

الفصل الأول

فضاءات ونتائج أساسية

ندخل في هذا الفصل فضاءات لا بد من الإلمام بها قبل التطرق إلى مفهوم التوزيعات. كما نقدم نتائج تعيننا مستقبلا في إثبات عديد المبرهنات.

1 - فضاءات أساسية

نقدم في البداية بعض الرموز التي سنستخدمها لاحقا:

- $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ نسمى α دليلا متعددا.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ نسمى $|\alpha|$ طول α .
- نضع : $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ لكل $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
- إذا كان α و β دليلين متعددين فإن لدينا التكافؤ :

$$\forall i = 1, \dots, n : \alpha_i \leq \beta_i \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$
- نضع : $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ لكل $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

- لدينا العلاقة التالية التي تعمم مثلتها المعروفة في \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^n, (x + y)^\alpha &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} y^\beta. \end{aligned}$$

- نعبر عن الاشتقاق الجزئي بـ:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha f = D^\alpha f \quad \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f.$$

- يكتب قانون ليبنيتز¹ Leibniz الخاص باشتقاق جداء دالتين، على الشكل:

$$D^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f \cdot D^\beta g.$$

نتناول الآن بعض الفضاءات التي تهتمنا في تقديم التوزيعات.

ليكن Ω جزءا مفتوحا غير خال من \mathbb{R}^n .

نرمز بـ $C^\infty(\Omega)$ أو بـ $E(\Omega)$ لفضاء الدوال المعرفة على Ω القابلة

للاشتقاق لانهائيا على Ω .

كما نرمز بـ $D(\Omega)$ أو بـ $C_0^\infty(\Omega)$ لفضاء الدوال المتراصة الحوامل

support على Ω المنتمية إلى الفضاء $C^\infty(\Omega)$. تسمى عناصر هذا الفضاء "دوال"

اختبارية" Test functions.

ليكن K متراصا محتوى في Ω . نرمز بـ $D_K(\Omega)$ للفضاء :

$$D_K(\Omega) = \{u \in D(\Omega) : \text{supp } u \subset K\}$$

¹ غوتفريد ليبنيتز (1646 - 1716) فيلسوف ورجل أعمال ورياضي ألماني.

حيث يرمز $\text{supp } u$ لحامل الدالة u .

ليكن $m \in \mathbb{N}$. نرمز بـ $D^m(\Omega)$ للفضاء :

$$D^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : \text{supp } u \subset K\}.$$

سؤال: ما هي الطوبولوجيا، المناسبة لدراسة التوزيعات، التي سنعرّفها

على الفضاء $D(\Omega)$ ؟

إنها طوبولوجيا صعبة التقديم لأنها تتطلب إدخال العديد من المفاهيم المرتبطة بأنصاف النظميات (يقال أيضا نصف معيار) semi-norm. وعليه نكتفي بإبراز مفهوم التقارب وفق هذه الطوبولوجيا، إذ إن ذلك يكفي لسدّ حاجتنا في هذا الكتاب.

تعريف 1.1 (التقارب في $D(\Omega)$)

نقول عن متتالية دوال اختبارية (f_m) إنها متقاربة نحو f في $D(\Omega)$ إذا

وجد متراص K محتوي في Ω بحيث يكون :

$$(1) \quad f_m \in D_K(\Omega) \text{ لكل عدد طبيعي } m \text{ و } f \in D_K(\Omega),$$

$$(2) \quad D^\alpha f_m \text{ متقاربة بانتظام على } K \text{ نحو } D^\alpha f, \text{ وذلك مهما كان}$$

$\alpha \in \mathbb{N}^n$ ، أي :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \limsup_{m \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| = 0.$$

2- نتائج أساسية

سنحتاج أحيانا إلى استخدام النتيجة التالية:

مبرهنة 1.2

ليكن $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ تطبيقا خطيا من $D(\Omega)$ نحو مجموعة الأعداد المركبة. يكون T مستمرا (متصلا) إذا وفقط إذا كان:
 لكل متتالية (f_m) متقاربة نحو f في $D(\Omega)$ فإن المتتالية المركبة $T(f_m)$ تتقارب نحو العدد $T(f)$.

ملاحظة

تعدّ هذه المبرهنة حالة خاصة من النتيجة التالية: ليكن m عددا طبيعيا. إن استمرار تطبيق خطي $T : D^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ يكافئ قيام أحد الشرطين (المتكافئين) :

(1) لكل متتالية دوال (f_i) متقاربة نحو f في $D^m(\Omega)$ فإن المتتالية المركبة $T(f_i)$ تتقارب نحو العدد $T(f)$.

(2) لكل متراس $K \supset \Omega$ فإن الاقتصار $T|_{D^m(\Omega)}$ مستمر.

سؤال: هل هناك دوال (غير الدالة الصفرية) تنتمي إلى الفضاء $D(\Omega)$ ؟
 نعم طبعا! وإلا ما الفائدة من إنشاء فضاء خال! إليك إثبات أن
 الفضاء $D(\Omega)$ غير خال: لتكن الدالة φ المعرفة على \mathbb{R} بـ :

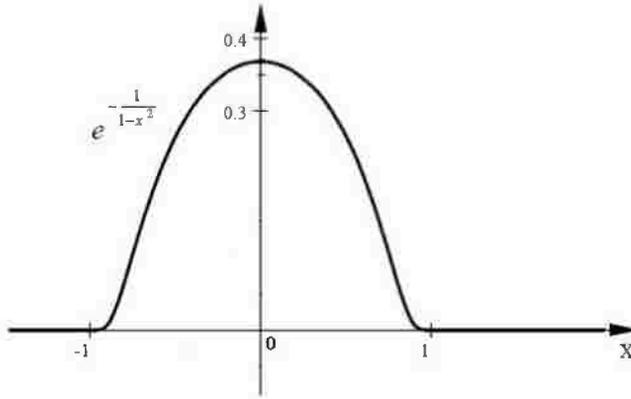
$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & x \in]-1, 1[, \\ 0, & x \notin]-1, 1[. \end{cases}$$

تمرين : تأكد من أن هذه الدالة تنتمي فعلا إلى $D(\mathbb{R})$.

لاحظ أنه إن أردت الحصول على مثل هذه الدالة في \mathbb{R}^n فيمكنك

استبدال x في الطرف الأيمن بـ : $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ، أي :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$



قد تعتقد أنه لا يوجد عنصر آخر في فضاء الدوال الاختبارية عدا الذي

أوردناه آنفا. نترك لك مهلة للتفكير ... وستجد الجواب بعد حين!

تعريف 2.2 (المتتالية الصاقلة Sequence of mollifiers)

نقول عن متتالية دوال (f_j) من $D(\mathbb{R}^n)$ إنها متتالية صاقلة إذا تمتعت

بالخواص الثلاث التالية لكل عدد طبيعي j :

$$(1) f_j \geq 0$$

$$(2) \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = 1$$

$$(3) \text{supp } f_j \subset B(0, \varepsilon_j) \text{ حيث تشير } B(0, \varepsilon_j) \text{ للكورة المتمركزة في}$$

0 وذات نصف القطر ε_j ، مع العلم أن ε_j يؤول إلى الصفر بمآل j إلى $+\infty$.

ملاحظة

مجموعة المتتاليات الصاقلة ليست خالية. لنثبت ذلك. خذ أي دالة φ

من $D(\mathbb{R}^n)$ (مثلا الدالة φ المعرفة آنفا) وضع :

$$f = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx}.$$

لدينا: $\text{supp } f \subset B(0,1)$.

لتكن الآن متتالية أعداد حقيقية موجبة (ε_j) تؤول إلى الصفر (مثلا

$$: \text{نضع } (\varepsilon_j = \frac{1}{j+1})$$

$$f_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right).$$

عندئذ نتأكد بسهولة (تمرين) من قيام الشروط الواردة في التعريف السابق، وذلك لكل j ، أي :

$$\text{supp } f_j \subset B(0, \varepsilon_j) \quad \text{و} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = 1 \quad \text{و} \quad f_j \geq 0$$

وهكذا نرى أنه كلما كانت لدينا دالة موجبة f تحقق :

$$f \in D(\mathbb{R}^n) \quad \text{و} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1 \quad \text{و} \quad \text{supp } f \subset B(0,1)$$

ب :

$$> \quad \forall \varepsilon > 0, \quad f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

تنتمي إلى $D(\mathbb{R}^n)$ وتتمتع بخواص المتتاليات الصاقلة. تسمى هذه الجماعة

أحيانا "تقريب الوحدة" "Approximation of unity".

سؤال: ما سبب هذه التسمية ("تقريب الوحدة")؟

عندما تكون f و g دالتين "ملائمتين" (أي تحققان شروطا معينة)

يمكننا تعريف ما يسمى بجداء التزاوج (المسمى أيضا جداء اللف، وجداء

الطي، وجداء الالتفاف) Convolution product، $f * g$ ، المعطى بـ:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy .$$

لدينا المبرهنة التالية :

مبرهنة 3.2

لتكن (φ_j) متتالية صاقلة و f دالة قابلة للمكاملة محليا على \mathbb{R}^n .
عندئذ تحقق المتتالية $f_j = \varphi_j * f$ (المسماة متتالية مصقولة لـ f):

$$(1) \text{ لكل } j : f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(2) إذا كان $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ فإن $f_j \xrightarrow{C^\infty(\mathbb{R}^n)} f$ ، وهذا يعني

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |D^\alpha f_j(x) - D^\alpha f(x)| = 0$$

العدد الطبيعي m .

(3) إذا كان $f \in D(\mathbb{R}^n)$ فإن :

$$f_j \xrightarrow{D(\mathbb{R}^n)} f .$$

(4) إذا كان $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $1 \leq p < +\infty$ فإن :

$$f_j \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)} f$$

حيث يرمز $L^p(\mathbb{R}^n)$ لفضاء لوبيغ² Lebesgue المعروف.

وكأن لدينا في كل حالة من حالات التقارب الثلاث الأخيرة تقاربا من

الشكل :

$$\varphi_j * f \longrightarrow \delta * f$$

حيث يمثل δ عنصر الوحدة (العنصر الحيادي) بالنسبة لعملية جداء التزاوج.

سنرى ما هو هذا العنصر δ في الفصل الثاني!

² هنري لوبيغ (1875 - 1941) رياضي فرنسي.

نستعرض فيما يلي بعض المبرهنات التي نستعين بها من حين إلى آخر.

مبرهنة 4.2 (المتتاليات المعقدة أو المستفيضة Exhaustive sequence)

ليكن Ω جزءا مفتوحا من \mathbb{R}^n . توجد دوما متتالية "معمّقة" من المتراسات (K_j) اتحادها يساوي Ω ، أي متتالية متراسات (K_j) تحقق :

$$(1) \text{ لكل عدد طبيعي } j : K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1} \text{ أي } K_j \subset \subset K_{j+1}$$

حيث يرمز $\overset{\circ}{K}_j$ لداخلية K_j (أي أكبر جزء مفتوح من K_j).

$$(2) \Omega = \bigcup_j K_j$$

البرهان

♦ أولا : إذا كان $\Omega = \mathbb{R}^n$ فيكفي اعتبار $K_j = B(0, j)$ حيث ترمز

$B(0, j)$ إلى الكرة المتمركزة في 0 وذات نصف القطر j .

♦ ثانيا : إذا كان $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ فإننا نضع لكل عدد طبيعي $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_j = B(0, j) \cap A_j \quad \text{و} \quad A_j = \left\{ x \in \Omega, \quad d(x, \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} \Omega) > \frac{1}{j} \right\}$$

حيث يشير $d(x, \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} \Omega)$ للمسافة الفاصلة بين العنصر x ومتممة Ω في \mathbb{R}^n . ثم نلاحظ أن المجموعات $(A_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ و $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ تتمتع بالخواص التالية التي

يمكن التأكد منها بسهولة لكل عدد طبيعي $j \in \mathbb{N}^*$:

• A_j مجموعة مفتوحة (فهي صورة عكسية لمفتوح عبر تطبيق

مستمر) وكذلك Ω_j .

• $A_j \subset A_{j+1}$

• $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega$. لاحظ أن :

$$\overline{\Omega_j} = \overline{B(0, j) \cap A_j} \subset \overline{B(0, j) \cap A_j} \subset B(0, j+1) \cap A_{j+1} = \Omega_{j+1}.$$

• $\overline{\Omega_j}$ متراس (لأنه محتوى في $\overline{B(0, j)}$).

ولذا يكفي وضع $K_j = \overline{\Omega_j}$ لأن ذلك يعطي $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ ، إضافة إلى المساواة $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{\Omega_j}$ (تأكد من ذلك). □

ملاحظة

تؤدي صحة هذه المبرهنة إلى وجود متتالية "معمقة" من المفتوحات، أي متتالية مفتوحات (Ω_j) تحقق الشروط :

$$(1) \text{ الملاصقة } \overline{\Omega_j} \text{ متراسة لكل عدد طبيعي } j,$$

$$(2) \overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1} \text{ لكل عدد طبيعي } j,$$

$$(3) \Omega = \bigcup_j \Omega_j.$$

يكفي وضع $\Omega_j = \overset{\circ}{K}_j$ في المبرهنة السابقة. لاحظ حينئذ أن $\overline{\Omega_j}$

$$\text{متراس وأن } \overline{\Omega_j} \subset K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1} = \Omega_{j+1}.$$

تمرين

ليكن K متراسا في جزء مفتوح $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. ولتكن (K_j) متتالية معمقة من المتراسات اتحادها Ω .

أثبت وجود عنصر K_{j_0} من هذه المتتالية بحيث $K \subset K_{j_0}$. (إرشاد :

لاحظ أن $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_j$ ، وهذا يعني أن $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_j$ تغطية مفتوحة للمتراس K).

مبرهنة 5.2 (توطئة أورشون Urysohn³)

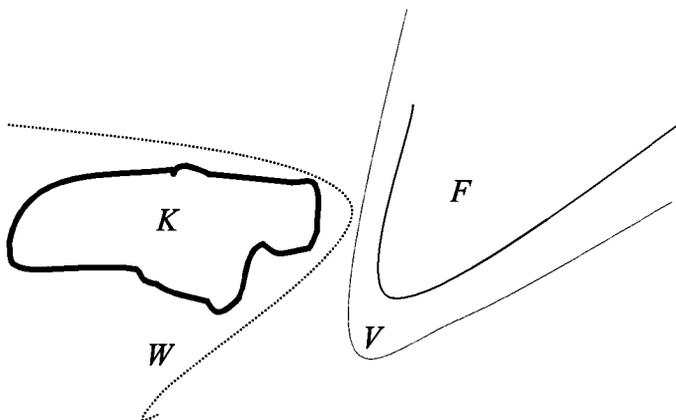
ليكن K و F جزأين غير متقاطعين من \mathbb{R}^n . نفرض أن K متراس وأن F مغلق. عندئذ يوجد $f \in D(\mathbb{R}^n)$ يتمتع بالخواص الثلاث التالية:

³ بول أورشون (1898 - 1924) رياضي روسي مات غرقاً.

$$(1) \quad 0 \leq f \leq 1,$$

$$(2) \quad f = 0 \text{ في جوار } V \perp F,$$

$$(3) \quad f = 1 \text{ في جوار } W \perp K.$$



سؤال: ما المانع في المبرهنة السابقة أن يكون $f = 0$ في جوار K و $f = 1$ في

جوار F ؟

نتيجة 6.2

ليكن Ω جزءا مفتوحا من \mathbb{R}^n و K متراصا من Ω . عندئذ يوجد

$$f \in D(\mathbb{R}^n) \text{ بحيث:}$$

$$(1) \quad 0 \leq f \leq 1,$$

$$(2) \quad f = 1 \text{ في جوار (يمكن اختياره متراصا) } K.$$

البرهان

نضع $F = \mathbb{C}_\Omega$ ونعتبر متتالية معمّقة من المتراسات (K_j) اتحادها

يساوي Ω . يوجد K_{j_0} بحيث $K \subset K_{j_0} \subset \overset{\circ}{K}_{j_0+1} \subset K_{j_0+1}$. بتطبيق المبرهنة

السابقة على F و K_{j_0+1} يتبيّن وجود φ من $D(\mathbb{R}^n)$ وجوار $V \perp F$ بحيث :

$0 \leq \varphi \leq 1$ و $\varphi|_V = 0$ و φ تساوي 1 في جوار لـ K_{j_0+1} . ومن ثم فإن $\varphi \in D(\Omega)$
و $\varphi = 1$ على K_{j_0+1} الذي يمثل جوارا متراصا لـ K . □

تعريف - مبرهنة 7.2 (المتتاليات الباترة Truncation sequence)

ليكن Ω مفتوحا من \mathbb{R}^n . نعتبر متتالية معمّقة (Ω_j) من المجموعات المفتوحات اتحادها Ω . نقول عن متتالية (f_j) من $D(\mathbb{R}^n)$ إنها متتالية باترة على Ω إذا تحقق الشرطان التاليان لكل j :

$$(1) \quad 0 \leq f_j \leq 1$$

$$(2) \quad f_j = 1 \text{ في جوار لـ } \bar{\Omega}_j.$$

هذه المتتالية موجودة دوماً، أي أن كل جزء مفتوح من \mathbb{R}^n يقبل متتالية باترة.

البرهان

المتتالية المعمّقة (Ω_j) موجودة حسب المبرهنة 4.2 وملاحظتها. نطبّق بعد ذلك النتيجة 6.2 على $\bar{\Omega}_j$. واصل البرهان. □

8.2 توطئة

ليكن K متراصا محتوي في اتحاد عدد منته N من المفتوحات $(\Omega_i)_{i=1, \dots, N}$. عندئذ توجد متراسات $(K_i)_{i=1, \dots, N}$ بحيث:

$$K_i \subset \Omega_i \text{ لكل } i = 1, \dots, N \text{ و } K \subset \bigcup_{i=1}^N K_i.$$

البرهان

نعلم أنه توجد متتالية معمّقة من المفتوحات $(M_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$ تغطي Ω_i

وذلك لكل عدد طبيعي $i = 1, \dots, N$. ومن ثمّ: $K \subset \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \bigcup_{\substack{i=1, \dots, N \\ j \in \mathbb{N}}} M_{ij}$ ولما

كان K متراسا فإنه يوجد عدد منته من المجموعات $(M_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$ تغطي المتراس K . نرسم لهذه التغطية بـ $(A_l)_{l=1, \dots, p}$. لاحظ أن كل $\overline{A_l}$ متراس لأنه يساوي عنصر M_{i_0, j_0} من $(M_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$. ومن ثم $\overline{A_l} = \overline{M_{i_0, j_0}} \subset \Omega_{i_0}$ مع العلم أن $\overline{M_{i_0, j_0}}$ متراس لأن $(M_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$ متتالية معمقة من المفتوحات.

المطلوب إنهاء البرهان (لاحظ تداخل عناصر المتتالية $(M_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$)

لكل $i = 1, \dots, N$ ، وأن المجموعة الخالية متراسة في (\mathbb{R}^n) . □

مبرهنة 9.2 (تجزئة الوحدة Partition of unity)

ليكن K متراسا محتوي في اتحاد عدد منته من المفتوحات

$$(\Omega_j)_{j=1, \dots, N}$$

عندئذ توجد دوال $(f_j)_{j=1, \dots, N}$ تحقق الشروط الثلاثة:

$$(1) \quad f_j \in D(\Omega_j)$$

$$(2) \quad 0 \leq f_j \leq 1$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^N f_j = 1 \text{ بجوار } K.$$

البرهان

يعتمد هذا البرهان على التوطئة السابقة وتوطئة أورشون (المبرهنة

5.2). يأتي من التوطئة السابقة وجود متراسات $(K_j)_{j=1, \dots, N}$ تحقق:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_j \subset \Omega_j, \quad \forall j = 1, \dots, N, \\ K \subset \bigcup_{j=1}^N K_j. \end{array} \right.$$

ومن ثم نستنتج بالاستناد إلى توطئة أورشون (مطبقة على $\Omega_j \supset K_j$) وجود

دوال $(\psi_j)_{j=1, \dots, N}$ بحيث:

$$\psi_j \in D(\Omega_j) \text{ و } 0 \leq \psi_j \leq 1 \text{ و } \psi_j = 1 \text{ على جوار } K_j$$

وذلك مهما كان z المحصور بين 1 و N . وبالتالي يوجد جوار V (مثلا $V = \bigcup_{j=1}^N K'_j$) بحيث :

$$\forall x \in V, \quad \sum_{j=1}^N \psi_j(x) > 0.$$

ومن جهة أخرى، توجد دالة θ تنتمي إلى $D(V)$ بحيث تكون مساوية

لـ 1 في جوار $W \perp K$ (حسب توطئة أورشون). نضع الآن :

$$\psi_0(x) = 1 - \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} V, \\ 0, & x \in W, \end{cases}$$

$$\forall j = 1, \dots, N, \quad \varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{j=0}^N \psi_j} \in D(\Omega_j).$$

بعد ذلك يسهل التأكد من قيام الخاصيتين :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{j=0}^N \psi_j(x) > 0,$$

$$\forall x \in W^{\bar{}} \quad \sum_{j=1}^N \varphi_j \frac{\sum_{j=1}^N \psi_j}{\sum_{j=0}^N \psi_j} = 1.$$

ومنه المطلوب. \square

هناك نص آخر لتجزئة الوحدة أعمّ من السابق، وهو :

تعريف - مبرهنة 10.2 (تجزئة الوحدة المعممة)

❖ لتكن $(U_i)_{i \in I}$ تغطية مفتوحة لفتوح $\Omega \supset \mathbb{R}^n$ (حيث I مجموعة كيفية، يمكنها أن تكون غير قابلة للعد).

نسمي تجزئة للوحدة من الصنف C^∞ متعلقة بالتغطية $(U_i)_{i \in I}$ لـ Ω

كل جماعة دوال $(g_i)_{i \in I}$ تتمتع بالخواص التالية :

$$(1) \quad g_i \in D(U_i) \text{ لكل دليل } i \text{ ينتمي إلى } I,$$

$$(2) \quad 0 \leq g_i \leq 1 \text{ لكل دليل } i \text{ ينتمي إلى } I,$$

(3) لكل متراس $\Omega \supset K$ فكل الدوال $(g_i)_{i \in I}$ منعومة على K

باستثناء عدد منته منها،

$$\forall x \in \Omega, \quad \sum_{i \in I} g_i(x) = 1 \quad (4)$$

♦ ليكن مفتوح $\Omega \supset \mathbb{R}^n$ و $(U_i)_{i \in I}$ تغطية مفتوحة له. توجد دوما

تجزئة للوحدة من الصنف C^∞ متعلقة بالتغطية $(U_i)_{i \in I}$ لـ Ω .

ملاحظة

إن الشرط $\sum_{i \in I} g_i(x) = 1$ الوارد ضمن الخواص المطلوبة في تعريف

تجزئة الوحدة لا يحتاج إلى إثبات وجود المجموع، ذلك أن الخاصية الثالثة تنص

على أن القيم $(g_i(x))_{i \in I}$ منعومة باستثناء عدد منته منها. ومن ثمّ فالمجموع

المعتبر في $\sum_{i \in I} g_i(x) = 1$ مجموع عدد منته من الحدود لكل $x \in \Omega$.

3- فريشي فضاءات

نستعرض هنا بإيجاز تعريف فضاءات فريشيه لأنها عماد طولوجيا

فضاء الدوال الاختبارية $D(\Omega)$.

⁴ موريس فريشيه (1878 - 1973). رياضي فرنسي.

تعريف 1.3

ليكن E فضاء خطيا (يقال أيضا شعاعيا أو متجهيا) على مجموعة الأعداد الحقيقية أو المركبة، التي نرمز إليها بـ IK .
 (1) نقول عن تطبيق p من E نحو \mathbb{R} إنه نصف نظيم (semi-norm) إذا حقق الشرطين:

$$\forall \lambda \in IK, \forall x \in E, p(\lambda x) = |\lambda| p(x),$$

$$\forall x \in E, \forall y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

(2) نسمي فضاء محدبًا محليًا كل فضاء خطي طوبولوجي عنصره 0 يتمتع بأساس جوارات محدبة.

(3) نسمي فضاء محدبًا محليًا وقابلًا لمسافة كل فضاء خطي مزود بمتتالية أنصاف نظيمات (p_j) متزايدة (أي $p_j \leq p_{j+1}$ $\forall x \in E, \forall j \in \mathbb{N}$) بحيث:

$$(\forall j \in \mathbb{N}, p_j(f) = 0) \Leftrightarrow f = 0.$$

ملاحظة

لاحظ أنه يمكن الحصول على متتالية أنصاف نظيمات متزايدة (q_j) انطلاقًا من أية متتالية أنصاف نظيمات (p_j) إذ يكفي أن نضع $q_j = \sum_{k \leq j} p_k$.

سؤال: ما الفائدة من ذكر وجود متتالية أنصاف نظيمات في التعريف

الثالث؟

الجواب: هذه المتتالية هي التي نعرّف بها طوبولوجيا على الفضاء الخطي المعتبر فيصبح فضاء خطيا طوبولوجيا.

نتيجة 2.3

لتكن (α_j) متتالية أعداد حقيقية موجبة بحيث تكون السلسلة $\sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j$ متقاربة. وليكن E فضاء محدبًا محليًا وقابلًا للمسافة. نرمز بـ (p_j) لأنصاف النظميات المزود بها هذا الفضاء. إن التطبيق $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ المعرف بالعلاقة التالية مسافة على E :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad d(f, g) = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \min(1, p_j(f - g)).$$

البرهان

إن افتراض $d(f, g) = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \min(1, p_j(f - g)) = 0$ يؤدي إلى :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \min(1, p_j(f - g)) = 0$$

لأن كل حدود السلسلة $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \min(1, p_j(f - g))$ موجبة. ومنه :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad p_j(f - g) = 0.$$

وهذا يعني، حسب الفرع الثالث، من التعريف السابق أن $f = g$.

من السهل التأكد من بقية خواص النظميات. □

ملاحظة

يمكن إثبات أن استبدال متتالية الأعداد الحقيقية (α_j) بمتتالية موجبة أخرى يعطي مسافة مكافئة للمسافة d .

والأمر كذلك عندما نستبدل متتالية أنصاف النظميات (p_j) بمتتالية

أخرى (q_j) مكافئة لها، أي بحيث

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : p_j \leq C q_k, \\ \forall j \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists C' > 0 : q_j \leq C' p_k. \end{array} \right.$$

تعريف 3.3 (فضاء فريشييه)

نقول عن فضاء محدب محليا وقابل لمسافة ومزود بالطوبولوجيا المعرفة بالمسافة d (الواردة في النتيجة 2.3) إنه فضاء فريشييه إن كان فضاء تاما.

تمرين

أثبت تكافؤ القضييتين الآتيتين :

(أ) (x_n) متتالية متقاربة في فضاء فريشييه نحو x .

(ب) $\forall j \in \mathbb{N}, \lim_n p_j(x_n - x) = 0$

حيث ترمز (p_j) لأنصاف النظميات المزود بها فضاء فريشييه.

إرشاد : لإثبات أن العلاقة :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \lim_n p_j(x_n - x) = 0$$

تستلزم : $\lim_n \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \min(1, p_j(x_n - x)) = 0$ نكتب أن السلسلة $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j$

متقاربة : ليكن $0 < \varepsilon$. يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث $\sum_{j \geq n_0} \alpha_j < \varepsilon$. ومنه :

$$\sum_{j \geq n_0} \alpha_j \min(1, p_j(x_n - x)) < \varepsilon$$

ولدينا حسب الفرض :

$$\forall j = 1, \dots, n_0 - 1, \exists n_j \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_j, p_j(x_n - x) < \varepsilon.$$

أتمم الحل.

مثال

الفضاء $D_K(\Omega)$ المزود بأنصاف النظميات (p_j) المعرفة بـ:

$$p_j(f) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq j} |D^\alpha f(x)|$$

فضاء فريشيه، (لاحظ أن p_j يمثل هنا نظيما وليس فقط نصف نظيم!).
دعنا نتأكد من أن $D_K(\Omega)$ فضاء تام. إن كانت المتتالية $(f_i)_i$
كوشية في $D_K(\Omega)$ فهذا يعني أن :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad p_j(f_i - f_k) \xrightarrow{i,k \rightarrow +\infty} 0$$

أي :

$$\sup_{x \in K, |\alpha| \leq j} |D^\alpha f_i(x) - D^\alpha f_k(x)| \xrightarrow{i,k \rightarrow +\infty} 0.$$

وبالتالي فإن المتتالية $(D^\alpha f_i)_i$ متقاربة بانتظام على K ، وذلك لكل دليل
متعدد α . ومن ثم نستنتج أن $D^\alpha f_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} D^\alpha f$ لما $f_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} f$.
وهكذا وجدنا عنصرا f ينتمي إلى $D_K(\Omega)$ يحقق :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad p_j(f_i - f) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0,$$

وهي العلاقة التي تثبت تقارب المتتالية $(f_i)_i$ حسب التمرين السابق. وبذلك
يكون الفضاء $D_K(\Omega)$ تاما.

نهي هذا الفصل بمبرهنة تدعى "مبدأ المحدودية المنتظمة" Uniform
boundedness principle أو مبرهنة بناخ - شتاينهاوس، وهي من أشهر مبرهنات
التحليل الدالي، ولها استعمالاتها في نظرية التوزيعات.

مبرهنة 4.3 (بناخ - شتاينهاوس⁵ & Banach⁶)

ليكن E فضاءً فريشيا و F فضاءً محدبًا محليا وقابلا لمسافة.
ولتكن $L_n: E \rightarrow F$ متتالية تطبيقات خطية مستمرة. نفرض، لكل $f \in E$ ، أن
المتتالية $L_n(f)$ متقاربة في F نحو عنصر نرمز له بـ $L(f)$. عندئذ:

⁵ ستيفان بناخ (1892 - 1945). رياضي بولندي.

⁶ هيفو شتاينهاوس (1887 - 1972). رياضي بولندي.

(1) يكون التطبيق $L: E \rightarrow F$ الذي يلحق $f \in E$ بـ $L(f)$ خطيا ومستمرًا.

(2) لدينا الاستلزام : $f_n \xrightarrow{E} f \Leftrightarrow L(f_n) \xrightarrow{F} L(f)$.

4- تمارين

تمرين 1

تأكد من أن $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & : t > 0 \\ 0 & : t \leq 0 \end{cases}$$

من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$.

استنتج أن $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , |x| < 1, \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

ينتمي إلى $D(\mathbb{R}^n)$ حيث يرمز $|\cdot|$ للنظيم الأقليدي؛ وكذلك عناصر المتتالية

$$\varphi_j(x) = j \frac{\varphi(jx)}{\varphi(0)} . n = 1$$

تمرين 2

أثبت أن الدالة $\varphi_{a,r}$ المعرفة بـ :

$$\varphi_{a,r}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{r^2-|x-a|^2}} & , |x-a| < r, \\ 0 & : |x-a| \geq r, \end{cases}$$

حيث $0 < r$ و $a \in \mathbb{R}^n$ ، تنتمي إلى $D(\mathbb{R}^n)$ مع تعيين حاملها.

تمرين 3

لتكن الدالة φ المعرفة في التمرين 1.

(1) هل المتتاليتان (f_n) و (g_n) الموائيتان متقاربتان في $D(\mathbb{R})$:

$$\S g_n(x) = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \text{ و } f_n(x) = \frac{\varphi(x)}{n}$$

(2) نعتبر المتتالية (φ_n) المعرفة بـ : $\varphi_n(x) = e^{-n} \varphi(nx)$ حيث $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة في $D(\mathbb{R})$.

(3) أدرس التقارب في $D(\mathbb{R})$ للمتتالية $(\psi_n)_{k \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ :

$$\psi_n(x) = (n-1)^k \varphi(nx)$$

تمرين 4

ليكن K متراسا من \mathbb{R}^n ، و $0 < \varepsilon$. أثبت وجود دالة $\varphi_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^n)$

تحقق:

$$\text{أ) } \varphi_\varepsilon \geq 0$$

$$\text{ب) } \varphi_\varepsilon(x) = 1 \text{ لكل } x \in K$$

$$\text{ج) } \text{supp } \varphi_\varepsilon \subset \bigcup_{x \in K} B(0, \varepsilon)$$

تمرين 5

لتكن $(K_j)_{j=1, \dots, p}$ متراسات في \mathbb{R}^n ، ولتكن $(f_j)_{j=1, \dots, p}$ دوالاً من

الصف $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. أثبت وجود $f \in D(\mathbb{R}^n)$ بحيث : $f(x) = f_j(x)$ بجوار

كل K_j .

