مفترضاً أن وزن الثمرة متغير يتبع التوزيع الطبيعي ، أحسب :

ا - نسبة الثمار التي يقل وزنها عن 18 أونزة .

ب - نسبة الثمار التي لا يقل وزنها عن 20 أونزة .

ج - نسبة الثمار التي يتراوح وزنها بين 18.5 و 20.5 أونزة .

د - الوزن الذي سيقبل عنه 15% من الثمار .

هـ - الوزن الذي سيزيد عليه 25% من الثمار .

(٢٠) ملاحظة عدد كبير من السيارات عند نقطة محددة من طريق عام بينت لنا أن السرعة تتوزع طبيعياً . إذا علمت أن سرعة 90% من السيارات تقل عن 124.3 كم/سا ، وأن سرعة 5% فقط من السيارات تقل عن 101 كم/س . حدد السرعة المتوسطة  $\mu$  والانحراف المعياري  $\sigma$  .

(٢١) من المفترض أن يكون قطر كريات معدنية تنتجها شركة صناعية مساوياً 2 مم . ولكن الكريات ستكون مقبولة إذا تراوحت أقطارها بين 1.90 مم و 2.10 مم . وقد لوحظ في دفعة إنتاج كبيرة أن 2.5% منها مرفوض لأنه أكبر مما يمكن التساهل فيه وأن 2.5% منها مرفوض لأنه أصغر مما يمكن التساهل فيه . حدد ، بصورة تقريبية ، ما ستصبحه نسبتا الرفض إذا غيرنا حدود التساهل إلى 1.95 مم و 2.15 مم .

(٢٢) تتوزع درجات امتحان وفق التوزيع الطبيعي  $N(50, 100)$  ، ونرغب في إعادة النظر في سلم الدرجات بحيث تكون درجة النجاح 40 ونسبة الناجحين 70% ، ودرجة

التفوق 70 ونسبة المتفوقين 20% . أحسب الدرجة الجديدة لمتقدم للامتحان كانت درجته الأصلية 60 .

(٢٣) يمكن تصنيف البيض إلى عادي إذا كان الوزن أقل من 46 غراما، ومتوسط إذا كان الوزن بين 46 و 56 غراما، وكبير إذا كان الوزن أكبر من 56 غراما . لنفرض أن البيض الذي تضعه سلالة معينة من الدجاج يتوزع، من حيث وزن البيضة، وفق التوزيع الطبيعي  $N(50, 25)$  . أحسب نسبة كل صنف من الأصناف الثلاثة . وإذا كانت أسعار البيع للبيضة الواحدة من الأصناف الثلاثة هي، على الترتيب، 4 هللة، 5 هللة، 6 هللة . وكانت كلفة الإنتاج 4 هللة لكل بيضة، فما الربح المتوقع للبيضة الواحدة؟

وبالنسبة لسلالة أخرى من الدجاج فإنها تضع بيضا يتبع، من حيث الوزن، التوزيع الطبيعي  $N(52, 25)$  . إلا أنه يستهلك أكثر من الطعام مما يرفع كلفة البيضة إلى 4.5 هللة . ما الربح المتوقع للبيضة الواحدة في هذه السلالة؟

(٢٤) لنفرض أن مقياس الحذاء لذكر بالغ هو عدد صحيح  $k$  يرتبط بطول القدم،  $y$  ، مقياسا بالبوصة بالعلاقة التالية : «حذاء مقاسه  $k$  سيكون مناسباً لقدم طولها يتراوح بين  $5.5 + 0.5k$  و  $6 + 0.5k$  ؛ حيث  $k = 5, 6, \dots, 14$  . ويمكن اعتبار  $y$  ، طول قدم ذكر بالغ، متغيراً يتبع التوزيع الطبيعي  $N(10.2, 1.21)$  .

أ - ما النسبة من مجتمع الذكور البالغين التي تتطلب حذاء مقاسه أكبر من 14؟  
ب - ما المقاس الأكثر تواتراً وما نسبة أولئك الذين يطلبون هذا المقاس؟

(٢٥) حدود التساهل في طول قطعة مصنعة هي  $10.00 \pm 0.05$  مم . وتُفحص كل قطعة يجري إنتاجها لرؤية ما إذا كانت تحقق هذه الحدود أم لا . والتوزيع الاحتمالي لطول القطعة هو التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 10.01 مم وانحراف معياري 0.04 مم . وكلفة إنتاج القطعة 10 ريالاً . وجميع القطع التي لا يقع طولها ضمن حدود

- التساهل تهمل وتعتبر خسارة للشركة المصنعة . ولتخفيض حجم الخسارة يمكن :
- ا - إزالة الانحياز في عمل الآلة وجعل متوسط التوزيع  $\mu = 10$  وذلك بكلفة إضافية قدرها 4 ريالاً لكل قطعة .
- ب - تخفيض الانحراف المعياري إلى 0.03 وذلك بكلفة إضافية قدرها ريالان لكل قطعة .
- ج - القيام بالإجرائين (ا) و (ب) معاً لقاء كلفة إضافية 6 ريالاً للقطعة الواحدة . إذا كنت تعمل في قسم الإحصاء في هذه الشركة فبأي الإجراءات الثلاثة المذكورة تنصح؟

٢٦) تقضي مواصفات الإنتاج لعبوات نوع معين من الحلويات أن وزن كل عبوة يجب أن يقع بين 140 غ و 160 غ . إذا كان وزن العبوة يتوزع طبيعياً بتباين يساوي 4 غ<sup>٢</sup> . كيف تحدد متوسط التوزيع الذي ينبغي أن تهدف إليه الشركة المنتجة ولماذا؟

٢٧) يستخدم أحد المصانع 2000 مصباح كهربائي للإضاءة . وعمر المصباح الكهربائي مقاساً بالساعات يتبع التوزيع الطبيعي  $N(550, 2500)$  . وحرصاً على وجود عدد قليل من المصابيح المحترقة خلال أوقات الإنتاج يستبدل المصنع المصابيح جميعها كل فترة وبصورة دورية . كيف ينبغي تحديد طول فترة الاستبدال لكي لا يوجد في المصنع في أي وقت أكثر من 20 مصباحاً محروقاً؟

ومع نوع أفضل من المصابيح حيث يتوزع عمر المصباح وفق التوزيع الطبيعي  $N(600, 1600)$  تتغير فترة الاستبدال إلى 500 ساعة ، بين أن عدد المصابيح المحترقة في المصنع في أي وقت سينخفض عندئذ إلى حوالي 12 مصباحاً .

٢٨) مبيعات بقال من سلعة معينة كل أسبوعين هي متغير يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 200 كغ وتباين يساوي 225 كغ . أوجد احتمال أن تكون مبيعاته من هذه السلعة خلال أسبوعين أقل من 185 كغ ، وعندما يطلب مزيداً من هذه

السلعة تأخذ عملية تسليم البضاعة المطلوبة فترة أسبوعين . حدد إلى أقرب كيلوغرام المخزون الذي ينبغي تأمينه من هذه السلعة عند إعادة طلبها بحيث يكون البقال مطمئنا باحتمال 0.95 إلى أن هذه السلعة لن تنفذ قبل وصول الطلب .

### (٥-٤) خواص التوزيع الطبيعي وبعض التطبيقات\*

اصطلحنا على كتابة  $N(\mu, \sigma^2)$  لتعني توزيعا طبيعيا بمتوسط يساوي  $\mu$  وتباين يساوي  $\sigma^2$  . وهكذا نكتب ، على سبيل المثال :  $X$  متغير  $N(8, 4)$  لتعني أن  $X$  متغير يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 8 وتباين يساوي 4 . وفيما يلي بعض خواص التوزيع الطبيعي :

١- ليكن  $X$  و  $Y$  متغيرين مستقلين  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  و  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  ، على الترتيب . فعندئذ يكون مجموعهما  $X+Y$  ، ولنرمز له بـ  $U$  ، متغيرا  $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  . أي متغيرا طبيعيا أيضا بمتوسط يساوي مجموع المتوسطين وتباين يساوي مجموع التباينين .

٢- وبصورة أعم إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيرين مستقلين  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  و  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  ، على الترتيب فإن المتغير  $U = aX + bY + c$  ، حيث  $a$  ،  $b$  ،  $c$  أية أعداد حقيقية ، هو بدوره متغير طبيعي متوسطه ، حسب خواص التوقع :

$$\begin{aligned} E(U) &= E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c \\ &= a\mu_1 + b\mu_2 + c \end{aligned}$$

وتباينه حسب خواص التباين :

$$\begin{aligned} V(U) &= V(aX + bY + c) = V(aX + bY) = V(aX) + V(bY) \\ &= a^2V(X) + b^2V(Y) \\ &= a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 \end{aligned}$$

ونكتب باختصار:

إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيرين مستقلين  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ،  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  وكانت  $a$ ،  $b$ ،  $c$  أية أعداد ثابتة فإن  $U = aX + bY + c$  يكون متغيراً  $N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b\sigma_2^2)$

وعلى سبيل المثال إذا كان  $X$  متغيراً  $N(15, 2)$  و  $Y$  متغيراً  $N(-7, 4)$  فإن  $U = 2X - 3Y + 1$  وهو متغير طبيعي متوسطه يساوي  $2(15) - 3(-7) + 1 = 52$

وتباينه

$$2^2(2) + (-3)^2(4) = 44$$

أي أن  $U$  متغير  $N(52, 44)$ .

٣- ويمكن بوضوح تعميم الخاصة ٢ إلى أكثر من متغيرين، لتصبح في الحالة الخاصة التالية، وهي في حد ذاتها بالغة الأهمية، كما يلي:

إذا كانت  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغيرات مستقلة وكل منها  $N(\mu, \sigma^2)$ ، [أي إذا كانت  $X_1, X_2, \dots, X_n$  عينة عشوائية من  $N(\mu, \sigma^2)$ ] فإن:

$$\sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n \text{ يكون متغيراً } N(n\mu, n\sigma^2)$$

ويكون

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \text{ متغيراً } N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

وتجدر ملاحظة أنه بالرغم من أن المتغير الطبيعي يتحول بين  $-\infty$  و  $+\infty$ ، إلا أنه يمكن استخدامه مقبولاً تماماً لوصف متغير،  $X$ ، موجب بطبيعته. وذلك

شريطة أن يكون  $P(X \leq 0)$  عددا صغيرا جدا يمكن إهماله . أي أننا نتجاوز المقولة الدقيقة بأن  $P(X \leq 0) = 0$  ، وتعني استحالة أن يكون  $X$  سالبا إلى مقولة ، تقريبية وعملية في آن واحد ، تكتفي بالتأكيد على أن احتمال أن يكون  $X$  سالبا هو احتمال قريب من الصفر. وبما أن

$$p(X \leq 0) = F\left(\frac{0 - \mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right)$$

وأن  $\sigma$  موجب ، فإن  $P(X \leq 0)$  سيكون مهما إذا كان  $\mu$  كبيرا بالمقارنة مع  $\sigma$  .

وعلى سبيل المثال ، إذا كان  $\mu = 4.5\sigma$  فإن  $P(X \leq 0)$  يكون أقل من 0.000005 ، وهو صغير إلى الحد الذي يجعله غير ذي بال في التطبيقات العملية .

مثال (٥-٩)

إذا كانت  $X, Y, T$  متغيرات مستقلة  $N(2, 1), N(3, 2), N(4, 3)$  ، على الترتيب ،

فاحسب :

أ-  $P(1 < X < 3)$  ،

ب-  $P(X \leq Y)$  ،

ج-  $P(3X - 2Y > 1)$  ،

د-  $P(X + Y < 2T - 4)$  ،

الحل

أ-  $P(1 < X < 3) = F(3 - 2) - F(1 - 2) = F(1) - F(-1)$

$$= 2F(1) - 1 = 0.6826$$

ب-  $P(X \leq Y) = P(X - Y \leq 0)$

ولكن  $X - Y$  متغير  $N(-1, 3)$  وفق الخاصية ٢ . وبالتالي يكون

$$P(X \leq Y) = P(X - Y \leq 0) = F\left(\frac{0 - (-1)}{\sqrt{3}}\right) = F(0.577) = 0.718$$

جـ- وفق الخاصة ٢ نجد أن  $3X - 2Y$  متغير  $N(0, 17)$  وهكذا نجد:

$$\begin{aligned} P(3X - 2Y > 1) &= 1 - P(3X - 2Y \leq 1) = 1 - F\left(\frac{1-0}{\sqrt{17}}\right) \\ &= 1 - F(0.243) = 0.404 \end{aligned}$$

د- وفق الخاصة ٣ يكون  $X + 2Y - 2T$  متغيرا  $N(-3, 15)$  ، وبالتالي:

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq 2T - 4) &= P(X + Y - 2T \leq -4) = F\left(\frac{-4 - (-3)}{\sqrt{15}}\right) \\ &= 1 - F\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = 1 - F(0.258) = 0.398 . \end{aligned}$$

مثال (٥ - ١٠)

يتم إنتاج مسامير البرشام التي تستخدم لبرشمة صفيحة معدنية بطريقة تسمح لنا بوصف قطر المسامير  $X$  كمتغير  $N(3; 0.04)$  . وبطريقة مستقلة يجري إنتاج صفائح معدنية ذات ثقب دائرية يمكن اعتبار قطر الثقب  $Y$  متغيرا  $N(3.2, 0.01)$  . (القياس في الحائتين بالسنتيمتر) .

ا- ما هو احتمال أن يناسب المسامير ثقب الصفيحة؟  
ب- إذا اخترنا أربعة أزواج (مسامير - صفيحة) فما هو احتمال أن يكون زوجان منهما، على الأقل، متناسبين؟

الحل

ا-  $X$  و  $Y$  متغيران طبيعيين مستقلان . واحتمال تناسب المسامير مع الثقب هو:

$$P(X < Y) = P(X - Y < 0)$$

ولكن  $X - Y$  متغير  $N(-0.2, 0.05)$  ، وبالتالي:

$$P(X - Y < 0) = F\left(\frac{0 - (-0.2)}{\sqrt{0.05}}\right) = F(0.894) = 0.814$$

ب- يمكننا اعتبار إنتاج مسامير وصفيحة تكرارا لتجربة ثنائية احتمال النجاح فيها  $p = 0.814$  ،  $n = 4$  ، وإذا رمزنا بـ  $U$  لعدد الأزواج المتناسبة، يصبح المطلوب:

$$P(U \geq 2) = 1 - P(U=0) - P(U=1) \\ = 1 - (0.186)^4 - 4(0.814)(0.186)^3 = 0.978 .$$

مثال (٥ - ١١)

$$P(|\bar{X} - \mu| > 2) = P(\bar{X} - \mu > 2) + P(\bar{X} - \mu < -2) \leq 0.025$$

أخذنا عينة عشوائية حجمها  $n$  من مجتمع طبيعي فيه  $\mu = 10$  و  $\sigma = 20$  ، ما هي أصغر قيمة ممكنة لـ  $n$  بحيث لا يزيد عن 0.025 احتمال أن يتجاوز الفرق بين متوسطي العينة والمجتمع المقدار 2 ؟

الحل

ليكن  $\bar{X}$  متوسط العينة. نعلم من الخاصية ٣ أن  $\bar{X}$  متغير  $N\left(10, \frac{400}{n}\right)$  . والمطلوب تحديد حجم العينة  $n$  بحيث يكون ،  $P(|\bar{X} - \mu| > 2) \leq 0.025$  ولكن الحادثة  $\bar{X} - \mu > 2$  تعني إما  $\bar{X} - \mu > 2$  أو  $\bar{X} - \mu < -2$  ، وبالتالي :

$$P(|\bar{X} - \mu| > 2) = P(\bar{X} - \mu > 2) + P(\bar{X} - \mu < -2) \leq 0.025$$

أو

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{20/\sqrt{n}} > \frac{2}{20/\sqrt{n}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{20/\sqrt{n}} < \frac{-2}{20/\sqrt{n}}\right) \leq 0.025$$

أو

$$1 - F\left(\frac{2\sqrt{n}}{20}\right) + F\left(\frac{-2\sqrt{n}}{20}\right) \leq 0.025$$

أو

$$2 - 2F\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) \leq 0.025$$

$$F\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) \geq 0.9875$$

ونجد من الجدول أن

$$\frac{\sqrt{n}}{10} \geq 2.24$$

$$\sqrt{n} \geq 22.4 \Leftrightarrow n \geq 501.76$$

أي أن حجم العينة ينبغي ألا يقل عن 502 .

مثال (١٢-٥)

ليكن  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي  $N(100, 25)$  . أحسب

$$P(|\bar{X} - 100| > 1) \text{ ، إذا كان :}$$

$$\text{أ - } \bar{X} \text{ متوسط عينة حجمها } n = 25 \text{ ،}$$

$$\text{ب - } \bar{X} \text{ متوسط عينة حجمها } n = 100 \text{ .}$$

الحل

١- بالاستناد إلى الخاصة ٣ نعلم أن  $\bar{X}$  متغير يتبع التوزيع الطبيعي  $N(100, 1)$

ويكون

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - 100| > 1) &= P(\bar{X} - 100 > 1) + P(\bar{X} - 100 < -1) \\ &= 1 - F(1) + F(-1) \\ &= 1 - F(1) + [1 - F(1)] = 2 - 2F(1) \\ &= 2 - 2 \times 0.8413 = 0.3174 \end{aligned}$$

ب -  $\bar{X}$  يتبع الآن التوزيع الطبيعي  $N(100, 0.25)$  ومنه :

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - 100| > 1) &= P\left(\frac{\bar{X} - 100}{0.5} > \frac{1}{0.5}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - 100}{0.5} < \frac{-1}{0.5}\right) \\ &= 1 - F(2) + F(-2) \\ &= 2 [1 - F(2)] = 0.0456 \end{aligned}$$

تمارين (٥-٣)

١) في المثال (١٢-٥) ، كم يجب أن يكون حجم العينة  $n$  ليصبح :

$$\text{أ - } P(|\bar{X} - 100| > 0.5) \leq 0.01 \text{ ،}$$

$$\text{ب - } P(|\bar{X} - 100| > 0.5) \leq 0.001 \text{ .}$$

(٢) إذا افترضنا أن الدرجات في امتحان عام تتوزع ، على وجه التقريب ، وفق التوزيع الطبيعي  $N(72, 100)$  ففي مجموعة عشوائية تتضمن مائة طالب عن أدوا هذا الامتحان ، ما احتمال أن يختلف متوسط درجاتهم عن 72 بأكثر من 3 درجات؟

(٣) ما أصغر حجم عينة ينبغي أخذها من مجتمع طبيعي فيه  $\mu = 10$  و  $\sigma = 20$  ، كي لا يزيد احتمال تجاوز متوسط العينة لضعف متوسط المجتمع عن 0.025؟

(٤) إذا كان  $X$  ،  $Y$  ، و  $Z$  ثلاثة متغيرات مستقلة وتوزيعاتها ، على الترتيب ،  $N(2, 2)$  ،

$N(3, 3)$  ،  $N(4, 4)$  ، فاحسب :

أ -  $P(1 \leq X \leq 4)$  ،

ب -  $P(X - 2 \leq 4)$  ،

ج -  $P(2X + Y \geq 5)$  ،

د -  $P(Z + 2 \leq 4X - Y \leq + 3)$  ،

هـ -  $P(X \geq Y, Z - 3 > 0)$  .

(٥) يتوزع المتغيران المستقلان  $X$  و  $Y$  وفق  $(\mu, \sigma^2)$  و  $(2\mu, 2\sigma^2)$  ، على الترتيب .

أ - إذا كان  $\sigma = 3$  و  $P(X + 2Y \leq 10)$  فاحسب  $\mu$  .

ب - إذا كان  $\mu = 0$  و  $P(4X - Y < 3) = 0.4$  فاحسب  $\sigma$  .

ج - إذا كان  $P(12X - Y > 10) = 0.05$  و  $P(Y \leq s) = 0.9$  فاحسب  $\mu$  و  $\sigma$  .

(٦) يتوزع طول نصف قطر دولا ب صغير ينتجه مصنع معين وفق التوزيع الطبيعي

$N(1, 0.0001)$  (القياس بالسنتيمتر) . ويتم إنتاج الدواليب بصورة مستقلة ثم تجمع

عقب ظهورها في خط الإنتاج أزواجا . ونعتبر أن الزوج من الدواليب مُرض إذا

اختلف نصف القطرين للدولابين بأقل من 0.03 سم .

- ١ - ما نسبة الأزواج المرضية من الدوايب ؟  
 ب - من بين خمسة أزواج ما احتمال أن يكون أحدها على الأقل غير مُرض ؟  
 ج - إلى أي حد ينبغي تخفيض الانحراف المعياري لطريقة الإنتاج كي تصبح نسبة الأزواج المرضية 99% ؟

(٧) وجد طبيب يعمل في عيادة أن الأوقات التي تستغرقها استشارات المرضى مستقلة بعضها عن بعض ، وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 5 دقائق وانحراف معياري 1.5 دقيقة . ويقابل مرضاه ، على التوالي ، بدون فواصل زمنية بين مريضين ، مبتدئا عمله الساعة العاشرة صباحا . ما الموعد الذي ينبغي للمريض العاشر أن يرتبه مع سيارة أجرة بحيث يطمئن باحتمال 99% أن السيارة سوف لا تنتظره ؟ وإذا كان الطبيب سيقابل 22 مريضا قبل انصرافه ، فما احتمال مغادرته للعيادة قبل الساعة 12 ظهرا ؟

(٨) عمر قطعة إلكترونية مقاسا بالساعات يتوزع وفق التوزيع الطبيعي ، لنفرض أن 92.5% من هذه القطع يتجاوز عمرها 2160 ساعة و 3.92% يتجاوز عمرها 17040 ساعة .

- ١ - أحسب متوسط التوزيع وانحرافه المعياري .  
 ب - إذا أخذنا عينة من 100 قطعة فأحسب احتمال أن يكون متوسط العمر في العينة :

(i) أكبر من 10000 ساعة ،

(ii) أقل من 8000 ساعة .

(iii) واقعا بين 8000 و 10000 ساعة .

(٩) الأجر الأسبوعي بالريال الذي تدفعه شركة إلى عمالها يتوزع تقريبا وفق التوزيع الطبيعي  $N(200, 324)$  .

- أ - أحسب احتمال ألا يختلف متوسط الأجر الأسبوعي لعينة عشوائية من 9 عمال عن متوسط المجتمع 200 بأكثر من 12 ريالاً.
- ب - كم يجب أن يكون حجم العينة حتى لا يختلف متوسطها عن متوسط المجتمع بأكثر من ستة ريالاً إلا بنسبة بسيطة لا تتجاوز 10%؟

(١٠) على مدير شركة أن يقابل 20 مرشحاً لوظيفة . ويعلم من تجربته السابقة أن وقت المقابلة مقاساً بالدقيقة يتوزع وفق التوزيع الطبيعي  $N(10, 9)$  . ويبدأ مقابلاته الساعة التاسعة صباحاً . في أي وقت ينبغي له أن يطلب فنجان القهوة ويرتاح لمدة ربع ساعة إذا أراد أن يكون مطمئناً باحتمال 99% إلى أنه قد انتهى في ذلك الوقت من مقابلة 50% من المرشحين؟ وما احتمال أن ينتهي من كل المقابلات عند الساعة الواحدة بعد الظهر؟

(١١) يتوزع وزن أمتعة المسافر جواً وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 20 كغ وانحراف معياري 5 كغ . ويتسع نوع معين من الطائرات لـ 100 راكب . ما هو احتمال أن يتجاوز الوزن الكلي لأمتعة المسافرين 2150 كغ؟

(١٢) عمر صمام كهربائي مقاس بالساعة يتبع التوزيع الطبيعي  $N(200, \sigma^2)$  . إذا اشترى شخص عشر صمامات وأراد باحتمال 0.95 ألا يقل متوسط عمر الصمامات العشرة عن 190 ساعة ، فما هي أكبر قيمة يمكن أن يأخذها الانحراف المعياري  $\sigma$ ؟

(١٣) بالإشارة إلى التمرين رقم ٢٨ من مجموعة التمارين (٥ - ٢) ، لنفرض أن خمس بقالات متجاوزة متضامنة بالنسبة إلى توفير تلك السلعة للزبائن . وأن مبيعاتها خلال أسبوعين من تلك السلعة مستقلة بعضها عن بعض وأن كلا منها تتبع

التوزيع الطبيعي بمتوسطات هي 200 ، 240 ، 180 ، 260 ، و 320 كغ ، وتباينات هي ، على الترتيب ، 225 ، 240 ، 225 ، 265 ، 270 كغ . اكتب متوسط وتباين الطلب على السلعة خلال أسبوعين ، وحدد إلى ثلاثة أرقام معنوية المستوى الإجمالي لمخزونها من تلك السلعة الذي ينبغي توفره عند طلب بضاعة جديدة بحيث يكون احتمال عدم نفاذها 0.99 .

احسب احتمال أن يتجاوز مجموع مبيعات البقالات الخمس من تلك السلعة خلال عشرة أسابيع 6200 كغ .

- ١٤) مصنع مربيات يضع في كل عبوة ثماني علب من ثمانية أنواع مختلفة . والمفروض أن تزن كل علبة 50 غراما . ولكن عمليا يتبع وزن كل علبة التوزيع الطبيعي  $N(52, 1.21)$  ، وبصورة مستقلة من نوع إلى آخر .
- أ - ما نسبة العلب التي تزن أقل من 50 غراما؟
- ب - ما نسبة العبوات التي تقل عن 400 غراما؟
- ج - ما احتمال أن تزن واحدة أو أكثر من العلب ضمن عبوة أقل من 50 غراما؟
- د - كم ينبغي أن يكون الانحراف المعياري لوزن العلبة إذا أردنا لـ 99% من العبوات أن تزن أكثر من 400 غراما؟

١٥) أوزان الأشخاص الذين يستخدمون مصعدا معينا تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 150 ليبرة وانحراف معياري 20 ليبرة . والحد الأعلى المسموح لحمولة المصعد هو 650 ليبرة .

أ - بصورة عشوائية ، يجتمع أربعة أشخاص في المصعد . ما هو احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

ب - بصورة عشوائية يوجد شخص واحد في المصعد ومعه أمتعة تزن ثلاثة أمثال

وزنه، ما هو احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟  
فسر أي اختلاف بين جوابيك في (أ) و (ب).

### (٥ - ٥) نظرية النهاية المركزية

تعرض نظرية النهاية المركزية، وتحت شروط عامة جدا، أن كلا من مجموع ومتوسط عينة عشوائية، مسحوبة من مجتمع ما، يمتلك عند تكرار هذه العينات عددا كبيرا من المرات، توزيعا له، على وجه التقريب، شكل الجرس. وربما كان من الأفضل إيضاح هذه العبارة بمثال.

لنعتبر المجتمع المتولد عن قذف حجر نرد عددا كبيرا جدا من المرات. وقد رأينا توزيعه في المثال (٦-٣). لنسحب عينة من خمسة قياسات،  $n = 5$ ، من المجتمع وذلك بقذف حجر النرد خمس مرات وتسجيل الملاحظات الخمس الناتجة. ثم نحسب مجموع هذه الملاحظات الخمس  $\sum x_i$  ومتوسطها  $\bar{x}$ ، ويبين الجدول (٥-١) نتائج تكرار هذه العملية مائتي مرة. كما يبين الشكل (٥-٨) المدرج التكراري للقيم المائتين لـ  $\bar{x}$  (أو  $\sum x_i$ ). وتنبغي ملاحظة النتيجة المهمة التالية:

بالرغم من أن التوزيع الاحتمالي لـ  $x$  له شكل أفقي تماما، إلا أن المدرج التكراري للمائتين من قيم  $\bar{x}$  (وهو يقدم صورة أولية عن شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير  $\bar{x}$  أو للمتغير  $\sum x_i$ ) يتخذ شكلا مقببا قريبا من شكل الجرس، وكلما زاد حجم العينات المسحوبة عن خمسة اعتدل شكل المضلع التكراري ليقترّب أكثر فأكثر من شكل التوزيع الطبيعي. وبعبارة أخرى، لو أننا أخذنا  $n = 10$  في مثالنا، أي لو أننا قذفنا حجر النرد عشر مرات بدلا من خمس، ثم سجلنا نتائج مائتي عينة من هذا الحجم، ورسمنا المدرج التكراري للقيم المائتين لـ  $\bar{x}$ ، فمن المتوقع الحصول على

شكل أكثر قربا من شكل الجرس . ولا بد من ملاحظة أنه للحصول على فكرة أدق عن شكل التوزيع الإحتمالي لـ  $\bar{x}$  نحتاج ، نظريا ، إلى عدد لا نهائي من العينات ، أو لنقل ، بصورة عملية ، إننا نحتاج إلى عدد من العينات أكبر بكثير من المائتين التي تضمنتها التجربة هنا . ومع ذلك فإن الشكل الذي تقدمه العينات المائتان كاف

جدول (٥ - ١) : مئتا عينة من مجتمع قذف حجر نرد

رقم العينة	قياسات العينة	$\sum x_i$	$\bar{x}$	رقم العينة	قياسات العينة	$\sum x_i$	$\bar{x}$
1	3,1,6,4,1	15	3.0	33	6,3,5,4,5	23	4.6
2	4,6,6,5,2	23	4.6	34	6,5,3,3,3	20	4.0
3	5,5,2,5,2	19	3.8	35	2,6,2,6,3	19	3.8
4	4,4,5,2,2	17	3.4	36	2,2,1,6,6	17	3.4
5	2,3,6,3,3	17	3.4	37	4,3,2,5,4	18	3.6
6	6,6,2,5,4	23	4.6	38	5,1,2,5,6	19	3.8
7	6,3,3,2,6	20	4.0	39	5,5,2,5,6	23	4.6
8	3,1,5,1,5	15	3.0	40	5,6,6,5,2	24	4.8
9	6,2,5,5,4	22	4.4	41	3,1,6,3,6	19	3.8
10	6,5,6,6,6	29	5.8	42	1,6,2,6,1	17	3.4
11	6,6,1,1,2	16	3.2	43	3,2,3,4,6	18	3.6
12	1,4,1,4,6	16	3.2	44	3,2,5,1,6	17	3.4
13	4,6,3,5,5	23	4.6	45	4,6,5,3,2	20	4.0
14	4,3,3,4,5	19	3.8	46	6,2,5,4,5	22	4.4
15	4,6,2,3,1	16	3.2	47	6,1,1,2,5	15	3.0
16	1,4,3,4,5	17	3.4	48	1,1,5,5,2	14	2.8
17	3,4,3,1,4	15	3.0	49	2,2,3,3,4	14	2.8
18	3,3,3,6,4	19	3.8	50	5,4,2,2,1	14	2.8
19	6,3,4,4,6	21	4.2	51	3,5,1,5,3	17	3.4
20	5,4,2,2,6	19	3.8	52	5,2,3,3,2	15	3.0
21	4,5,5,2,2	18	3.6	53	4,1,5,2,6	18	3.6
22	1,5,2,3,1	12	2.4	54	5,4,4,2,4	19	3.8
23	3,5,6,5,3	22	4.4	55	4,5,2,1,4	16	3.2
24	5,3,6,4,3	21	4.2	56	4,5,6,3,1	19	3.8
25	6,2,3,2,5	18	3.6	57	3,5,5,1,4	18	3.6
26	5,4,5,1,6	21	4.2	58	6,6,5,3,4	24	4.8
27	4,1,6,2,6	19	3.8	59	6,3,2,5,4	20	4.0
28	6,6,6,2,2	22	4.4	60	4,6,5,1,1	17	3.4
29	3,4,2,1,5	15	3.0	61	5,1,1,2,2	11	2.2
30	1,2,2,3,3	11	2.2	62	2,6,2,2,3	15	3.0
31	6,5,1,6,2	20	4.0	63	2,4,4,1,1	12	2.4
32	6,3,1,2,5	17	3.4	64	3,1,2,2,2	10	2.0

تابع جدول (٥ - ١)

رقم العينة	قياسات العينة	$\sum x_i$	$\bar{x}$	رقم العينة	قياسات العينة	$\sum x_i$	$\bar{x}$
65	3,4,1,1,6	15	3.0	107	5,2,5,1,1	14	2.8
66	6,2,5,5,6	24	4.8	108	3,3,4,1,2	13	2.6
67	3,1,1,4,6	15	3.0	109	3,1,4,3,3	14	2.8
68	3,2,6,5,4	20	4.0	110	5,2,6,1,2	16	3.2
69	6,4,1,5,3	19	3.8	111	1,2,6,3,1	13	2.6
70	3,2,2,6,4	17	3.4	112	4,6,2,2,1	15	3.0
71	5,4,1,2,2	14	2.8	113	4,4,4,1,4	17	3.4
72	1,4,2,4,5	16	3.2	114	3,3,6,3,2	17	3.4
73	1,6,1,5,2	15	3.0	115	2,1,5,4,6	18	3.6
74	3,1,1,4,4	13	2.6	116	6,6,4,2,4	22	4.4
75	1,5,6,5,4	21	4.2	117	3,2,2,1,4	12	2.4
76	4,1,6,6,5	22	4.4	118	3,2,2,4,3	14	2.8
77	2,4,6,4,5	21	4.2	119	5,3,1,1,4	14	2.8
78	6,2,2,6,1	17	3.4	120	6,1,3,3,4	17	3.4
79	5,1,2,4,1	13	2.6	121	3,3,6,3,1	16	3.2
80	6,1,6,1,6	20	4.0	122	5,2,2,2,3	14	2.8
81	6,5,5,5,1	22	4.4	123	3,2,6,1,1	13	2.6
82	5,3,3,1,6	18	3.6	124	5,1,6,5,5	22	4.4
83	3,6,4,5,4	22	4.4	125	5,1,2,6,5	19	3.8
84	3,4,4,2,3	16	3.2	126	2,3,6,3,3	17	3.4
85	2,5,6,1,4	18	3.6	127	4,3,2,1,5	15	3.0
86	2,1,2,2,1	8	1.6	128	4,5,5,1,3	18	3.6
87	2,4,3,3,5	17	3.4	129	6,3,4,5,1	19	3.8
88	1,2,2,6,5	16	3.2	130	1,6,2,2,1	12	2.4
89	4,3,5,3,3	18	3.6	131	3,1,1,2,5	12	2.4
90	4,6,1,1,2	14	2.8	132	5,4,1,2,5	17	3.4
91	4,2,1,1,2	10	2.0	133	3,2,6,6,2	19	3.8
92	3,3,4,4,2	16	3.2	134	3,4,5,5,3	20	4.0
93	4,1,4,5,4	18	3.6	135	3,5,5,5,4	22	4.4
94	4,1,2,6,3	16	3.2	136	6,2,5,5,1	19	3.8
95	1,1,6,1,5	14	2.8	137	2,3,2,4,2	13	2.6
96	3,2,5,1,5	16	3.2	138	6,1,4,1,5	17	3.4
97	5,2,4,6,6	23	4.6	139	5,6,1,6,5	23	4.6
98	3,3,6,5,1	18	3.6	140	2,2,6,2,6	18	3.6
99	4,4,5,2,6	21	4.2	141	1,3,2,4,3	13	2.6
100	4,2,4,4,2	16	3.2	142	6,4,4,5,5	24	4.8
101	4,5,5,2,1	17	3.4	143	3,1,6,2,4	16	3.2
102	2,5,5,3,2	17	3.4	144	2,1,1,6,2	12	2.4
103	2,3,3,1,5	14	2.8	145	4,4,1,5,5	19	3.8
104	1,5,2,3,2	13	2.6	146	2,4,5,1,2	14	2.8
105	3,4,2,2,3	14	2.8	147	5,1,3,2,3	14	2.8
106	5,3,2,3,4	17	3.4	148	3,2,2,5,6	18	3.6

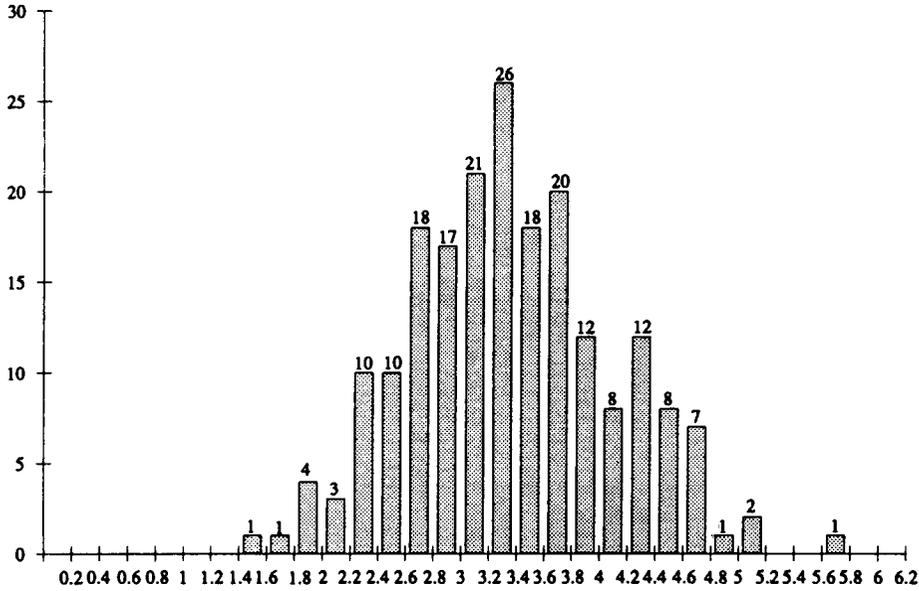
تابع جدول (١-٥)

رقم العينة	قياسات العينة	$\sum x_i$	$\bar{x}$	رقم العينة	قياسات العينة	$\sum x_i$	$\bar{x}$
149	1,3,6,1,3	14	2.8	175	2,4,2,2,2	12	2.4
150	6,3,1,4,6	20	3.8	176	4,6,6,6,2	24	4.8
151	3,6,6,1,3	19	3.8	177	3,6,5,4,4	22	4.4
152	3,5,2,6,2	18	3.6	178	2,3,4,4,3	16	3.2
153	3,1,2,2,5	13	2.6	179	2,6,5,3,5	21	4.2
154	4,6,4,3,3	20	4.0	180	6,3,5,2,1	17	3.4
155	1,4,2,4,3	14	2.8	181	4,3,2,2,1	12	2.4
156	5,5,4,6,4	24	4.8	182	3,5,2,2,3	15	3.0
157	4,1,4,4,3	16	3.2	183	4,3,6,1,2	16	3.2
158	3,2,1,5,5	16	3.2	184	5,5,1,6,2	19	3.8
159	5,6,1,3,5	20	4.0	185	6,2,3,3,2	16	3.2
160	2,5,6,3,3	19	3.8	186	1,4,4,4,2	15	3.0
161	1,4,2,5,3	15	3.0	187	5,6,3,6,4	24	4.8
162	4,2,4,3,5	18	3.6	188	5,1,3,5,3	17	3.4
163	1,2,5,2,6	16	3.2	189	4,4,1,3,5	17	3.4
164	1,1,3,5,2	12	2.4	190	5,3,1,2,4	15	3.0
165	3,5,3,4,5	20	4.0	191	1,1,1,6,1	10	2.0
166	3,1,2,2,4	12	2.4	192	4,5,4,4,6	23	4.6
167	2,4,3,5,2	16	3.2	193	5,2,6,6,6	25	5.0
168	2,6,3,5,3	19	3.8	194	5,6,5,5,5	26	5.2
169	5,4,3,1,1	14	2.8	195	6,5,1,6,4	22	4.4
170	6,2,6,6,6	26	5.2	196	4,2,3,4,6	21	4.2
171	1,5,5,1,1	13	2.6	197	5,2,4,2,2	15	3.0
172	3,5,5,3,1	17	3.4	198	2,3,3,3,6	18	3.6
173	1,2,2,3,1	9	1.8	199	6,1,4,5,2	18	3.6
174	2,1,4,1,2	10	2.0	200	2,3,1,1,4	11	2.2

لتوضيح الفكرة الأساسية التي تتضمنها نظرية النهاية المركزية ، والتي نعرضها في العبارة المبسطة التالية :

### (١-٥-٥) الفكرة الأساسية لنظرية النهاية المركزية

إذا سحبنا عينات عشوائية حجم كل منها  $n$  ، من مجتمع متوسطه  $\mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  محدودان ، فإن توزيع متوسط العينة  $\bar{x}$  يتطابق تقريبا مع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي  $\mu$  وانحراف معياري  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  . وستزداد دقة التقريب كلما ازداد  $n$  .



شكل (٥-٨) مدرج التكرار لمتوسطات العينات الماتين المسحوبة من مجتمع قذف حجر الترد

ويمكن إعادة صياغة النظرية لتتفق مع  $\sum_{i=1}^n X_i$  بدلا من  $\bar{x}$ . فنقول إن توزيع  $\sum_{i=1}^n X_i$  يسعى أيضا إلى أن يصبح طبيعيا بمتوسط يساوي  $n\mu$  وانحراف معياري  $\sigma\sqrt{n}$ ، وذلك عندما يصبح  $n$  كبيرا جدا.

وتبدو أهمية نظرية النهاية المركزية من زاويتين، فهي توضح أولا نزوع العديد من المتغيرات العشوائية إلى أن يكون توزيعها، بصورة تقريبية، هو التوزيع الطبيعي. إذ يمكن، مثلا، أن نتصور طول الإنسان حصيلة عدد كبير من المؤثرات العشوائية، مثل طول الأب، وطول الأم، والمورثات (وعدها كبير)، ونشاط الغدة أو الغدد ذات العلاقة بالطول، والبيئة أو المحيط بأنواعه، والتغذية، إلخ. وإذا كانت آثار هذه العوامل، تضاف بعضها إلى بعض، لتنتج واقعا معيناً بالنسبة إلى طول الإنسان فعندئذ

يمكن اعتبار الطول كحصىلة لعدد كبير من المتغيرات العشوائية . وهكذا تنطبق نظرية النهاية المركزية ، ويكون توزيع متغير الطول هو ، على وجه التقريب ، التوزيع الطبيعي ، وذلك بصرف النظر عن توزيع أي من المتغيرات العشوائية التي تؤثر في تحديد الطول . وهذه بالطبع محاولة للتعليل ، ليس أكثر ، إذ أن ما يجري في الواقع غير معروف لنا بصورة دقيقة ، ولكن ما يمكن قوله ، على كل حال ، هو إن نظرية النهاية المركزية توضح سبب وجود العديد من المتغيرات العشوائية التي نصادفها في حياتنا العامة ، والتي نعتبر أن توزيعها الاحتمالي هو التوزيع الطبيعي .

ومن زاوية أخرى نجد أن العطاء الأكثر أهمية لنظرية النهاية المركزية ، يتعلق بمسألة الاستقراء الاحصائي . فالعديد من الإحصاءات التي تستخدم للقيام باستقراءات حول معالم توزيع (وهي تمثل خصائص مهمة لمجتمع القياسات) مثل  $\mu$  ، احتمال النجاح في التوزيع الثنائي ، أو  $\sigma$  متوسط التوزيع الطبيعي إلخ . هذه الإحصاءات تأخذ شكل مجموع لقياسات العينة أو متوسط هذه القياسات . وإذا كان الحال كذلك ، وكانت  $n$  كبيرة بكفاية ، فيمكننا اعتبار التوزيع الطبيعي تقريبا جيدا للتوزيع الاحتمالي لذلك الإحصاء . وهو ما تمس الحاجة إليه عند القيام بأي استقراء إحصائي . وسنجد في الفقرات القادمة العديد من الاستخدامات المفيدة للغاية لنظرية النهاية المركزية .

والسؤال الذي يفرض نفسه هنا ، هو : كم يجب أن يبلغ حجم العينة  $n$  حتى يصبح التقريب الناشيء عن تطبيق نظرية نهاية المركزية تقريبا جيدا من وجهة النظر العملية؟

ولسوء الحظ لا يوجد جواب عام ومحدد تماما لهذا السؤال . ويتعلق الأمر بالتوزيع الاحتمالي الموافق للمجتمع الذي جاءت منه العينة ، وبالغاية من استخدام التقريب ،

وهكذا . وغالبا ما يكون لكل حالة حكمها، معتمدين، بصورة رئيسة، على الخبرة السابقة والتجربة . ونشعر بكثير من الراحة عند النظر إلى مثال قذف حجر النرد المذكور أعلاه، فقد لاحظنا أن المدرج التكراري للقيم الـ 200 لـ  $\bar{x}$  قريب من شكل الجرس بالرغم من أن حجم العينة الذي استخدمناه لم يتعد الخمس، وبالرغم من أن التوزيع الذي تأتي منه العينات هو خط أفقي (انظر الشكل (٣-٣)) وبعيد جدا عن شكل الجرس . وبصورة عامة، يمكن القول إنه كلما كانت درجة التناظر في التوزيع الذي نعاينه عالية كان التقريب جيدا حتى في عينات صغيرة الحجم .

#### تمارين (٥-٤)

(١) بالإشارة إلى التمرين ١١ من مجموعة التمارين (٣-١)، لنفرض أن الشخص يقوم بـ 250 رحلة في السنة إلى عمله . وليكن  $\bar{Y}$  متوسط عدد الإشارات الحمراء التي يواجهها في الرحلة الواحدة، احسب  $E(\bar{Y})$ ،  $V(\bar{Y})$ ، ثم احسب  $P(\bar{Y} \geq 1.5)$

(٢) في مدينة معينة 1/3 الأسر ليس لديها سيارة، و 1/3 الأسر لديها سيارة واحدة، و 1/6 الأسر لديها سيارتان، و 1/12 من الأسر لديها ثلاث سيارات، و 1/12 من الأسر لديها أربع سيارات، ليكن  $X$  عدد السيارات للأسرة الواحدة:

أ - احسب  $E(X)$ ،  $V(X)$  .

ب - احسب  $E(\bar{X})$ ،  $V(\bar{X})$  حيث  $\bar{X}$  متوسط عينة عشوائية من 100 أسرة .

ج - إذا كان لكل سيارة خمس عجلات فما المتوسط والانحراف المعياري لعدد العجلات للأسرة الواحدة .

د - احسب بصورة تقريبية  $P(\bar{X} < 1)$  .

(٣) تذبح مضافة عربية كل يوم 1، 2، 3، أو 4 خراف باحتمالات هي، على الترتيب، 0.4، 0.3، 0.2، 0.1 . ما هو الحد الأدنى لعدد الخراف التي ستبلي باحتمال لا يقل

عن 0.99 حاجة المضافة من الذبائح لفترة 120 يوما؟ (نفترض أن حاجة المضافة في يوم مستقلة عن حاجتها في يوم آخر).

(٤) متوسط الوزن في قطع ضخم من الخراف هو 8.2 كغ بتباين يساوي 4.84 كغ<sup>٢</sup>. ما احتمال أن يقع متوسط الوزن في عينة عشوائية من 80 خروفا بين 8.3 و 8.4 كغ؟

### (٥ - ٦) تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي

رأينا في الفصل السابق عدة تطبيقات للتوزيع الثنائي إقتضت جميعها حساب احتمال أن يأخذ  $X$  ، وهو عدد النجاحات من بين  $n$  تكرارا، قيمة معينة أو يقع ضمن فترة معينة، وقد اقتصرنا هناك على أمثلة تكون  $n$  صغيرة فيها، وذلك بسبب مشقة الحسابات عندما تكون  $n$  كبيرة. ولنفرض، مثلا، أننا في حاجة لحساب احتمال وقوع  $X$  ضمن فترة معينة، حيث  $n = 1000$ ، فمع أن مثل هذا العمل ليس مستحيلا، إلا أنه ممتنع إلى الحد الذي نريد معه تجنب الغوص في الحسابات. وتقدم نظرية النهاية المركزية حلا لهذه المشكلة. ذلك لأنه يمكن النظر إلى عدد النجاحات  $X$  كمجموع يحقق شروط نظرية النهاية المركزية. فإذا اصطللحنا على أن يوافق النتيجة  $S$  (أو النجاح) العدد 1 ويوافق النتيجة  $F$  (أو الفشل) العدد صفر. فعندئذ تكون نتائج التكرارات المستقلة لـ  $n$  عبارة عن متتالية من المتغيرات المستقلة  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ، حيث يأخذ كل  $X_i$  إما القيمة 1 أو القيمة صفر. ويكون عدد النجاحات  $X$  هو بالضبط عدد مرات ورود الـ 1 في تلك المتتالية أو مجموعها. أي أن

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

وبما أن كل  $X_i$  يتوزع وفق التوزيع الثنائي النقطي أو توزيع بيرنولي، [انظر مطلع الفقرة (٤ - ٢) ونهاية الفقرة (٤ - ٧)] فتصبح نتائج التكرارات المستقلة الـ  $n$  وهي

$X_1, X_2, \dots, X_n$  عينة عشوائية من مجتمع بيرنولي، ويصبح  $X$  مجموع هذه العينة. ووفقا لنظرية النهاية المركزية يكون التوزيع التقريبي لـ  $X$ ، في حالة  $n$  كبيرة بكفاية، هو التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي  $np$  وتباين يساوي  $npq$ . وبالتالي يمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب احتمالات تتعلق بالمتغير  $X$ ، ولكن بصورة تقريبية.

مثال (٥-١٣)

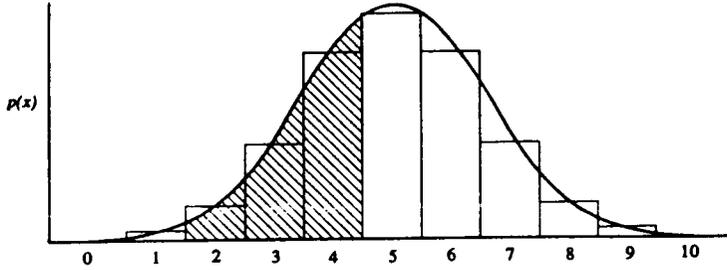
لنأخذ التوزيع الثنائي في حالة  $n = 10$ ،  $p = 1/2$ ، وعندئذ يكون  $\mu = np = 5$  و  $\sigma = \sqrt{npq} = 1.58$  احسب  $P(2 \leq X \leq 4)$  باستخدام التوزيع الثنائي أولاً ثم باستخدام التوزيع الطبيعي لحساب قيمة تقريبية.

الحل

$$P(2 \leq X \leq 4) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.3662$$

وهذا الاحتمال هو مجموع مساحات المستطيلات المقامة فوق 2 و 3 و 4 في المدرج الاحتمالي (انظر الشكل (٥-٩)) وإذا اعتبرنا  $X$  كأنه، على وجه التقريب، متغير  $N(5, 2.5)$ ، فإن نظرة سريعة إلى الشكل (٥-٩) ستوضح أن المساحة تحت منحنى الكثافة الطبيعي من 2 إلى 4 تهمل النصف الأيسر من مساحة المستطيل المقام فوق 2، والنصف الأيمن من مساحة المستطيل المقام فوق 4، وأن التقريب سيكون أفضل لو أخذنا بدلا من  $P(2 \leq X \leq 4)$ ، العبارة  $P(2 - 1/2 \leq X \leq 4 + 1/2)$ . ولكن:

$$\begin{aligned} P(1.5 \leq X \leq 4.5) &= F\left(\frac{4.5 - 5}{1.58}\right) - F\left(\frac{1.5 - 5}{1.58}\right) \\ &= F(-0.316) - F(-2.215) \\ &= 1 - F(0.316) - [1 - F(2.215)] \\ &= F(2.215) - F(0.316) = 0.9866 - 0.6240 \\ &= 0.3626 \end{aligned}$$



شكل (٩-٥) تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي

والقيمة الناتجة صحيحة إلى رقمين عشريين بالرغم من أن  $n$  لا تتجاوز العشرة. ويعود الفضل في جودة التقريب هنا إلى تناظر التوزيع الثنائي في حالة  $p = 0.5$  ، وإلى تعديل فترة تغير  $X$  ، مأخوذاً كمتغير طبيعي مستمر، بحيث تغطي تماماً المستطيلات الموافقة للحادثة التي نحسب احتمالها. وتسمى إضافة أو طرح  $1/2$  ، عملية تصحيح من أجل الاستمرار.

وعندما يكون  $n$  صغيراً و  $p$  قريباً من الصفر، أو قريباً من الواحد، فإن شكل المدرج الاحتمالي سيكون ملتويًا بشدة (أي تتجمع معظم المساحة إلى جانب  $X = 0$  أو إلى جانب  $X = n$  ، على الترتيب) وبالتالي سيكون بعيداً جداً عن وضع التناظر. وفي مثل هذه الحالات سيكون التقريب سيئاً ما لم تكن  $n$  كبيرة بكفاية.

مثال (١٤-٥)

موثوقية قطعة إلكترونية هي احتمال أن نختار واحدة من كومة إنتاج فنجدها تؤدي المهمة التي صممت من أجلها. أحسب احتمال أن نجد ما لا يقل عن 27 قطعة لا تعمل من بين عينة عشوائية تتضمن 1000 قطعة وذلك تحت الفرض بأن الموثوقية هي 0.98.

## الحل

المسألة هي مسألة توزيع ثنائي فكل قطعة تختارها إما أن تعمل أو لا تعمل .  
وإذا اعتبرنا نتيجة «القطعة لا تعمل» نجاحا، يكون  $p = 0.02$  ويكون المطلوب  
حساب :

$$P(X \geq 27) = \sum_{x=27}^{1000} \binom{1000}{27} (0.02)^x (0.98)^{1000-x}$$

والحساب الدقيق لهذه النتيجة يتطلب جهدا كبيرا . وباستخدام تقريب التوزيع  
الطبيعي نحسب المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين من  $X = 26.5$  (لاحظ أنه  
ينبغي استخدام  $X = 26.5$  بدلا من  $X = 27$  بحيث تشمل المستطيل الاحتمالي المقام فوق  
النقطة  $X = 27$  ). وذلك باعتبار أن  $X$  يتبع على وجه التقريب، التوزيع الطبيعي  
بمتوسط يساوي

$$\mu = np = 1000 \times 0.02 = 20$$

وانحراف معياري

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \times 0.02 \times 0.98} = 4.43$$

وهكذا نجد قيمة تقريبية للاحتمال المطلوب :

$$\begin{aligned} P(X \geq 26.5) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{26.5 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{26.5 - 20}{4.43}\right) = P(Z > 1.4) \\ &= 1 - F(1.4) = 1 - 0.9292 = 0.0708 \end{aligned}$$

مثال (٥-١٥)

اختبرنا لقاحا جديدا ضد الزكام . وقد أعطي اللقاح لمائة شخص ، وروقبوا من  
حيث إصابتهم بالزكام لمدة سنة . وقد نجا 68 منهم من الإصابة بالزكام . ولنفرض أننا

نعلم من معلومات سابقة أن احتمال عدم الإصابة بالزكام هي بصورة طبيعية وبدون استخدام اللقاح 0.5 . أية نتائج يمكنك استخلاصها من هذه التجربة حول فعالية اللقاح؟

## الحل

لنحسب احتمال نجاة 68 أو أكثر من الإصابة بالزكام تحت الفرض بأن  $p = 0.5$  ، أي أن اللقاح لم يكن له أي تأثير، فنجد باستخدام التقريب الطبيعي :

$$\mu = n p = 100 (0.5) = 50 ; \sigma = \sqrt{50 \times 0.5} = 5 ,$$

$$P(X \geq 68) = P\left(Z \geq \frac{67.5 - 50}{5}\right) = 1 - F(3.5) = 0.0002$$

لقد قمنا بالحسابات مفترضين أن اللقاح غير فعال ، وأن العدد 68 الذي حصلنا عليه ، وهو أكبر من المتوقع تحت هذا الفرض ، كان محض مصادفة . ولكن الاحتمال الناتج صغير جدا ، وهو يعني ، عمليا ، أنه لو كان ما افترضناه صحيحا وكررنا التجربة نفسها عددا كبيرا جدا من المرات فإننا سنجد نتيجة كالنتيجة التي حصلنا عليها ، أو أفضل ، في تجربتين من كل عشرة آلاف تجربة ، وهذا يثير الكثير من الريبة في صحة ما افترضناه ، ويدعو إلى الاعتراف بفعالية اللقاح في الوقاية من الزكام .

مثال (٥-١٦)

يتضمن امتحان خمسين سؤالاً من النوع متعدد الاختيارات ، ولكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة ، واحد منها فقط هو الجواب الصحيح ؛ ولكي ينجح الطالب لا بد له من الإجابة بصورة صحيحة على عشرين سؤالاً على الأقل .

- ١ - احسب احتمال نجاح طالب غير مؤهل يختار جوابه عن كل سؤال عشوائياً .
- ب - مع بقاء عدد الأسئلة ودرجة النجاح كما هي ، كم يجب أن يكون عدد

الاختيارات المطروحة أمام كل سؤال ليصبح احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائيا أقل من 0.01؟

جـ- في حال وجود اختيارين فقط ، كم يجب أن تكون درجة النجاح بحيث لا يزيد احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائيا على الواحد في المائة؟

الحل

١- ليكن  $X$  عدد الأجوبة الصحيحة، فلدينا  $p = 1/3$  ،  $n = 50$  ، والمطلوب  $P(X \geq 20)$  . وباستخدام التقريب الطبيعي نجد :

$$\mu = np = 50 \times \frac{1}{3} = \frac{50}{3} , \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$$

$$P(X \geq 20) \approx P\left(Z \geq \frac{19.5 - \frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right) = 1 - F(0.85) = 1 - 0.8023 \\ = 0.198$$

ب-

$$P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{19.5 - 50p}{\sqrt{50p(1-p)}}\right) \leq 0.01$$

$$F\left(\frac{19.5 - 50p}{\sqrt{50p(1-p)}}\right) \geq 0.99$$

$$\frac{19.5 - 50p}{\sqrt{50p(1-p)}} \geq 2.33$$

والمطلوب قيمة  $p$  التي تحقق هذه المتباينة وتجعل المقدار  $19.5 - 50p$  موجبا كما ينبغي أن يكون . وبتربيع الطرفين والإصلاح نجد :

$$2771.45 p^2 - 2221.45 p + 380.25 \geq 0$$

وهذه تتحقق إذا كان  $p > 0.55$  أو  $p < 0.248$  . ولكن قيم  $p$  الأكبر من 0.55 مرفوضة لأنها تجعل  $19.5 - 50p$  سالبا . وبما أن عدد الاختيارات هو بالضرورة عدد

صحيح فعلياً أخذ أول نسبة تقل عن 0.248 ويكون جداولها بعدد صحيح مساوياً للواحد تماماً. والنسبة المطلوبة هي إذا 0.2، وهذا يعني أن عدد الاختيارات المطروحة أمام كل سؤال ينبغي أن تكون خمسة.

جـ- المطلوب تحديد عدد صحيح  $a$  يحقق المتباينة التالية:

$$P(X \geq a) \leq 0.01$$

حيث  $n = 50$ ،  $p = 1/2$ ، وبالتالي  $\mu = 25$ ،  $\sigma = \sqrt{12.5} = 3.54$ .

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - \frac{1}{2} - 25}{3.54}\right) \leq 0.01$$

أي

$$F\left(\frac{a - 25.5}{3.54}\right) \geq 0.99$$

$$\frac{a - 25.5}{3.54} \geq 2.33 \Leftrightarrow a = 34.$$

### تمارين (٥ - ٥)

(١) عند تصالب حبتي بازلاء لكل منها زوج من المورثات (أحمر، أبيض) يُتوقع أن

تكون زهور ربع النسل بيضاء. إذا فحصنا 64 نبتة ناتجة عن مثل هذا التصالب فما

احتمال أن نجد 16 منها بالضبط ذات زهور بيض؟

(٢) نسبة القطع غير الصالحة التي تنتجها آلة هي 20%. أحسب بصورة تقريبية احتمال

أن تتضمن عينة عشوائية من 400 قطعة من إنتاج هذه الآلة أكثر من 90 قطعة غير

صالحة؟

(٣) نقذف حجر نرد 300 مرة، ونعتبر الحصول على 1 أو 2 «نجاحاً». استخدم تقريب

التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي لحساب احتمال ألا يجيد عدد النجاحات عن 100

بأكثر من 15.

(٤) في بلدة كبيرة يعطي نصف الناخبين، عادة، أصواتهم للمرشح A . ويسأل كل من 20 باحثًا إحصائيًا عينة عشوائية من 16 من الناخبين عن المرشح المفضل . استخدم جدول التوزيع الطبيعي لحساب تقريبي لعدد الباحثين الذين تتوقع أن يفيدوا بأن أقل من 6 من عينتهم فضلوا المرشح A .

(٥) يزرع رجل في حديقة منزله بذور زهور يقال أن 60% منها ينبت . إذا زرع 60 بذرة فما احتمال أن ينبت منها 15 بذرة أو أقل؟

(٦) لتعيين مشرف على آلة حاسبة الكترونية تتطلب إحدى الشركات من المرشحين اجتياز اختبار كتابي . وتتألف ورقة الامتحان من 100 سؤال متعدد الاختيارات ، ولكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة أحدها فقط صحيح . والنجاح في الاختبار يقتضي الإجابة الصحيحة على 40 سؤالًا، على الأقل . والمطلوب

أ - احتمال نجاح متقدم يختار الجواب على كل سؤال عشوائيًا؟

ب - أكبر عدد من الأسئلة ينبغي أن تتضمنها ورقة الامتحان إذا أردنا لاحتفال نجاح متقدم يختار أجوبته عشوائيًا أن لا يتجاوز الـ 1%؟

(٧) 25% من تلاميذ مدرسة لم يكن في سجلهم خلال عام دراسي بأكمله أي يوم غياب بسبب المرض . وفي الصف السادس من هذه المدرسة يوجد 120 تلميذاً . أوجد عدداً  $r$  بحيث يكون احتمال أقل من  $r$  تلميذ صف سادس بدون أي يوم غياب مرضي يساوي 0.01. أعرض الفرضيات التي اعتمدت عليها؟

(٨) إذا كان 55% من الناخبين في مدينة كبيرة يؤيدون قضية فما احتمال أن تظهر عينة عشوائية من 100 ناخب من هذه المدينة أغلبية لصالح القضية؟

٩) احتمال أن نستكمل بنجاح سلسلة من العمليات في تجربة معينة هو 0.44 . إذا بدأنا 65 من مثل هذه التجارب بصورة تضمن استقلال كل تجربة عن غيرها من التجارب ، فما احتمال أن نستكمل بنجاح أقل من 25 منها؟ بين أنه إذا كان احتمال النجاح 0.04 فقط فإن احتمال أربع نجاحات على الأقل هو حوالي 1/4 ؟

١٠) بالإشارة إلى التمرين ١٥ من مجموعة التمارين (٣ - ١) هل يمكنك الآن إعطاء جواب تقريبي؟

١١) بالإشارة إلى التمرين ١٦ من مجموعة التمارين (٣ - ١) ، هل يمكن إعطاء جواب تقريبي؟

### (٥ - ٧) فترة ثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معروف

ذكرنا عبر هذا الكتاب أن الإحصاء يهدف إلى التنبؤ أو اتخاذ قرار حول خاصية من خصائص مجتمع اعتمادا على المعلومات المتيسرة من عينة نأخذها من هذا المجتمع . وكما يوحى عنوان الفقرة فإن المجتمع الذي ينبغي دراسته هو مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي ، أو مجتمع موصوف رياضيًا بنموذج هو النموذج الطبيعي . وأن الخاصية التي تهمنا من خصائص هذا المجتمع هي متوسطه  $\mu$  ، مثلا ، مع افتراض أن تباينه معروف ويساوي  $\sigma^2$  . وما نريده هنا هو تحديد فترة ، أي تحديد عددين حقيقيين ، نستطيع أن نقول ، بثقة عالية ، إن المتوسط يقع بينهما .

لنأخذ عينة عشوائية حجمها  $n$  من هذا المجتمع ، ولنرمز لمقاديرها بـ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ولتوسطها بـ  $\bar{X}$  . فكما رأينا في الفقرة [٥ - ٤] (الخاصة ٣) ، يتوزع  $\bar{X}$  وفق التوزيع الطبيعي  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  . ومعرفة التوزيع الاحتمالي لـ  $\bar{X}$  يعني بالنسبة لنا

الشيء الكثير، إذ نستطيع تقديم وصف رياضي لمجتمع القياسات الموافق لـ  $\bar{X}$  ، أي للقيم كافة التي يمكن أن يأخذها المتوسط  $\bar{X}$  لو أننا قمنا بأخذ عدد هائل من العينات المختلفة ذات الحجم  $n$  من هذا المجتمع . وسيسمح لنا هذا التوزيع بالإجابة بيسر وسهولة على أسئلة هامة من النوع : ما نسبة العينات التي يتجاوز متوسطها قيمة محددة؟ أو يقل عن قيمة محددة؟ أو يقع بين عددين محددين؟ الخ . وبصورة عامة، يمكننا اعتماداً على معلوماتنا من الفقرة (٦ - ٣) أن نكتب :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

و

$$P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

وهذا يكافئ :

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

أو

$$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

وفي هذه العبارة يمكن معرفة  $Z_{\alpha/2}$  من جدول التوزيع الطبيعي المعياري حالما نحدد قيمة  $\alpha$  ، و  $\sigma$  معروف ، و  $n$  حجم العينة محدد سلفاً . وإذا أمعنا النظر، سنجد منطوق هذه العبارة قبل أخذ العينة كالتالي :

إن نسبة  $(1 - \alpha) 100\%$  من العينات ذات الحجم  $n$  التي يمكن أخذها من هذا المجتمع ستؤدي إلى قيمة لـ  $\bar{X}$  بحيث تتضمن الفترة التي تبدأ بالعدد  $\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  وتنتهي بالعدد  $\bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  القيمة الصحيحة لمتوسط المجتمع  $\mu$  . ويسمى  $\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  حد الثقة الأدنى و  $\bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  حد الثقة الأعلى .

وتيسيرا للفهم ، ولتشكيل تصور محسوس للفكرة التي نطرحها هنا ، دعنا نحدد قيمة لـ  $\alpha$  ، ولتكن  $0.05$  ، وعندئذ  $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$  . ويكون  $1 - \alpha = 0.95$  . ونصبح المقولة التي تشكل منطوق العبارة الاحتمالية أعلاه كالتالي :

إن نسبة 95% من العينات ذات الحجم  $n$  التي يمكن أخذها من هذا المجتمع ستؤدي إلى قيمة لـ  $\bar{x}$  بحيث تتضمن الفترة

$$\left( \bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

القيمة الصحيحة لمتوسط المجتمع  $\mu$  .

وعندما نأخذ العينة سنحصل على قيمة محددة  $\bar{x}$  للمتغير العشوائي  $\bar{x}$  ، وسنجد فترة معرفة تماما هي الفترة الممتدة بين العدد  $\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  والعدد  $\bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ، وهذه الفترة إما أن تتضمن القيمة الصحيحة  $\mu$  أو لا تتضمنها وليس هناك خيار ثالث . لم يعد هناك احتمالات للموقف ، فقد أطلقنا طلقة على الهدف (أخذنا عينة وحددنا فترة ثقة) والنتيجة هي حتما واحدة من اثنتين إما أننا أصبنا الهدف (الفترة تغطي  $\mu$ ) أو أننا لم نصبه (الفترة لا تغطي  $\mu$ ) . وبما أننا نعلم قبل أخذ العينة أن نسبة عالية من العينات ، (95% منها) تصيب الهدف ، فستولد عندنا ثقة عالية بأن العينة التي حصلنا عليها قد أصابت فعلا ، مما يقترح تسمية النسبة العالية تلك «معامل ثقة» . فنقول إن الفترة الناتجة هي فترة ثقة تتضمن  $\mu$  بمعامل ثقة يبلغ 95% . والله سبحانه وتعالى وحده يعلم ما إذا كانت العينة التي حصلنا عليها حسنة الطالع (من بين الـ 95% التي تغطي القيمة الصحيحة للمتوسط  $\mu$ ) أم أنها سيئة الطالع (من بين الـ 5% التي يجانبها الصواب ، إذ لا تغطي الفترة الناشئة عنها القيمة الصحيحة للمتوسط  $\mu$ ) .

وبالطبع يمكن أن نكون أشد تحفظا فنأخذ  $\alpha = 0.01$  ويكون معامل الثقة  $99\% = 100(1 - \alpha)$  . ومن الطبيعي أن تكون الفترة التي نحصل عليها في هذه الحالة

أطول من سابقتها المقابلة لمعامل ثقة 95% . كما يمكن ، على الوجه الآخر ، أن نكون أقل تحفظا فنأخذ  $\alpha = 0.10$  ، ويكون معامل الثقة 90% لفترة تمتاز بأنها أقصر من سابقتها .

مثال (٥ - ١٧)

يمثل البيان الإحصائي التالي إنتاج عشر شجيرات من الطماطم مقاسا بالكيلوغرام .

2.3, 2.6, 2.2, 3.1, 4.0, 1.9, 2.7, 1.9, 3.3, 3.0

ونعلم أن قياسات الإنتاج في مجتمع شجيرات الطماطم يوصف بتوزيع طبيعي تباينه  $\sigma^2 = 0.36$  . أحسب 90% ، 95% ، و 99% فترة ثقة لمتوسط الإنتاج  $\mu$  .

الحل

متوسط العينة  $\bar{x}$  هو:

$$\bar{x} = \frac{2.3 + 2.6 + \dots + 3.0}{10} = 2.7$$

90% فترة ثقة :

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.05} = 1.645 , \alpha/2 = 0.05 , \alpha = 0.10 , 1 - \alpha = 0.9$$

وتكون الفترة المطلوبة :

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.7 \pm 1.645 \frac{\sqrt{0.36}}{\sqrt{10}} = 2.7 \pm 0.31 = (2.39, 3.01)$$

95% فترة ثقة :

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96 , \alpha/2 = 0.025 , \alpha = 0.05 , 1 - \alpha = 0.95$$

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.7 \pm 1.96 \frac{0.6}{3.16} = 2.7 \pm 0.37 = (2.33, 3.07)$$

99% فترة ثقة :

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.005} = 2.58, \quad \alpha/2 = 0.05, \quad \alpha = 0.10, \quad 1 - \alpha = 0.99$$

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.7 \pm 2.58 \frac{0.6}{3.16} = 2.7 \pm 0.49 = (2.21, 3.19)$$

لاحظ أن فترة الثقة تتسع مع ازدياد معامل الثقة .

في هذا المثال نخرج، مثلاً، بالتقدير التالي: «بمعامل ثقة 95% يقع متوسط الإنتاج  $\mu$  بين 2.33 كغ و 3.07 كغ. ولكن هب أننا اتفقنا على اعتبار منتصف الفترة قيمة تقديرية أو تقديراً لـ  $\mu$ ، فهذا شيء منطقي تماماً إذ نقول إن متوسط العينة  $\bar{X} = 2.7$  هو تقديرنا لمتوسط المجتمع الذي جاءت منه العينة، ولكن الاكتفاء بذلك لا يضيف أي جديد إلى ما هو معروف تاريخياً، إذ يلجأ كل خبير يريد القيام بعملية تخمين إلى أخذ عينة تمثل المجتمع، في رأيه، تمثيلاً جيداً، ثم يأخذ معلومات العينة ليعممها بصورة مباشرة على المجتمع. وكأن العينة هي صورة مصغرة للمجتمع، وليس علينا إلا تكبير هذه الصورة حتى نحصل على صورة المجتمع. ولكن ماذا عن الخطأ في هذا التقدير؟ لو رجعنا إلى العبارة الاحتمالية في مطلع الفقرة وهي:

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

لوجدنا أنها مكافئة للعبارة:

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

و  $|\bar{X} - \mu|$  يمثل الخطأ المطلق للتقدير، فهو القيمة المطلقة لحيدان التقدير عن الشيء المراد تقديره. والعبارة الإحتمالية تقول إنه باحتمال يبلغ  $(1 - \alpha)$  لا يتجاوز الخطأ في هذا التقدير المقدار  $\pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ، وفي المثال السابق يمكن القول، مثلاً، إنه في 95% من العينات الممكنة سوف لا يجيد متوسط العينة عن متوسط المجتمع بأكثر من 0.37 كغ زيادة أو نقصاناً. وعبارة أخرى، سوف لا يتعدى الخطأ في تقديرنا إلا فيما

ندر، القيمة 0.37 كغ زيادة أو نقصانا. وسنطلق على المقدار  $Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ، مع شيء من التجاوز، اسم «الحد الأعلى لخطأ التقدير»، فهو في حقيقة أمره حد أعلى تقريبي لخطأ التقدير. وسنرمز له بالرمز  $e$  ، ونكتب:

$$e = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ولو سألنا الخبير التقليدي عن الخطأ في تقديره لعجز عن الإجابة إذ ليس لديه أية وسيلة تسمح له بذلك. وبينما يعتمد الخبير التقليدي اعتمادا كلياً على العينة التي أخذها فإن الإحصائي اليوم لا يعتمد على العينة إلا كجزء من صورة متكاملة تتضمن إلى جانب العينة المأخوذة العينات كافة التي كان يمكن الحصول عليها لو أنه كرر تجربة أخذ العينة عددا هائلا من المرات. وهو ما يسمى بتوزيع المعاينة، ممثلا هنا بتوزيع المتوسط  $\bar{x}$ . وهذه هي الإضافة الجديدة لعلم الإحصاء في مسألة كهذه. (انظر الفقرة (٧-٥) والفقرة (٩-٥)).

ويتضح من عبارة  $e$  أنه يمكننا التحكم في حجم الخطأ من خلال التحكم في حجم العينة  $n$  ، فالمقدار  $e$  يتناسب عكسا مع الجذر التربيعي لحجم العينة. ولو أردنا تخفيض  $e$  إلى نصف ما هو عليه لاحتجنا إلى زيادة حجم العينة إلى أربعة أضعاف. وبالطبع يمكننا قبل تنفيذ البحث الإحصائي، أي قبل أخذ العينة، تصميم حجم العينة  $n$  بصورة تتناسب مع مقدار الخطأ الذي يمكن التساهل فيه. وسنوضح الفكرة بمثال.

مثال (١٨-٥)

بالإشارة إلى المثال السابق (١٧-٥)، لنفرض أننا نريد تقدير متوسط إنتاج شجيرة الطماطم  $\mu$  بحيث لا يزيد الخطأ عن 0.2 كغ إلا باحتمال زهيد لا يتجاوز الواحد في المائة. فكم يجب أن يكون حجم العينة؟

الحل

الحد الأعلى للخطأ  $e$  يساوي 0.2 ،

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.005} = 2.58 \quad \alpha = 0.01$$

$$e = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \frac{0.6}{\sqrt{n}} \leq 0.2$$

ومنه :

$$0.2\sqrt{n} \geq 1.548$$

$$\sqrt{n} \geq 7.74 , n \geq 59.9$$

أي أن حجم العينة يجب أن لا يقل عن 60 .

تمارين (٥-٦)

(١) بفرض عينات عشوائية من مجتمعات طبيعية تباينها معروف ، أوجد فترات ثقة

للقيمة الحقيقية  $\mu$  لمتوسط المجتمع بمعامل الثقة المين في كل حالة :

$$١- n = 9 , \bar{X} = 4 , \sigma^2 = 16 , \text{معامل الثقة } 90\% .$$

$$ب- n = 100 , \bar{X} = 29 , \sigma^2 = 49 , \text{معامل الثقة } 95\% .$$

$$ج- n = 64 , \bar{X} = 4 , \sigma^2 = 100 , \text{معامل الثقة } 99\% .$$

(٢) مجتمع طبيعي انحرافه المعياري  $\sigma = 0.75$  . كم يجب أن يكون حجم عينة مأخوذة من

هذا المجتمع كي لا يزيد الحد الأعلى للخطأ عن 0.4 ، وذلك باحتمال 0.95 ؟

(٣) نعلم أن الخطأ المرتكب في قياس طول ، عند استخدام جهاز لقياس الأطوال ، يتوزع

وفق التوزيع الطبيعي ، بمتوسط يساوي الصفر ، وانحراف معياري 1 مم .

١ - أحسب احتمال أن يقل الخطأ عند استخدام الجهاز مرة واحدة عن 0.5 مم .

ب - إذا استخدم الجهاز بصورة مستقلة 9 مرات لقياس طول معين ، فاحسب

احتمال أن يقع متوسط القياسات التسعة في حدود 0.5 مم من القيمة الحقيقية

للطول .

(٤) مجتمع طبيعي انحرافه المعياري  $\sigma = 0.75$  ، كم يجب أن يكون حجم عينة مأخوذة من هذا المجتمع كي لا يزيد الحد الأعلى للخطأ عن 0.4 ، وذلك باحتمال 0.95 ؟

(٥) يريد إحصائي تحديد متوسط الأجر اليومي لمستخدمي مهنة معينة . ويريد باحتمال 0.95 حداً أقصى للخطأ قدره 9 ريالاً . ومن دراسات مماثلة أخرى يعلم أن بإمكانه افتراض مجتمع طبيعي انحرافه المعياري  $\sqrt{650}$  ريالاً . ما هو حجم العينة التي ينبغي أن يخطط للحصول عليها؟

(٦) إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع طبيعي هو  $\sigma = 5$  . ما هو حجم العينة التي ينبغي أخذها حتى نطمئن باحتمال قدره 0.95 إلى عدم اختلاف متوسط العينة عن متوسط المجتمع بأكثر من الواحد؟

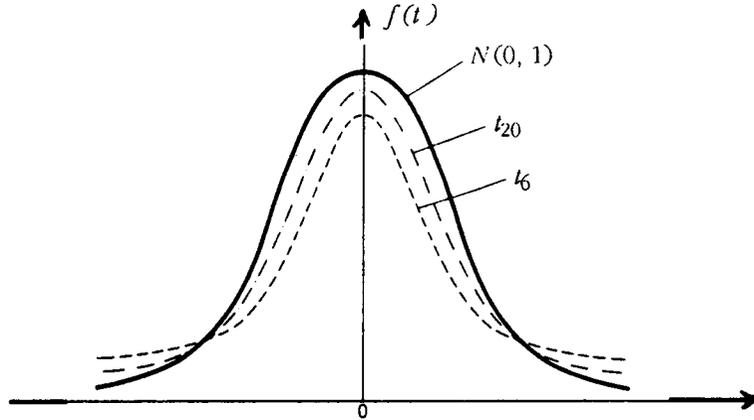
(٥ - ٨) فترة ثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه غير معروف وحجم العينة صغير

لو تتبعنا المناقشة في الفقرة السابقة لوجدنا أنه لا بد من تعويض  $\sigma$  ، التي افترضناها معروفة هناك ، بتقدير لها من العينة . والتقدير الذي تلميه البداة هو اعتماد  $s$  ، الانحراف المعياري للعينة ، كتقدير لـ  $\sigma$  ، الانحراف المعياري للمجتمع الذي جاءت منه العينة . وهكذا يأخذ المقدار  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$  ، الذي يتبع تماماً التوزيع الطبيعي المعياري ، الصيغة :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

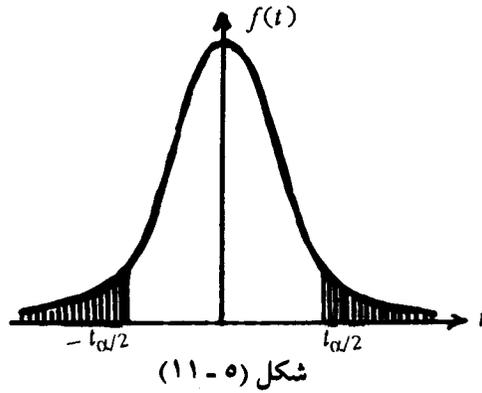
والمتغير الجديد الذي رمزنا له بـ  $t$  يحوي مركبة عشوائية في البسط هي  $\bar{X}$  ومركبة عشوائية في المقام هي  $s$  . ولم يعد توزيعه هو التوزيع الطبيعي المعياري . وقد تمكن «ستودنت» ، وهو لقب لكاتب إحصائي كان ينشر أبحاثه بتوقيع «ستودنت» ، أن

يشترك العبارة المضبوطة لتوزيع  $t$  ويسمى هذا التوزيع في كتب الإحصاء المختلفة «التوزيع  $t$  ، أو توزيع «ستودنت». وفي الشكل (٥ - ١٠) نجد أمثلة من منحنيات الكثافة لهذا التوزيع. فهو متناظر حول المحور الرأسي، شأنه في ذلك شأن منحنى الكثافة الطبيعي المعياري. ويعتمد المنحنى على حجم العينة  $n$  ونصطلح على تسمية المقدار  $n-1$  ، «عدد درجات الحرية» ونرمز له بـ  $v$  (حرف يوناني ينطق نو). والجدول ٢ في الملحق يعطي القيمة الموجبة لـ  $t$  التي يقع إلى اليسار منها  $(1 - \alpha)$  من المساحة الكلية تحت المنحنى وذلك من أجل قيم مختلفة لـ  $\alpha$  و  $v$ . وسنرمز بـ  $t_{\alpha}(n-1)$  للدلالة على قيمة المتغير  $t$  في صلب الجدول الواقعة في ملتقى السطر  $n-1$  والعمود الذي عنوانه  $1 - \alpha$ . وعلى سبيل المثال، لإيجاد  $t_{0.025}(14)$ ، ندخل الجدول وفق السطر 14 ونتحرك حتى نصل إلى العمود الذي عنوانه 0.975 لنجد القيمة 2.145.



شكل (٥ - ١٠) أشكال مقارنة للتوزيعين  $t_{20}$ ،  $t_6$  والتوزيع  $N(0, 1)$ .

وإذا أخذنا عينة عشوائية حجمها  $n$  من مجتمع طبيعي  $N(\mu, \sigma^2)$  حيث  $\mu$  و  $\sigma^2$  غير معروفين، وكالعادة رمزنا بـ  $\bar{x}$  و  $S$  لمتوسط العينة وانحرافها المعياري فيمكننا إستنادا إلى تناظر التوزيع  $t$  (انظر الشكل (٥ - ١١)) كتابة:



$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

أو

$$P\left(\frac{-S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \bar{X} - \mu < \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

أو

$$P\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

وتكون فترة الثقة للمتوسط  $\mu$  بمعامل ثقة  $100(1 - \alpha)\%$  هي

$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$  . ولوضع فترة ثقة نحسب إذا  $\bar{X}$  و  $S$  من العينة وقيمة  $t_{\alpha/2}(n-1)$  من جدول التوزيع  $t$  ثم نعوض .

مثال (١٩-٥)

قسنا ارتفاع خمس عشرة شجيرة باذنجان بعد فترة من زرعها فكان متوسط الارتفاع 83 سم بانحراف معياري 5.8 سم . ضع 95% فترة ثقة لمتوسط الارتفاع في المجتمع الذي اخترنا منه الشجيرات الخمس عشرة في العينة ، مفترضا أن ارتفاع الشجيرة في المجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي .

الحل

حدا الثقة هما (14)  $t_{0.025}$   $\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}$  . ومن جدول التوزيع  $t$  نجد  $t_{0.025} (14) = 2.145$  ، لاحظ أنه لو كان  $\sigma$  معروفا لكان هذا العدد 1.96 فقط) ، وتكون فترة الثقة بمعامل 95% هي :

$$83 \pm 2.145 \times 5.8 / \sqrt{15}$$

أي من 79.8 سم إلى 86.2 سم .

وكلما ازداد حجم العينة أصبح  $S$  تقديرا أفضل لـ  $\sigma$  وبالتالي اقتربت قيم  $t$  من قيم المتغير الطبيعي المعياري  $Z$  الموافقة لها . ولو نظرنا في السطور الأخيرة في جدول التوزيع  $t$  (السطور التي تلي السطر 30) لوجدنا أن الفروق بين قيم  $t$  وقيم  $Z$  المقابلة لها تصبح صغيرة ، وفي السطر الأخير من الجدول حيث كتب حذاء الرمز "∞" تتطابق قيم  $t$  مع قيم  $Z$  المقابلة .

مثال (٥ - ٢٠)

وضعت عينة من 12 فأرا تجريبيا على نظام تغذية معين خلال الأشهر الثلاثة الأولى من حياتها وقيست الزيادة في وزن كل فأر بالغمم فكانت كما يلي :

$$55, 62, 54, 58, 65, 64, 60, 62, 59, 67, 62, 61$$

والمطلوب وضع فترة ثقة بمعامل ثقة 90% لمتوسط الزيادة في الوزن خلال الأشهر الثلاثة الأولى من حياة مجتمع الفئران الذي جاءت منه العينة ، علما أنه يمكن اعتبار التوزيع الطبيعي توزيعا مناسباً لمتغير زيادة الوزن خلال الأشهر الثلاثة الأولى .

الحل

نحسب متوسط العينة وانحرافها المعياري فنجد  $\bar{X} = 60.75$  ،  $S = 3.84$  ، ولدنا

$1 - \alpha = 0.90$  ،  $\alpha = 0.10$  ،  $\alpha/2 = 0.05$  ، ومن جدول التوزيع  $t$  نجد :

$$t_{\alpha/2} (n-1) = t_{0.05} (11) = 1.796$$

بالتعويض نجد فترة الثقة المطلوبة :

$$60.75 \pm \frac{3.84}{\sqrt{12}} \times 1.796 = 60.75 \pm 1.99$$

أي من 58.76 غ إلى 62.74 غ .

### تمارين (٥ - ٧)

(١) في ستة اختبارات لتجميع وتركيب قطع آلية معينة ، استغرق وقت التجميع والتركيب 13 ، 14 ، 12 ، 16 ، 13 ، و 11 دقيقة . مفترضا أن زمن التجميع والتركيب يتبع التوزيع الطبيعي ، ضع فترة ثقة لمتوسط الزمن الحقيقي للتجميع والتركيب بمعامل ثقة 99% .

(٢) عينة عشوائية من 30 درجة من درجات اختبار للذكاء أعطي لطلاب المرحلة الثانوية ، أنتجت متوسطا قدره 423 وإنحرافا معياريا  $s = 68$  . أوجد فترة ثقة لمتوسط المجتمع بمعامل ثقة 95% ، مفترضا أن درجات الاختبار في المجتمع تتبع التوزيع الطبيعي .

(٣) وجد طبيب أسنان في فحصه الدوري لستة طلاب ابتدائي أنهم احتاجوا إلى 2 ، 3 ، 6 ، 0 ، 4 ، و 3 عمليات حشوة .

١ - إذا استخدم الطبيب متوسط هذه العينة كتقدير لمتوسط المجتمع الذي جاءت منه العينة فماذا يمكنه أن يقول باحتمال 0.95 عن الحد الأعلى للخطأ الذي ارتكبه؟

ب - ضع فترة ثقة لمتوسط المجتمع بمعامل ثقة 95% .

ج - ما الفرض الذي استندت إليه في حساباتك؟

٤) أحد الثوابت الفيزيائية المهمة هو  $e/m$  نسبة شحنة الكهروب (الإلكترون) إلى كتلته . وفي تجربة فيزيائية لقياس هذا الثابت أعيدت ، بصورة مستقلة ، 12 مرة ، كانت النتائج التالية :

$$1.7604 \times 10^7, 1.7638 \times 10^7, 1.7609 \times 10^7$$

$$1.7563 \times 10^7, 1.7556 \times 10^7, 1.7582 \times 10^7$$

$$1.7526 \times 10^7, 1.7663 \times 10^7, 1.7624 \times 10^7$$

$$1.7620 \times 10^7, 1.7605 \times 10^7, 1.7621 \times 10^7$$

١ - ما تقديرك للقيمة الحقيقية لـ  $e/m$  ؟ وما هو الحد الأعلى لخطأ هذا التقدير باحتمال 0.95 ؟

ب - ضع فترة ثقة لقيمة  $e/m$  بمعامل ثقة 99% .

٥) تأتي مادة غذائية من مصنع معين في علب مكتوب عليها «الوزن الصافي 38 أونصة» . وقد وجد أن الوزن الذي تحويه كل من عينة عشوائية من 6 علب كان كما يلي :

$$34.06, 39.65, 34.75, 40.00, 39.50, 34.25$$

ضع فترة ثقة لمتوسط محتوى العلبة من إنتاج المصنع من تلك المادة الغذائية ، وذلك بمعامل ثقة 98% .

(٥ - ٩) فترة الثقة لمتوسط مجتمع في حالة عينات كبيرة الحجم

لا نفترض هنا أن المجتمع الذي نأخذ منه العينة مجتمع طبيعي ، ولكننا نفترض أن حجم العينة  $n$  كبير إلى الحد الذي يسمح بالاستفادة من نظرية النهاية المركزية ، واعتبار توزيع  $\bar{X}$  ، متوسط العينة ، مطابقاً تقريباً للتوزيع الطبيعي . وبالتالي تطبيق ما جاء في الفقرة (٥ - ٧) بحذافيره . فإذا كان تباين المجتمع  $\sigma^2$  معروفاً كانت فترة الثقة لمتوسط المجتمع  $\mu$  ، بمعامل ثقة  $(1 - \mu)\%$  100 هي

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث تؤخذ قيمة  $Z_{\alpha/2}$  من جدول التوزيع الطبيعي المعياري . وإذا كان التباين  $\sigma^2$  غير معروف ، وغالبا ما يكون الأمر كذلك في التطبيقات العملية ، فإن تباين العينة  $s^2$  يشكل تقديرا جيدا لـ  $\sigma^2$  ، نظرا لكبر حجم العينة ، مما يسمح بتعويض  $s$  بدلا من  $\sigma$  في فترة الثقة لتصبح :

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

وكما رأينا في الفقرة (٥ - ٧) نعتبر متوسط العينة  $\bar{X}$  تقديرا لمتوسط المجتمع  $\mu$  ويكون الحد الأعلى التقريبي لخطأ التقدير:

$$e = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وفي حالة  $\sigma$  غير معروف نعوض عن  $\sigma$  بـ  $s$  لنجد:

$$e = Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

وبما أن معامل الثقة الأكثر استخداما في التطبيقات العملية هو المعامل 0.95 أو 95% . فقد جرت العادة على كتابة الحد الأعلى التقريبي لخطأ التقدير على الشكل :

$$e = 1.96 \sigma_{\bar{X}} = 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث نعني بـ  $\sigma_{\bar{X}}$  الانحراف المعياري لمتوسط العينة  $\bar{X}$  ، وهو وفقا لنظرية النهاية المركزية  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  . وبما أن النتائج تقريبية ، علي أي حال ، فقد جرت العادة أيضا على استخدام 2 بدلا من 1.96 ، تسهلا للحسابات ، وهكذا نكتب :

$$e = 2 \sigma_{\bar{X}} = 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

أو في حالة  $\sigma$  غير معروف :

$$e = 2 \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ويجدر التنويه بخطأ شائع بالنسبة إلى المبتدئين ، ينبغي الانتباه إليه ، وهو استخدام  $2\sigma$  كحد أعلى تقريبي للخطأ بدلا من  $2\sigma_{\bar{X}}$  .

مثال (٥-٢١)

لنفرض أننا نرغب في تقدير متوسط الإنتاج اليومي في شركة للصناعات الكيماوية. وقد سجلنا الإنتاج اليومي لفترة  $n = 60$  يوما فكان متوسط هذه العينة وانحرافها المعياري بالأطنان:

$$S = 23, \bar{X} = 941$$

والمطلوب تقدير  $\mu$  متوسط الإنتاج اليومي في هذه الشركة.

الحل

التقدير الأفضل هو  $\mu = 941$  طنا في اليوم. وحدود الخطأ بالزيادة أو النقصان في

هذا التقدير هي:

$$\pm 2 \frac{S}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2(23)}{\sqrt{60}} = 5.94$$

(تذكر أننا عندما نستخدم العدد 2 يكون معامل الثقة 95%). وهكذا نقول، بمعامل ثقة 95%، إن التقدير 941 هو في حدود 5.94 طنا، زيادة أو نقصانا، من القيمة الحقيقية لمتوسط الإنتاج.

مثال (٥-٢٢)

نعلم أن عمر مركبة معينة من دائرة كهربائية يتبع توزيعا احتماليا ملتويا. أخذنا عينة عشوائية من 250 من هذه المركبات فكان متوسط العمر فيها 840 ساعة بانحراف معياري  $S = 21.98$  ساعة. أوجد فترة ثقة تقريبية لمتوسط العمر في مجتمع إنتاج هذه المركبات، مستخدما معامل ثقة 95%.

الحل

فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{X} \pm 2 \frac{S}{\sqrt{n}}$$

أي

$$840 \pm 2 \frac{21.98}{\sqrt{250}} = 840 \pm 2.78$$

وهكذا نقدر بمعامل ثقة 95% أن متوسط العمر في مجتمع إنتاج هذه المركبات واقع بين 837.2 و 842.8 ساعة .

مثال (٥-٢٣)

نريد تقدير  $\mu$  متوسط الطول في إنتاج مصنع للبراغي في حدود خطأ لا يزيد عن 1/2 مم إلا باحتمال لا يتجاوز الخمسة في المائة . فكم يجب أن يكون حجم العينة علما بأننا نعرف من سجلات الإنتاج السابقة أن الانحراف المعياري للطول يساوي 1.2 مم؟

الحل

$$e = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{1.2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

ومنه

$$\sqrt{n} \geq 2 (1.96)(1.2) = 4.704$$

$$n \geq 22.1$$

أي أن حجم العينة يجب ألا يقل عن 23 .

تمارين (٥-٨)

(١) من المعروف أن عمر أحد عناصر دائرة كهربائية يتبع توزيعا احتماليا ملتويا . وقد وجدنا أن متوسط العمر في عينة عشوائية من 300 عنصرا يساوي 920 ساعة بتباين يساوي 483 ساعة<sup>٢</sup> . ضع فترة ثقة تقريبية لمتوسط العمر الحقيقي لهذا العنصر مستخدما معامل ثقة 95% .

(٢) في عينة عشوائية من 100 كيس تفاح كتب عليه «الوزن الصافي 1 كغ» وجدنا أن متوسط الوزن 1002 غراما بتباين يساوي 144 غ<sup>٢</sup>. ضع فترة ثقة تقريبية لمتوسط وزن التفاح الحقيقي ضمن الكيس الواحد وذلك بمعامل ثقة 90% .

(٣) عينة عشوائية من 60 مخزنا أظهرت أن متوسط سعر الحليب  $\bar{x} = 77.3$  سنتا للكيلوغرام، بانحراف معياري 4.2 سنتا. أوجد فترة ثقة لمتوسط سعر الحليب بمعامل ثقة 95% .

(٤) مالك سيارة يريد أن يعرف المتوسط الأسبوعي للمسافة التي يسيرها مقاسة بالميل . وقد سجل المسافات التي قطعها في 52 أسبوعا متتاليا ووجد متوسطها 176 ميلا في الأسبوع، بانحراف معياري 96 ميلا. ضع فترة ثقة لمتوسط ما يقطعه في الأسبوع بمعامل 95% .

(٥) يرغب مستشفى في تقدير عدد الأيام التي يحتاجها علاج مرضى يقعون بينهم بين 25 و 34 سنة . وقد وجدت إدارة المستشفى أن متوسط عدد أيام الإقامة لعينة عشوائية من 500 مريض من هذه الفترة من العمر، يساوي 5.4 يوما بانحراف معياري 1.3 يوما . ضع فترة ثقة لمتوسط الإقامة في المستشفى لمجتمع المرضى الذي جاءت منه العينة، وذلك بمعامل ثقة 99% .

(٦) لنفرض أن تباين مجتمع  $\sigma^2 = 100$  ، وبمعامل ثقة 95% نريد أن يكون تقديرنا  $\bar{x}$  في حدود 2.5 وحدة قياس من  $\mu$  المتوسط الحقيقي للمجتمع . كم يجب أن يكون حجم العينة؟

(٧) فيما يلي جدول التوزيع التكراري للعمر عند الزواج، لأقرب سنة، لـ 175 رجلا:

مركز الفئة	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	57.5	62.5
التكرار	28	28	43	18	9	4	2	1	0	2

- ١ - أحسب متوسط العمر عند الزواج وانحرافه المعياري .  
 ب - إذا افترضنا أن هذه الأعمار عينة عشوائية من مجتمع كبير . فاحسب بمعامل ثقة 95% فترة ثقة لمتوسط العمر عند الزواج في ذلك المجتمع .

(٨) في تجربة لبنج جديد، أعطي لمائة فأر وقيس زمن الانتعاش لكل منها إلى أقرب عشر من الدقيقة، فكانت النتائج كما يلي :

45.0	58.2	55.1	52.5	61.7	52.9	70.4	62.5	71.3	50.1
84.9	60.9	35.4	64.3	75.7	48.5	41.3	53.8	66.8	37.4
32.4	50.7	82.3	71.8	66.4	49.7	51.7	56.0	88.8	64.7
77.9	41.4	52.7	53.4	57.9	51.7	55.6	44.1	85.4	67.3
87.3	52.5	46.7	48.3	60.1	66.0	77.3	46.5	54.3	52.6
53.1	67.9	55.9	64.2	68.0	48.2	41.2	56.3	79.4	80.9
58.7	49.0	51.2	70.2	54.0	74.6	51.9	42.6	95.4	51.9
83.5	70.4	76.7	47.0	55.9	43.8	49.1	60.0	38.3	44.3
63.5	45.4	57.3	54.5	73.9	64.1	80.6	68.8	73.5	84.0
65.9	58.3	59.6	59.1	46.7	51.3	44.5	54.2	63.8	56.9

والمطلوب تقدير متوسط زمن الانتعاش في المجتمع الذي جاءت منه العينة وإعطاء حد أعلى لخطأ التقدير باحتمال 0.99 .  
 كم فأرا تحتاج كي يكون خطأ التقدير 1 تقريبا؟

(٥ - ١٠) فترة الثقة لنسبة

لنفرض أن صنفنا معيناً  $A$  يوجد في مجتمع كبير بنسبة تساوي  $\pi$  . إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها  $n$  من هذا المجتمع، وعرفنا النجاح بأنه الحصول على عنصر من الصنف  $A$  ، فإن احتمال النجاح عند كل سحب هو، عملياً،  $\pi$  . ونسبة النجاح في

العينة هي عدد عناصر الصنف  $A$  ولنرمز لها بـ  $X$  (أي عدد النجاحات) مقسوما على حجم العينة  $n$ . وإذا رمزنا لنسبة الصنف  $A$  في العينة بـ  $p$  فإن:

$$p = \frac{X}{n}$$

وعندما ناقشنا تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي في الفقرة (٥ - ٦) وجدنا أنه يمكن اعتبار عدد النجاحات  $X$  مجموع عينة، وبالتالي تكون النسبة  $p$  هي متوسط العينة. وكما أن تطبيق نظرية النهاية المركزية على  $X$  يسمح لنا بالقول إن  $X$  يتوزع تقريبا وفق التوزيع الطبيعي  $(n\pi, n\pi(1-\pi))$ ، فإن تطبيق نظرية النهاية المركزية على المتوسط  $p$  يسمح لنا بالقول إن للنسبة  $p$  (نسبة النجاح في العينة) توزيعا مطابقا تقريبا للتوزيع الطبيعي  $(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n})$ ، حيث:

$$E(p) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

$$V(p) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X) = \frac{n\pi(1-\pi)}{n^2} = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

وذلك كله شريطة أن يكون  $n$  كبيرا (مثلا أكبر من 30 في حالة قيمة  $\pi$  ليست قريبة من الصفر أو قريبة من الواحد). وهذه النتيجة تسمح لنا بوضع فترة ثقة للنسبة  $\pi$  على الشكل التالي بمعامل ثقة  $100(1-\mu)\%$ :

$$p \pm Z_{\alpha/2} \sigma_p = p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

حيث  $\sigma_p$  تعني الانحراف المعياري للنسبة  $p$ . ووجود  $\pi$  المجهولة في هذه العبارة يمنع من تطبيقها. ويمكننا الاستعاضة عن  $\pi$ ، نسبة النجاح في المجتمع، بتقدير لها هو  $p$ ، نسبة النجاح في العينة. (تماما كما عوضنا عن  $\sigma$  بـ  $s$  في الفقرة السابقة). وتصبح فترة الثقة لـ  $\pi$  كما يلي:

$$p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

ومن أجل معامل ثقة 95% يمكن اعتبار  $Z_{\alpha/2}$  مساويا لـ 2 بدلا من 1.96 ، تسهيلا للحساب . وهكذا نكتب فترة الثقة لـ  $\pi$  ، بمعامل ثقة 95% كما يلي :

$$p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \pi \leq p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

مثال (٥ - ٢٤)

من بين 300 أسرة اخترناها من بلدة كبيرة وجدنا 123 أسرة تمتلك تلفازا ملونا .  
ضع فترة ثقة لنسبة الأسر التي تمتلك تلفازا ملونا في مجمل البلدة . وذلك بمعامل ثقة 95% .

الحل

$$p = \frac{123}{300} = 0.41 ، n = 300$$

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.41 \times 0.59}{300}} = \sqrt{0.00080633} = 0.0284$$

وهكذا تكون فترة الثقة المطلوبة كما يلي :

$$0.41 \pm 2 (0.0284) = 0.41 \pm 0.057$$

أي أن  $\pi$  واقعة بين 0.353 و 0.467 أو أن ما بين 35.3% إلى 46.7% من الأسر في هذه البلدة تمتلك تلفازا ملونا .

مثال (٥ - ٢٥)

تضمنت عينة من 250 من طلبة الجامعة 30 طالبا أعسر (يستخدم اليد اليسرى) .  
أعط فترة ثقة تقريبية بمعامل ثقة 95% لنسبة الطلاب العسر في الجامعة؟

الحل

$$p = \frac{30}{250} = 0.12 ، n = 250$$

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.12 \times 0.88}{250}} = \sqrt{0.0004224} = 0.021$$

وتكون فترة الثقة المطلوبة :

$$0.12 \pm 2(0.021) = 0.12 \pm 0.042$$

أي أن ما بين 7.8% إلى 16.2% من طلبة الجامعة يستخدمون اليد اليسرى .

### تمارين (٥-٩)

(١) اخترنا نوعا جديدا من مصابيح آلات التصوير لتقدير  $p$  ، احتمال أن ينتج المصباح الإضاءة اللازمة وفي الوقت المناسب . ووجدنا من بين 1000 مصباح أن 920 قد عملت وفقا للمواصفات المطلوبة . والمطلوب :

١ - تقدير  $p$  ووضع حد لخطأ التقدير (باحتمال 0.95) .

ب - وضع فترة ثقة للقيمة الحقيقية  $p$  بمعامل ثقة 99% .

(٢) اخترنا عينة عشوائية من 400 صماما خاصا بأجهزة الراديو، فوجدنا من بينها 40 صماما عاطلا عن العمل . ضع فترة ثقة للنسبة الحقيقية للصمامات العاطلة في مجتمع الصمامات المنتجة من هذا النوع ، مستخدما معامل ثقة 90% .

(٣) حضر كيميائي مبيدا يهدف عند تطبيقه على نوع معين من الحشرات ، إلى قتل 60% منها فكم يجب أن يكون حجم العينة المستخدمة ، إذا رغب في أن يطمئن باحتمال 0.95 إلى أنه في حدود 0.02 من النسبة الحقيقية التي يهدف إليها من الحشرات المهلكة؟

(٤) كم ناخبا يجب أن تضم عينة جمعناها لتقدير نسبة الناخبين الذين يفضلون مرشحا معيناً ، إذا رغبنا في أن يكون التقدير صحيحا في حدود 0.005 ؟ ولنفرض أن النسبة الحقيقية ينبغي أن تقع في جوار الـ 0.5 .



# الملاحق

## الملحق الأول

### مراجعة في بعض المعلومات الرياضية المفيدة

#### ١ - حول خاصية التجانس في عملية الجمع

لكي نستطيع جمع كميتين أو مقدارين لابد أن تكون وحدة القياس نفسها للمقدارين وجمع 10 سم و 5 م غير ممكن . ولو ادعينا جدلاً أن المجموع الناتج 15 فلا يمكن القول إن ال 15 هذه هي 15 سم ولا 15 م . إذا 15 ماذا؟ في الواقع لا معنى للعدد 15 في هذه الحالة . ولكن لو اتخذنا وحدة قياس مشتركة، وقلنا إن 500 سم = 5 م ، أو 10 سم = 0.1 م ، فالجمع يصبح ممكناً، والجواب هو 500 سم + 10 سم = 510 سم ، أو 5 م + 0.1 م = 5.1 م . ولو سألت شخصاً، ما مجموع 5 كتب و 7 أقلام؟ فأجاب 12 ، فإنه سيشعر بالعجز والخطأ عندما تطلب منه تحديد 12 ماذا؟ إذ لا يستطيع أن يقول 12 كتاباً ولا 12 قلماً . وسيعود يدرك أن 5 كتب و 7 أقلام هي 5 كتب و 7 أقلام ، ولا يمكن التعبير عنهما في رقم واحد .

وهذه الحقيقة البسيطة هي خاصة أساسية في الجمع بصرف النظر عن طبيعة عملية الجمع . ففي الجبر لا نجمع إلا الحدود المتشابهة . و  $5x^2y$  مضافاً إليها  $7x^2y$  يساوي  $12x^2y$  . تماماً كأننا نقول 5 كتب و 7 كتب تصبح 12 كتاباً . ولكن  $5x^2y$  مضافاً إليها  $7xy$  هي  $5x^2y$  و  $7xy$  ، تماماً كأننا نقول 5 كتب و 7 أقلام ، ولا يمكن جمعها في حد واحد ، لأنهما غير متشابهين . وكذلك الأمر، يمكن جمع  $F(0.5)$  و  $3F(0.5)$

لنجد  $4F(0.5)$ ، حيث  $F(0.5)$  تعني قيمة دالة  $F$  عند النقطة  $0.5$ . ويمكن جمع  $3\sqrt{2}$  و  $5\sqrt{2}$  لنجد  $8\sqrt{2}$  أما  $F(0.5) + 3F(1)$ ، أو  $5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ، فستبقى كل منهما كما وردت دون تغيير.

وتبقى الفكرة نفسها في الكسور العادية (الأعداد النسبية). فمقام الكسر يعني أننا قسمنا الواحد الصحيح إلى عدد من الأجزاء المتساوية يساوي المقام. والبسط يعني أننا أخذنا من هذه الأجزاء عدداً يساوي البسط. و  $3/4$  تعني ثلاثة أرباع. أي قسمنا الواحد الصحيح إلى أربعة أجزاء متساوية وأخذنا منها ثلاثة أجزاء. ومقلوب مقام الكسر يُعتبر بمثابة وحدة قياس أو شيء، والبسط يمثل عدد ما لدينا من هذه الوحدة أو هذا الشيء. و  $9/5$  تعني تسع مرات المقدار  $1/5$  أو تسع أخماس وهكذا... ولجمع كسرين عاديين لابد إذا من توحيد المقامات حتى يصبح الجمع ممكناً ولجمع  $3/4$  و  $9/5$  نحول الكسرين بحيث يكون لهما المقام نفسه. ومن خواص الكسر أو العدد النسبي نعرف أن قيمته لا تتغير إذا ضربنا البسط والمقام بالعدد نفسه، وقيمة  $3/4$  هي نفس قيمة  $15/20$ ، وقيمة  $9/5$  هي نفس قيمة  $36/20$ . إذا

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{5} = \frac{15}{20} + \frac{36}{20} = \frac{15 + 36}{20} = \frac{51}{20}.$$

لأن  $15/20$  هي 15 مرة الـ  $1/20$ ، و  $36/20$  هي 36 مرة الـ  $1/20$ . وبمجموعها هو  $36 + 15 = 51$  مرة الـ  $1/20$ ، أو  $51/20$ .

ولا توجد مشكلة في ضرب كسرين عاديين فالجواب هو كسر بسطه جداء البسطين ومقامه جداء المقامين.

$$\frac{3}{4} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{20}$$

وبصورة عامة:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

وينطبق على الطرح ما ينطبق على الجمع. وطرح عدد  $b$  من عدد  $a$ ، أي  $a - b$ ، هو جمع العدد السالب  $(-b)$  إلى العدد  $a$ ، أي  $a + (-b)$ . (تذكر أننا نقرأ في اللغات

الأجنبية من اليسار إلى اليمين). وكذلك ينطبق على التقسيم ما ينطبق على الضرب. وقسمة  $a$  على  $b$  ما هي إلا ضرب  $a$  بمقلوب  $b$ ،  $a \div b = a \times \frac{1}{b}$ ، ولتقسيم كسر عادي على كسر عادي آخر نضرب الأول في مقلوب الثاني. وهكذا يكون:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

وعلى سبيل المثال:

$$\frac{3}{4} \div \frac{9}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{15}{36}$$

ولحساب كسر من عدد معين نضرب هذا الكسر بالعدد. ولحساب ثلث الستة،

مثلاً، نضرب  $\frac{1}{3}$  بـ 6 فنجد

$$\frac{1}{3} \times 6 = \frac{1}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$$

ولو أردت حساب خمسة أسباع الثلاثين تكتب ببساطة:

$$\frac{5}{7} \times 30 = \frac{5}{7} \times \frac{30}{1} = \frac{150}{7}$$

## ٢- النسب المئوية

يتألف العدد العشري من جزئين، أحدهما صحيح يقع على اليسار من الفاصلة، والآخر عشري يقع على اليمين من الفاصلة. وعلى سبيل المثال، 921.534 فيه جزء صحيح هو 921 وجزء عشري هو 0.534. (تذكر في الكتب الانجليزية وما شابهها أن النقطة مكتوبة بين رقمين تعني فاصلة عشرية، وأنها بين رمزين تعني إشارة ضرب، و  $a \cdot b$  تعني  $a \times b$ ). ولا تتغير قيمة العدد إذا أضفنا مزيداً من الأصفار على اليمين من الجزء العشري، أو على اليسار من الجزء الصحيح، = 921.534 0921.534000 وكما أن للجزء الصحيح منازل (أو مراتب) هي منزلة الآحاد ومنزلة العشرات ومنزلة المئات . . . الخ فكذلك للجزء العشري منازل تبدأ بمنزلة الجزء من عشرة، تليها منزلة الجزء من مائة، تليها منزلة الجزء من ألف، وهكذا. ونلاحظ أن الرقم يختلف مدلوله من منزلة إلى أخرى. فالخمس نكتبها في منزلة الآحاد تعني خمس

مرات الواحد الصحيح، وهي في منزلة العشرات تعني خمس عشرات أي 50، وهي في منزلة المئات تعني خمس مئات أي 500. وكذلك في الجزء العشري، نجد أن للرقم نفسه مدلول يختلف باختلاف المنزلة التي يشغلها. فالخمسمة بعد الفاصلة مباشرة، أي في منزلة الجزء من عشرة، تعني خمسة أجزاء من عشرة أي  $5/10$ ، وهي في منزلة الجزء من مائة تعني خمسة أجزاء من مائة أي  $5/100$ ، وفي منزلة الجزء من ألف تعني خمسة أجزاء من ألف أي  $5/1000$ ، وهكذا. واصطلاح  $921.534$  يعنى  $9 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$

$$9 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 1 + 5 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}$$

ولو أردنا التعبير عن هذا المجموع كلاميا لقلنا:

واحد وعشرتان وتسع مئات بالإضافة إلى خمسة أعشار وثلاثة أجزاء من مائة وأربعة أجزاء من ألف. وبالطبع سيكون من الأيسر بكثير أن نصطليح على القول تسعمائة وواحد وعشرون فاصلة خمسمائة وأربع وثلاثون، ونكتب  $921.534$ .

ونلاحظ أيضا أن كل منزلة في العدد العشري هي عشرة أمثال تلك التي تقع إلى اليمين منها مباشرة. فالمائة هي عشر عشرات، والعشرة عشر وحدات، والواحد عشرة أجزاء من عشرة، والجزء من عشرة هو عشرة أجزاء من مائة، وهكذا. ولذلك يطلق على هذا النظام في الترقيم اسم «النظام العشري». وهذا يوضح أن ضرب عدد على شكل كسر عشري بمضاعفات العشرة، أو قسمته على مضاعفات العشرة، لا يحتاج إلا إلى إزاحة الفاصلة في اتجاه اليمين عند الضرب، أو في اتجاه اليسار عند القسمة، عددا من المنازل يساوي عدد الأصفار في مضاعف العشرة. وعلى سبيل المثال لضرب  $20.604$  بعشرة نأخذ الفاصلة منزلة واحدة إلى اليمين فنجد  $206.04$ ؛ ولقسيمته على عشرة نأخذ الفاصلة منزلة واحدة إلى اليسار فنجد  $2.0604$ . وفي الحالة الأولى أصبح كل جزء من عشرة واحدا ( $1 = 10 \times 1/10$ ) أي أن منزلة الجزء من عشرة أصبحت هي منزلة الآحاد، ولذلك أزحنا الفاصلة منزلة واحدة إلى اليمين. وفي الحالة الثانية أصبح كل واحد صحيح جزءا من عشرة ( $1/10 = 1 + 10$ )، أي أن منزلة الآحاد أصبحت منزلة الجزء من عشرة، ولذلك أزحنا الفاصلة منزلة واحدة إلى اليسار. وكقاعدة عامة، عند الضرب بـ

$10^n$  نأخذ الفاصلة إلى اليمين  $n$  منزلة، وعند القسمة على  $10^n$  (أي الضرب بـ  $10^{-n}$ ) نأخذ الفاصلة إلى اليسار  $n$  منزلة.

والآن كيف نعبر عن عدد عشري في شكل نسبة مئوية؟

النسبة المئوية تعني النسبة إلى مائة، أي عدد نسبي مقامه يساوي 100. وخمسون في المائة تعني  $50/100$ ، وخمس وستون بالمائة تعني  $65/100$ ، ونصف بالمائة تعني  $0.5/100$  أي  $5/1000$ . وللتعبير عن عدد عشري في صيغة نسبة مئوية نضرب العدد العشري بمائة فنحصل على العدد المطلوب، ونضيف إلى قراءته عندئذ كلمتي «في المائة».

مثال (١)

عبر عن الأعداد التالية في شكل نسبة مئوية:

0.3254، 21.3، 0.0003، 0.052، 0.05، 1.21، 0.3، 0.75

الحل

الأجوبة المطلوبة هي على الترتيب: 75 في المائة؛ 30 بالمائة؛ 121 في المائة؛ 5 في المائة؛ 5.2 في المائة (ونقرؤها خمس واثان من عشرة في المائة)؛ 0.03 في المائة (ونقرؤها ثلاثة من مائة في المائة)؛ 2130 في المائة، 32.54 في المائة (ونقرؤها اثنان وثلاثون وأربع وخمسون من المائة في المائة).

ولجمع الأعداد العشرية نرتب المنازل المتشابهة تحت بعضها تماما. وبالتالي تقع الفواصل تحت بعضها البعض تماما. ثم نجمع جمعا عاديا ونضع الفاصلة عندما نصل إلى موقع الفاصلة.

٣- التناسب

إذا كانت المقادير  $a, b, c, d$  بحيث يكون

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

قلنا إنها متناسبة. وتسمى العلاقة بينها تناسباً طرفاه  $a$  و  $d$  ووسطاه  $c$  و  $b$ . ومن أهم خواص التناسب:

أ-  $a \times d = b \times c$  (جداء الطرفين = جداء الوسطين).

$$\text{ب- } \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{d \pm c}$$

$$\text{ج- } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

$$\text{د- } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

مثال (٢)

الأعداد 2، 3، 4، 6 متناسبة. اكتب التناسب وتحقق من الخواص المذكورة أعلاه.

الحل

الأول والرابع هما الطرفان والثاني والثالث (الواردين في الوسط) هما الوسطان.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

ومن الواضح أن

$$\text{أ- } 2 \times 6 = 3 \times 4$$

$$\text{ب- } \frac{2}{2+3} = \frac{4}{4+6}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

و

$$\frac{2}{3-2} = \frac{4}{6-4}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

$$\text{ج- } \frac{2+3}{3} = \frac{4+6}{6}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{2-3}{3} = \frac{4-6}{6} \quad \text{و}$$

$$-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6} = \frac{6}{9} \quad \text{د-}$$

مثال (٣)

صندوق يتضمن 5 كرات سود، و 6 كرات بيض. ما نسبة الكرات السود إلى الكرات البيض؟ وما نسبة الكرات البيض في الصندوق؟

الحل

نسبة الكرات السود إلى الكرات البيض هي  $5/6$ .  
نسبة الكرات البيض في الصندوق هي نسبة عدد الكرات البيض إلى مجموع عدد الكرات في الصندوق أي

$$\frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$$

مثال (٤)

في صندوق 15 كرة بعضها أبيض والآخر أسود. إذا كانت الكرات تتوزع بين اللونين الأبيض والأسود بنسبة 2:1 فاحسب عدد الكرات من كل لون.

الحل

مجموع الحصص  $1+2=3$

ويكون  $1/3$  الكرات أبيض و  $2/3$  الكرات أسود.

$$15 \times 1/3 = 5 = \text{عدد الكرات البيض}$$

$$15 \times 2/3 = 10 = \text{عدد الكرات السود}$$

مثال (٥)

قسمنا ستة آلاف ريال بين ثلاثة أشخاص بنسبة 1:3:2 فما هي حصة كل منهم؟

الحل

$$\text{مجموع الحصص} = 1+3+2=6$$

$$\text{مقدار الحصة الواحدة} = 6000/6 = 1000$$

$$\text{وتكون حصة الأول} = 2000 \times 2 = 2000 \text{ ريال}$$

$$\text{حصة الثاني} = 1000 \times 3 = 3000 \text{ ريال}$$

$$\text{حصة الثالث} = 1000 \times 1 = 1000 \text{ ريال} .$$

أو نقول إن حصة الأول تشكل  $2/6$  من المبلغ وحصة الثاني  $3/6$  من المبلغ وحصة

الثالث  $1/6$  من المبلغ . أي أن :

$$\text{حصة الأول} = 6000 \times 2/6 = 2000 \text{ ريال}$$

$$\text{حصة الثاني} = 6000 \times 3/6 = 3000 \text{ ريال}$$

$$\text{حصة الثالث} = 6000 \times 1/6 = 1000 \text{ ريال}$$

#### ٤ - العمليات الأساسية في المجموعات وقانونا دي مورغان

الاحتواء

نقول إن المجموعة  $A$  محتواة في المجموعة  $B$ ، ونكتب  $A \subseteq B$ ، إذا كان كل عنصر

ينتمي إلى  $A$  ينتمي أيضا إلى  $B$ .

وفي حال وجود عنصر واحد على الأقل ينتمي إلى  $B$  ولا ينتمي إلى  $A$  نسمي  $A$

مجموعة جزئية فعلية من  $B$ . ومن الواضح أن كل مجموعة محتواة في نفسها، ونرمز لهذه

الحقيقة بكتابة  $A \subseteq A$ .

## المجموعتان المتساويتان

نقول إن المجموعتين  $A$  و  $B$  متساويتان إذا كانت  $A \subset B$  و  $B \subset A$ . الشرط الأول  $A \subset B$  يقتضي أن كل عنصر ينتمي إلى  $A$  ينتمي أيضا إلى  $B$ ، والشرط الثاني  $B \subset A$  يقتضي أن كل عنصر ينتمي إلى  $B$  ينتمي أيضا إلى  $A$ . وهذا يعني بوضوح تطابق عناصر المجموعتين.

## اتحاد مجموعتين

اتحاد مجموعتين  $A$ ،  $B$  هو مجموعة تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى واحدة منهما على الأقل. ونرمز له بـ  $A \cup B$ .

## تقاطع مجموعتين

تقاطع مجموعتين  $A$ ،  $B$  هو مجموعة تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إليهما معا. ونرمز له بـ  $A \cap B$ .

ومن الواضح أنه يمكن التعبير عن انتهاء عنصر إلى  $A \cup B$  بقولنا إنه ينتمي إلى  $A$  أو  $B$ . ويمكن التعبير عن انتهاء عنصر إلى  $A \cap B$  بقولنا إنه ينتمي إلى  $A$  و  $B$  وإذا لم يكن هناك أي عنصر مشترك بين  $A$  و  $B$  كان تقاطعهما خاليا. ونرمز للمجموعة الخالية بـ  $\phi$ . ومن الواضح أن المجموعة الخالية  $\phi$  محتواة في أي مجموعة أخرى ( $\phi \subset A$ ) حيث  $A$  أي مجموعة غير خالية).

## المجموعتان المنفصلتان

إذا كان تقاطع المجموعتين  $A$ ،  $B$  خاليا، أي  $A \cap B = \phi$ ، قلنا إن المجموعتين منفصلتان.

## الفرق بين مجموعتين

الفرق بين مجموعتين  $A$ ،  $B$ ، ونرمز له بـ  $A - B$  (أو  $A/B$ ) هو مجموعة تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى  $A$  ولا تنتمي إلى  $B$ .

## مكملة مجموعة

مكملة مجموعة  $A$  هي مجموعة تتضمن كافة عناصر المجموعة الشاملة التي لا تنتمي إلى  $A$ . ونرمز لها بـ  $\bar{A}$  (أو  $A^c$ ).

ومن الواضح أن  $\bar{\bar{A}}$  تشكل نفي  $A$ . ولذلك نقرؤها أحيانا «ليس  $A$ ». ومكملة مجموعة  $A$  ليست إلا الفرق بين المجموعة الشاملة، ولنرمز لها بـ  $S$ ، وبين  $A$ ، أي أن  $A = S - A$ . وهذا بالإضافة إلى نص التعريف (٢-٥-٧) يوضحان أنه يمكن التعبير عن الفرق بين مجموعتين  $A$ ،  $B$  كتقاطع بين  $A$  ومكملة  $B$ . وهكذا نكتب:

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

## قانونا دي مورغان

ومن الخواص المهمة لعمليتي الاتحاد والتقاطع أن كلا منهما تتوزع على الأخرى بمعنى أن:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

و

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

وأن

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

و

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

وتسمى العلاقاتان الأخيرتان «قانوني دي مورغان». وتقول الأولى منهما إن مكملة اتحاد مجموعتين هي تقاطع مكملتيهما. وتقول الثانية إن مكملة تقاطع مجموعتين هي اتحاد مكملتيهما. وتسهيلا لحفظ هاتين العلاقاتين نلاحظ أنه للانتقال من الطرف الأيسر إلى الطرف الأيمن في كل منهما نتبع القاعدة التالية:

نقلب اتجاه الرمز الفاصل بين المجموعتين (إذا كانت الفتحة إلى الأعلى تصبح إلى الأسفل والعكس) ثم نستعويض عن كل مجموعة بمكملتها.

مثال (٦)

لتكن المجموعة الشاملة مجموعة الحروف في الكلمات أبجد، هوز، حطي .

ولنرمز لها بـ  $S$ . ولتكن  $A = \{أ، ب، هـ، د، ط\}$

$B = \{أ، هـ، ز، ج، ط، ي\}$

$S = \{أ، ب، ج، د، هـ، و، ز، ح، ط، ي\}$

(i) هل  $A$  محتواة في  $B$ ؟

(ii) اكتب  $\bar{B}$ ،  $\bar{A}$ ،  $B - A$ ،  $A - B$ ،  $A \cap B$ ،  $A \cup B$

(iii) اكتب  $A \cap \bar{B}$  وقارنها مع  $A - B$ ، واكتب  $B \cap \bar{A}$  وقارنها مع  $B - A$ .

(iv) لتعرف المجموعة  $\{أ، و\} = C$ . تحقق من قانوني التوزيع.

(v) اكتب  $\overline{A \cup B}$ ،  $\overline{A \cap B}$ ،  $\overline{A \cap \bar{B}}$ ،  $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ ، ثم تحقق من صحة قانوني دي مورغان.

الحل

(i)  $A$  غير محتواة في  $B$  لوجود عنصر  $D$  ينتمي إلى  $A$  ولكنه لا ينتمي إلى  $B$ .

$D \in A$  ولكن  $D \notin B$

(ii)  $A \cup B = \{أ، ب، هـ، د، ط، ز، ج، ي\}$

لكتابته اتحاد  $A$ ،  $B$  نكتب عناصر  $A$  ثم نضيف إليها عناصر  $B$  ما لم تكن ذكرت سابقا، لأنه عند التعبير عن مجموعة، لا نكرر ذكر أي عنصر من عناصرها.

$A \cap B = \{أ، هـ، ط\}$

ولكتابة تقاطع  $A$ ،  $B$  نستعرض عناصر  $A$  واحدا فآخر ونضع في  $A \cap B$  ما نجده منها واردا في  $B$ .

$A - B = \{ب، د\}$

وللحصول على  $A - B$  نلغي من عناصر  $A$  كل ما كان منها مشتركا مع  $B$ . وبصورة

مماثلة نجد:

$B - A = \{ز، ج، ي\}$

$$\bar{A} = S - A = \{أ، ب، هـ، د، ط\} - \{أ، ب، ج، د، هـ، و، ز، ح، ط، ي\} \\ = \{ج، و، ز، ح، ي\}$$

ولكتابة  $\bar{A}$  نلغي عناصر  $A$  من المجموعة الشاملة ونأخذ كل ما تبقى منها.  
وبصورة مماثلة نجد:

$$\bar{B} = \{ب، د، و، ح\}$$

(iii)

$$A \cap \bar{B} = \{ب، د\} = A - B$$

$$B \cap \bar{A} = \{ز، ج، ي\} = B - A$$

(iv) نحسب الطرف الأيمن فنجد

$$B \cup C = \{أ، هـ، ز، ج، ط، ي، و\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{أ، ب، هـ، د، ط\} \cap \{أ، هـ، ز، ج، ط، ي، و\} \\ = \{أ، هـ، ط\}$$

نحسب الطرف الأيسر فنجد

$$A \cap C = \{أ\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{أ، هـ، ط\}$$

وهو يساوي الطرف الأيمن.

(v) بالعودة إلى النتائج في ب نجد:

$$\overline{A \cup B} = \{أ، ب، هـ، د، ط، ز، ج، ي\}^c = \{و، ح\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{ج، و، ز، ح، ي\} \cap \{ب، د، و، ح\} = \{و، ح\} = (A \cup B)^c$$

مما يحقق قانون دي مورغان الأول.

ولدينا أيضا:

$$\overline{A \cap B} = \{أ، ب، هـ، د، و، ز، ح، ي\}^c = \{و، ح\}$$

و

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{ج، و، ز، ح، ي\} \cup \{ب، د، و، ح\}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{ب، د، و، ح، ج، ز، ي\}^c = \overline{A \cap B}$$

مما يحقق قانون دي مورغان الثاني.

## حاصل الضرب الديكارتي

الحاصل الديكارتي لمجموعتين  $A$ ،  $B$  هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التي يمكن تشكيلها بأخذ العنصر الأول من  $A$  والعنصر الثاني من  $B$ . ونرمز له عادة بـ  $A \times B$ .

مثال (٧)

لدينا  $A = \{a, b, c\}$ ،  $B = \{1, 2, 3\}$ . اكتب الحاصل الديكارتي  $A \times B$ .

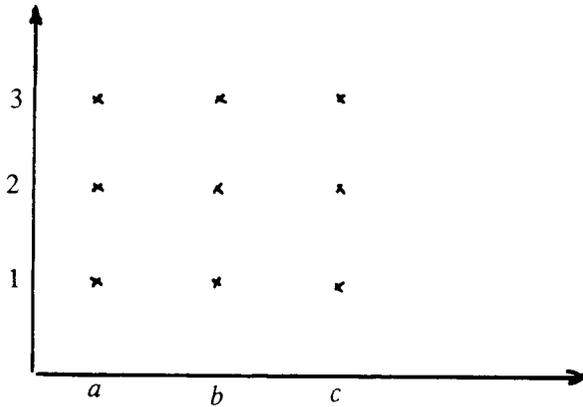
الحل

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

ونلاحظ أنه إذا كان عدد عناصر  $A$  مساويا  $n$  وعدد عناصر  $B$  مساويا  $m$  فإن عدد عناصر الحاصل الديكارتي  $A \times B$  يساوي  $n \times m$ . ويمكن تمثيل كل زوج مرتب بنقطة في المستوى الاحداثي، حيث يشكل العنصر الأول من الزوج المرتب الاحداثي السيني للنقطة ويمثل العنصر الثاني الاحداثي الصادي لها. ونحصل عندئذ على ما يسمى «بيان الحاصل الديكارتي».

مثال (٨)

ارسم بيان الحاصل الديكارتي للمجموعتين  $A$ ،  $B$  في المثال (٧).



شكل (١): بيان الحاصل الديكارتي  $A \times B$ .

## ٥ - التطبيق والصورة العكسية

## تعريف التطبيق

التطبيق  $f$  المعروف على مجموعة  $A$  إلى مجموعة  $B$  هو توافق يقابل بموجبه كل عنصر من  $A$  عنصر واحد وواحد فقط من  $B$ . ونكتب رمزيا

$$A \xrightarrow{f} B$$

وتسمى المجموعة  $A$  مجال التطبيق (أو ساحة التطبيق) وتسمى المجموعة  $B$  المجال المصاحب. ونكتب  $f(a) = b$  للدلالة على أن العنصر  $a$  من المجال  $A$  يوافق العنصر  $b$  من المجال المصاحب  $B$ . ونقول إن  $b$  هو صورة  $a$  وفق التطبيق  $f$ .

## مثال (٩)

في المثال (٧) عرف تطبيق  $f_1, f_2$  على  $A$  إلى  $B$ .

## الحل

أي قاعدة توافق يقترن بموجبه كل عنصر من  $A$  بعنصر واحد من  $B$  تشكل تطبيقا. وعلى سبيل المثال يمكننا تعريف  $f_1$  كما يلي:

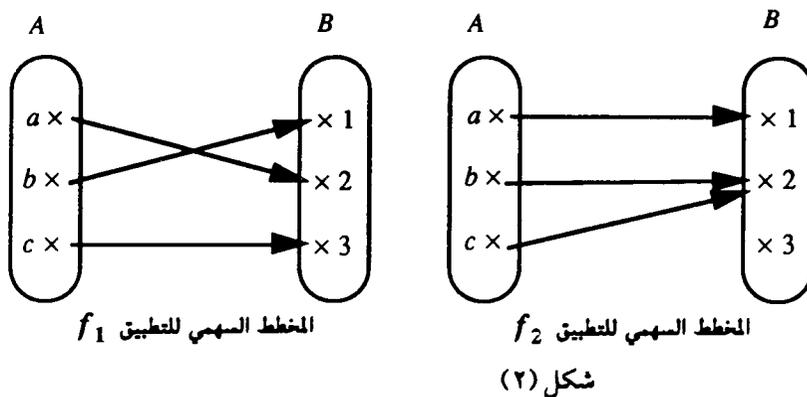
$$f_1 = \{(a,2), (b,1), (c,3)\}$$

وتقول قاعدة التوافق أو التطبيق الذي رمزنا له بـ  $f_1$  إن العنصر  $a$  من  $A$  يقابله أو يوافقه العنصر 2 من  $B$ ؛ والعنصر  $b$  من  $A$  يوافقه العنصر 1 من  $B$ ؛ وأخيرا يوافق العنصر  $c$  من  $A$  العنصر 3 من  $B$ . أو أن صورة  $a$  وفق  $f_1$  هي 2 وصورة  $b$  هي 1 وصورة  $c$  هي 3. ويمكن تعريف تطبيق آخر  $f_2$  كما يلي:

$$f_2 = \{(a,1), (b,2), (c,2)\}$$

ونلاحظ أن شرطي التعريف محققان. فلكل من عناصر  $A$  الثلاثة عنصر مقابل واحد من  $B$ . هنا  $a$  يقابله 1؛ و  $b$  يقابله 2؛ و  $c$  يقابله 2 أيضا. أي أن 1 هي صورة لـ  $a$  و 2 صورة لكل من  $b$  و  $c$ . أما 3 فليست صورة لأي عنصر من  $A$ .

ويمكن توضيح التطبيق بمخطط سهمي ينطلق فيه من كل عنصر من المجال سهم واحد ينتهي بالعنصر المقابل (بصورته) من المجال المصاحب. وفي الشكل (٢) نجد المخطط السهمي لكل من  $f_1$  و  $f_2$  في المثال (٥).



وتجدر ملاحظة أن التطبيق هو مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتكرر فيها أبدا العنصر الأول. وتشكل العناصر الأولى مجتمعة مجموعة المجال دون زيادة أو نقصان. وعلى المخطط السهمي نقول إنه ينطلق من كل عنصر من عناصر المجال سهم واحد وواحد فقط.

### تعريف الصورة العكسية

الصورة العكسية لعنصر  $d$ ، مثلا، من المجال المصاحب، هي مجموعة عناصر المجال التي صورتها وفق  $f$  هي  $d$ . (أي مجموعة عناصر المجال التي انطلق منها سهم إلى  $d$  ونرمز لها بـ  $f^{-1}(d)$ ).

مثال (١٠)

في المثال السابق اكتب الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر  $B$  وفق  $f_1^{-1}$  ووفق  $f_2^{-1}$ .

الحل

$$f_1^{-1}(3) = c, f_1^{-1}(2) = a, f_1^{-1}(1) = b$$

ونلاحظ أن  $f_1^{-1}$  يمثل بدوره تطبيقاً من  $B$  إلى  $A$  يسمى التطبيق المعاكس. ولا يصح هذا إلا عندما يكون  $f$  متقابلاً. أي الحالة التي يكون فيها كل عنصر من  $B$  صورة لعنصر واحد وواحد فقط من  $A$  وبصورة مماثلة نجد أن

$$f_2^{-1}(2) = \{b, c\}, f_2^{-1}(1) = a$$

ونلاحظ أن الصورة العكسية للعنصر 2 من  $B$  هو مجموعة مؤلفة من عنصرين  $b, c$  من عناصر  $A$  ذلك لأن 2 هي صورة لكل من  $b$  و  $c$  وفق  $f_2$ . أما  $f_2^{-1}(3)$  فهي خالية ونكتب  $f_2^{-1}(3) = \phi$ ، ولا يمثل  $f_2^{-1}$  تطبيقاً لأنه لا يحقق شرطي التعريف، إذ يقابل العنصر 2 من  $B$  عنصران من  $A$  هي  $b$  و  $c$ ، وكذلك لا صورة للعنصر 3 من  $B$ .

### تعريف الدالة العددية

إذا عُرف تطبيق  $f$  من مجموعة جزئية من  $R$ ، مجموعة الأعداد الحقيقية، إلى مجموعة جزئية أخرى منها، فإننا نسمي مثل هذا التطبيق دالة عددية ذات متغير حقيقي. وكثيراً ما نهمل عند تعريف دالة عددية، المجال والمجال المصاحب، ونعطي فقط قاعدة الربط بشكل علاقة رياضية،  $y = f(x)$ ، ونعتبر في هذه الحالة أن مجال الدالة هو أوسع مجموعة جزئية من  $R$  يمكننا أن نجري عليها العمليات الداخلة في القاعدة  $f$ . ويسمى المجال في هذه الحالة مجموعة التعريف أو ساحة التعريف ويسمى المجال المصاحب مدى الدالة.

### ٦- رمز المجموع $\Sigma$ وخواصه

تستخدم العلوم الرياضية ومختلف العلوم التجريبية الرموز للدلالة على مقادير أو مسميات وأشياء من طبائع مختلفة. فمثلاً نرمز لمقدار أو لقياس عددي بـ  $x$ ، ونرمز لمجموعة بـ  $A$ . ونرمز لعنصر من مجموعة بـ  $a$ ، الخ. وفي بحث أو دراسة معينة ينبغي أن نستخدم رموزاً مختلفة للدلالة على قياسات أو أشياء مختلفة، وذلك تجنباً للالتباس. وفي دراسة فيزيائية، مثلاً، لو رمزنا لشدة التيار بـ  $x$ ، فيجب المحافظة على هذا الرمز في الدراسة بأكملها. وحيثما وردت  $x$  ضمن هذه الدراسة فإنها تعني شدة التيار. وقد

نحتاج في دراسة واحدة إلى عدد هائل من الرموز، وربما ما لا نهاية له من الرموز، ولا يمكن لحروف أبجدية أو حروف مختلف الأبجديات المعروفة في العالم أن تفي بالحاجة. ولذلك نلجأ إلى استخدام الحرف نفسه  $x$ ، مثلاً، عددا هائلا من المرات دون أن نقع في التباس، وذلك بإضافة دليل رقمي تحت الحرف، فنكتب  $x_1$  و  $x_2$ ، مثلاً، كرمزين مختلفين. ومع أننا استخدمنا هنا الحرف الأبجدي نفسه، إلا أننا ميزنا بين  $x$  وآخر بالدليل 1 ملحقاً بالأول وبدليل آخر ملحقاً بالثاني ونقرؤه  $x$  واحد،  $x$  اثنان، الخ. ويفتح لنا استخدام الحرف مع دليل رقمي ملحق به أفاقاً واسعة، بحيث يمكن استخدام الحرف  $x$  نفسه عدداً لانهايتاً من المرات، لنكتب، مثلاً، المتوالية اللانهائية من المقادير:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

يسمى  $x_n$  الحد العام للمتوالية. وعندما يتغير  $n$  متخذاً عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية  $\{1, 2, 3, \dots\}$ ، كقيم له نحصل على متوالية لانهايتية من المقادير لكل منها رمز مختلف. ولم نستخدم فيها إلا حرفاً واحداً من حروف الأبجدية هو  $x$ . ويمكن أن نكتب متوالية أخرى

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

ومتوالية أخرى

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

وهكذا.

لنفرض الآن أننا نريد التعبير عن مجموع ستة مقادير هي  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ، فمن الطبيعي كتابة:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

وستتفق الآن على التعبير عن هذا المجموع بصورة مختصرة فنكتب:

$$\sum_{i=1}^6 x_i$$

ونقرؤها «مجموع  $x_i$  من  $i=1$  إلى  $i=6$ ». ونستخدم هنا الحرف اليوناني الكبير  $\Sigma$ ، ويسمى «سيجما»، ليبدل على كلمة «مجموع». والدليل  $i$  يسمى «متغير الجمع» وهو

يتغير هنا من  $i = 1$  إلى  $i = 6$  . ويسمى  $x_i$  «الحد العام» . وللحصول على الحد الأول في المجموع نضع  $i = 1$  في الحد العام، وفي الحد الثاني نضع  $i = 2$  . وهكذا . وتفصل بين الحدود المختلفة إشارة + بالطبع مادامنا نعبر عن مجموع عدد من المقادير.

مثال (١١)

أ- اكتب بالتفصيل ما تعنيه الرموز:

$$\sum_{i=1}^3 ix^i , \quad \sum_{j=1}^4 j(j-1) , \quad \sum_{i=1}^3 i(y_i-1) , \quad \sum_{i=1}^5 x^i$$

ب- استخدم إشارة المجموع  $\sum$  للتعبير عن كل من المجاميع التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5$$

الحل  
أ-

$$\sum_{i=1}^5 x^i = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 ,$$

$$\sum_{i=1}^3 i(y_i - 1) = (y_1 - 1) + 2(y_2 - 1) + 3(y_3 - 1)$$

$$\sum_{j=1}^4 j(j-1) = 1(1-1) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) ,$$

$$\sum_{i=1}^3 ix^i = x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i , \quad \sum_{i=1}^5 y^i , \quad \sum_{i=1}^4 x_i \quad \text{ب-}$$

وتبغني ملاحظة أن الشيء الوحيد من عبارة الحد العام الذي يتغير من حد إلى آخر من حدود المجموع هو متغير الجمع  $i$  . وبهذا المعنى يمكن اعتبار أي كمية لا

تتضمن متغير الجمع في حكم الثابتة . ويمكن أن يرد متغير الجمع دليلا أو معاملا أو قوة أو مقدارا قائما بذاته الخ .

خواص رمز المجموع  $\Sigma$   
الخاصة الأولى

$$\sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i$$

وهو واضح من كون :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n cx_i &= cx_1 + cx_2 + \dots + cx_n \\ &= c(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &= c \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

الخاصة الثانية

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i$$

وهو واضح أيضا من الخاصتين التبادلية والتجميعية لعملية جمع الأعداد الحقيقية . فلدينا

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) &= (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \dots + (x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) + (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i \end{aligned}$$

الخاصة الثالثة

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

وهذا واضح من حقيقة أن الحد العام  $c$  لا يتضمن متغير الجمع  $i$ ، فهو ثابت من حد إلى آخر . أي أن :

$$\sum_{i=1}^n c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{\text{مرة } n} = nc$$

مثال (١٢)

تطبيقا لخواص الرمز  $\Sigma$  يمكن كتابة ما يلي :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + c)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2cx_i + c^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n 2cx_i + \sum_{i=1}^n c^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2c \sum_{i=1}^n x_i + nc^2 . \end{aligned}$$

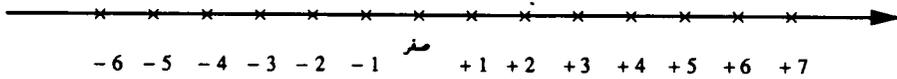
ونجد أيضا :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - 3y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 6x_i y_i + 9y_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 6x_i y_i + 9 \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 6 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 9 \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned}$$

## ٧- محور الأعداد الحقيقية - الانسحاب وتغيير سلم القياس

يمكن تمثيل الأعداد كنقاط على مستقيم موجه نسميه محورا . ولهذا الغرض نرسم مستقيما كما في الشكل (٣) ، نتخذ عليه اتجاهها موجبا إلى اليمين ، ثم نحدد عليه نقطة تدعى عادة مبدأ الفصول ، وتقابل العدد «صفر» وتقع الأعداد الموجبة إلى اليمين من مبدأ الفصول والأعداد السالبة إلى اليسار منه . ومع تبني طول معين ليمثل وحدة قياس (الستمر، مثلا، كما في الشكل (٣)) تصبح كل نقطة من المحور ممثلة لعدد حقيقي واحد هو عدد وحدات القياس التي تفصل بينها وبين مبدأ الفصول مسبقا بإشارة موجبة إذا كانت النقطة إلى اليمين من مبدأ الفصول . أما إذا وقعت النقطة إلى اليسار

من مبدأ الفصول فالعدد الحقيقي الذي تمثله هو عدد وحدات القياس الفاصلة بينها وبين المبدأ مسبقاً بإشارة سالبة . وبالعكس كل عدد حقيقي تقابله نقطة واحدة على هذا المحور. وبذلك نستكمل تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية هندسياً، ويسمى المحور المدرج الناتج محور الأعداد الحقيقية. ونلاحظ أن تحديد المحور، في الشكل (٣)، كمحور للأعداد الحقيقية قد استُكمل بعد تحديد اتجاهه عليه واتخاذ نقطة من نقاطه كمبدأ للفصول وتبني السنتمر كوحدة للقياس.



شكل (٣): محور الأعداد الحقيقية

ولو أننا أضفنا إلى كل عدد المقدار 2 فإن النقطة التي تمثل العدد «صفر»، أي تشكل مبدأ الفصول في الشكل (٣)، ستصبح ممثلة للعدد 2، والنقطة التي تمثل العدد -2 ستصبح ممثلة للعدد «صفر»، أي مبدأ الفصول الجديد، والنقطة التي تمثل العدد 4 ستصبح ممثلة للعدد 6، وهكذا. . . ويبدو بوضوح أن هذا التغيير في تمثيل النقاط للأعداد يكافئ تماماً انسحاباً إلى اليمين بمقدار وحدتي قياس. فكأن النقطة -2 قد زحفت لتحتل موقع نقطة الأصل. وفي المقابل، لو طرحنا من كل عدد المقدار 2 (أي أضفنا إلى كل عدد -2) فإن النقطة التي كانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد «صفر» (نقطة الأصل)، والنقطة التي كانت تمثل الصفر (نقطة الأصل) ستصبح ممثلة للعدد -2، وقس على ذلك. وهذه التغييرات في تمثيل النقاط للأعداد تكافئ تماماً انسحاباً إلى اليسار بمقدار 2.

وبصورة عامة، نقول إن إضافة أو طرح عدد ثابت  $b$ ، مثلاً، إلى كل عدد يكافئ انسحاب التدرج بكامله مسافة  $b$  وحدة قياس إلى اليمين، إذا كان  $b$  موجبا، ومسافة  $b$  - وحدة قياس إلى اليسار إذا كان  $b$  سالبا. وإن إضافة أو طرح عدد ثابت تبدو وكأنها تغيير في اختيار نقطة الأصل.

لنفرض الآن أن لدينا مجموعة من القياسات (2, 3, 4, 5) فهي تحتل مواقع معينة على محور الأعداد في الشكل (٣)، ولو أضفنا إلى كل منها العدد 4 فإنها ستصبح

{6, 7, 8, 9} وتحتل مواقع جديدة في الشكل (٣) هي المواقع الناتجة عن انسحاب المواقع الأساسية بمقدار 4 وحدات قياس إلى اليمين. وإضافة العدد 4 - (أي طرح العدد 4) إلى كل منها يؤدي إلى انسحابها يساراً بمقدار 4. ونلاحظ أن المواقع النسبية للقياسات الأربعة من بعضها البعض لم تتغير بعد عملية الانسحاب.

لنضرب الآن كل عدد بالمقدار 2، مثلاً، فالنقطة التي تمثل العدد صفر ستبقى في مكانها بدون تغيير، ولكن النقطة التي كانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد 4، والنقطة التي تمثل 4 - ستصبح الآن ممثلة للعدد 8 -، وهكذا. . . وهذه التغييرات في تمثيل النقاط للأعداد هي بالضبط ما سنحصل عليه لو أننا غيرنا وحدة القياس من السنتيمتر إلى نصف السنتيمتر (أي ضربنا وحدة القياس بـ  $1/2$ ). إذ لو اتخذنا نصف السنتيمتر وحدة لقياس المسافة في الشكل (٣) لكانت النقطة التي تمثل العدد 1 حالياً ممثلة للعدد 2، ولكانت النقطة الممثلة للعدد 3 - حالياً ممثلة للعدد 6 -، وهكذا. . . وفي المقابل لو أننا قسمنا كل عدد على 2 (أي ضربنا كل عدد بـ  $1/2$ ) فإن النقطة التي كانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد 1، والنقطة التي كانت تمثل العدد 4 - ستصبح الآن ممثلة للعدد 2 -، وهكذا. . . وهذه التغييرات في تمثيل النقاط للأعداد تكافئ تماماً ما سنحصل عليه لو أننا غيرنا وحدة القياس إلى 2 سنتيمتر بدلاً من السنتيمتر الواحد (أي ضربنا وحدة القياس بـ 2). وفي الحالتين نقول إننا غيرنا سلم القياس.

وبصورة عامة، نقول إن ضرب كل عدد بمقدار ثابت موجب  $a$  يكافئ تغيير سلم القياس بضرب وحدة القياس بـ  $1/a$  (تصغيراً لها إذا كان  $a$  أكبر من الواحد وتكبيراً لها إذا كان  $a$  أصغر من الواحد). وتسمى عملية الضرب بعدد موجب عملية تغيير في سلم القياس.

لنعد إلى مجموعة القياسات {2, 3, 4, 5} فإذا ضربنا كلا منها بـ 2 فإنها ستحتل مواقع جديدة هي النقاط المقابلة لـ {4, 6, 8, 10} وتجدر ملاحظة أن المواقع النسبية للقياسات الأربعة بعضها من بعض قد تغيرت الآن. فتغيير سلم القياس يغير من المواقع النسبية لجملة من القياسات بعضها من بعض، ولكن عملية الانسحاب لا تؤثر في تلك المواقع النسبية.

ولو افترضنا الآن أن الرمز  $x$  يمثل عدداً دارجاً على محور الأعداد فإن إجراء التحويل من  $x$  إلى  $y$  وفق العلاقة:

$$y = x + b$$

هو تعبير جبري عن عملية انسحاب بمقدار  $b$ . وإجراء التحويل من  $x$  إلى  $y$  وفق العلاقة:

$$y = ax$$

هو تعبير جبري عن عملية تغيير في سلم القياس. ومن الواضح الآن أن إجراء تحويل من  $x$  إلى  $y$  وفق العلاقة:

$$y = ax + b$$

تعني القيام بعملية تغيير في سلم القياس (الضرب بمقدار  $a$ ) ثم القيام بعملية انسحاب للنقاط الناتجة بمقدار  $b$ .

مثال (١٣)

لدينا الأعداد

$$9200, 8200, 7200, 6200, 5200, 4200, 3200, 2200, 1200$$

إذا حولنا وفقاً للعلاقة:

$$y = \frac{x - 5100}{1000} = \frac{1}{1000} x - \frac{5200}{1000} = 0.001 x - 5.2$$

فإن الأعداد المعطاة تتغير، على الترتيب، إلى:

$$4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$$

مثال (١٤)

لدينا الأعداد

$$0.011, 0.012, 0.013, 0.014, 0.015, 0.016, 0.017$$

إذا حولنا وفقاً للعلاقة:

$$y = 1000x - 14$$

فإن الأعداد المعطاة تتغير، على الترتيب، إلى:

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

## ٨- أنواع القياسات

يتعامل الإنسان مع ثلاثة أنواع من المتغيرات . وسنصطلح ، بصورة عامة ، على تسمية القيم التي يفترضها متغير «قياسا» . ومجموعة من القياسات هي ، على وجه العموم ، مجموعة من القيم لمتغير أو أكثر.

والنوع الأول من المتغيرات هو المتغير الوصفي ، وهو متغير يصنف جملة من العناصر وفق صفات محددة ، كأن نصنف السكان في مدينة الرياض وفقا للصفات التالية :

سعودي ، عربي غير سعودي ، غير عربي

والمتغير هنا هو متغير الجنسية وهذه الصفات الثلاث هي قيمة الممكنة ، إذ يأخذ بالنسبة لكل فرد يسكن الرياض واحدة وواحدة فقط من هذه القيم الثلاث (هنا الصفات الثلاث) . وإذا رمزنا لهذا المتغير بالرمز  $x$  ، واقتفينا جنسية شخص يسكن الرياض فوجدناه «غير عربي» قلنا إن المتغير  $x$  أخذ عند هذا الشخص القيمة «غير عربي» . وإذا سألنا شخصا ثانيا وثالثا ووجدناهما سعوديين نقول إن قيمة المتغير  $x$  لكل منهما هي «سعودي» وهكذا . وإحدى الصفات المميزة للمتغير الوصفي هي أن مجموعة القيم التي يأخذها تصنف جملة من العناصر أو الأشياء إلى أصناف بحيث ينتمي كل عنصر (أو شيء) منها إلى صنف واحد وواحد فقط . أو بعبارة أخرى لابد أن ينتمي كل عنصر (أو شيء) منها إلى صنف من تلك الأصناف ولا يمكنه أن ينتمي إلى صنفين أو أكثر في آن واحد . وهكذا تجزئ قيم المتغير الوصفي جملة من العناصر (أو الأشياء) إلى أجزاء منفصلة بعضها عن بعض ، انفصالا تاما . وفي المثال السابق لا يمكن وجود مقيم في الرياض يتصف بأنه «سعودي» و«غير عربي» . أو أنه «عربي غير سعودي» و«غير عربي» الخ .

والنوع الثاني من المتغيرات هو متغير ترتيبي . والمتغير الترتيبي يتميز بكل ما يتميز به المتغير الوصفي بالإضافة إلى توفر نوع من الترتيب الذي يمكن إضافته على

الصفات التي تشكل قيم المتغير الممكنة . فلو فرضنا ، مثلا ، أن متغيرا  $y$  يمثل التقدير الذي ناله طالب من طلاب فصل معين . فالقيم الممكنة لهذا المتغير هي ممتاز، جيد جدا مرتفع، جيد جدا، جيد مرتفع، جيد، مقبول مرتفع، مقبول، ضعيف . وبما أن هذه الصفات مرتبطة بمقياس كمي هو الدرجة العددية التي نالها الطالب فإن هذا يمنح ترتيبا لهذه الصفات من الأعلى إلى الأدنى أو العكس ، فنقول إن أعلى هذه القيم هي صفة «ممتاز» يليها «جيد جدا مرتفع» وهكذا حتى نصل إلى أدناها وهي صفة «ضعيف» .

والنوع الثالث من المتغيرات هو متغير عددي . والمتغير العددي يتميز بكل ما يتميز به المتغيران الوصفي والترتيبي ، أي أنه يصنف ، ويُقيم ترتيبا ولكنه بالإضافة إلى ذلك ينشأ ، في مجال الترتيب ، بجواب واحد دقيق عن الفارق بين صفة أعلى وصفة أدنى ، أو قيمة أعلى وقيمة أدنى . ومع معرفتنا في مثال التقديرات بأن قيمة «ممتاز» أعلى من قيمة «جيد» لو أننا سألنا ما هو الفارق بينهما تماما لما أمكن الإجابة ، إذ لا نعلم أي معنى أو جواب محدد لـ «ممتاز – جيد» . ولكننا في المتغير العددي يمكن الإجابة على مثل هذا السؤال بدقة تامة . لنصنف ، مثلا ، فصلا من عشرة طلاب ، وفقا لمعدلاتهم العامة ، ولنفرض أننا وجدنا الجدول التالي :

45	60	71	73	85	87	91	المعدل العام
1	2	2	2	1	1	1	عدد الطلاب

لنرمز للمعدل العام بالرمز  $Z$  ، فالمتغير  $Z$  هو متغير عددي لأن قيمه الممكنة أعداد حقيقية . وقد صنف المتغير  $Z$  طلاب الفصل وفق معدلاتهم فظهر معنا سبعة أصناف هي «ذوو المعدل 91» ، «ذوو المعدل 87» الخ . وبالطبع يمكن ترتيب الأعداد من الأكبر إلى الأصغر أو بالعكس ، بالإضافة إلى أن الفرق بين أي قيمتين محسوب تماما وبدقة . والفارق بين الصنف 91 والصنف 71 هو 20 درجة . والبيانات الإحصائية التي تتضمن قياسات متغير وصفي تسمى بيانات وصفية ، وتلك التي تتضمن قياسات متغير ترتيبي تسمى بيانات ترتيبية ، أما التي تتضمن قياسات متغير عددي فتسمى بيانات عددية .

ويجب ألا يختلط علينا الأمر عندما نقوم بترميز بيانات وصفية أو ترتيبية وفق نظام رموز عددي معين، فلو رمزنا لصفة «سعودي» بالرقم 3 ولصفة «عربي غير سعودي» بالرقم 2 ولصفة «غير عربي» بالرقم 1 فإن هذا لا يعني أن بيانا حصلنا عليه يتعلق بجنسيات جماعة من المقيمين في الرياض أصبح بيانا عدديا، ومع أنه سيقصر على الأرقام 1,2,3 إلا أننا يجب أن نتذكر بأن هذه الأرقام هي رموز لصفات وصفية وأن البيان لا يزال بيانا وصفيا.

وتنقسم البيانات العددية بدورها إلى نوعين، بيانات عددية منفصلة وبيانات عددية مستمرة. والبيانات المنفصلة تتضمن قياسات ناتجة عن عملية عد أو تعداد. وعندما نسجل، مثلا، عدد الولادات التي تمت في مستشفى للتوليد في كل يوم من أيام شهر معين سنحصل على بيان إحصائي عددي من النوع المنفصل جميع قياساته أعداد صحيحة. وكذلك الأمر عندما نعد الكريات البيض الظاهرة على منطقة محددة من زجاجة فحص مجهري، وعدد المراجعين الذين زاروا مركزا للرعاية الأولية في يوم معين، وعدد وقوعات الزواج أو الطلاق أو الوفاة خلال فترة محددة في منطقة معينة. وعدد حوادث المرور اليومية في مدينة الرياض الخ. أما النوع الآخر من البيانات العددية وهو البيانات المستمرة فإنها تتضمن قياسات ناتجة عن استخدام جهاز للقياس مثل مسطرة أو ميزان لقياس وزن أو درجة حرارة أو ضغط الدم أو الضغط الجوي، أو اختبار (أورائز) لقياس حاصل الذكاء أو اختبار لقياس معلومات طالب في مقرر معين الخ. ويسمى المتغير العددي الذي تكون قيمه الممكنة من النوع المنفصل أي نحصل عليها بطريقة التعداد، متغيرا عدديا منفصلا، كما يسمى ذلك الذي تكون قيمه الممكنة من النوع المستمر، أي نحصل عليها باستخدام جهاز للقياس، متغيرا عدديا مستمرا. ونلاحظ بسهولة أن القيم الممكنة لمتغير عددي منفصل قابلة للعد، بمعنى أنه يمكننا القول إن هذه القيمة هي القيمة الأولى الممكنة تليها القيمة كذا كقيمة ثانية، تليها القيمة كذا كقيمة ثالثة، وهكذا. ونظمتن إلى أننا عند الانتقال من قيمة إلى القيمة التي تليها لم نغفل بينهما أي من القيم الممكنة للمتغير. فمثلا، لو رمزنا بـ  $x$  لعدد الولادات اليومية في مستشفى للتوليد، فإن القيم الممكنة لـ  $x$  هي إما صفر، أو 1 أو 2 أو 3 إلخ. ولا يمكن أن يكون هناك نصف ولادة أو ولادة ونصف إلخ. وعندما نتقل من الصفر

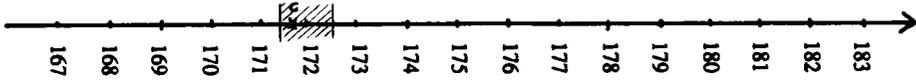
كقيمة ممكنة إلى الواحد كقيمة ممكنة تالية لها، لم نخلف وراءنا أيًا من قيم  $x$  الممكنة. وإذا حاولنا تطبيق الفكرة ذاتها في مجموعة القيم الممكنة لمتغير مستمر، أي نحاول عدها، فسنجد أن ذلك مستعص. لنرمز بـ  $y$ ، مثلا، لطول إنسان ذكر بالغ من رعايا المملكة. فعند قياس طوله بمسطرة مدرجة مرتفعة ومناسبة، كتلك التي نجدها في المستشفيات لقياس الطول، سنجد أن طوله يكافئ نقطة على تدرج المسطرة، لنفرض أن هذه النقطة واقعة بين 171 سم و 172 سم، فطول الرجل، واقع إذا، في مكان ما بين 171 سم و 172 سم. أي أنه يمكن أن يكون أي نقطة من الفترة [171, 172] من محور الأعداد الحقيقية. ولو كلف المرء نفسه بعد هذه القيم الممكنة فيقول إن 171 سم هي قيمة ممكنة أولى ثم يتوقف عاجزا تماما عن تحديد القيمة التي تليها. إذ مهما اتخذ عددا قريبا من الـ 171 فبين الـ 171 وبين هذه القيمة، على قربها الشديد من 171، ما لا يحصى ولا يُعد من القيم. ونقول إن مجموعة القيم الممكنة لمتغير مستمر هي مجموعة غير قابلة للعد. وقابلة العد هي الخاصة الرياضية التي نميز بموجبها بين النوعين من البيانات العددية، النوع المنفصل والنوع المستمر.

#### ٩- تدوير الأرقام العشرية - أخطاء القياسات

رأينا أن قياس طول شخص يقابل نقطة على المسطرة المدرجة التي نستخدمها في قياس الطول. وهذه النقطة من المسطرة المدرجة (نقطة من محور الأعداد) تقابل أو تمثل عددا حقيقيا هو طول الشخص. ولكن هب أن المسطرة التي نقيس بها مدرجة بالسنتيمتر، وليس فيها تدرج ميليمتر. وكل ما في الأمر أن هناك نقطة تشير إلى منتصف المسافة بين رقم والرقم الذي يليه، شكل (٤)، ولنفرض أن النقطة  $c$  على حرف المسطرة هي النقطة المقابلة لقمة رأس الشخص. فالمسطرة بنا أوتيت به من دقة في التدرج تخبرنا أن طول الشخص هو عدد حقيقي واقع بين 171 سم و 172 سم إلا أنه أقرب إلى 172 سم منه إلى 171 سم (النقطة  $c$  واقعة بعد منتصف المسافة بين 171 و 172) ومن المنطقي جدا، في غياب أية معلومات أخرى، أن نصلح على القول إن طول الشخص مقرب إلى أقرب سنتيمتر هو 172 سم. وكذلك النتيجة ستكون لو أن النقطة  $c$  وقعت في أي مكان من المنطقة المظللة على المحور، التي تمتد بين 171.5 سم إلى 172.5 سم. ولكن

ماذا لو وقعت  $c$  عند الـ 171.5 سم تماما أو عند الـ 172.5 تماما؟ في مثل هذه الحالة نتفق على تقريب الـ 171.5 سم إلى 172 سم، وتقريب الـ 172.5 سم إلى 173 سم. لنفرض الآن وجود تدريج ميلليمي، فما اصطلاحنا عليه سابقا يكافئ ما يلي:

إذا كان القياس 171.5 سم أو 171.6 سم أو 171.7 سم أو 171.8 سم أو 171.9 سم نعتبره 172 سم وكذلك نعتبره 172 سم إذا كان القياس 172.1 سم أو 172.2 سم أو 172.3 سم أو 172.4 سم. وهذا يُملي علينا، بصورة عامة، القاعدة التالية لتدوير الأرقام العشرية:



شكل (٤)

## قاعدة

لتدوير عدد عشري إلى منزلة معينة ننظر في الرقم الذي يحتل المنزلة التي تليها فإذا كان 5 أو أكثر نضيف واحدا إلى المنزلة المطلوبة ونلغي جميع الأرقام العشرية التي تليها. وإذا كان 4 أو أقل نبقى المنزلة المطلوبة كما وردت ونستغني كذلك عن جميع الأرقام العشرية التي تليها.

## مثال (١٥)

كيف تصبح الأعداد التالية بعد تدويرها إلى أقرب جزء من عشرة.

9.1701، 0.0532، 0.9808، 7.3198، 314.0621، 181.253

## الحل

وفقا للقاعدة المذكورة أعلاه، ننظر إلى الرقم العشري الثاني فإذا كان 5 أو أكثر نضيف 1 إلى الرقم العشري الأول (وهو الرقم الذي يحتل منزلة الجزء من عشرة) وإذا كان أقل من 5، نحتفظ بالرقم العشري الأول كما ورد. وهكذا نجد، على الترتيب، 9.2، 0.1، 1.0، 7.3، 314.1، 181.3.

## مثال (١٦)

فما يلي عدد الزيارات التي قام بها المرضى المراجعون للعيادات الخارجية بالمستشفيات ومراكز الرعاية الصحية الأولية في المناطق الأربع عشرة في المملكة لعام ١٤٠٦ هـ: 11168617، 4330131، 4870214، 3028921، 2049754، 4801820، 1577160، 6374554، 6034118، 1479722، 3875879، 3464826، 2825761، 1793849.

والمطلوب التعبير عن هذا البيان العددي بآلاف الأشخاص ثم تدوير الرقم الناتج إلى أقرب ألف.

## الحل

التعبير عن البيان بآلاف الأشخاص يعني أن وحدة القياس أصبحت «ألف شخص» فكل ألف مراجع يشكلون جماعة واحدة تتضمن ألف شخص. وللتعبير عن هذه الأعداد بآلاف الأشخاص يجب أن نقسم كل عدد على ألف. وتدوير الأعداد الناتجة إلى أقرب ألف يعني تدويرها إلى الرقم الذي يحتل منزلة الآحاد. وهكذا نجد الأعداد معبرا عنها بآلاف الأشخاص كما يلي:

11168.617، 4330.131، 4870.214، 3028.921، 2049.754، 4801.820، 1577.160، 6374.554، 6034.118، 1479.722، 3875.879، 3464.826، 2825.761، 1793.849.

وبعد تدويرها إلى أقرب ألف نجد:

11169، 4330، 4870، 3029، 2050، 4802، 1577، 6375، 6034، 1480، 3876، 3465، 2826، 1794.

ونلاحظ أنه من الأسر على القارىء متابعة البيان عندما يُعطى بهذا الشكل.

وفي الوقت الذي لا تخضع فيه قياسات بيان عددي من النوع المنفصل لأخطاء فإن القياسات في بيان عددي من النوع المستمر تخضع دائما لخطأ يسمى خطأ القياس. ويعود السبب في ذلك إلى أننا نستخدم للوصول إلى مثل ذلك القياس جهازا أو أداة

للقياس ، ولا يمكن للإنسان أن يبتكر جهازا للقياس لا يخطئ . لقد توصل الإنسان إلى ابتكار أجهزة قياس في علوم الفيزياء والكيمياء وغيرها تقيس بدقة هائلة إلا أنها مع ذلك تخطئ . وبالطبع يضاف إلى هذا السبب أو المصدر مصادر أخرى نذكر منها أن الإنسان الذي يقيس مُعرض أيضا لارتكاب خطأ ، ومهما أحسن استخدام الجهاز الذي يقيس به فسيرتكب أيضا نوعا من الخطأ .

وعندما نطلع على بيان إحصائي عددي من النوع المستمر ينبغي أن نفهم من القياس المقدم لنا شيئين ، أولهما فكرة عن مقدار الشيء المقيس وثانيهما درجة الدقة التي يتمتع بها القياس . وإذا قيل لنا إن طول شخص هو 168.7 سم فإن هذا الرقم يعطينا فكرة عن قامة الشخص ولكنه يعطينا أيضا أن دقة هذا القياس تصل إلى أقرب جزء من عشرة من الستمتر، أي إلى أقرب ميلليمتر. وكقاعدة عامة ، يكون الرقم الأخير المعطى على اليمين رقما مشكوكا في صحته . وعندما نقيس ، بطريقة علمية ، طول شخص ونفيد بأن طوله 168.7 سم فهذا يعني أن الطول الحقيقي لهذا الشخص واقع في مكان ما بين 168.65 سم و 168.75 سم . ولتوضيح الفكرة نقول إننا لو استخدمنا جهازا أكثر دقة لقياس الطول لأعطانا الطول صحيحا حتى منزلة الجزء من مائة ، أي حتى الرقم العشري الثاني بعد الفاصلة ، وفي هذه الحالة سيكون الرقم العشري الأول بعد الفاصلة صحيحا والشك لا يتطرق إلا إلى الرقم الذي يليه ، ولو أن دقة الجهاز سمحت بإعطاء ثلاثة أرقام عشرية بعد الفاصلة أي بدقة تصل إلى أقرب جزء من ألف من الستمتر، فسيكون الرقمان العشريان الأول والثاني بعد الفاصلة صحيحين ويتطرق الشك إلى الرقم العشري الثالث ، وهكذا . وبصرف النظر عن مقدار هذه الأرقام (الرقم العشري الثاني والثالث والرابع الخ . بعد الفاصلة) فإن تدوير العدد الذي نحصل عليه إلى أقرب جزء من عشرة لن يعطينا 168.7 سم إلا إذا كان العدد الذي نقوم بتدويره واقعا بين 168.65 سم ، و 168.749999 (ويمكن أن يتكرر الرقم 9 إلى ما لا نهاية له) وذلك وفقا لقاعدة تدوير الأرقام العشرية ، ونصطلح هنا ، توخيا للسهولة ، أن القيمة الفعلية للقياس تقع بين 168.65 سم و 168.75 سم .

وبصورة عامة، للوصول إلى الحدين الأدنى والأعلى للقيمة الفعلية لقياس من النوع المستمر، معطى على شكل عدد صحيح (أي مقرب إلى أقرب واحد صحيح)، نطرح منه 0.5 فنحصل على الحد الأدنى ونضيف إليه 0.5 فنحصل على الحد الأعلى. أما إذا كان القياس معطى كعدد عشري فنضع صفراً بعد آخر رقم معطى في القياس (أي آخر رقم على اليمين بعد الفاصلة العشرية) ثم نضع الرقم 5 تحت هذا الصفر ونطرح فنحصل على الحد الأدنى ثم نجمع للحصول على الحد الأعلى. (محتفظين بالفاصلة في موقعها تماماً عند الجمع أو الطرح) ونوضح الطريقة بالمثال التالي:

مثال (١٧)

ما هو الحد الحقيقي الأدنى والأعلى لكل من القياسات التالية:

12 سم، 1517 سم، 18.4 سم، 125.05 سم، 34.70 سم، 4.3208 سم؟

الحل

الحدود المطلوبة هي على الترتيب:

$$\begin{array}{r} 12.0 \\ 0.5+ \\ \hline 12.5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12.0 \\ 0.5- \\ \hline 11.5 \end{array}$$

فالقياس الأول واقع فعلاً بين 11.5 سم و 12.5 سم:

وبصورة مماثلة نجد أن القياس الثاني واقع فعلاً بين 1516.5 سم و 1517.5 سم.

ومن أجل القياس الثالث نكتب:

$$\begin{array}{r} 18.40 \\ 0.05+ \\ \hline 18.45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18.40 \\ 0.05- \\ \hline 18.35 \end{array}$$

والقياس الثالث واقع فعلاً بين 18.35 سم و 18.45 سم.

وبصورة مماثلة نكتب من أجل القياسات الثلاثة الباقية، على الترتيب،

$$\begin{array}{r} 125.050 \\ \underline{0.005 +} \end{array}$$

$$125.055$$

$$\begin{array}{r} 125.050 \\ \underline{0.005 -} \end{array}$$

$$125.045$$

$$\begin{array}{r} 34.700 \\ \underline{0.005 +} \end{array}$$

$$34.705$$

$$\begin{array}{r} 34.700 \\ \underline{0.005 -} \end{array}$$

$$34.695$$

$$\begin{array}{r} 4.32080 \\ \underline{0.00005 +} \end{array}$$

$$4.32085$$

$$\begin{array}{r} 4.32080 \\ \underline{0.00005 -} \end{array}$$

$$4.32075$$

وفي كل حالة إنما نطرح ونضيف، في الواقع، نصف وحدة دقة. حيث وحدة الدقة هي الواحد في منزلة الرقم المشكوك فيه.

### ١٠ - التناسب الطردي

نقول إن المتغيرين  $x$  و  $y$  متناسبان طرديا إذا بقيت نسبتها ثابتة. أي  $c = \frac{y}{x}$ ، أو  $y = cx$  حيث  $c$  عدد ثابت يسمى ثابت التناسب.

لنفرض الآن أن المقدارين  $x$  و  $y$  يتغيران متناسبين طرديا. ولنفرض أن  $x$  تغير من  $x$  إلى  $x + \Delta x$ ، وفي مقابل ذلك تغير  $y$  من  $y$  إلى  $y + \Delta y$ . ما هي العلاقة بين  $\Delta x$  تغير  $x$  و  $\Delta y$  تغير  $y$ ؟ وللإجابة نفترض أن ثابت التناسب  $c$ ، فيكون:

$$\frac{y}{x} = c, \quad \frac{y + \Delta y}{x + \Delta x} = c$$

ومنه

$$\frac{y + \Delta y}{x + \Delta x} = \frac{y}{x}$$

ومن خواص التناسب يمكن أن نكتب:

$$\frac{y + \Delta y}{x + \Delta x} = \frac{-y}{-x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{(x + \Delta x) - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta x = c \Delta y \text{ أو } \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \text{ أي أن}$$

فالتغيران في  $x$  و  $y$  يحافظان دائماً على علاقة التناسب الطردي ذاتها القائمة بين  $x$  و  $y$ . ونلجأ إلى هذه الحقيقة البسيطة في كثير من التطبيقات. فإذا علمنا مثلاً أنه عندما ازدادت قيمة  $x$  بمقدار 5، ازدادت قيمة  $y$  بمقدار 3؛ فكم سيزداد  $y$  مقابل زيادة  $x$  في مقدارها 7؟ ولحساب المطلوب نكتب:

$$\frac{3}{5} = \frac{\Delta y}{7}$$

ومن خواص التناسب نعلم أن

$$5 \times \Delta y = 3 \times 7$$

$$\Delta y = \frac{3 \times 7}{5} = 4.2$$

ونلخص عادة هذه العمليات في مخطط بسيط كما يلي:

 $\Delta x$ 
 $\Delta y$ 

5

3

7

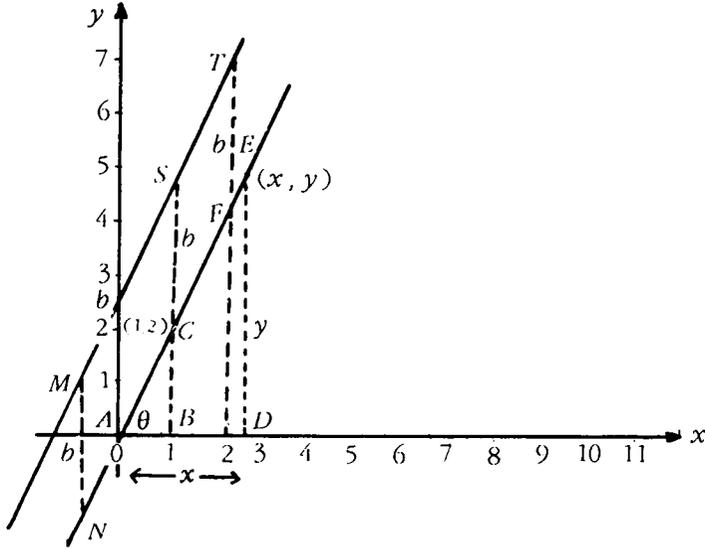
?

وتكون الزيادة المطلوبة في  $y$  مساوية  $4.2 = \frac{3 \times 7}{5}$

## ١١ - معادلة مستقيم

لندرس أولاً معادلة مستقيم يمر من مبدأ الاحداثيات. ويتحدد المستقيم تماماً عند معرفة نقطتين منه. وفي حالتنا هنا نعلم سلفاً أن المستقيم يمر من النقطة (0,0) وهي مبدأ الاحداثيات، فتكفي معرفة نقطة واحدة أخرى لكي يكون ممكناً تحديد معادلة المستقيم. لنفرض أن النقطة (1,2) واقعة على المستقيم فكيف نحدد معادلته؟

إذا رسمنا محورين للاحداثيات وحددنا النقطة (1,2) ثم وصلنا بينها وبين المبدأ نحصل على بيان المستقيم. وعلى هذا البيان نأخذ نقطة ما، نرمز لاحداثياتها بـ  $x$  و  $y$ ، وتكون المعادلة المطلوبة هي علاقة بين  $x$  و  $y$ . ومن تشابه المثلثين  $ABC$  و  $ADE$  نكتب:



شكل (٥)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

أو

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{y}$$

ومنه

$$y = 2x$$

وهي ذات العلاقة التي تربط بين مقدارين متناسبين طرديا، حيث ثابت التناسب يساوي 2. وتنبغي ملاحظة أن ثابت التناسب 2 يمثل ظل الزاوية  $\theta$  (حرف يوناني منطوقه ثيتا) التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (انظر الشكل ٥) ويسمى ظل الزاوية  $\theta$  ميل المستقيم. وكل مستقيم آخر في المستوى ميله 2، أي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية تساوي زاوية المستقيم  $AE$ ، سيقطع المحور الصادي في نقطة غير نقطة المبدأ. لنفرض مستقيما  $MT$  موازيا لـ  $AE$  ويقطع المحور

الصادي في نقطة  $(b, 0)$ . فما معادلته؟ يمكن الحصول على نقاط المستقيم  $MT$  بإضافة مقدار ثابت  $b$  إلى الاحداثي الصادي للنقاط الموافقة من المستقيم  $y = 2x$ ، وهي النقاط التي تقع على الخط الرأسي نفسه. فإذا أضفنا إلى الاحداثي الصادي للنقطة  $N$  مقدار  $b$  حصلنا على  $M$  وإذا أضفنا المقدار  $b$  إلى الاحداثي الصادي لكل من  $c$  و  $F$  وجدنا، على الترتيب،  $S$  و  $T$ . وهذا يعني أن معادلة المستقيم الجديد هي

$$y = (نقطة على المستقيم AE) y + b \quad (نقطة على المستقيم الجديد)$$

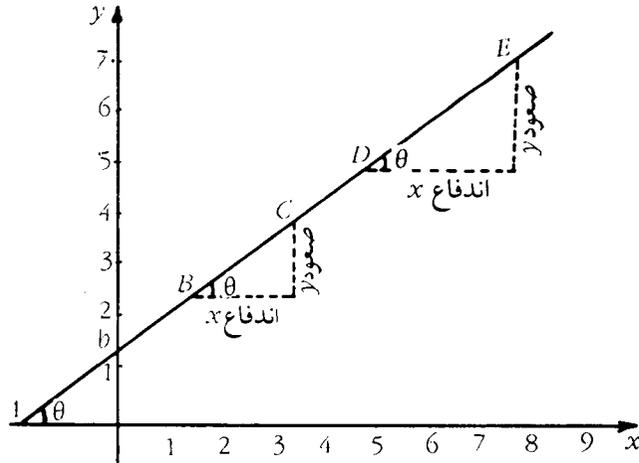
أو

$$y = 2x + b$$

وبصورة عامة نجد أن معادلة المستقيم  $AE$  (انظر الشكل ٦) هي

$$y = (ظل الزاوية \theta) x + b$$

حيث  $b$  إحداثي نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات.



شكل (٦)

ولو انتقلت نقطة على المستقيم من الوضع  $B$  إلى الوضع  $C$  فإن  $x$  سيتغير بمقدار سميناه «اندفاع  $x$ » وسيقابلة تغير في «صعود  $y$ ». وكذلك عند انتقال نقطة من

الوضع  $D$  إلى الوضع  $E$ ، فإن  $x$  سيتغير بمقدار سميناه «اندفاع  $x$ » وسيقابله تغير في  $y$  سميناه أيضا «صعود  $y$ ». ومن خواص الشكل الهندسية نلاحظ بسهولة أن

$$\text{ثابت} = \text{ظل} \theta = \frac{\text{صعود } y}{\text{اندفاع } x}$$

أي أن نسبة تغير  $y$  إلى تغير  $x$  تبقى ثابتة باستمرار، في حالة مستقيم. وهي الخاصة نفسها التي رأيناها في حالة مقدارين متناسبين طرديا.

وأخيرا، إذا كانت العلاقة بين متغيرين  $x$  و  $y$  علاقة خط مستقيم قلنا إنها علاقة خطية. وبصورة عامة، معادلة أي مستقيم هي علاقة خطية وبالعكس كل علاقة خطية تمثل مستقيما.

## ١٢ - تصميم الجداول

نحتاج إلى تنظيم نتائج التجارب والملاحظات العلمية في شكل جداول، وذلك في مختلف ميادين المعرفة. وفي أبسط الحالات نجد جدولا ثنائيا، يتضمن في كل خلية من خلاياه قياسا أو مشاهدة مرتبطة بمتغيرين، ثبتنا كلا منهما عند مستوى معين من مستوياته الممكنة. فنفرض، مثلاً، أن لمتغير  $x$  ثلاثة مستويات، سنرمز لها بـ  $x_1, x_2, x_3$ ؛ وأن لمتغير آخر  $y$  أربعة مستويات، سنرمز لها بـ  $y_1, y_2, y_3, y_4$ ؛ وإذا حصلنا عند كل زوج مختلف من المستويات للمتغيرين  $x$  و  $y$  على قياس أو مشاهدة، فسيتوفر لدينا اثنا عشر قياسا نضعها في جدول كما في الشكل (٧).

حيث أشير بـ  $x$  للقياس وبـ  $y$  لمجاميع السطور أو الأعمدة وبـ  $m$  للمجموع الكلي. وبصورة عامة، إذا كان عدد مستويات المتغير  $x$  مساويا لـ  $n$ ، وعدد مستويات المتغير  $y$  مساويا لـ  $m$  فإن عدد خلايا الجدول سيكون  $n \times m$ .

وفي حال وجود ثلاثة متغيرات  $x$  وله  $n$  من المستويات،  $y$  وله  $r$  من المستويات، و  $z$  وله  $q$  من المستويات، نحتاج إلى تصميم جدول ثلاثي يتضمن  $n r q$  خلية. ونلاحظ بوضوح أننا نحتاج إلى جدول ثنائي مؤلف من  $n r$  خلية ليستوعب المتغيرين  $x$

$x \backslash y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	المجموع
$x_1$	x	x	x	x	-
$x_2$	x	x	x	x	-
$x_3$	x	x	x	x	-
المجموع	-	-	-	-	=

شكل (٧)

و  $y$ . ثم نعيد هذا الجدول  $q$  مرة وذلك عند كل مستوى من مستويات المتغير الثالث  $z$ . ولتقديم مثال عن تصميم جدول ثلاثي نفترض أن  $n = 3$ ،  $r = 4$ ،  $q = 3$ . فنجد جدولاً كما في الشكل (٨).

	$Z_1$			المجموع	$Z_2$			المجموع	$Z_3$			المجموع
	$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$y_1$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
$y_2$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
$y_3$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
$y_4$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (٨)

ومن الواضح أنه يمكن تنظيم الجدول بطريقة ثانية تستوعب فيها الجداول الثنائية المكررة مستويات  $Z$  و  $Y$ . (انظر الشكل ٩) أو بطريقة ثالثة تستوعب فيها الجداول الثنائية المكررة مستويات  $X$  و  $Z$ . (انظر الشكل ١٠).

	$x_1$			التجميع	$x_2$			التجميع	$x_3$			التجميع
	$z_1$	$z_2$	$z_3$		$z_1$	$z_2$	$z_3$		$z_1$	$z_2$	$z_3$	
$y_1$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
$y_2$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
$y_3$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
$y_4$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (٩)

	$y_1$			التجميع	$y_2$			التجميع	$y_3$			التجميع	$y_4$			التجميع
	$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z_1$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
$z_2$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
$z_3$	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (١٠)

وعلى سبيل المثال، لنفرض أن لدينا أربعة أنواع من الأبقار نرمز لها  $C_1, C_2, C_3$  وأخضعناها في محطة للتجارب الزراعية تابعة لكلية الزراعة، إلى ثلاثة أشكال من النظام الغذائي هي  $N_1, N_2, N_3$ . وذلك لدراسة أثر النظام الغذائي في إنتاج الحليب اليومي بالكغ لكل من الأنواع الأربعة. وكانت النتائج كما في الجدول الثاني التالي:

أنواع البقر النظام الغذائي	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	المجموع
$N_1$	25	28	30	35	118
$N_2$	28	29	31	35	123
$N_3$	27	28	31	34	120
المجموع	80	85	92	104	361

وإذا فرضنا أن التجربة نفسها قد أجريت في محطة للتجارب الزراعية في أبا وذلك لدراسة أثر عامل البيئة والمناخ. إذا رمزنا لعامل البيئة بـ  $V$  فلدينا هنا مستويان  $V_1$  وترمز لبيئة المنطقة الوسطى و  $V_2$  وترمز لبيئة المرتفعات الجنوبية الغربية من 'ملكة'. وأن تجربة أبا أعطت النتائج التالية:

أنواع البقر النظام الغذائي	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	المجموع
$N_1$	27	30	29	38	124
$N_2$	29	33	30	36	128
$N_3$	30	31	29	38	128
المجموع	86	94	88	112	380

فيمكن جمع هذه النتائج في جدول واحد يلخص العوامل الثلاثة  $N, C$  و  $V$ . وذلك بأشكال مختلفة، منها، على سبيل المثال، الشكل التالي:

	$V_1$				الجمع	$V_2$				الجمع
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	
$N_1$	25	28	30	35	118	27	30	29	38	124
$N_2$	28	29	31	35	123	29	33	30	36	128
$N_3$	27	28	31	34	120	30	31	29	38	128
المجموع	80	85	92	104	361	86	94	88	112	380

أو يمكن تنظيمه على الشكل التالي :

	$V_1$			المجموع	$V_2$			المجموع
	$N_1$	$N_2$	$N_3$		$N_1$	$N_2$	$N_3$	
$C_1$	25	28	27	80	27	29	30	86
$C_2$	28	29	28	85	31	33	31	94
$C_3$	30	31	31	92	29	30	29	88
$C_4$	35	35	34	104	38	36	38	112
المجموع	118	123	120	361	124	128	128	380

كما يمكن كتابته على الشكل:

	$N_1$		المجموع	$N_2$		المجموع	$N_3$		المجموع
	$V_1$	$V_2$		$V_1$	$V_2$		$V_1$	$V_2$	
$C_1$	25	27	52	28	29	57	27	30	57
$C_2$	28	30	58	29	33	62	28	31	59
$C_3$	30	29	59	31	30	61	31	29	60
$C_4$	35	38	73	35	36	71	34	38	72
المجموع	118	124	242	123	128	251	120	128	248

تمرين: اقترح أشكالا أخرى.  
ويمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين  $C$  و  $V$ ، مثلا، بالجمع فوق مستويات العامل  $N$  فنجد:

	$V_1$	$V_2$	المجموع
$C_1$	80	86	166
$C_2$	85	94	179
$C_3$	92	88	180
$C_4$	104	112	216
المجموع	361	380	741

وكذلك يمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين  $C$  و  $N$ ، مثلا، بالجمع فوق مستويات العامل  $V$  فنجد:

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	المجموع
$C_1$	52	57	57	166
$C_2$	58	62	59	179
$C_3$	59	61	60	180
$C_4$	73	71	72	216
المجموع	242	251	248	741

وبصورة مماثلة يمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين  $N$  و  $V$ .

ومن المجماميع الفرعية في الشكل (٧) يمكن تشكيل جدولين ثنائيين. فإذا أخذنا المجماميع الفرعية الواردة في وضع شاقولي نجد جدولا  $4 \times 3$  يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت  $z$  و  $y$  فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير  $x$  أو جمعنا فوق مستويات  $x$ . ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي  $z \times y$ »، وكذلك لو أخذنا المجماميع الفرعية الواردة في وضع أفقي نجد جدولا  $3 \times 3$  يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت  $z$  و  $x$  فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير  $y$  أو جمعنا فوق مستويات  $y$ . ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي  $x \times z$ ». ولو أخذنا في الشكل (٧) المجماميع الفرعية الواردة في وضع شاقولي لوجدنا جدولا  $4 \times 3$  يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت  $x$  و  $y$  فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير  $z$ ، أو جمعنا فوق مستويات  $z$ . ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي  $x \times y$ ». (ضع جداول ثنائية في مثال الأبقار تمثل  $(C \times V, N \times V, N \times C)$ ).

ولتوضيح حالة أربعة متغيرات نأخذ المثال التالي. فلنفرض أن لدينا أربعة متغيرات هي  $x$  ويقع في ثلاثة مستويات؛  $y$  ويقع في 3 مستويات؛  $z$  ويقع في 3 مستويات؛  $T$  ويقع في 4 مستويات؛  $T$  ويقع في مستويين. فعندئذ يمكن تصميم جدول  $x \times y \times z \times T$  أبعاده  $4 \times 3 \times 3 \times 2$  ويتضمن 72 خلية. هي في الواقع ستة جداول كل منها  $4 \times 3$ . (انظر الشكل (١١)).

		Z <sub>1</sub>			Z <sub>2</sub>			Z <sub>3</sub>		
		x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
T <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	y <sub>2</sub>	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	y <sub>3</sub>	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	y <sub>4</sub>	x	x	x	x	x	x	x	x	x
T <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	y <sub>2</sub>	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	y <sub>3</sub>	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	y <sub>4</sub>	x	x	x	x	x	x	x	x	x

شكل (١١)

## تمارين الملحق الأول

١) قم بالعمليات الحسابية والجبرية التالية إن أمكن:

أ - في الفصل أربعون طالبا وخمسون مقعدا وثلاثة نوافذ. كم طالبا ومقعدا ونافذة في الفصل؟

ب - في الغرفة أربعون طالبا وخمسون مقعدا، وفي الغرفة المجاورة ب ثلاثون طالبا وخمسة وأربعون مقعدا. ما هو عدد الطلاب وعدد المقاعد في الغرفتين معا؟

ج -  $3xy^2z + 0.5xy^2z + 1.2xy^2z - 2.2xy^2z = ?$

د -  $5x^2yz^2 + 3xyz^2 - x^2yz = ?$

هـ -  $5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} = ?$

و -  $\sqrt{15} - 3\sqrt{5} = ?$

ز -  $8F(3) + 3F(3) - 0.5F(3) - F(3) = ?$

ح -  $7F(2) - 3F(1) = ?$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{7} - \frac{5}{21} = ? \quad \text{ط-}$$

$$\frac{3}{32} + \frac{5}{16} + \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{13}{32} - 1 = ? \quad \text{ك-}$$

$$0.5403 + 1.0279 + 12.03 - 3.0101 - 14.123 = ? \quad \text{ل-}$$

(٢) في صندوق ثلاث كرات حمراء وخمس كرات سود وثلاث كرات بيضاء ما هي النسبة المتوية في الصندوق لكل من الكرات الحمراء والكرات السوداء والكرات البيضاء؟

(٣) في الفصل 25 طالبا من طلاب كلية العلوم و 10 من طلاب الحاسب الآلي وإثنان من الهندسة وطالب من العلوم الصحية. ما هي النسبة المتوية لوجود طلاب كليات العلوم والحاسب الآلي والهندسة والعلوم الصحية في الفصل علما أن مجموع طلاب الفصل 38 طالبا؟

(٤) احسب ما يلي :  $12.025 \times 0.19 = ?$

$$\frac{4}{5} \times 0.61 = ? \quad ; \quad \frac{2}{9} \times \frac{7}{5} = ? \quad ; \quad \frac{7}{3} \times \frac{7}{9} = ?$$

$$130.576 + 1.2 \quad ; \quad 0.7895 + 0.05$$

(٥) مستخدما خواص التناسب فيما يلي :

$$\text{أ- أحسب } x \text{ إذا كان } \frac{x}{5} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب- أحسب } x \text{ و } y \text{ إذا كان } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \text{ ، و } x + y = 10$$

ج- في صندوق كرات بيضاء وسود نسبة 2 إلى 1 ، على الترتيب ، أحسب عدد

الكرات من كل نوع إذا علمت أن الصندوق يتضمن 12 كرة .

$$\text{د- إذا كان } \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \text{ و } x^2 - y^2 = 32 \text{ فاحسب } x \text{ و } y$$

$$\text{هـ- إذا كان } \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3} \text{ و } x + y + z = 30$$

فاحسب  $x, y, z$  .

$$A = \{x \text{ طالب في جامعة الملك سعود} : x\}; B = \{y \text{ طالب متزوج} : y\} \quad (٦)$$

$$C = \{Z \text{ طالب لا يدخن} : Z\}$$

عبر كلامياً عن  $A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C$  .

(٧) أوجد  $A \cup B$  في كل من الحالات التالية :

$$B = \{b, c, d\}, A = \{a, b, c\} \quad \text{أ-}$$

$$B = \{a, b\}, A = \{a, b, c\} \quad \text{ب-}$$

$$B = \{+, -\}, A = \{0, \star\} \quad \text{ج-}$$

(٨) لتكن المجموعة الشاملة  $S$  هي مجموعة سكان شبه الجزيرة العربية :

$$B = \{b \text{ شخص متعلم} : b\}, A = \{a \text{ مواطن سعودي} : a\}$$

$$C = \{c \text{ شخص مغترب} : c\}$$

عبر كلامياً عن المجموعات التالية :

$$\bar{A} \cup (B \cap C), A \cap B \cap C, B \cup C, \bar{B} \cap \bar{C}, A \cap B, \bar{A}$$

$$. B - \bar{C}, B - C, A \cup B, B \cup \bar{B}$$

(٩) يمثل الشكل (١٢) المقابل ثلاث مجموعات  $X, Y, Z$  . ظلل المنطقة التي تمثل

المجموعات التالية ، كل واحدة في رسم مستقل .

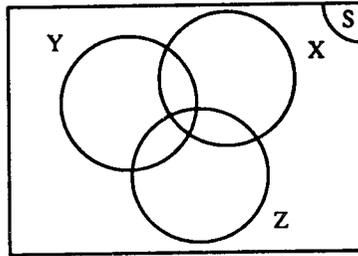
$$\text{أ- } X \cup (Z \cup Y)$$

$$\text{ب- } (X \cup Z) \cup Y$$
 ، وقارن النتائج مع أ .

$$\text{ج- } (X \cap Y) \cap Z$$

$$\text{د- } X \cap (Y \cap Z)$$
 وقارن النتائج مع ج .

$$\text{هـ- } X \cap (Y \cup Z)$$
 .



شكل (١٢)

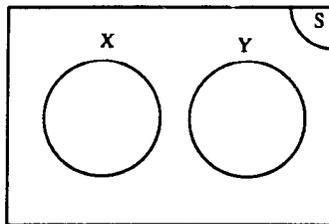
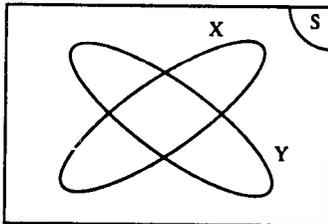
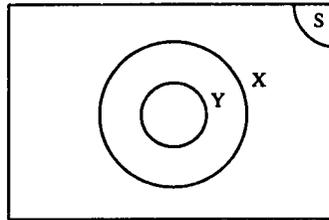
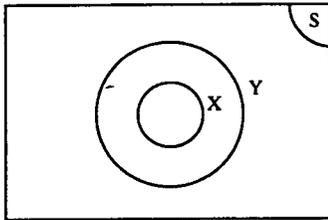
و-  $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$  وقارن الناتج مع هـ .

ز-  $X \cup (Y \cap Z)$  .

ح-  $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$  وقارن النتائج مع ز .

لخص النتائج التي حصلت عليها من هذا التمرين بالنسبة إلى قابلية توزيع عملية التقاطع على عملية الاتحاد وتوزيع عملية الاتحاد على عملية التقاطع .

١٠) ظلل  $X - Y$  في كل من الأشكال التالية :



شكل (١٣)

(١١) في الشكل (١٤) ، المقابل ، أكتب المجموعات :

أ -  $X$  ،

ب -  $Y$  ،

ج -  $X \cap Y$  ،

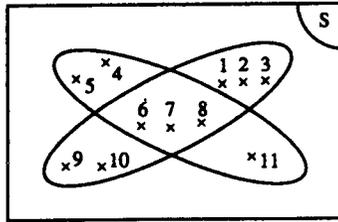
د -  $X - (X \cap Y)$  ،  $X - Y$  ،

هـ -  $Y - (X \cap Y)$  ،  $Y - X$  ،

و -  $X \cup Y$  ،

ز -  $(X \cup Y) - X$  ،

لاحظ أن الناتج لا يساوي  $Y$  ، متى يكون الناتج مساويا لـ  $Y$  ؟



شكل (١٤)

(١٢) اكتب الجداء الديكارتي  $X \times Y$  إذا كان  $X = \{b, c, d\}$  ؛  $Y = \{m, n, t\}$  ، أكتب أيضا  $X \times Y$  و  $Y \times X$  .

(١٣) لتكن الدالة المعرفة بالقاعدة

$$y = \frac{2x+5}{x-3}$$

أ - حدد مجموعة تعريف الدالة ومداهما ،

ب - احسب  $f(-1)$  ،  $f(0)$  ،  $f(4)$  ،  $f(5)$  ،  $f(1)$  ،  $f^{-1}(7)$  .

(١٤) التطبيق  $Z \rightarrow Z : f$  حيث  $Z$  مجموعة الأعداد الصحيحة . معرف كما يلي :

إذا كان  $x$  عددا يقبل القسمة على 2  
 إذا كان  $x$  لا يقبل القسمة على 2 ويقبل القسمة على 3  
 فيما عدا ذلك

$$f(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

ما هي صور الأعداد 8، -6، -5، 0، 3، 7، 11، 16؟

(١٦) لتكن الدالة العددية  $f$  المعرفة بالقاعدة:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ 0 & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

إذا كان  
 إذا كان  
 إذا كان

- أ- أحسب  $f(-5)$ ،  $f(1/2)$ ،  $f(1)$ ،  $f(3)$ ،  $f(1000)$  .  
 ب- أرسم بيان هذه الدالة وعين مداها .

(١٧) لتكن الدالة العددية  $f$  المعرفة بالقاعدة:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x < -1 \\ 1 & , \quad 1 < x < 2 \\ -2x+3 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

إذا كان  
 إذا كان  
 إذا كان

- أ - عين مجموعة تعريف هذه الدالة (ساحة الدالة) .  
 ب- أحسب  $f(-3)$ ،  $f(-2)$ ،  $f(3/2)$ ،  $f(5)$  .  
 ج- ما هي الصورة العكسية للعدد (-2) .  
 د - أرسم بيان هذه الدالة .

(١٨) أكتب بالتفصيل ما تمثله المجاميع التالية:

$$\sum_{i=1}^4 f_i x_i^2 \quad , \quad \sum_{i=1}^4 (x_i + 3) x_i \quad , \quad \sum_{i=1}^3 (x_i - 2)^2 \quad , \quad \sum_{i=2}^6 x_i$$

(١٩) أكتب كلا من العبارات التالية مستخدماً إشارة المجموع  $\sum$  :

$$y_9^2 + y_{10}^2 + y_{11}^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2 , x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 , x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 , (x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + (x_3 - m)^2 ,$$

$$kn_1 + kn_2 + kn_3 + kn_4 + kn_5 , 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 ,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 - a - a^2 - a^3 , ay_1 + a^2 y_2 + a^3 y_3 + a^4 y_4 ,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 , x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

(٢٠) إذا كان  $x_5 = -3, x_4 = 0, x_3 = 1, x_2 = 2, x_1 = 3$  حيث

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 23 \text{ و } \sum_{i=1}^5 x_i = 3 . \text{ أحسب قيمة كل من العبارات التالية:}$$

(i) باستخدام تعريف  $\sum$  ،

(ii) تبسيط العبارة أولاً مستخدماً خواص  $\sum$  ثم حساب القيمة .

$$\sum_{i=1}^5 (x_i + 10) \quad \text{أ-}$$

$$\sum_{i=1}^5 (2x_i + 3) \quad \text{ب-}$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i + x_{i+1}) \quad \text{ج-}$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i - x_{i+1}) \quad \text{د-}$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - 1)(x_i + 1) \quad \text{هـ-}$$

$$\sum_{r=0}^n [(r+1)^2 - r^2] = (n+1)^2$$

(أكتب أول حدين وآخر حدين ولاحظ اختصار الحدود السالبة مع الحدود الموجبة).

(ii) بين أن

$$\sum_{r=0}^n [(r+1)^2 - r^2] = 2 \sum_{r=0}^n r + n$$

(باستخدام خواص  $\sum$ ).

$$\sum_{r=0}^n r = \frac{1}{2} n(n+1) \text{ من (i) و (ii) بين أن}$$

(٢٢) إذا كانت النقطة  $(x, 11)$  واقعة على المستقيم  $y = 3x + 5$  فاحسب قيمة  $x$ .

(٢٣) بين أن النقاط الثلاثة  $(2, 5)$  ،  $(4, 9)$  ،  $(1, 3)$  واقعة على استقامة واحدة.

(٢٤) في مسح لالتهاب الكبد الفيروسي في مدينة معينة، جرى تسجيل الحالات التي أخبر عنها من المستشفيات، ومن العيادات الطبية، ومن السلطات الصحية المحلية. وبيّن الجدول التالي أعداد المرضى الموجودين في مستشفى وغير الموجودين في مستشفى، مصنّفين وفقاً للجنس، العمر، ولما إذا كانت الحالة من النوع HBSAG أم لا.

أكتب جداول مختصرة تبين تغير نسبة المرضى في المستشفيات مع كل من العمر، الجنس، وحالة الـ HBSAG.

العمر بالسنوات	HBSAG إيجابي				HBSAG سلبي			
	ليس في مستشفى		في مستشفى		ليس في مستشفى		في مستشفى	
	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى
0 - 14	43	42	25	9	0	0	0	0
15 - 29	41	39	39	20	18	10	16	7
≥ 30	48	25	21	10	17	3	18	4

٢٥) يتألف فصل الإحصاء من 40 طالبا. صنفوا وفق ثلاثة متغيرات هي الجنسية (سعودي، غير سعودي)، والسكن (يعيش في سكن الطلاب، لا يعيش في سكن الطلاب)، والكلية التي يتنسب إليها (علوم، حاسب آلي، هندسة). إذا علمت أن:

15 طالب سعودي يسكنون في سكن الطلاب ومن العلوم؛ 5 سعوديون لا يسكنون ومن العلوم، 3 طلاب سعوديون يسكنون في سكن الطلاب ومن الحاسب؛ 2 غير سعوديين يسكنون ومن العلوم، 4 طلاب سعوديون يسكنون في سكن الطلاب ومن الهندسة؛ 1 غير سعودي يسكن ومن الحاسب، 1 غير سعودي لا يسكن ومن الحاسب. فاعرض هذه المعلومات في جدول علما أن ربع طلاب الفصل من غير السعوديين وأن طلاب الهندسة هم حصرا من السعوديين وجميعهم يعيشون في سكن الطلاب.



## الملحق الثاني

### بعض الجداول الإحصائية

١ - جدول التوزيع الطبيعي المتجمع

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9023	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9734	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

## جدول توزيع ستودنت المتجمع

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2) \sqrt{\pi n} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} dx$$

F \ n	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.55	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.888
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.683	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.667	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291