الفصل العاشر

المسائل التطورية غير الخطية

نتطرق في هذا الفصل إلى بعض المسائل التطورية غير الخطية، ونبيّن طرق حلها مستعملين في ذلك بعض الوسائل الحديثة من نظرية التحليل الدالي.

1- المسألة المجردة

نعرض فيما يلي المسألة المزمع مناقشتها:

ليكن V فضاء بناخيا وانعكاسيا قابلا للفصل وكثيفا في فضاء هيلبرتي H قابل للفصل بحيث $V \subset H \subset V'$، وذلك بغمس مستمر. وليكن $A : V \to V'$ مؤثرا غير خطي.

نعرّف الفضاء $L^q(0,T;W)$ ، حيث W فضاء بناخي و $1 \leq q \leq +\infty$ ، بأنه مجموعة الدوال

$$v:(0,T) \to W$$
$$t \mapsto v(t)$$

التي تحقق :

$$\|v\|_{L^q(0,T;W)} := \left(\int_0^T \|v(t)\|_W^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

عندما يكون $1 \leq q < +\infty$ ، و

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;W)} := ess\sup \|v(t)\|_W < +\infty$$

عندما يكون $q = +\infty$.

نلاحظ أن $L^q(0,T;W)$ ، المزوّد بالنظيم $\|\ .\ \|_{L^q(0,T;W)}$ فضاء بناخي مهما كان $1 \leq q \leq +\infty$.

تُعطى دالة $f \in L^{p'}(0,T;V')$ ودالة $u_0 \in H$. نودّ إيجاد دالة $u:[0,T] \to V$ تحقق المسألة :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

ملاحظة

إذا كان $u\in L^p\left(0,T;V\right)$ و $u'\in L^{p'}\left(0,T;V'\right)$ ، مع $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ ، فإن $u\in C\left(\left[0,T\right],H\right)$ (انظر المراجع [15]). سوف نستخدم فيما يلي $\|.\|$ للدلالة على النظيم في V و $|.|$ للدلالة على نظيم H.

مبرهنة 1.1

ليكن $A:V\to V'$ مؤثراً (غير خطي) محدوداً ورتيباً ونصف مستمر ويحقق :

$$\left\langle A\left(v\right),v\right\rangle \geq \alpha\|v\|_V^p\ ,\quad \forall v\in V \tag{2}$$

حيث $\alpha>0$ و $1<p<+\infty$. عندئذ، لكل $f\in L^{p'}\left(0,T;V\right)$ (مع $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$) و $u_0\in H$ ، تقبل المسألة (1) حلاً وحيداً $u\in L^p\left(0,T;V\right)$.

البرهان

نستعمل طريقة فادو- غليركين Faedo-Galerkin[1]. لما كان V قابلا للفصل فإنه يوجد أساس قابل للعد كثيف في V، لنرمز له بـ $\left(w_j\right)_{j\geq 1}$.

وليكن V_m الفضاء الجزئي المنتهي البعد والمولّد بـ $\left(w_j\right)_{j=1,\dots,m}$.

نبحث عن وجود دالة

[1] بوريس غليركين (1871- 1945)، رياضي روسي.

(3) $$u_m(t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)w_j$$

تحقق :

(4) $$\begin{cases}\langle u'_m(t),w_i\rangle+\langle A(u_m(t)),w_i\rangle=\langle f(t),w_i\rangle, & \forall i=1,\ldots,m,\\ u_m(0)=u_{0m}\end{cases}$$

حيث إن u_{0m} هو مسقط u_0 على الفضاء الجزئي V_m.

تضمن نظرية المعادلات التفاضلية العادية وجود حل محلي للمسألة (4)، أي أنه توجد دالة $u_m:[0,t_m]\to V_m$ تحقق (4) بحيث $0<t_m\le T$.
وباستغلال العلاقة (2) فإن (4) تعطي:

(5) $$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t\|u_m(s)\|^p\,ds\le\frac{1}{2}|u_0|^2+\int_0^t\|f(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V\,ds$$

وعند استخدام متباينة يونغ Young[2] نصل إلى :

(6) $$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_m(s)\|^p\,ds\le\frac{1}{2}|u_0|^2+\frac{1}{2\alpha}\int_0^T\|f(s)\|_{V'}^{p'}\,ds.$$

تمكننا العلاقة (6) من تمديد t_m إلى T لأن الطرف الأيمن لا يتعلق بالمتغير t. كما تبيّن أن :

(7) $$u_m\in L^\infty(0,T;H)\cap L^p(0,T;V).$$

وفضلا عن ذلك، يوجد ثابت $M>0$ بحيث :

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad \max\left(\|u_m\|_{L^p(0,T;V)},\|u_m\|_{L^\infty(0,T;W)}\right)\le M.$$

[2] وليم يونغ (1863- 1942) رياضي إنكليزي.

ومنه يمكننا استخراج متتالية جزئية (نرمز لها بـ u_k) تحقق (لاحظ أن A محدود):

$$(8)\qquad \begin{aligned} u_k &\xrightarrow{W} u \quad \text{in}\, L^p\left(0,T;V\right),\\ u_k &\xrightarrow{W^*} u \quad \text{in}\, L^\infty\left(0,T;H\right),\\ A\left(u_k\right) &\xrightarrow{W} \psi \quad \text{in}\, L^{p'}\left(0,T;V'\right),\end{aligned}$$

حيث يشير $\xrightarrow{W}$ إلى التقارب الضعيف، بينما يرمز $u_k \xrightarrow{W^*}$ للتقارب الضعيف نجميا (انظر المراجع [5] ، [6] ، [27]).

كما تحقق المتتالية الجزئية $\left(u_k\right)$:

$$(9)\qquad \left\langle u_k'\left(t\right), w_i\right\rangle + \left\langle A\left(u_k\left(t\right)\right), w_i\right\rangle = \left\langle f\left(t\right), w_i\right\rangle, \quad \forall k > i$$

وبتثبيت i وأخذ k إلى لانهاية نحصل على :

$$(10)\qquad \left\langle u'\left(t\right), w_i\right\rangle + \left\langle \psi(t), w_i\right\rangle = \left\langle f\left(t\right), w_i\right\rangle, \quad \forall i = 1,2,...$$

وهذا يستلزم أن

$$(11)\qquad u'\left(t\right) \overset{D'(0,T,V)}{=} -\psi\left(t\right) + f\left(t\right), \;\; 0 < t < T.$$

ومن ثمّ فإن $u' \in L^{p'}\left(0,T;V'\right)$. وباستخدام الملاحظة الواردة قبل هذه المبرهنة نحصل على $u \in C\left(\left[0,T\right],H\right)$. ومن ثمّ $u\left(0\right) = u_0$.

فيما يلي، نبيّن أن $\psi = A\left(u\right)$. ولهذا الغرض نعرّف، لكل $v \in L^p\left(0,T,V\right)$ ، المتتالية الحقيقية $\left(X_k\right)$:

$$(12)\qquad X_k = \int_0^T \left\langle A\left(u_k\left(t\right)\right) - A\left(v\left(t\right)\right), u_k\left(t\right) - v\left(t\right)\right\rangle dt.$$

من الواضح أن رتابة A تستلزم أن $X_k \geq 0$.

نعوّض w_i بـ u_k في (10)، ثم نكامل على $[0,T]$ فنحصل على :

$$\int_0^T \langle A(u_k(t)),u_k(t)\rangle dt = \int_0^T \langle f(t),u_k(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_{0k}|^2 - \frac{1}{2}|u_k(T)|^2. \tag{13}$$

وبالتعويض في (12) يأتي :

$$X_k = \int_0^T \langle f(t),u_k(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_{0k}|^2 - \frac{1}{2}|u_k(T)|^2 - \int_0^T \langle A(u_k(t)),v(t)\rangle dt - \int_0^T \langle A(v(t)),u_k(t)-v(t)\rangle dt.$$

ومنه نستنتج :

$$0 \leq \lim\sup X_k \leq \int_0^T \langle f(t),u_k(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \int_0^T \langle \psi(t),v(t)\rangle dt - \int_0^T \langle A(v(t)),u_k(t)-v(t)\rangle dt.$$

كما تؤدي (11) إلى :

$$\int_0^T \langle f(t),u_k(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \int_0^T \langle \psi(t),u(t)\rangle dt .$$

وبدمج العلاقتين الأخيرتين نصل إلى :

$$\int_0^T \langle \psi(t) - A(v(t)),u(t)-v(t)\rangle dt \geq 0. \tag{14}$$

وعنـد أخـذ $v = u - \lambda w$ ، حيـث إن $\lambda > 0$ و $w \in L^p\left(0,T;V\right)$ والتعـويض في (14) يتضح أن : $\lambda \int_0^T \left\langle \psi(t) - A\left(u(t) - \lambda w(t)\right), w(t) \right\rangle dt \geq 0$. وبالتالي :

$$\int_0^T \left\langle \psi(t) - A\left(u(t) - \lambda w(t)\right),\ w(t) \right\rangle dt \geq 0.$$

نستغل نصف استمرار A ونجعل λ يؤول إلى الصفر فينتج :

$$\int_0^T \left\langle \psi(t) - A\left(u(t)\right), w(t) \right\rangle dt \geq 0, \quad \forall w \in L^p\left(0,T,V\right). \tag{15}$$

تؤدي العلاقة الأخيرة إلى المساواة $\psi = A\left(u\right)$ ، وهو المطلوب.

أما وحدانية الحل فتُثبت بنفس الكيفية المتبعة في المسألة الخطية (راجع إثبات المبرهنة 5.1 من الفصل التاسع).

2- تطبيقات

تطبيق 1

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء Γ وَ $p \geq 2$ عدداً حقيقياً معطى. نعتبر المسألة غير الخطية :

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f \text{ in } \Omega\times(0,T),\\ u=0 \text{ on } \Gamma\times[0,T],\ u(x,0)=u_0(x) \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

مبرهنة 1.2

نفرض أن

$$f\in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right),\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

وَ $u_0\in L^2(\Omega)$. عندئذ توجد دالة وحيدة $u\in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ تحقق (16).

البرهان

لإثبات المبرهنة يكفي التأكد من شروط المبرهنة 1.1. ولهذا الغرض نعتبر الفضاء $V=W_0^{1,p}(\Omega)$ مزوداً بالنظيم (المكافئ)

$$\forall v\in V,\ \|v\|=\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

كما نضع $H=L^2(\Omega)$. ولدينا $V'=W^{-1,p'}(\Omega)$ و $V\subset H\subset V'$ لأن $p\geq 2$. ومن جهة أخرى نعرّف $A:V\to V'$ كالتالي :

$$\langle A(u),v\rangle_{V'\times V}=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

وبالعودة إلى تطبيق 8.1 نرى أن A يحقق كل شروط المبرهنة 1.1.

ومنه نستنتج أن للمسألة (16) حلا $u\in L^p(0,T;V)$. أما وحدانية الحل فتأتي من كون A رتيبا تماماً.□

والآن نناقش وجود الحل تحت شروط أضعف من تلك التي فرضناها في المبرهنة 1.1.

مبرهنة 2.2

ليكن $A:V\to V'$ مؤثراً (غير خطي) محدوداً ورتيباً ونصف مستمر بحيث توجد ثوابت $0<\alpha$ ، $0<\beta$ ، $0<\lambda$ تحقق :

$$[v]+\lambda|v|\geq\beta\|v\|,\quad \forall v\in V$$

$$\left\langle A(v),v\right\rangle_{V'\times V}\geq\alpha[v]^p,\quad 1<p<+\infty$$

حيث يرمز $[.]$ لنصف نظيم على V.

عندئذ، لكل $f\in L^{p'}(0,T;V')$ و $u_0\in H$ ، تقبل المسألة (1) حلاً وحيداً $u\in L^p(0,T;V)$.

البرهان

بإعادة إثبات المبرهنة 1.1 فإن المتباينة (5) تأخذ الشكل :

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t[u_m(t)]^p\,ds\leq\frac{1}{2}|u_{0m}(t)|^2+\int_0^t\|f(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V\,ds \tag{17}$$

وعند استخدام شروط المبرهنة، نقدّر الحد الأيسر من (17) كالآتي:

$$\frac{1}{2}\left|u_{0m}(t)\right|^2+\int_0^t\left\|f(s)\right\|_{V'}\left\|u_m(s)\right\|_V ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|u_0\right|^2+\left(\int_0^t\left\|f(s)\right\|_{V'}^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^t\left\|u_m(s)\right\|_V^{p} ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|u_0\right|^2+c_1\left(\int_0^t\left\|f(s)\right\|_{V'}^{p'} ds\right)\left[\left(\int_0^t\left[u_m(s)\right]^p ds\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^t\left|u_m(s)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left|u_0\right|^2+c_1\left[\frac{\alpha}{2c_1}\int_0^t\left[u_m(s)\right]^p ds+c_\alpha\int_0^t\left\|f(s)\right\|_{V'}^{p'} ds\right]$$

$$+\frac{1}{2}c_1\left(\int_0^t\left\|f(s)\right\|_{V'}^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left[1+\left(\int_0^t\left|u_m(s)\right|^p ds\right)^{\frac{2}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}\int_0^t\left[u_m(s)\right]^p ds+c_2\left(\int_0^t\left|u_m(s)\right|^p ds\right)^{\frac{2}{p}}+c_3$$

حيث :

$$c_3=\frac{1}{2}\left|u_0\right|^2+c_1c_\alpha\int_0^T\left\|f(s)\right\|_{V'}^{p'} ds+\frac{1}{2}c_1\left(\int_0^T\left\|f(s)\right\|_{V'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$c_2=\frac{1}{2}c_1\left(\int_0^T\left\|f(s)\right\|_{V'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

وعليه فإن (17) تستلزم :

$$|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t[u_m(s)]^p\,ds\le c_4+c_4\left(\int_0^t|u_m(s)|^p\,ds\right)^{\frac{2}{p}} \tag{18}$$

حيث c_4 ثابت موجب. وهذا بدوره يؤدي إلى :

$$|u_m(t)|^2\le c_4+c_4\left(\int_0^t|u_m(t)|^p\,ds\right)^{\frac{2}{p}}.$$

وبرفع الطرفين إلى القوة $\frac{p}{2}$ واستخدام متباينة مينكوفسكي فإنه يتضح وجود ثابت موجب c_5 بحيث

$$|u_m(t)|^p\le c_5+c_5\int_0^t|u_m(t)|^p\,ds.$$

وباستعمال متراجحة غرانوول Gronwall [3] يتضح وجود ثابت c_6 بحيث :

$$|u_m(t)|\le c_6,\quad \forall 0\le t\le T. \tag{19}$$

وبدمج (18) وَ (19) فإنه يتأكد وجود ثابت موجب $c_7>0$ بحيث :

$$\int_0^t|u_m(s)|^p\,ds\le c_7,\quad \forall 0\le t\le T.$$

أخيراً نستخدم شروط المبرهنة لنرى وجود ثابت موجب c_8 يحقق :

$$\int_0^t\|u_m(s)\|^p\,ds\le c_8,\quad \forall 0\le t\le T.$$

ثم نواصل البرهان تماماً كما هو في إثبات المبرهنة 1.1. ومنه يأتي المطلوب.□

---

[3] توماس غرانوول (1877- 1932) رياضي سويدي.

تطبيق 2

نعتبر كما سبق مجالاً Ω محدوداً من $\mathbb{R}^n$ حدوده ملساء Γ وَ $p>2$ عدداً حقيقياً معطى. نعتبر المسألة غير الخطية

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-div\left(\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla u\right)=f & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0 & \text{on } \Gamma\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

حيث إن η هو متجه الناظم الخارجي على الحدود Γ.

مبرهنة 3.2

نفرض أن $f\in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$ وَ $u_0\in L^2(\Omega)$. عندئذ توجد دالة وحيدة $u\in L^p\left(0,T;W^{1,p}(\Omega)\right)$ تحقق (20).

البرهان

نضع $H=L^2(\Omega)$ ونزوّد $V=W^{1,p}(\Omega)$ بنصف النظيم $[v]=\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$، ونعرّف المؤثر (غير الخطي) A بـ :

$$Av=-div\left(\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\right).$$

يمكننا إثبات أن A محدود، ونصف مستمر بنفس الكيفية الواردة في التطبيق 8.1.

نودّ أن نبيّن الآن بأن A رتيب. ولهذا الغرض نعتبر $u,v\in V$ ونكتب :

$$\begin{aligned}
&\langle A(u)-A(v),u-v\rangle_{V'V} \\
&=\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)(\nabla u-\nabla v) \\
&=\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p}+|\nabla v|^{p}-\left(|\nabla u|^{p-2}+|\nabla v|^{p-2}\right)\nabla u.\nabla v\right] \\
&\geq \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p}+|\nabla v|^{p}-|\nabla v|^{p-1}|\nabla u|-|\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\right] \\
&=\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-1}\left(|\nabla u|-|\nabla v|\right)+|\nabla v|^{p-1}\left(|\nabla v|-|\nabla u|\right)\right] \\
&=\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-1}-|\nabla v|^{p-1}\right)(\nabla u-\nabla v)\geq 0.
\end{aligned}$$

وذلك باستخدام المتباينة :

$$\left(a^{p-1}-b^{p-1}\right)(a-b)\geq 0,\quad \forall a,b\geq 0.$$

وهذا ما يبيّن أن A رتيب.

يبقى الآن التحقق من أن نصف النظيم $[\,.\,]$ يتمتع بالشروط المطلوبة.

نبدأ بالقسرية. إنها تأتي من :

$$\langle A(v),v\rangle_{V',V}=\int_\Omega |\nabla u|^{p}.$$

أما بالنسبة للشرط

$$[v]+\lambda|v|\geq\beta\|v\|$$

فإننا نلاحظ بمراعاة احتواءات فضاءات سوبولاف وجود $c_0>0$ يحقق :

$$\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c_0\left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right), \quad \forall v \in V \tag{21}$$

حيث $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

ولما كان $2 < p < p^*$ فإن استعمال الاستقطاب - أو الاستكمال Interpolation- (انظر المراجع [1] ، [6] ، [27]) يؤدي إلى وجود ثابت $c > 0$ بحيث :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon \|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \frac{c}{\varepsilon}\|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{22}$$

وبدمج العلاقتين (21) و (22) نحصل على :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{c}{\varepsilon}\|v\|_{L^2(\Omega)} + c_0\varepsilon\left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right)$$

وباختيار $\varepsilon = \frac{1}{2c_0}$ نجد ثابتا موجبا c_1 يحقق :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le c_1\left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

وبإضافة $\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$ إلى الطرفين نصل إلى المطلوب. وهذا يعني أن للمسألة (2.20) حلا وحيدا $u \in L^p\left(0,T;W^{1,p}(\Omega)\right)$.□

وبإعادة خطوات مشابهة، يمكننا إثبات المبرهنة التالية باعتبار المسألة

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{23}$$

مبرهنة 4.2

ليكن $A:V\to V'$ مؤثراً (غير خطي) محدوداً رتيباً ونصف مستمر ويحقق :

$$\left\langle A(v),v\right\rangle \geq \alpha \|v\|_V^p ,\quad \forall v\in V$$

حيث $\alpha>0$ و $1<p<+\infty$. عندئذ، لكل $u_0\in H$ و $f\in L^{p'}(0,T;V)$ (مع $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$)، تقبل المسألة (23) حلاً وحيداً $u\in L^p(0,T;V)$.

3- تمارين

تمرين 1

تُعطى المسألة

$$\begin{cases} u_t-div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)+u=f, & \text{in } \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

حيث

$$\begin{cases} f\in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}\left(\mathbb{R}^n\right)\right), & p\geq 2 \\ u_0\in L^2\left(\mathbb{R}^n\right), \end{cases}$$

و p' مرافق p.

أثبت أن للمسألة حلاً وحيداً.

تمرين 2

تُعطى المسألة

$$\begin{cases} u_t - div\left(\left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u\right) = f, \text{ in } \Omega, \quad t > 0 \\ u = 0, \text{ on } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \text{ in } \Omega, \end{cases}$$

حيث Ω مجال غير محدد من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء وَ f ، u_0 ، p تحقق نفس شروط التمرين 1.

أ) بيّن أن المسألة تقبل حلاً وحيداً.

ب) ماذا لو استبدِل شرط ديرشلت بشروط نيومان؟

تمرين 3

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء وَ p و q عددين حقيقيين بحيث $\min(p,q) > 2$. تُعطى الدالتان $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$. بيّن أن للمسألة

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + (u - v) = 0 \text{ in } \Omega, \\ v_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^{q-2} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + (u - v) = 0 \text{ in } \Omega, \\ u = v = 0, \ \text{ on } \partial\Omega, \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) = 0, \ \ v(x,0) = v_0(x), \ \text{ in } \Omega \end{cases}$$

حلاً وحيداً.

تمرين 4

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء. نفرض أن :

$$\begin{cases} f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ u_0 \in w_0^{1,p}(\Omega), \\ u_1 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

حيث إن $p \geq 2$.

استخدم طريقة غليركين لتبيّن أن للمسألة

$$\begin{cases} u_{tt} - div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = f, \ \text{ in } \Omega, \ \ t > 0, \\ u = 0, \ \text{ on } \partial\Omega, \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x), \ \text{ in } \Omega \end{cases}$$

حلاً وحيداً:

$$u\in C\left(\left[0,T\right);W_0^{1,p}\left(\Omega\right)\right)\cap C^1\left(\left[0,T\right);L^2\left(\Omega\right)\right).$$

تمرين 5

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء. تُعطى الثوابت الحقيقية $\left(\alpha_i\right)_{i=1,2,\dots,n}$ والدوال

$$u_0\in H_0^1\left(\Omega\right),\ \ u_1\in L^2\left(\Omega\right),\ \ v_0\in W_0^{1,p}\left(\Omega\right),\ \ p\geq 2.$$

بيّن أن للمسألة التالية حلاً وحيداً :

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_i\frac{\partial v}{\partial x_i}=0, \ \text{ in } \Omega,\ \ t>0, \\ v_t-div\left(\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\right)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial t}=0, \ \text{ in } \Omega,\ \ t>0, \\ u=v=0, \ \text{ on } \partial\Omega,\ \ t\geq 0, \\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right)=0,\ \ u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right),\ \ v\left(x,0\right)=v_0\left(x\right),\ \text{ in } \Omega \end{cases}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

أبرز رموز

الرمز	المعنى
$C^{\infty}(\Omega)$ أو $E(\Omega)$	فضاء الدوال القابلة للاشتقاق نهائيا المعرفة من الجزء المفتوح Ω إلى $\mathbb{C}$.
$C^{m}(\Omega)$	فضاء الدوال من الجزء المفتوح Ω إلى $\mathbb{C}$ القابلة للاشتقاق حتى الرتبة m ومشتقاتها من هذه الرتبة مستمرة .
$C_b^{m}(\mathbb{R}^n)$	فضاء الدوال القابلة للاشتقاق حتى الرتبة m ومشتقاتها محدودة ومستمرة.
$C^m\left(\left[0,+\infty\right);V\right)$	فضاء الدوال $f:\left[0,+\infty\right)\to V$ من الصنف C^m.
$C^{\alpha}(\Omega)$	فضاء هولدر Hölder حيث $0<\alpha<1$.
$D(\Omega)$ أو $C_0^{\infty}(\Omega)$	فضاء الدوال المتراصة الحوامل على Ω المنتمية إلى الفضاء $C^{\infty}(\Omega)$.
$D'(\Omega)$	فضاء التوزيعات على Ω ، وهو ثنوي $D(\Omega)$.
$D_K(\Omega)$	فضاء الدوال المنتمية إلى $D(\Omega)$ ذات الحوامل المحتواة في المتراص $K\subset\Omega$.
δ و δ_a	توزيع ديراك Dirac.
Δ	مؤثر لابلاس Laplace.
$E'(\Omega)$	فضاء التوزيعات المتراصة الحامل على Ω ، المطابق لثنوي $E(\Omega)$.
$f*g$	الجداء التزاوجي للعنصرين (دالتين أو توزيعين) f و g .
$f\otimes g$	الجداء المؤتري للعنصرين (دالتين أو توزيعين) f و g .
$\hat{f}$ أو $F(f)$	تحويل فوريي Fourier لـ f .

H	دالة هيفسايد Heaviside.
$H^s(\Omega)$	فضاء سوبولاف Sobolev المبني على فضاء لوبيغ $L^2(\Omega)$.
$L^1_{loc}(\Omega)$	فضاء الدوال القابلة للمكاملة محليا.
$L^p(\mathbb{R}^n)$	فضاءات لوبيغ Lebesgue.
N_p	أنصاف النظيمات المعرّفة لطبولوجيا $S(\mathbb{R}^n)$.
$O_M(\mathbb{R}^n)$	فضاء الدوال البطيئة التناقص.
$pv\frac{1}{x}$	توزيع القيمة الرئيسية لكوشي Cauchy principal value.
$p_{K,m}(\varphi)$	$p_{K,m}(\varphi) = \sup_{x\in K,\ \|\alpha\|\le m} \left\|D^\alpha \varphi(x)\right\|$ حيث عموما $\varphi \in D_K(\Omega)$.
supp$T$	حامل التوزيع T.
$S(\mathbb{R}^n)$	فضاء الدوال السريعة التناقص (فضاء شوارتز).
$S'(\mathbb{R}^n)$	فضاء التوزيعات المعتدلة.
$T_{\|U}$	اقتصار التوزيع T على المفتوح U.
$\tau_a T$	انسحاب التوزيع T بالمتجه a.
$\check{T}$	نظير التوزيع T.
V'	ثنوي الفضاء V.
$W_p^s(\Omega)$ أو $W^{s,p}(\Omega)$	فضاء سوبولاف Sobolev المبني على فضاء لوبيغ $L^p(\Omega)$.
$u_m \xrightarrow{W} u$	التقارب الضعيف لـ (u_m) نحو u.
∇u	تدرج الدالة u / انحدار الدالة u

دليل المصطلحات

يقدم الجدول التالي أهم المصطلحات وأبرز الأماكن التي وردت فيها. وقد أشرنا لمكان الورود برقم الفصل والبند (مثال : 3/7 يعني الفصل 7/البند 3)

المصطلح بالعربية	ف/ب	المصطلح بالأنكليزية
أثر	2/6	Trace
استقطاب (استكمال)	2/10	Interpolation
إسقاط	2/6 -1/3	Projection
اقتصار توزيع	4/2	Restriction of a distribution
القيمة الرئيسية لكوشي	1/2	Cauchy principal value
انسحاب توزيع	3/4 -4/2	Translation of a distribution
بتر	2/1	Truncation
تجزئة الوحدة	2/1	Partition of unity
تحدب	2/7	Convexity
تحويل فوريي	-4/5 -1/5 4 -9	Fourier transform
تزاوج توزيع مع دالة	2/4	Convolution of a distribution with a function
تزاوج توزيعين	3/4	Convolution of two distributions
تقريب الوحدة	2/1	Approximation of unity
تكامل غاوس	1/5	Gauss integral
تناظر	2/7	Symmetry

Distribution	1/2	توزيع
Harmonic distribution	5/5 -5/4	توزيع توافقي
Dirac distribution	-3/4 -1/2 -3/5 -5/4 4/5	توزيع ديراك
Tempered distribution	3/5	توزيع معتدل
Uryshon lemma	2/1	توطئة أورشون
Lax-Milgram Lemma	2/7	توطئة لاكس- ميلغرام
Duality	-5/2 -1/2 -1/7 -1/6 3/7	ثنوية
Convolution product	1/4 -2/1	جداء التزاوج
Product of a function by a distribution	4/2	جداء دالة في توزيع
Tensorial product		جداء موْتري
Resolvant of A	1/9	حالّة A
Support	1/1	حامل
Support of a distribution	5/2	حامل توزيع
Fundamental solution	5/4	حل أساسي
Weak solution	3/7	حل ضعيف
Test function	2/5 -1/1	دالة اختبارية
Rapidly decreasing function	2/5	دالة سريعة التناقص
Gamma function	5/4	دالة غاما
Caratheodory function	2/8	دالة كرثيودورية
Heaviside function	-3/4 -3/2 5/4	دالة هيفسايد

Self-Ajoint	3/9	ذاتية القرين
Order of a distribution	1/2	رتبة توزيع
Pseudo-monotone	1/8	شبه الرتابة
Dirichlet condition – Neumann condition	3/7	شرط دريشلت - شرط نِيُومان
Bilinear form	2/7	شكل ثنائي الخطية
Yosida Regularizers	1/9	صاقلات يوشيدا
Regularity	2/9 -2/6	صقالة (ملوسة)
Weak form	2/8 -3/7	صيغة ضعيفة
Truncation method of Stampacchia	4/9 -4/7	طريقة البتر لستانباكيا
Compactness method	2/8	طريقة التراص
Monotonicity method	1/8	طريقة الرتابة
Faedo-Galerkin method	1/10	طريقة فادو- غليركين
Sobolev embedding	4 -9 -2/6	غمس (احتواء) سوبولاف
Compact embedding	2/8	غمس متراص
Sobolev space	1/6 -1/3	فضاء سوبولاف
Fréchet space	3/1	فضاء فريشيه
Green formula	5/4	قانون غرين
Coercivity	-3/7 -2/7 -1/8 -4/7 2/10	قسرية
Radon measure	1/2	قياس رادون
Cauchy-Lipschitz-Picard	1/9	كوشي- ليبشيتز- بيكار

Maximum principle	-1/9 -4/7 4/9	مبدأ الأعظمية
Uniform boundedness principle or Banach-Steinhaus theorem	4/2 -3/1	مبدأ المحدودية المنتظمة أو مبرهنة بناخ- شتاينهاوس
Fixed point theorem	-2/7 -1/7 2/8 -1/8	مبرهنة النقطة الثابتة
Riesz representation theorem	1/7	مبرهنة تمثيل ريتز
Stampacchia' s theorem	2/7	مبرهنة ستانباكيا
Fubini's theorem	1/5	مبرهنة فوبيني
Dominated convergence theorem	2/8 -2/2	مبرهنة لوبيغ (التقارب المسقوف أو المهيمن)
Hille-Yosida Theorem	5/9 -1/9	مبرهنة هيل- يوشيدا
Truncation sequence	2/1	متتالية باترة
Sequence of mollifiers	2/1	متتالية صاقلة
Exhaustive sequence	2/4 -2/1	متتالية معمقة (مستفيضة)
Variational inequality	3/7	متراجحة تغيراتية
Convolutive sets	1/4	مجموعات متزاوجة
Boundedness	1/8	محدودية
Approximative problem	1/8	مسألة تقريبية
Variational Problems	2/7	مسائل تغيراتية
Derivative of a distribution	3/2	مشتق توزيع
Parabolic equations	4/9	معادلات مكافئية
Wave equation	5/9	معادلة الأمواج
Heat Equation	4/9	معادلة الحرارة

One-dimensional heat equation	4/9	معادلة الحرارة في بعد واحد
Convolution equation	5/5 -5/4	معادلة تزاوجية
Partial Differential equation	3/6	معادلة تفاضلية جزئية
Laplace equation	-2/3 -1/3 -5/5 -5/4 3/6	معادلة لابلاس
Differential operator	3/6 -2/3	مؤثر تفاضلي
Self-adjoint operator	3/9	مؤثر ذاتي قرين (قرين الذات)
Monotone operator	1/8	مؤثر رتيب
Symmetric operator	3/9	مؤثر متناظر
p - Laplacian operator	2/8	مؤثر من نوع p - لابلاس
Hemi-continuity	1/10 -1/8	نصف الاستمرار
Semi-norm	-3/1 -1/1 -1/6 -1/2 2/10	نصف نظيم/ نصف معيار
Elliptic theory	5/9	نظرية ناقصية

المراجع

1. Adams Robert A. & Fournier John J.F. : *Sobolev Spaces*, Second Edition, Pure and Applied Mathematics, Volume 140, Academic Press, 2003.
2. Al-Gwaiz : M. Abdulrahman : *Theory of Distributions*, Marcel Dekker, New York, 1992.
3. Ben Al-Ashhar Ali M., *Dictionary of Mathematics*, English-French-Arabic, Academia, 1995.
4. Bony Jean- Michel : *Théorie des Distributions et Analyse de Fourier*, Éd. Ecole Polytechnique, Paris, 2001.
5. Brézis Haïm : *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, First Edition, Springer, 2010.
6. Brézis Haïm : *Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contraction dans les Espaces de Hilbert*, First Edition, North Holland, 1973.
7. Brézis Haïm : *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Second Edition, Dunod, Paris, 1999.

8. Chipot Michel : *Elements of Nonlinear Analysis*, First Edition, Birkhauser, Advanced Texts, 2000.
9. Evans Lawrence C. : *Partial Differential Equations, Second Edition*, Graduate Studies In Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, 2010.
10. Friedlander F.G. & Joshi M. : *Introduction to the Theory of Distributions*, Cambridge University Press, 1999.
11. Haroske Dorothee D. & Triebel Hans : *Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations*, European Math. Society, 2008.
12. Khoan, Vo-Khac : *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, T. I & II, Vuibert, Paris, 1972.
13. Lacroix-Sonrier, Marie-Thérèse : *Distributions, Espaces de Sobolev, Applications*, First Edition, Ellipses Marketing, Paris, 1999.
14. Leoni, Giovanni: *A First Course in Sobolev Spaces*, First Edition, American Mathematical Society, 2009.
15. Lions Jacques-Louis : *Quelques Méthodes de Résolution des problèmes aux limites Non Linéaires*, Dunod, Second Edition, Paris, 2002.
16. Lucquin Brigitte : *Equations aux Dérivées Partielles et leurs Approximations*, First Edition, Ellipses Marketing, 2004.
17. McOwen Robert C. : *Partial Differential Equations Methods & Applications*, Second Edition, Printice Hall, 2003.
18. O'Neil Peter V. : *Beginning Partial Differential Equations*, First Edition, Wiley Interscience Publication, 1999.
19. Renardy Michael & Rogers, Robert C. : *An Introduction to Partial Differential Equations*, First Edition, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, 1992.
20. Roubicek Thomas : *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, First Edition, Birkhauser, 2005.
21. Samhan Marouf, Abouammah Abdulrahman & Al-Thukair Fawzi : *Dictionary of Mathematical Terms, English-Arabic* Academic Publishing and Press, King Saud University, 2003.
22. Strichartz Robert S. : *A guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, CRC Press, 1994.
23. Suhubi Erdogan: *Functional Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
24. Tartar Luc : *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Springer, Berlin, 2007.
25. Zemanian A.H. : *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions with Applications*, Dover Publications, 2010.
26. Zheng Songmu : *Nonlinear Evolution Equations*, First Edition, Chapman & Hall / CRC Monographs and Surveys, in Pure and Applied Mathematics, 2004.
27. Zuily Claude : *Problems in Distributions and Partial Differential Equations*, North-Holland, Amesterdam, 1988.

28. بريزيس هايم: التحليل الدالي: دراسة وتحليل، ترجمة اليغفوري عبدالسلام، شعلال سامية، مسعودي سليم، الطبعة الأولى، العبيكان للنشر والتوزيع، المملكة العربية السعودية، 2010.