

الفصل الرابع

جداء التزاوج Convolution Product

يؤدي جداء التزاوج (اللف) دورا بارزا في التحليل الدالي حيث يتيح بوجه خاص، تقريب دوال لا تتمتع بخواص تحليلية كثيرة (أي سيئة السلوك) بمتتالية دوال حسنة السلوك. ويهمننا هنا كيف يمكن تعميم هذا المفهوم ليشمل تزاوج دالة مع توزيع أو توزيع مع توزيع.

1- مبرهنتان أساسيتان

يؤدي جداء التزاوج دورا مهماً في التحليل، سيما في إثبات العديد من النتائج. وقد سبق أن أشرنا إليه في الفصل الأول (المبرهنة 3.2). ويهمننا هنا دراسة جداء التزاوج المعرف على التوزيعات، باعتبار أن القارئ ملمٌ بخصائصه في حالة الدوال العادية.

ورغم ذلك يستحسن، قبل الشروع في تقديم مفهوم التزاوج المتعلق بالتوزيعات، التذكير ببعض خواصه عندما يتعلق الأمر بالدوال.

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للمكاملة محليا على \mathbb{R}^n ، نسمي جداء تزاوج f و g عند a ، الذي نرمز له بـ $f * g(a)$ ، القيمة المعروفة بالتكامل (في حالة تقاربه):

$$f * g(a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(a-x)dx$$

نجمّع في القضية التالية بعض خاصيات هذا الجداء:

قضية 1.1

(1) جداء التزاوج تبديلي.

(2) إذا كان الجداء $f * g$ موجودا فإن حامله محتوي في ملامسة

مجموع حاملي f و g ، أي: $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}f + \text{supp}g}$.

(3) إذا كان $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ حيث $1 \leq p \leq +\infty$ ورمزنا

ب p' للعدد المرافق لـ p (أي أن $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) فإن:

$f * g$ معرف عند كل نقطة وهو محدود ومستمر بانتظام

على \mathbb{R}^n .

(ب) لدينا: $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

(ج) إذا كان $1 < p < +\infty$ فإن $f * g$ منعدم عند اللانهاية، أي

أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد متراس $K \supset \mathbb{R}^n$ بحيث:

$$x \in \complement_{\mathbb{R}^n} K \Rightarrow |f * g(x)| \leq \varepsilon$$

(4) إذا كان f و g عنصرين من $L^1(\mathbb{R}^n)$ فإن $f * g$ عنصر من

$$L^1(\mathbb{R}^n), \text{ ولدينا: } \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz \right)$$

(5) ليكن p و q عددين حقيقيين بحيث $1 \leq p \leq +\infty$ و $1 \leq q \leq +\infty$

و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. وليكن $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. عندئذ:

(أ) $f * g(a)$ معرف لكل $a \in \mathbb{R}^n$ تقريبا.

(ب) إذا كان العدد r يحقق $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$ فإن:

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n), \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

(6) إذا كانت f دالة قابلة للمكاملة محليا على \mathbb{R}^n وكانت $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ، وحامل إحدى الدالتين متراصا فإن الدالة $f * g$ من الصنف $C^k(\mathbb{R}^n)$. ونحصل على المشتقات الجزئية $D^\alpha(f * g)$ وفق القاعدة:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq k, \quad D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g.$$

نقدّم الآن مبرهنتين أولاهما خاصة بالاشتقاق وثانيتها خاصة بالمكاملة، مع التذكير بأن $E(\mathbb{R}^d) = C^\infty(\mathbb{R}^d)$ وأن $E'(\mathbb{R}^d)$ يرمز لثنوي $E(\mathbb{R}^d)$ ، وهذا الثنوي يطابق فضاء التوزيعات المتراسة الحامل.

مبرهنة 2.1 (الاشتقاق)

نعتبر الدالة $\varphi \in E(\mathbb{R}^{p+q})$ والتوزيع $T \in E'(\mathbb{R}^p)$. إن الدالة:

$$f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$y \longrightarrow f(y) = \langle T(x), \varphi(x, y) \rangle$$

من الصنف $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ ، ولدينا:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^q, \quad D^\alpha f(y) = \langle T(x), D_y^\alpha \varphi(x, y) \rangle.$$

البرهان

نكتفي هنا بوصف خطوات إثبات المبرهنة.

المرحلة الأولى: يتم البرهان على استمرار الدالة

$$\psi : \mathbb{R}^q \longrightarrow E(\mathbb{R}^p)$$

$$y \longrightarrow \varphi_y = \varphi(\cdot, y)$$

من \mathbb{R}^q إلى $C^0(\mathbb{R}^p)$ ، وذلك باعتبار $\varphi \in E(\mathbb{R}^{p+q})$ مثنيا. ثم نستنتج استمرار

هذه الدالة من \mathbb{R}^q إلى $E(\mathbb{R}^{p+q})$. وهكذا نستخلص أن التركيب :

$$f : \mathbb{R}^q \xrightarrow{\psi} E(\mathbb{R}^p) \xrightarrow{T} \mathbb{C}$$

$$y \longrightarrow \varphi_y \longrightarrow \langle T, \varphi_y \rangle$$

التطبيق مستمرٌ بوصفه تركيب دالتين مستمرتين.

المرحلة الثانية: نحسب مشتقا جزئيا للدالة f . نكتب (حيث

$\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ يمثل الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^n):

$$\frac{f(y + he_i) - f(y)}{h} = \left\langle T, \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_y \right\rangle = \left\langle T, \frac{\varphi_{y+he_i} - \varphi_y}{h} - \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_y \right\rangle.$$

ونضع:

$$u_h = \frac{\varphi_{y+he_i} - \varphi_y}{h} - \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_y.$$

ثم نثبت أن $\lim_{h \rightarrow 0} u_h = 0$ في $E(\mathbb{R}^p)$ وذلك بعد كتابة u_h على النحو:

$$u_h(x) = \frac{\varphi(x, y + he_i) - \varphi(x, y)}{h} - \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi(x, y).$$

وبالتالي نحصل، بفضل انتماء T إلى $E'(\mathbb{R}^p)$ على: $\lim_{h \rightarrow 0} \langle T, u_h \rangle = \langle T, 0 \rangle$. وهذا

$$\text{يعني أن: } \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) = \langle T, \varphi_y \rangle.$$

المرحلة الثالثة: نثبت أن $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ مستمر، وبذلك تكون $f \in C^1(\mathbb{R}^q)$. ثم

نواصل بالتراجع (induction) فيتبين أن الانتماء $f \in C^m$ يستلزم $f \in C^{m+1}$ ،

وهو ما يبين أن $f \in C^\infty(\mathbb{R}^q)$. □

مبرهنة 3.1 (المكاملة)

ليكن $\varphi \in E(\mathbb{R}^{p+q})$ و $T \in E'(\mathbb{R}^p)$. نرمز بـ P لبلاطة متراصة من

$$\mathbb{R}^q. \text{ عندئذ: } \left\langle T, \int_P \varphi(\cdot, y) dy \right\rangle = \int_P \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle dy$$

البرهان

يكفي إثبات المبرهنة من أجل $q = 1$ ، أي $P = [a, b]$ ، ذلك أننا نحصل

على الحالة العامة بالمكاملة المتوالية بالنسبة لـ y_1, \dots, y_q (وضّح ذلك).

نضع:

$$F(y) = \left\langle T, \int_a^y \varphi(., t) dt \right\rangle$$

ثم نطبق المبرهنة السابقة فنحصل على:

$$\begin{aligned} F'(y) &= \left\langle T, \left(\int_a^y \varphi(., t) dt \right)' \right\rangle \\ &= \langle T, \varphi(., y) \rangle. \end{aligned}$$

ومن ثمّ:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_a^b F'(y) dy \\ &= \int_a^b \langle T, \varphi(., y) \rangle dy \end{aligned}$$

أي:

$$\left\langle T, \int_a^b \varphi(., y) dy \right\rangle = \int_a^b \langle T, \varphi(., y) \rangle dy.$$

وهو المطلوب. □

ملاحظة

(1) نكتب، أحيانا، تجاوزا:

$$\left\langle T(x), \int_p \varphi(x, y) dy \right\rangle = \int_p \langle T(x), \varphi(x, y) \rangle dy$$

بدل

$$\left\langle T, \int_p \varphi(., y) dy \right\rangle = \int_p \langle T, \varphi(., y) \rangle dy.$$

(2) يمكننا في هذه المبرهنة استبدال P بمجموعة أخرى ليس لها

شكل البلاطة.

ندخل الآن مفهوم المجموعات المتزاوجة.

تعريف 4.1 (المجموعات المتزاوجة)

نقول عن مجموعتين مغلقتين F و G من \mathbb{R}^n إنهما متزاوجتان (أو إنهما مقبولتان) إذا كان:

$$\forall R > 0, \exists \rho > 0:$$

$$(x \in F \wedge y \in G \wedge \|x+y\| < R) \Rightarrow (\|x\| < \rho \wedge \|y\| < \rho).$$

وبصفة عامة نقول عن جماعة منتهية من المغلقات $(F_j)_{j \in J}$ إنها متزاوجة (أو مقبولة) إذا كان: لكل مجموعة جزئية $J \supset I$ وكل $R > 0$ ، يوجد ρ بحيث :

$$\forall R > 0, \exists \rho > 0: \left((x_i)_{i \in I} \in F_i \wedge \left\| \sum_{i \in I} x_i \right\| < R \right) \Rightarrow (\|x_i\| < \rho, i \in I).$$

تمرين

نترك للقارئ مهمة إثبات الخواص التالية:

(1) إذا كان A مغلقا و B متراصا في \mathbb{R}^n فإن الجماعة (A, B)

متزاوجة.

(2) في \mathbb{R} ، تمثل الفترات $[a_i, +\infty[$ (حيث $(a_i)_{i=1, \dots, n}$ أعداد حقيقية)

جماعة متزاوجة.

(3) لاحظ أن الفترتين $[a, +\infty[$ و $] -\infty, b]$ ليستا متزاوجتين، وذلك مهما

كان العدان الحقيقيان a و b .

قضية 5.1

إذا كان F و G مغلقين ومتزاوجين من \mathbb{R}^n فإن مجموعهما $F + G$

مغلق من \mathbb{R}^n .

البرهان

لتكن (x_j) متتالية من $F + G$ تؤول إلى عنصر x من \mathbb{R}^n . نريد إثبات أن $x \in F + G$. لنضع $x_i = y_i + z_i$ حيث $y_i \in F$ و $z_i \in G$.

لما كانت المتتالية (x_j) متقاربة فهي محدودة من الأعلى. إذن، يوجد $0 < R$ بحيث $\|x_j\| < R$ ، أي $\|y_j + z_j\| < R$. لكن F و G متزاوجان. ومنه يوجد $0 < \rho$ بحيث $\|y_j\| < \rho$ و $\|z_j\| < \rho$. ومن ثمّ، توجد متتالية جزئية (y_{j_i}) من (y_j) متقاربة (نسمي نهايتها y).

ثم إن (z_{j_i}) مغلق، وعليه $y \in F$. وهكذا ينتج بالمرور إلى النهاية في المساواة $x_{j_i} = y_{j_i} + z_{j_i}$ أن المتتالية z_{j_i} متقاربة نحو عنصر z ينتمي إلى المغلق G . ومنه: $x = y + z \in F + G$. \square

لنوضّح الآن كيف يمكن الاستفادة من المجموعات المتزاوجة.

مبرهنة 6.1

ليكن A و B فضاءين خطيين جزئيين من $D'(\mathbb{R}^n)$ مستقرين بالنسبة للضرب في $D(\mathbb{R}^n)$ (أي، لكل $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ و $u \in A$ و $v \in B$ فإن $\varphi u \in A$ و $\varphi v \in B$).

وليكن:

$$f : (A \cap E'(\mathbb{R}^n)) \times (B \cap E'(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow E'(\mathbb{R}^n)$$

تطبيقاً ثنائي الخطية يحقق:

$$(\diamond) \quad \text{supp } f(u, v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v.$$

عندئذ:

- (1) يمكن تمديد التطبيق f إلى مجموعة الثنائيات $(u, v) \in A \times B$ ذات الحوامل المتزاوجة (صورة التمديد ستكون $D'(\mathbb{R}^n)$ بدل $E'(\mathbb{R}^n)$).
- (2) تظل العلاقة (♦) قائمة من أجل الثنائيات الوارد ذكرها آنفاً.

البرهان

نلاحظ أنه إذا كانت الثنائية (u, v) عنصراً من $(A \cap E'(\mathbb{R}^n)) \times (B \cap E'(\mathbb{R}^n))$ فإن $\text{supp } u$ و $\text{supp } v$ متزاوجان لأنهما متراسان.

المرحلة الأولى: نعرّف التمديد \tilde{f} لـ f بالطريقة التالية:

لتكن $(\varphi_j)_j$ متتالية دوال من $D(\mathbb{R}^n)$ بحيث تكون الأجزاء $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_j(x) = 1\}$ من \mathbb{R}^n متتالية معمّقة من المتراسات (انظر

البند 4.2 من الفصل الأول). ثم نضع لكل $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \tilde{f}(u, v), \psi \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \tilde{f}(\varphi_j u, \varphi_j v), \psi \rangle.$$

لاحظ أن فرضية الاستقرار لـ A و B يؤدي إلى $\varphi_j u \in A$ و $\varphi_j v \in B$. كما أن حاملي $\varphi_j v$ و $\varphi_j u$ متراسان، ولذا $\varphi_j u \in A \cap E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi_j v \in B \cap E'(\mathbb{R}^n)$ وهذا يعرّف المتتالية (g_j) : $g_j := \langle f(\varphi_j u, \varphi_j v), \psi \rangle$.

المرحلة الثانية: يتم فيها البرهان على أن المتتالية (g_j) هي، في الواقع، ثابتة ابتداءً من رتبة معيَّنة، أي أنه يوجد عدد طبيعي N بحيث إذا كان $N < j$ و $N < k$ فإن $g_j = g_k$. وللحصول على ذلك نكتب:

$$(1) \quad g_j - g_k = \langle f(\varphi_j u - \varphi_k u, \varphi_j v), \psi \rangle + \langle f(\varphi_j u, \varphi_j v - \varphi_k v), \psi \rangle$$

ونثبت أن كل حد من الطرف الأيمن في (1) منعدم عندما يكون j و k كبيرين بكفاية. نستخلص هذه النتيجة بإثبات العلاقة (عن طريق الخلف):

$$(2) \quad (\text{supp}(\varphi_j u - \varphi_k u) + \text{supp}(\varphi_j v)) \cap \text{supp} \psi = \phi.$$

وبما أن الفرض حول التطبيق f ينصّ على أن:

$$\text{supp} f(\varphi_j u - \varphi_k u, \varphi_j v) \subset \text{supp}(\varphi_j u - \varphi_k u) + \text{supp}(\varphi_j v)$$

فإنه يتضح من (2) أن:

$$\text{supp} f(\varphi_j u - \varphi_k u, \varphi_j v) \cap \text{supp} \psi = \phi.$$

وعندئذ ينتج من القضية 3.5 (الفصل الثالث) أن:

$$\langle f(\varphi_j u - \varphi_k u, \varphi_j v), \psi \rangle = 0.$$

وبنفس الطريقة نتبين العلاقة:

$$\langle f(\varphi_k u, \varphi_j v - \varphi_k v), \psi \rangle = 0.$$

وبذلك ينتهي البرهان على أن (g_j) ثابتة ابتداءً من رتبة معينة.

المرحلة الثالثة: نلاحظ أن ثبوت المتتالية (g_j) ابتداءً من رتبة معينة

يؤدي إلى تقاربها. ومنه نرى أن التمديد \tilde{f} ، كما ورد في بداية البرهان،

معرفاً جيداً حيث إن:

$$\langle \tilde{f}(u, v), \psi \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} g_j$$

وحتى يكون تعريف التمديد \tilde{f} سليماً ينبغي أيضاً إثبات أنه مستقل عن اختيار المتتالية (φ_j) .

المرحلة الرابعة: نثبت القضية الثانية الواردة في المبرهنة، أي:

$$\text{supp} \tilde{f}(u, v) \subset \text{supp} u + \text{supp} v.$$

نتبين أولاً أن العلاقة

$$(3) \quad (\text{supp} u + \text{supp} v) \cap \text{supp} \psi = \phi$$

تستلزم $\langle \tilde{f}(u, v), \psi \rangle = 0$. وبما أن:

$$\text{supp} \varphi_j u + \text{supp} \varphi_j v \subset \text{supp} u + \text{supp} v$$

فإن العلاقة (3) تؤدي إلى :

$$(\text{supp } \varphi_j u + \text{supp } \varphi_j v) \cap \text{supp } \psi = \phi$$

مع العلم أن:

$$\text{supp } f(\varphi_j u, \varphi_j v) \subset \text{supp } \varphi_j u + \text{supp } \varphi_j v.$$

إذن:

$$\text{supp } f(\varphi_j u, \varphi_j v) \cap \text{supp } \psi = \phi.$$

$$\langle f(\varphi_j u, \varphi_j v), \psi \rangle = 0 \text{ ومنه:}$$

لكننا نعلم أن $\langle f(\varphi_j u, \varphi_j v), \psi \rangle = \langle \tilde{f}(u, v), \psi \rangle$ من أجل j كبير

بكفاية. وهكذا يأتي من العلاقة (3): $\langle \tilde{f}(u, v), \psi \rangle = 0$.

ومن جهة أخرى فإن $\text{supp } u + \text{supp } v$ مغلق (حسب القضية 5.1).

وبالتالي نكون قد أثبتنا:

$$(\forall \psi \in D(\mathbb{R}^n), (\text{supp } u + \text{supp } v) \cap \text{supp } \psi = \phi) \Rightarrow \langle \tilde{f}(u, v), \psi \rangle = 0.$$

ومن ثم:

$$\forall \psi \in D(\mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}(\text{supp } u + \text{supp } v)), \langle \tilde{f}(u, v), \psi \rangle = 0$$

وهذا يعني أن: $\text{supp } \tilde{f}(u, v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v$ وهو المطلوب. □

2- تزاوج توزيع مع دالة

نذكر أننا نعرّف جداء التزاوج لدالة $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ودالة $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

كما يلي:

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y) dy = \langle f, \tau_x \check{\varphi} \rangle$$

$$\tau_x \check{\varphi}(y) = \check{\varphi}(y-x) = \varphi(x-y) \text{ حيث}$$

وتجاوزاً ، يمكننا كتابة :

$$f * \varphi(x) = \left\langle f(y), \varphi(x-y) \right\rangle.$$

وعلى ضوء ذلك نقدّم ، في المرحلة الأولى ، التعريف التالي الذي يعمّم

جداء تزاوج دالتين إلى جداء تزاوج دالة مع توزيع متراص الحامل.

تعريف 1.2 (تزاوج دالة مع توزيع متراص الحامل)

ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. جداء التزاوج $T * \varphi$ يُعرّف عند

$$T * \varphi(x) = \left\langle T, \tau_x \check{\varphi} \right\rangle \text{ : كل نقطة } x \in \mathbb{R}^n \text{ بـ}$$

إليك بعض خاصيات جداء تزاوج توزيع مع دالة.

مبرهنة 2.2

ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ لدينا :

$$T * \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad (1)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad D^\alpha(T * \varphi) = T * D^\alpha \varphi = D^\alpha T * \varphi \quad (2)$$

$$\text{supp}(T * \varphi) \subset \text{supp} T + \text{supp} \varphi \quad (3)$$

البرهان

(1) تأتي من القضيّتين (2) و (3).

(2) يتبيّن من المبرهنة 2.1 بأن : $T * \varphi \in E(\mathbb{R}^n)$. كما أنّ :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad D^\alpha(T * \varphi)(x) &= D^\alpha \left\langle T, \tau_x \check{\varphi} \right\rangle \\ &= \left\langle T, D_x^\alpha \tau_x \check{\varphi} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \tau_x D^\alpha \check{\varphi} \right\rangle \\
&= \left\langle T, \tau_x D^\alpha \check{\varphi} \right\rangle \\
&= T * D^\alpha \varphi(x).
\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى، لدينا أيضا:

$$\begin{aligned}
\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad D^\alpha (T * \varphi)(x) &= \left\langle T, D_x^\alpha \tau_x \check{\varphi} \right\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, D^\alpha (\tau_x \check{\varphi}) \right\rangle \\
&= \left\langle D^\alpha T, \tau_x \check{\varphi} \right\rangle \\
&= D^\alpha T * \varphi(x).
\end{aligned}$$

(3) لإثبات صحة الاحتواء نعتبر عنصرا x من المفتوح

$\mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}(\text{supp } T + \text{supp } \varphi)$. من الواضح أن $x - y \notin \text{supp } \varphi$ وذلك مهما كان

$y \in \text{supp } T$. ثم إننا نلاحظ صحة الاستلزام:

$$y \in \text{supp } \tau_x \check{\varphi} \Rightarrow x - y \in \text{supp } \varphi$$

ولذلك فإن:

$$x - y \notin \text{supp } \varphi \Rightarrow y \notin \text{supp } \tau_x \check{\varphi}$$

وهكذا ينتج مما سبق أن:

$$y \in \text{supp } T \Rightarrow y \notin \text{supp } \tau_x \check{\varphi}.$$

وبالتالي: $\text{supp } T \cap \text{supp } \tau_x \check{\varphi} = \emptyset$. إذن:

$$\forall x \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}(\text{supp } T + \text{supp } \varphi), \quad \left\langle T, \tau_x \check{\varphi} \right\rangle = 0 \quad \mathbb{F} * \varphi(x)$$

(أي أن المفتوح $\mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}(\text{supp } T + \text{supp } \varphi)$ محتوى في مفتوح انعدام $(T * \varphi)$ ، ولذا:

$$\text{supp } T * \varphi \subset \text{supp } T + \text{supp } \varphi. \square$$

إليك نتيجة أخرى تتعلق بخاصية التجميع.

مبرهنة 3.2

ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ و $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$(1) \quad (T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi)$$

$$(2) \quad \langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle$$

البرهان

(1) باستخدام المبرهنة 3.1 يأتي (حيث P بلاطة تحتوي $\text{supp } \psi$):

$$\begin{aligned} (T * (\varphi * \psi))(x) &= \langle T(y), (\varphi * \psi)(x - y) \rangle \\ &= \left\langle T(y), \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \cdot \varphi(x - y - z) dz \right\rangle \\ &= \int_P \langle T(y), \varphi(x - y - z) \rangle \psi(z) dz \\ &= \int_P \psi(z) T * \varphi(x - z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) T * \varphi(x - z) dz \\ &= (T * \varphi) * \psi(x). \end{aligned}$$

ومنه: $T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$

(2) لدينا:

$$\begin{aligned} \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle &= \langle T(x), \check{\varphi} * \psi(x) \rangle \\ &= \left\langle T(x), \int_P \psi(y) \cdot \check{\varphi}(x - y) dy \right\rangle \\ &= \int_P \langle T(x), \varphi(y - x) \rangle \psi(y) dy \\ &= \int_P (T * \varphi)(y) \psi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (T * \varphi)(y) \psi(y) dy \\ &= \langle T * \varphi, \psi \rangle \square \end{aligned}$$

قدمنا آنفا جداء تزاوج دالة مع توزيع متراس الحامل. نريد الآن تعميم ذلك التعريف ليشمل تزاوج دالة مع توزيع كفي. سنستجد في هذه العملية بالمبرهنة 6.1.

مبرهنة 4.2

ليكن $T \in D(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in E(\mathbb{R}^n)$ بحيث يكون حاملاً T و φ متزاوجين. عندئذ يمكن تعريف جداء التزاوج $T * \varphi$ بكيفية التمديد المبينة في المبرهنة 6.1 الخاصة باستخدام المجموعات المتزاوجة. ولدينا:

$$(1) \quad T * \varphi \in E(\mathbb{R}^n)$$

$$(2) \quad \text{supp } T * \varphi \subset \text{supp } T + \text{supp } \varphi$$

البرهان

نعتبر في المبرهنة 6.1 : $A = D'(\mathbb{R}^n)$ و $B = E(\mathbb{R}^n)$ و $f(u, v) = u * v$

مع الملاحظة أن $E'(\mathbb{R}^n) = D'(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$ و $E(\mathbb{R}^n) = E(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$

ثم إن جداء التزاوج تطبيق ثنائي الخطية. وهكذا يكون:

$$f : E'(\mathbb{R}^n) \times D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow E'(\mathbb{R}^n)$$

$$(T, \varphi) \longrightarrow T * \varphi$$

ولذلك يمكن تطبيق المبرهنة 6.1.

(1) لنثبت أن $T * \varphi \in E(\mathbb{R}^n)$. حسب الفرض فإن $\text{supp } T$ و $\text{supp } \varphi$

متزاوجان. ليكن $0 < R$. نرمز بـ ρ للعدد المرفق به وفق تعريف التزاوج. نعتبر

دالة $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$ بحيث يكون $B(0, \rho)$ هي الكرة ذات المركز 0 ونصف

القطر ρ : $B(0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n, \theta(x) = 1\}$. لدينا:

$$\forall \psi \in D(B(0, R)), \quad \langle \tilde{f}(T, \varphi), \psi \rangle = \langle f(\theta T, \theta \varphi), \psi \rangle$$

أي:

$$\forall \psi \in D(B(0, R)), \quad \langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle \theta T * \theta \varphi, \psi \rangle.$$

ومنه يتضح، حسب المبرهنة السابقة:

$$(4) \quad T * \varphi|_{B(0, R)} = \theta T * \theta \varphi|_{B(0, R)} \in E(B(0, R)).$$

وهكذا: لكل $0 < R$ توجد دالة θ تحقق (4). ومن ثم:

$$\forall R > 0, \quad T * \varphi|_{B(0, R)} \in E(B(0, R)).$$

أي أن: $T * \varphi \in E(\mathbb{R}^n)$. \square

ملاحظة

استخدمنا في البرهان السابق النتيجة التالية التي نترك إثباتها للقارئ:

نتبنى رموز المبرهنة 6.1 وفرضياتها. نفرض أن الثنائية $(\text{supp } u, \text{supp } v)$ تشكل جماعة متزاوجة، وليكن $0 < R$. نرمز بـ ρ للعدد

المرفق بـ R حسب تعريف المجموعات المتزاوجة. لكل $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$ بحيث:

$$B(0, \rho) \subset \{x \in \mathbb{R}^n, \theta(x) = 1\}$$

$$\text{فإن: } \tilde{f}(u, v)|_{B(0, R)} = f(\theta u, \theta v)|_{B(0, R)}.$$

كتطبيق لجداء التزاوج، نقدم النتيجة التالية الخاصة بالكثافة.

مبرهنة 5.2

ليكن Ω مفتوحا من \mathbb{R}^n . إن الفضاء $D(\Omega)$ كثيف في $D'(\Omega)$.

البرهان

نعتبر توزيعا $T \in D'(\Omega)$. نبدأ بإنشاء متتالية (f_j) من $D(\Omega)$ سنجعلها

تؤول إلى T . ولتكن (K_j) متتالية معمّقة من المتراسات K_j بحيث $\bigcup_j K_j = \Omega$.

ونعتبر متتالية دوال $\psi_j \in D(\Omega)$ بحيث يكون $\psi_j = 1$ على K_j .

ولتكن متتالية أعداد (ε_j) موجبة ومتناقصة وتؤول نحو 0 بحيث
 $\varepsilon_j < \frac{1}{2}d(\text{supp}\psi_j, \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}\Omega)$ ونعتبر أيضا متتالية صاقلة χ_{ε_j} بحيث
 $\text{supp}\chi_{\varepsilon_j} \subset B(0, \varepsilon_j)$. ثم نمدد بالصفر التوزيع $\psi_j T$ ونرمز بـ $\overline{\psi_j T}$ لهذا
 التمديد. نلاحظ أن $\overline{\psi_j T}$ موجود حسب المبرهنة 4.5 من الفصل الثاني (مبدأ
 اللصق). وضح ذلك.

والواقع أن $\overline{\psi_j T} \in E'(\mathbb{R}^n)$ لأن $\overline{\psi_j T} \subset \text{supp}\psi_j$ لنضع الآن:

$f_j \in D(\mathbb{R}^n)$ (حسب المبرهنة 2.2)، ولدينا:

$$\begin{aligned} \text{supp} f_j &\subset \text{supp}\overline{\psi_j T} + \text{supp}\chi_{\varepsilon_j} \\ &\subset \text{supp}\psi_j + B(0, \varepsilon_j) \\ &\subset \Omega. \end{aligned}$$

(مع العلم أن الاحتواء الأخير ناتج من المتباينة $(2\varepsilon_j < d(\text{supp}\psi_j, \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}\Omega))$. ومنه
 $f_j \in D(\Omega)$.)

لإنهاء البرهان، نثبت أن المتتالية (f_j) متقاربة في $D'(\Omega)$ نحو T .

وعليه نعتبر $\varphi \in D(\Omega)$ لدينا بالاستناد إلى المبرهنة السابقة:

$$\begin{aligned} \langle f_j, \varphi \rangle &= \langle \overline{\psi_j T} * \chi_{\varepsilon_j}, \varphi \rangle \\ &= \langle \overline{\psi_j T}, \overset{\vee}{\chi_{\varepsilon_j}} * \varphi \rangle \end{aligned}$$

(مع التذكير أن $\varphi \in D(\Omega)$ يستلزم أن $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$). وبما إن (χ_{ε_j}) صاقلة فإن

المتتالية $\overset{\vee}{\chi_{\varepsilon_j}}$ صاقلة أيضا. ومنه (أنظر 3.2 من الفصل الأول):

$$\overset{\vee}{\chi_{\varepsilon_j}} * \varphi \xrightarrow{D(\mathbb{R}^n)} \varphi \in D(\Omega).$$

لكن $\overset{\vee}{\chi_{\varepsilon_j}} * \varphi \in D(\Omega)$ من أجل j كبير بكفاية، إذ أن:

$$\text{supp}\overset{\vee}{\chi_{\varepsilon_j}} * \varphi \subset \text{supp}\varphi + B(0, \varepsilon_j).$$

وبالتالي: $\chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi \xrightarrow{D(\Omega)} \varphi$

وهكذا نحصل، عندما يكون z كبيرا، على:

$$\left\langle T, \chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

وزيادة على ذلك، لدينا:

$$\left\langle \overline{\psi_j T}, \chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} = \left\langle \psi_j T, \chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)}.$$

وحيث إن المتتالية (K_j) معمقة فإنه يوجد عدد طبيعي N بحيث:

$$j > N \Leftrightarrow \text{supp}(\chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi) \subset K_j \subset \Omega.$$

إذن، $\psi_j = 1$ بجوار $\text{supp}(\chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi)$ عندما يكون z كبيرا. ومن ثم يأتي:

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\psi_j T}, \chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} &= \left\langle T, \psi_j (\chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi) \right\rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} \\ &= \left\langle T, \chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)}. \end{aligned}$$

وفي الأخير يتأكد بأن:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad \langle f_j, \varphi \rangle = \left\langle \overline{\psi_j T}, \chi_{\varepsilon_j} \checkmark * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)}$$

أي: $f_j \xrightarrow{D'(\Omega)} T$ □.

ملاحظة

يثبت البرهان السابق أن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $D'(\mathbb{R}^n)$. وبالتحديد، فهو

يبرهن على أن

$$\forall T \in D'(\mathbb{R}^n), \quad T * \chi_{\varepsilon_j} \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} T$$

وعليه، كان بإمكاننا إزالة الدوال (ψ_j) لو اقتصرنا برهاننا على الحالة

$$\Omega = \mathbb{R}^n$$

3- التزاوج والانسحاب وتزاوج توزيعين

نبدأ بتقديم النتيجة التالية:

قضية 1.3

ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$(1) \quad \tau_a(T * \varphi) = \tau_a T * \varphi = T * \tau_a \varphi$$

$$(2) \quad \langle T, \varphi \rangle = (T * \check{\varphi})(0)$$

البرهان

(1) لدينا:

$$\tau_a T * \varphi(x) = \langle \tau_a T, \tau_x \check{\varphi} \rangle$$

$$= \langle T, \tau_{-a} \tau_x \check{\varphi} \rangle,$$

$$T * \tau_a \varphi(x) = \langle T, \tau_x (\tau_a \check{\varphi}) \rangle,$$

$$\tau_a(T * \varphi)(x) = (T * \varphi)(x - a)$$

$$= \langle T, \tau_{x-a} \check{\varphi} \rangle.$$

يمكن أن نتأكد بسهولة من أن:

$$= \tau_{-a} \tau_x \check{\varphi} \quad \tau_x (\tau_a \check{\varphi}) = \tau_{x-a} \check{\varphi}.$$

ومنه تأتي العلاقة المطلوبة.

(2) بديهية، انطلاقاً من تعريف جداء التزاوج. □

ملاحظة

إذا كان $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ معطى فإن مؤثر التزاوج A المعرف بـ

$$A : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(\mathbb{R}^n)$$

$$\varphi \longrightarrow A\varphi = T * \varphi$$

يحقق حسب القضية السابقة: $\tau_a A\varphi = A\tau_a\varphi$.

تعني هذه العلاقة أن مؤثر التزاوج والانسحاب يتبادلان فيما بينهما. تكاد تكون خاصية التبادل هذه خاصية مميزة لمؤثر التزاوج. ذلك ما سيتضح من خلال المبرهنة 3.3.

وقبل ذلك نقدّم التوطئة التالية دون برهان:

توطئة 2.3

ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$. إن المؤثر

$$A : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(\mathbb{R}^n)$$

$$\varphi \longrightarrow A\varphi = T * \varphi$$

مستمرّ، بمعنى أن: لكل متراس $K \supset \mathbb{R}^n$ وكل عدد طبيعي m يوجد متراس K' وعدد طبيعي q وثابت $0 < C$ بحيث:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad p_{K,m}(A\varphi) \leq C \cdot p_{K',q}(\varphi).$$

مبرهنة 3.3

ليكن $A : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(\mathbb{R}^n)$ مؤثرا خطيا ومستمرا يتبادل مع

الانسحاب (أي أن $\tau_a A\varphi = A\tau_a\varphi$ لكل عنصر $a \in \mathbb{R}^n$).

عندئذ يوجد توزيع وحيد $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ بحيث:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad A\varphi = T * \varphi.$$

البرهان

(1) الوجدانية: نفترض وجود T . عندئذ يتبين من القضية 1.3 أن:

$$\begin{aligned}(T^* \varphi)(0) &= \left\langle T, \check{\varphi} \right\rangle \\ &= \left\langle \check{T}, \varphi \right\rangle.\end{aligned}$$

إذن:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad \left\langle \check{T}, \varphi \right\rangle = A\varphi(0),$$

مع الملاحظة أن $A\varphi(0)$ معلوم لأن المؤثر A معطى. ومنه تأتي وحدانية \check{T} ، ومن ثم نستخلص وحدانية T (كيف؟).

(2) الوجود: ليكن v الشكل الخطي المعرف بـ:

$$\begin{aligned}v : D(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longrightarrow \langle v, \varphi \rangle = A\varphi(0)\end{aligned}$$

نأخذ في التوطئة 2.3 : $K = \{0\}$ و $p = 0$. حينئذ يوجد متراس K' وعدد طبيعي q و $0 < C$ بحيث:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad |\langle v, \varphi \rangle| \leq C \cdot p_{K',q}(\varphi)$$

أي:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad |A\varphi(0)| \leq C \cdot p_{K',q}(\varphi).$$

ومنه $v \in E'(\mathbb{R}^n)$. لتكن $a \in \mathbb{R}^n$. لدينا، حسب فرض البرهنة:

$$\begin{aligned}A\varphi(a) &= \tau_{-a}A\varphi(0) \\ &= A\tau_{-a}\varphi(0).\end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned}A\varphi(a) &= \langle v, \tau_{-a}\varphi \rangle \\ &= \left\langle \check{v}, \tau_a \check{\varphi} \right\rangle \\ &= \check{v}^* \varphi(a).\end{aligned}$$

وهكذا نستخلص أن $A\varphi = \check{v}^* \varphi$. ومن ثم فإن \check{v} هو التوزيع T المطلوب. \square

ننتقل الآن إلى تعريف جداء تزاوج توزيعيين. من أجل ذلك نذكر بأنه إذا كان $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $v \in D(\mathbb{R}^n)$ فإن:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad (T * v) * \varphi = T * (v * \varphi).$$

سننطلق من هذه العلاقة لتقديم تعريفنا.

مبرهنة - تعريف 4.3

ليكن S و T عنصرين من $E'(\mathbb{R}^n)$.

(1) يوجد توزيع ω من $E'(\mathbb{R}^n)$ وحيد يحقق:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad T * (S * \varphi) = \omega * \varphi.$$

يسمى التوزيع ω جداء تزاوج T و S ونكتب $\omega = T * S$.

(2) لدينا: $\text{supp}(T * S) \subset \text{supp } T + \text{supp } S$.

البرهان

(1) نرمز بـ U و V للمؤثرين من $D(\mathbb{R}^n)$ نحو $D(\mathbb{R}^n)$ المعرفين بـ:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad U\varphi &= T * \varphi \\ V\varphi &= S * \varphi. \end{aligned}$$

ونضع $W = U \circ V$. من الواضح أن $W : D(\mathbb{R}^n) \rightarrow D(\mathbb{R}^n)$ مؤثر خطي ومستمر ويتبادل مع الانسحابات لأن المؤثرين U و V يتمتعان بنفس الخواص:

$$\begin{aligned} W\tau_a\varphi &= (U \circ V)\tau_a\varphi \\ &= U(V\tau_a\varphi) \\ &= U(\tau_a V\varphi) \\ &= \tau_a U(V\varphi) \\ &= \tau_a (U \circ V\varphi) \\ &= \tau_a W\varphi. \end{aligned}$$

عندئذ ينتج من المبرهنة السابقة أنه يوجد توزيع $\omega \in E'(\mathbb{R}^n)$ وحيد يحقق:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad W\varphi = \omega * \varphi.$$

وهكذا:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad \omega * \varphi &= W \varphi \\ &= U(V \varphi) \\ &= T * V \varphi \\ &= T * (S * \varphi). \end{aligned}$$

(2) فيما يخص العلاقة بين الحوامل، نريد إثبات:

$$\text{supp}(T * S) \subset \text{supp } T + \text{supp } S$$

* أي: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}(\text{supp } T + \text{supp } S) \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} \text{supp}(T * S)$. وهذا يعني قيام الاستلزام:

$$\varphi \in D(\mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}(\text{supp } T + \text{supp } S)) \Rightarrow \langle T * S, \varphi \rangle = 0.$$

بمعنى أن العلاقة:

$$(5) \quad \text{supp } \varphi \cap (\text{supp } T \cup \text{supp } S) = \emptyset$$

تستلزم المساواة:

$$(6) \quad \langle T * S, \varphi \rangle = 0. \square$$

تمرين

أثبت أن العلاقة (5) تستلزم أن

$$(7) \quad 0 \notin \text{supp } T + \text{supp } S + \text{supp } \check{\varphi}.$$

نلاحظ أن (القضية 1.3):

$$(8) \quad \langle T * S, \varphi \rangle = (T * S) * \check{\varphi}(0) = T * (S * \check{\varphi})(0).$$

ومن جهة أخرى نعلم أن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $S * \check{\varphi} \in D(\mathbb{R}^n)$ ، وبالتالي (المبرهنة 2.2):

$$\begin{aligned} \text{supp} \left(T * (S * \check{\varphi}) \right) &\subset \text{supp } T + \text{supp } S * \check{\varphi} \\ &\subset \text{supp } T + \text{supp } S + \text{supp } \check{\varphi}. \end{aligned}$$

وبالتالي فإن العلاقة (5) تعطي، استنادا إلى التمرين السابق والعلاقة (8):

$$\left(T * (S * \check{\varphi}) \right) (0) = 0$$

أي $\langle T * S, \varphi \rangle = 0$. وهي العلاقة (6) المراد استنتاجها من (5).

وهكذا تمكنا من تعريف جداء تزاوج توزيعين متراسي الحاملين. هل نستطيع تعريف جداء تزاوج توزيعين من $D'(\mathbb{R}^n)$ ؟ إليك إجابة عن هذا السؤال:

مبرهنة 5.3

ليكن T و S عنصرين من $D'(\mathbb{R}^n)$ بحيث يكون الحاملان $\text{supp } S$ و $\text{supp } T$ متزاوجين. عندئذ تسمح كيفية التمديد المقدمة في المبرهنة 6.1 بتعريف جداء تزاوج T و S ، ولدينا:

$$T * S \in D'(\mathbb{R}^n) \quad (1)$$

$$\text{supp } T * S \subset \text{supp } T + \text{supp } S \quad (2)$$

البرهان

يكفي أن نطبق المبرهنة السابقة، ونستند إلى المبرهنة 6.1 باعتبار:

$$A = B \quad D'(A) = D'(B) \quad \text{أي أن:}$$

$$f : E'(\mathbb{R}^n) \times E'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow E'(\mathbb{R}^n)$$

وسيكون:

$$\tilde{f} : D'(\mathbb{R}^n) \times D'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D'(\mathbb{R}^n). \square$$

فيما يتعلق بخاصيتي التجميع والتبديل لجداء التزاوج نشير لهذه

النتيجة دون برهان.

قضية 6.3

(1) إذا كانت u و v و w توزيعات ذات حوامل متزاوجة فإن:

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

(2) إذا كان u و v توزيعين حاملهما متزاوجان فإن: $u * v = v * u$.

ملاحظة

إذا لم تكن حوامل u و v و w متزاوجة فإنه بالإمكان فقدان خاصية التجميع. مثال ذلك:

$$(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$$

$$1 * (\delta * H) = 1 * H' = 1 * \delta = 1.$$

حيث δ توزيع ديراك و H توزيع هيفسايد Heaviside. سبب ذلك هو أنه بالإمكان أن تكون الثنائية $(\text{supp } u, \text{supp } v)$ متزاوجة، وكذلك $(\text{supp } u, \text{supp } v * w)$ و $(\text{supp } u * v, \text{supp } w)$ و $(\text{supp } v, \text{supp } w)$ وهذا دون أن تكون الثلاثية

$$(\text{supp } u, \text{supp } v, \text{supp } w)$$

متزاوجة. تلك هي الظاهرة التي حدثت في المثال أعلاه.

نختم هذه الفقرة بالنتيجة الحسابية التالية:

قضية 7.3

❖ لكل توزيع $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ و $a \in \mathbb{R}^n$ ، لدينا:

$$(1) \quad \delta * u = u$$

$$(2) \quad \delta_a * u = \tau_a u$$

$$(3) \quad D^\alpha \delta * u = D^\alpha u$$

❖ إذا كان حاملاً التوزيعين u و v متزاوجين فإن:

$$(1) \quad \tau_a(u * v) = \tau_a u * v = u * \tau_a v$$

$$(2) \quad D^\alpha(u * v) = D^\alpha u * v = u * D^\alpha v$$

4- جداء التزاوج بالطريقة المؤترة

الهدف من هذا البند هو تعريف القارئ بطريقة ثانية لتقديم جداء تزاوج التوزيعات، وهي تعتمد على الجداء المؤتري. ولذا سوف لن نخوض في البراهين، وإنما سنركز على مسلك الطريقة المؤترة مقارنة بالكيفية التي لجأنا إليها في هذا الفصل خلال تقديم مفهوم التزاوج. نذكر، في البداية، بتعريف الجداء المؤتري لدالتين.

تعريف 1.4 (الجداء المؤتري)

ليكن U و V مفتوحين من \mathbb{R}^n و \mathbb{R}^p على التوالي. ولتكن:
 $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ و $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ دالتين.
 الجداء المؤتري $f \otimes g$ لـ f و g هو الدالة المعرفة عند كل نقطة (x, y) من $U \times V$ بـ: $(f \otimes g)(x, y) = f(x).g(y)$.

إليك البعض من خواص الجداء المؤتري.

قضية 2.4

- (1) إذا كان $f \in E(U)$ و $g \in E(V)$ فإن $f \otimes g \in E(U \times V)$.
- (2) لدينا: $\text{supp } f \otimes g = (\text{supp } f) \times (\text{supp } g)$.
- (3) إن $D(U) \times D(V)$ كثيف في $D(U \times V)$.

ملاحظة

إذا كان U و V مفتوحين من \mathbb{R}^n و \mathbb{R}^p على التوالي، وكانت f و g دالتين قابلتين للمكاملة محليا على U و V على التوالي، فإن:

$$\forall \varphi \in D(U \times V), \quad \langle T_{f \otimes g}, \varphi \rangle = \int_{U \times V} (f \otimes g)(x, y) \cdot \varphi(x, y) dx dy \\ = \int_{U \times V} f(x)g(y) \cdot \varphi(x, y) dx dy.$$

وعندما يكتب φ على النحو $\theta \otimes \psi$ (لاحظ أنه يمكن دوما كتابته كنهاية لمثل هذه الدوال حسب الخاصية الثالثة من القضية السابقة) فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(U \times V), \quad \langle T_{f \otimes g}, \varphi \rangle &= \left(\int_U f(x) \cdot \theta(x) dx \right) \times \left(\int_V g(y) \cdot \psi(y) dy \right) \\ &= \langle T_f, \theta \rangle \cdot \langle T_g, \psi \rangle. \end{aligned}$$

ومن ثمّ نستخلص تعريف الجداء الموترى للتوزيعات.

تعريف 3.4 (الجداء الموترى لتوزيعين)

ليكن $S \in D'(U)$ و $T \in D'(V)$. الجداء الموترى لـ S و T هو التوزيع $W \in D'(U \times V)$ المعرف بـ:

$$\forall \varphi \in D(U), \forall \psi \in D(V), \quad \langle W, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \cdot \langle T, \psi \rangle.$$

ونكتب $W = S \otimes T$.

لن يكون لهذا التعريف معنى بدون قيام النتيجة الأولى من المبرهنة

التالية:

مبرهنة 4.4

(1) إذا كان $S \in D'(U)$ و $T \in D'(V)$ فإن التوزيع $S \otimes T$ الوارد في التعريف 3.4 موجود ووحيد.

(2) إذا كان $S \in E'(U)$ و $T \in E'(V)$ فإن التوزيع $S \otimes T$ متراس الحامل، أي أنه ينتمي إلى $E'(U \times V)$.

(3) لدينا:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in E(U \times V), \quad \langle S \otimes T, \theta \rangle &= \langle S, \langle T, \theta(x, \cdot) \rangle \rangle \\ &= \langle T, \langle S, \theta(\cdot, y) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

إليك بعضا من خواص الجداء الموترى للتوزيعات.

قضية 5.4

ليكن $S \in D^1(U)$ و $T \in D^1(V)$ حيث U جزء مفتوح من \mathbb{R}^n و V جزء مفتوح من \mathbb{R}^p . لدينا :

$$1) \text{ supp } (S \otimes T) = \text{supp } S \times \text{supp } T$$

$$2) D_x^\alpha D_y^\beta (S \otimes T) = D^\alpha S \otimes D^\beta T$$

$$3) \forall f \in E(U), \forall g \in E(V), (f \otimes g)(S \otimes T) = (fS) \otimes (gT).$$

4) الجداء الموترى تجميعي.

5) الجداء الموترى ليس تبديليا عموما.

لإدخال مفهوم التزاوج بالطريقة الموترية، نعتبر في البداية دالتين f و

g من $L^1(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. ونلاحظ أن:

$$\begin{aligned} \langle f \otimes g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \varphi(x) dx dy. \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) g(t) \varphi(y+t) dt dy \\ &= \langle f \otimes g, \varphi^\Delta \rangle. \end{aligned}$$

حيث: $\varphi^\Delta(t, y) = \varphi(y+t)$.

وهكذا يمكن كتابة: $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f \otimes g, \varphi^\Delta \rangle$. ومن ثم يتبادر إلى

الذهن اتخاذ المساواة الأخيرة كتعريف لجداء تزاوج توزيعين بوضع:

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \varphi^\Delta \rangle$$

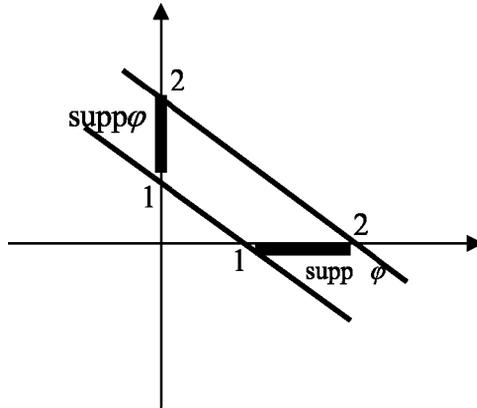
وذلك عندما يكون S و T توزيعين من $D'(\mathbb{R}^n)$.

وهنا ينبغي أن نلاحظ بأن: $(\text{supp } \varphi^\Delta) = (\text{supp } \varphi)^\Delta$ حيث :

$$(\text{supp } \varphi)^\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x + y \in \text{supp } \varphi\}.$$

ماذا ينتج عن ذلك؟ ينتج أن تراص حامل φ لا يضمن تراص حامل φ^Δ .

مثال ذلك: φ عنصر من $D(\mathbb{R})$ حيث $\text{supp } \varphi = [0, 2]$. انظر الشكل الموالي :



في هذا الشكل، حامل φ^Δ هو الشريط المائل المعرّف بـ $1 \leq x + y \leq 2$

ومن ثمّ فإن φ^Δ لا ينتمي بالضرورة إلى $D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. وإذا كان الأمر

كذلك، فأى معنى تحمل الكتابة $\langle S \otimes T, \varphi^\Delta \rangle$ ؟

نعتمد على التعريف التالي للخروج من هذا المأزق:

تعريف 6.4 (القوس $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

إذا كان $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ و $f \in E(\mathbb{R}^n)$ بحيث يكون $\text{supp } T \cap \text{supp } f$

متراصاً فإنه يمكننا تعريف $\langle T, f \rangle$ على النحو التالي:

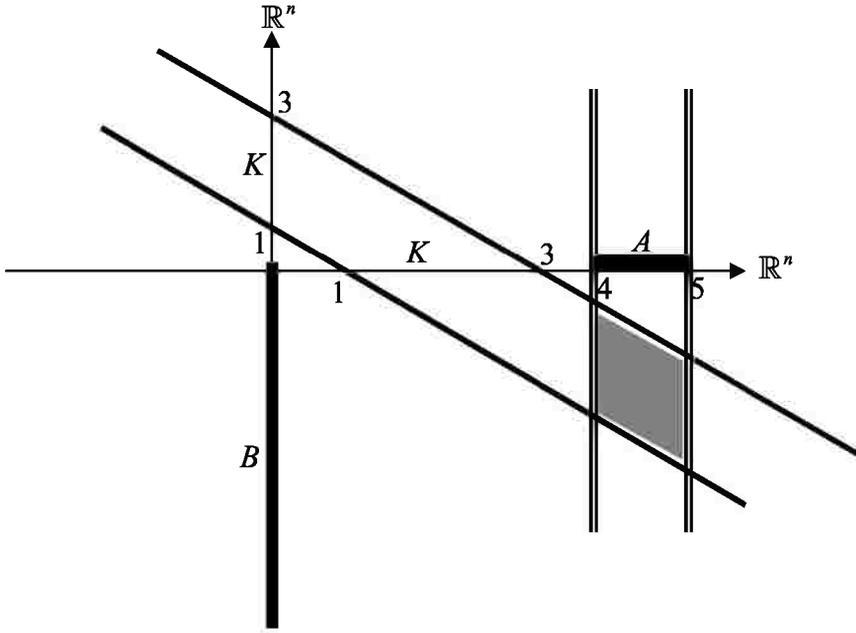
$$\langle T, f \rangle = \langle T, \theta \cdot f \rangle$$

حيث $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$ مع $\theta = 1$ في جوار متراص لـ $\text{supp } T \cap \text{supp } f$.

لهذا التعريف معنى لأنه إذا كانت θ_1 و θ_2 دالتين تحققان ما يحققه

θ الوارد في التعريف السابق فإن: $\langle T, \theta_1 \cdot f \rangle = \langle T, \theta_2 \cdot f \rangle$. أثبت ذلك.

ومن هنا وجب الاهتمام بالثنائيات (A, B) من أجزاء \mathbb{R}^n التي من أجلها يكون $(A \times B) \cap K^\Delta$ متراسا مهما كان المتراس K من \mathbb{R}^n (حيث يرمز K^Δ هنا لمجموعة العناصر (x, y) من $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ بحيث $x + y \in K$).
مثال لـ $(A \times B) \cap K^\Delta$



في الشكل، $A = [4, 5]$ و $B = \mathbb{R}^-$ و $K = [1, 3]$ ،

و $(A \times B) \cap K^\Delta$ هو متوازي الأضلاع المظلل

تعريف 7.4 (تزاوج مجموعتين)

ليكن A و B جزأين مغلقين من \mathbb{R}^n . لكل متراس K من \mathbb{R}^n ،

نضع: $K^\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x + y \in K\}$.

نقول عن A و B إنهما متزاوجان إذا كان $(A \times B) \cap K^\Delta$ متراسا

من \mathbb{R}^{2n} وذلك مهما كان المتراس K من \mathbb{R}^n .

تمرين

أثبت أن هذا التعريف يكافئ التعريف 4.1.

نستطيع الآن تعريف جداء تزاوج توزيعين حاملهما متزاوجان، وهو
الفرض الذي استندنا عليه لتقديم التعريف 5.3:

تعريف 8.4 (جداء تزاوج توزيعين)

ليكن S و T توزيعين من $D'(\mathbb{R}^n)$ حاملهما متزاوجان (حسب مفهوم التعريف 4.1 أو 7.4). نضع لكل $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S * T, \varphi^\Delta \rangle.$$

ملاحظة

إن لهذا التعريف معنى لأننا افترضنا أن حاملي S و T متزاوجان: هذا
الفرض يؤدي إلى تراص $(\text{supp } S) \times (\text{supp } T) \cap (\text{supp } \varphi)^\Delta$ في \mathbb{R}^n . لكن :

$$((\text{supp } S) \times (\text{supp } T)) \cap (\text{supp } \varphi)^\Delta = (\text{supp } S \otimes T) \cap (\text{supp } \varphi^\Delta)$$

وذلك حسب القضية 5.4 والعلاقة $(\text{supp } \varphi)^\Delta = \text{supp } \varphi^\Delta$.
ومنه فإن $(\text{supp } S \otimes T) \cap (\text{supp } \varphi^\Delta)$ جزء متراص من \mathbb{R}^n . وبذلك يكون
للكتابة $\langle S \otimes T, \varphi^\Delta \rangle$ معنى حسب التعريف 6.4.

5 - معادلات التزاوج

نبدأ بتعريف معادلات التزاوج:

تعريف 1.5 (معادلة تزاوج)

نسمي معادلة تزاوج كل معادلة من الشكل : $A * u = f$ حيث A
و f توزيعان معلومان و u توزيع مجهول.

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية في \mathbb{R}^n :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha . D^\alpha u = f$$

ذات المعاملات الثابتة. إنها تكتب على شكل معادلة تزاوج $A * u = f$ حيث :

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha . D^\alpha \delta$$

$$\begin{aligned} A * u &= \sum_{|\alpha| \leq m} (a_\alpha . D^\alpha \delta) * u \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \delta * a_\alpha . D^\alpha u \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha . D^\alpha u \right) * \delta \\ &= f * \delta \\ &= f. \end{aligned}$$

لمعالجة معادلات التزاوج نحتاج إلى مفهوم الحل الأساسي

(Fundamental solution):

تعريف 2.5 (الحل الأساسي)

ليكن $f \in E'(\mathbb{R}^n)$.نقول عن توزيع $w \in D'(\mathbb{R}^n)$ إنه حل أساسي لـ A (أو حل أساسيللمعادلة $A * w = f$) إذا كان: $A * w = \delta$.

ملاحظات

1) الحل الأساسي ليس موجودا دوما، فهو يرتبط بخواص التوزيع A .مثال ذلك: نفترض أن $A \in D(\mathbb{R}^n)$. لو كان الحل الأساسي w موجودا لانتمىإلى $D'(\mathbb{R}^n)$. لاحظ أن حاملي A و w متزاوجان، ومنه $A * w$ موجودو $A * w \in E(\mathbb{R}^n)$. لكن $\delta \notin E(\mathbb{R}^n)$. ومن ثم فإن w غير موجود.

(2) نفترض أن w و w_1 حلان أساسيان لـ A . عندئذ:

$$A * (w - w_1) = \delta - \delta = 0.$$

وبالتالي، حتى نحصل على كافة الحلول الأساسية، يكفي أن نضيف إلى حل أساسي خاص الحل العام للمعادلة $A * u = 0$.

(3) أثبت مالفرنج Malgrange¹ و أهرنبريس Ehrenpreis²، عام 1955، أن لكل معادلة تفاضلية جزئية ذات معاملات ثابتة حلاً أساسياً. كما برهن على أن مثل هذا الحل لا يمكن أن يكون ذا حامل متراص (عندما تكون درجة المعادلة تختلف عن 0).

تظهر أهمية مفهوم الحل الأساسي من النتيجة التالية، حيث يسمح بكتابة حل المعادلة $A * u = f$ بدلالة w و f .

مبرهنة 3.5

ليكن $A \in E'(\mathbb{R}^n)$. نفترض أن لـ A حلاً أساسياً w . عندئذ:

(1) لكل $f \in E'(\mathbb{R}^n)$ ، يوجد $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ بحيث $A * u = f$:
أي $u = w * f$.

(2) ليكن $f \in E'(\mathbb{R}^n)$. إذا وجد $u \in E'(\mathbb{R}^n)$ ، حل للمعادلة
 $A * u = f$ ، فهو وحيد، ولدينا: $u = w * f$.

البرهان

(1) بما أن حاملي A و f متراصان فإن حوامل A و f و w متزاوجة، ولذا فخاصية التجميع قائمة، ولدينا:

¹ برنارد مالفرانج رياضي فرنسي ولد عام 1928.

² ليون أهرنبريس (1930 - 2010) رياضي أمريكي.

$$\begin{aligned} A * (w * f) &= (A * w) * f \\ &= \delta * f \\ &= f. \end{aligned}$$

(2) إذا كان u موجودا وينتمي إلى $E'(\mathbb{R}^n)$ فإن حوامل u و A و w

متزاوجة، ولذا فخاصية التجميع قائمة، ولدينا:

$$\begin{aligned} u &= (w * A) * u \\ &= w * (A * u) \\ &= w * f. \end{aligned}$$

وهو ما يثبت وحدانية u في $E'(\mathbb{R}^n)$ عند وجوده. □

لنر الآن الفائدة من مفهوم الحل الأساسي في دراسة معادلة لابلاس

$$\Delta u = f \quad \text{في } \mathbb{R}^n \quad \text{حيث } \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad \text{ها هو الحل الأساسي لهذا المؤثر.}$$

مبرهنة 4.5

نعرف الدالة w على \mathbb{R}^n بالعبارتين التاليتين:

(1) من أجل $n = 2$:

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \|x\|.$$

(2) من أجل $n \neq 2$:

$$w(x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{\|x\|^{n-2}}.$$

حيث يرمز ω_n لمساحة سطح كرة الوحدة، أي:

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

(مع العلم أن Γ يشير للدالة غاما (Gamma)).

إن w المعرف أعلاه حل أساسي لمؤثر لابلاس Δ ، أي أن: $\Delta w = \delta$.

البرهان

♦ نلاحظ في حالة $n = 1$ أن $w(x) = \frac{|x|}{2}$ ومنه:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}), \quad \left\langle \frac{|x|}{2}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{2} \langle |x|, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

وبالتالي، نحصل بالفعل، على: $\Delta w = \delta$.

نحتاج لتقديم هذا البرهان إلى قانون غرين Green³ الذي نذكر فيما

يلي بنصه:

توطئة 5.5

ليكن Ω جزءا مفتوحا مترابطا مصقولا من \mathbb{R}^n (مثلا $\Omega =$ متممة كرة). وليكن f و g عنصرين من $C^2(\bar{\Omega})$ بحيث يكون $\text{supp } f \cap \bar{\Omega}$ و $\text{supp } g \cap \bar{\Omega}$ متراصين. عندئذ يكون:

$$\int_{\Omega} (g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \left(g(s) \frac{\partial f}{\partial \eta}(s) - f(s) \frac{\partial g}{\partial \eta}(s) \right) ds$$

حيث يرمز $\frac{\partial}{\partial \eta}$ للمشتق وفق ناظم الوحدة الخارجي على Ω ، ويرمز $\partial\Omega$ لحافة Ω .

ليكن $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ لدينا:

$$\langle \Delta w, \varphi \rangle = \langle w, \Delta \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| > \varepsilon} w(x) \Delta \varphi(x) dx.$$

نطبق قانون غرين باعتبار $w = f$ و $\varphi = g$ (تأكد من شروط تطبيقه) فنجد:

$$(9) \quad \int_{\|x\| > \varepsilon} w(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\|x\| > \varepsilon} \varphi(x) \Delta w(x) dx + \int_{\|x\| = \varepsilon} w(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi(x) ds - \int_{\|x\| = \varepsilon} \varphi(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} w(x) ds$$

³ جورج غرين (1793-1841) رياضي إنكليزي.

حيث يرمز $\frac{\partial}{\partial \eta}$ للمشتق وفق ناظم الوحدة الخارجي على $\mathbb{C}_R^n, B(0, \varepsilon)$ ، أي

الناظم الداخلي على $B(0, \varepsilon)$. بعد ذلك نلاحظ ما يلي :

- التكامل الأول في الطرف الثاني من (9) منعدم لأنه من اليسير أن

نثبت بأن $\Delta w = 0$ لما $\|x\| < \varepsilon$.

- التكامل الثاني الوارد في الطرف الثاني من (9) يساوي :

$$\int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi(x) ds$$

مع الإشارة إلى أن العامل $\frac{\partial}{\partial \eta} \varphi$ محدود من أجل $\|x\| = \varepsilon$. ومن ثم :

$$\begin{aligned} \exists C > 0 : \quad \left| \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi(x) ds \right| &\leq C \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\|x\|=\varepsilon} ds \\ &\leq C' \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \varepsilon^{n-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

حيث C' ثابت موجب. وهذا لما $3 \leq n$.

أما إذا كان $n = 2$ فإن :

$$\left| \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi(x) ds \right| \leq C \varepsilon \ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 .$$

- التكامل الثالث الوارد في الطرف الثاني من (9) لدينا

هنا $\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial r}$. وبالتالي (من أجل $1 < n$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} w &= -\frac{\partial}{\partial r} w \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} . \end{aligned}$$

ومنه :

$$\left| - \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \eta}(x) \cdot \varphi(x) ds - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \varphi(x) ds - \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(0) ds \right|$$

إذن (يشير C و C' إلى ثابتين موجبين):

$$\begin{aligned} \left| - \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \eta}(x) \cdot \varphi(x) ds - \varphi(0) \right| &= \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \left| \int_{\|x\|=\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) ds \right| \\ &\leq \frac{C}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \cdot \varepsilon \cdot \sup_x \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right| \cdot \varepsilon^{n-1} \\ &\leq C' \cdot \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

وهكذا نستنتج أن التكامل الثالث في الطرف الأيمن من (9) يؤول إلى $\varphi(0)$ ، بمعنى أن:

$$- \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \eta}(x) \cdot \varphi(x) ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

وهذا يثبت أن: $\square. \Delta w = \delta$

إليك نتيجة تتعلق أيضا بمؤثر لابلاس، نوردها بدون برهان (لاحظ أن القضية الأولى بديهية خلافا للقضيتين الأخريين):

مبرهنة 6.5

نعتبر الحل الأساسي w لمؤثر لابلاس Δ الوارد في التوطئة 5.5. وليكن $f \in E'(\mathbb{R}^n)$. نضع $u = w * f$. لدينا:

- (1) u حل للمعادلة $\Delta u = f$ ، وذلك لكل $2 \leq n$.
- (2) $u \in E'(\mathbb{C}_n \text{supp } f)$ ، وذلك لكل $2 \leq n$.
- (3) $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ ، وذلك من أجل $3 \leq n$.

يعتمد البرهان على اعتبار الدالة

$$\begin{aligned} v : \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} \text{supp } f &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow \langle f, \psi(x, \cdot) \rangle \end{aligned}$$

حيث $\psi(x, y) = \theta_x(y)w(x - y)$ و θ_x دالة من $D(\mathbb{R}^n)$ تحقق θ_x بجوار $\text{supp } f$ و $\theta_x = 0$ بجوار النقطة x . إن الدالة v لا تتعلق باختيار الدالة θ_x . فنثبت أن $\psi(x, \cdot) \in E(\mathbb{R}^n)$ وذلك لكل x . ثم نبرهن على أن $v \in C^\infty$. وبعد ذلك نبين أن $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} v(x) = 0$. وفي الأخير يتم البرهان على أن $v(x) = 0$ وهذا لكل x من $\mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} \text{supp } f$.

من أهم النتائج التي يمكن استخلاصها من المبرهنة السابقة هي :

مبرهنة 7.5

ليكن Ω جزءا مفتوحا من \mathbb{R}^n ، حيث n عدد طبيعي غير منعدم. وليكن $u \in D'(\Omega)$ بحيث $\Delta u = 0$. عندئذ $u \in E(\Omega)$. (نعبّر عن هذه النتيجة بالقول إن التوزيعات التوافقية الوحيدة هي الدوال التوافقية المعتادة).

البرهان

ليكن $x_0 \in \Omega$ و $\varphi \in D(\Omega)$ بحيث $\varphi = 1$ بجوار V لـ x_0 . لنثبت أن $u|_V \in E(V)$ (ومنه سيأتي المطلوب). لدينا: $\Delta(\varphi u) = f$. وبالتالي (لاحظ أن $\Delta u = 0$ فرضا): $\Delta(\varphi u) = u \nabla \varphi + \nabla u \nabla \varphi$. وبما أن $\text{supp } \varphi$ متراص فإن $\Delta \varphi$ و $\nabla \varphi$ منعدمان خارج هذا المتراص. إذن: $\Delta(\varphi u) \in E'(\mathbb{R}^n)$ ، أي: $f \in E'(\mathbb{R}^n)$.

وبالإضافة إلى ذلك، لدينا (لاحظ أن $\Delta \varphi = 0$ و $\nabla \varphi = 0$ على V):

$$f|_V = \Delta(\varphi u)|_V = 0.$$

ومنه: $\text{supp } f \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} V$ ، ولذا: $x_0 \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} \text{supp } f$ لأن V جوار لـ x_0 .

ومن جهة أخرى، نعلم أن حوامل w و $\Delta\delta$ و φu متزاوجة (لاحظ أن

$\text{supp } \Delta\delta$ و $\text{supp } \varphi u$ متراسان)، وعليه يأتي من خاصية التجميع:

$$\begin{aligned}\varphi u &= w * \Delta\delta * \varphi u \\ &= w * (\Delta\delta * \varphi u) \\ &= w * \Delta(\varphi u) \\ &= w * f.\end{aligned}$$

وهكذا يتضح من المبرهنة السابقة أن: $w * f \in E(C_{\mathbb{R}^n} \text{supp } f)$ أي:

$\varphi u \in E(C_{\mathbb{R}^n} \text{supp } f)$. لكن العلاقة $x_0 \in V \subset C_{\mathbb{R}^n} \text{supp } f$ المبيّنة آنفا تؤدي إلى

$u = \varphi u|_V \in E(V)$. ولذا يأتي أن $u \in C^\infty$ بجوار $x_0 \in \Omega$ ، أي $u \in E(\Omega)$.

إليك نتيجة تعمّم جزءا مما ورد بخصوص مؤثر لابلاس.

مبرهنة 8.5

ليكن P مؤثرا تفاضليا ذا معاملات ثابتة في \mathbb{R}^n . نفرض أن P حلا أساسيا $w \in E(\mathbb{R}_+^n)$. عندئذ، لكل $f \in E'(\mathbb{R}^n)$ ، فإن التوزيع $u = E * f$ حل للمعادلة $Pu = f$ ، ولدينا: $u \in E(C_{\mathbb{R}^n} \text{supp } f)$.

ملاحظة

لا يوجد فرق كبير بين إثبات هذه المبرهنة والمبرهنة 6.5 لأن إثبات

الأخيرة لا يستعمل شكل المؤثر P ولا شكل حله الأساسي E ، بل يستفيد

فقط من كون $w \in E(\mathbb{R}_+^n)$.

نختم هذا الفصل بتقديم نتيجتين حول معادلات التزاوج في $D'(\mathbb{R}_+)$.

من أجل ذلك نعتبر مؤثرا تفاضليا P ثابت المعاملات وذا متغير حقيقي.

كنا رأينا بأننا نستطيع كتابة P على الشكل:

$$P = D^m + c_{m-1}D^{m-1} + c_{m-2}D^{m-2} + \dots + c_1D + c_0.$$

لدينا النتيجة التالية بخصوص وجود الحل الأساسي ووحديته:

مبرهنة 9.5

يقبل المؤثر P حلاً أولياً وحيداً $w \in D'(\mathbb{R}_+)$ ولدنياً: $w = He$ حيث يرمز H لدالة هيفسايد و e للحل الوحيد للمسألة:

$$\begin{cases} Pe = 0, \\ e^{(j)}(0) = 0, \forall j = 0, \dots, m-2, \\ e^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

البرهان

♦ الوجود: لكل $\psi \in E(\mathbb{R})$ نثبت بالحساب المباشر أن:

$$D^j(H\psi) = \psi(0)\delta^{(j-1)} + \psi'(0)\delta^{(j-2)} + \dots + \psi^{(j-1)}(0)\delta + \psi^{(j)}H.$$

لنأخذ $\psi = e$. نلاحظ أن الفرضيات حول e تؤدي إلى:

$$D^j(He) = \begin{cases} e^{(j)}H, & \forall j = 0, \dots, m-1, \\ e^{(m)}H + \delta, & j = m. \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} P(He) &= e^{(m)}H + \delta + \sum_{j=0}^{m-1} c_j e^{(j)}H \\ &= \delta + (Pe)H \\ &= \delta. \end{aligned}$$

إذن فإن $w = He$ حل أساسي.

♦ الوحديته: نفرض وجود حلّ أساسي آخر F . بما أن كل الحوامل

محتواة في \mathbb{R}_+ فإنها حوامل متزاوجة (تأكد من ذلك). ومن ثمّ نستطيع

الاستفادة من خاصية التجميع وكتابة:

$$\begin{aligned} P*w * F &= (P*w) * F = \delta * F = F \\ P*w * F &= w * (P * F) = w * \delta = w, \end{aligned}$$

واستنتاج أن: $w = F$. □

وها هي النتيجة الأخيرة التي نريد تقديمها في هذا الفصل:

مبرهنة 10.5

E هو الحل الأساسي للمؤثر P من الدرجة m الذي ورد ذكره في المبرهنة السابقة. لدينا:

(1) لكل $f \in D'(\mathbb{R}_+)$ ، يوجد $u \in D'(\mathbb{R}_+)$ وحيد حل للمعادلة $Pu = f$.

(2) لكل $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) \cap D'(\mathbb{R}_+)$ فإن الحل u للمعادلة $Pu = f$ ينتمي إلى $C^{m-1}(\mathbb{R}_+)$.

(3) لكل $f \in C^k(\mathbb{R}_+)$ فإن الحل u للمعادلة $Pu = f$ ينتمي إلى $C^{k+m}(\mathbb{R}_+)$.

البرهان

(1) ليكن f من $D'(\mathbb{R}_+)$. نستطيع فيما يلي الاستفادة من خاصية التجميع (لماذا؟):

$$\begin{aligned} P(w * f) &= A * (w * f) \\ &= (A * w) * f \\ &= \delta * f \\ &= f. \end{aligned}$$

ومنه فإن $u = w * f$ حل للمعادلة $Pu = f$.

للتأكد من الوحدانية، نفرض وجود $v \in D'(\mathbb{R}_+)$ حل للمعادلة

$$Pv = f, \text{ أي } A * v = f. \text{ وبالتالي:}$$

$$\begin{aligned} w * (A * v) &= w * f = u \\ (w * A) * v &= \delta * v = v. \end{aligned}$$

ومن ثمّ ينتج: $u = v$.

(2) نسلم بها.

(3) ليكن f عنصرا من C^0 . ومن ثمّ فهو عنصر من

$L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) \cap D'(\mathbb{R}_+)$. حينئذ يمكن كتابة $Pu = f$ على الشكل:

$$D^m u = f - \left(\sum_{j=0}^{m-1} c_j D^j u \right)$$

مع العلم أن $\sum_{j=0}^{m-1} c_j D^j u$ مستمرّ حسب القضية (2). إذن فإن $D^m u$ مستمرّ لأن

(2) تبين أيضا بأن $D^j u$ مستمرّ لكل $j \leq m-1$. كما أن f مستمرّ فرضا.

وهكذا، عندما يكون $Pu = f$ و f مستمرا فإن $D^m u$ مستمرّ.

بتطبيق هذه القاعدة يتبين أن $D^{j+m} u$ مستمر لأن $D^j f$ و $P(D^j u) = D^j f$

مستمرّ. ومن ثمّ يتضح أن الانتماء $f \in C^k$ يؤدي إلى الانتماء $u \in C^{k+m}$. \square

6- تمارين

تمرين 1

لتكن المجموعتان

$$A = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}_+^* \right\} \text{ و } B = \{ (0, x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \}$$

هل A و B مغلقان؟ هل $A+B$ مغلق؟

تمرين 2

(1) تأكد من وجود جداءات التزاوج التالية: $\delta_a * \delta_b$ ، $\delta * H$ ،

$\delta * 1$ ، $1_{[c,d]} * 1_{[a,b]}$ (علما أن الرمز 1_A يشير إلى الدالة المميزة للمجموعة A).

(2) احسب $H * (\delta * H)$ و $(1 * \delta') * H$.

تمرين 3

احسب جداء التزاوج في كل من الحالات التالية بعد التأكد من

وجوده :

$$\delta_a * H \quad (1)$$

$$\delta * 1 \quad (2)$$

$$T \in E'(\mathbb{R}), T * 1 \quad (3)$$

$$T \in E'(\mathbb{R}), T * e^x \quad (4)$$

$$: \text{حيث } H * Pf\left(\frac{H}{x}\right) \quad (5)$$

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}), \langle Pf\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln \varepsilon \right].$$

$$\delta * pv \frac{1}{x} \quad (6)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n^{(n)} \right) * \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \right) \quad (7)$$

تمرين 4

ليكن $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ و $(\varphi_j)_j$ متتالية دوال من $D(\mathbb{R}^n)$.

أثبت أن تقارب $(\varphi_j)_j$ نحو φ في $D(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى التقارب البسيط للمتتالية

$$T * \varphi_j \text{ نحو } T * \varphi$$

تمرين 5

ليكن $T_1 \in D'(\mathbb{R}^n)$ و $T_2 \in D'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ و $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$

أثبت أن : $(T_1 * T_2) * (\varphi * \psi) = (T_2 * T_1) * (\varphi * \psi)$

استنتج أن $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$

