الفصل الخامس

تحويل فوريي Fourier

يؤدي تحويل فوريي Fourier[1] دورا مهما في التحليل، سيما في إيجاد حلول المعادلات التفاضلية الجزئية. حتى إنه أصبح هناك فرع في التحليل الرياضي يسمى بتحليل فوريي. فلا غرابة عندئذ أن نخصص فصلا لهذا الموضوع نستعرض فيه أبرز التعاريف والخواص.

1- تعريف تحويل فوريي

لنبدأ بالتعرّف على هذا التحويل.

تعريف – مبرهنة **1.1** (تحويل فوريي)

ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. تحويل (أو مُحَوَّلة) فوريي لـ f ، الذي نرمز إليه بـ $\hat{f}$ أو بـ $F(f)$ ، هو الدالة المعرّفة بالعلاقة :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx .$$

حيث $x.\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j.\xi_j$ علما أن $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $\xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

إن تحويل فوريي $\hat{f}$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}^n$ وتؤول إلى الصفر عند اللانهاية (أي $\lim_{\|x\| \to +\infty} \hat{f}(x) = 0$). ولدينا التقدير : $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

[1] جون باتيست جوزف فوريي (1768- 1830) رياضي فرنسي.

البرهان

لدينا :

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\qquad \left|\hat{f}(\xi)\right|\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx$$
$$=\|f\|_{L^1},$$

ومنه $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(\xi)\right|\le\|f\|_{L^1}$ ، أي $\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

وإذا كانت متتالية (ξ_j) متقاربة في $\mathbb{R}^n$ نحو عنصر ξ فإن :

$$g_j(x):=e^{-ix.\xi_j}f(x)\xrightarrow{j\to+\infty}e^{-ix.\xi}f(x):=g(x)$$

أي أن التقارب $g_j(x)\xrightarrow{j\to+\infty}g(x)$ محقق حيثما كان تقريبا على $\mathbb{R}^n$. ومن جهة أخرى :

$$\left|g_j(x)\right|\le|f(x)|$$ حيثما كان تقريبا،

مع العلم أن $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. ولذا فمبرهنة التقارب المسقوف (المهيمن) للوبيغ تبيّن أن $g_j\xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)}g$ ، وهذا يعني أن :

$$\hat{f}(\xi_j)\xrightarrow{j\to+\infty}\hat{f}(\xi).$$

وقد حصلنا على ذلك انطلاقا من الفرض $\xi_j\xrightarrow{j\to+\infty}\xi$. وبالتالي فإن $\hat{f}$ مستمرة.

تمرين

أثبت أن $\lim_{\|x\|\to+\infty}\hat{\varphi}(x)=0$ لكل $\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$.

نعلم أن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $L^1(\mathbb{R}^n)$. ومن ثمّ إذا كان $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ فإنه توجد متتالية دوال اختبارية (φ_j) متقاربة في $L^1(\mathbb{R}^n)$ نحو f. ومن ثمّ نستنتج بناءً على ما سبق أن :

$$\left\|\hat{f}-\hat{\varphi}_j\right\|_{L^\infty} \le \left\|f-\varphi_j\right\|_{L^1} \xrightarrow{j\to+\infty} 0.$$

أي :

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(x)-\hat{\varphi}_j(x)\right| = 0.$$

وإذا وضعنا $u_j = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(x)-\hat{\varphi}_j(x)\right|$ نحصل على :

$\left|\hat{f}(x)\right| \le u_j + \left|\hat{\varphi}_j(x)\right|$ لكل عدد طبيعي j.

واستنادا إلى التمرين السابق نجد :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{\|x\|\to+\infty} \left|\hat{f}(x)\right| \le u_j + \lim_{\|x\|\to+\infty} \left|\hat{\varphi}_j(x)\right| = u_j$$

ومنه يأتي المطلوب بجعل j يؤول إلى $+\infty$ في العلاقة السابقة.□

ملاحظة

هنـاك مـن يعـرّف تحويـل فـوريي بالعلاقـة $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(2i\pi)x.\xi} f(x)dx$ بـدل $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx$. والفـرق بـين التعـريفين لا يظهـر إلا عنـدما يتعلـق الأمر بتقديرات حسابية دقيقة يرد فيها تحويل فوريي.

مبرهنة 2.1 (مقلوب تحويل فوريي)

ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. لدينا :

$$f = (2\pi)^{-n}\overline{F}(\hat{f})$$

حيث

$$\overline{F}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} g(\xi)d\xi$$

أي أن $I_d = (2\pi)^{-n}\overline{F}F = (2\pi)^{-n}F\overline{F}$ علما أن I_d يشير للتطبيق المطابق.

البرهان

لدينا باعتبار $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$(2\pi)^{-n}\overline{F}\,\hat{f}(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\,\hat{f}(\xi)d\xi$$
$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi-iy.\xi}f(y)dy\right)d\xi.$$

نلاحظ أننا لا نستطيع هنا تطبيق مبرهنة فوبيني Fubini [2] التي تسمح بمبادلة المكاملـــة بالنـــسبة للمـــتغيرين y و ξ لأن الدالـــة K المعرفـــة بـــ $K(y,\xi):=e^{ix.\xi-iy.\xi}f(y)$ لا تنتمـي إلى الفـضاء $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. ولهـذا الـسبب نقوم بإدخال العامل $e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}$ الذي يؤول إلى 1 عندما يؤول ε إلى 0 حيث يرمز $|.|$ للنظيم الإقليدي في $\mathbb{R}^n$. لنضع :

$$I_\varepsilon(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi-iy.\xi}.e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}f(y)dy\right)d\xi\,.$$

يمكن الآن تطبيق مبرهنة فوبيني حيث نستطيع كتابة:

$$I_\varepsilon(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy.\xi}.f(y)dy\right)d\xi$$
$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

دعنا نضع أيضا ، لكل ξ من $\mathbb{R}^n$:

$$J_\varepsilon(\xi)=e^{ix.\xi}e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}\hat{f}(\xi).$$

ثم نلاحظ صحة الخاصيتين التاليتين (نذكّر أن $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$):

- ❖ $J_\varepsilon(\xi)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}J_0(\xi)$ حيثما كان تقريبا.

---

[2] غيدو فوبيني (1879- 1943) رياضي إيطالي.

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |J_\varepsilon(\xi)| \le |\hat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$ ❖

باستخدام مبرهنة التقارب المسقوف نستنتج أن :

$$\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(\xi) d\xi \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} J_0(\xi) d\xi$$

أي :

$$I_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} J_0(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

وبالتالي : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n} \overline{F} \hat{f}(x)$.

لنعد بعد ذلك إلى العبـارة $I_\varepsilon(x)$ ونحسبها مبتدئين بالمكاملة بالنسبة إلى ξ. نضع :

$$G_\varepsilon(x-y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} e^{-\varepsilon^2 \frac{|\xi|^2}{4}} d\xi.$$

لدينا :

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} . e^{-\varepsilon^2 \frac{|\xi|^2}{4}} d\xi \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) G_\varepsilon(x-y) dy.$$

وهذا يعني أن $I_\varepsilon(x) = G_\varepsilon * f(x)$.

تمرين

تأكد من الخاصيتين التاليتين لـ G_ε لكل z في $\mathbb{R}^n$:

1) $G_\varepsilon(-z) = G_\varepsilon(z)$ ،

2) $G_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^n} G_1(\frac{z}{\varepsilon})$.

ومن جهة أخرى، لدينا:

توطئة 3.1

$$\forall a>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\qquad F(e^{-a|x|^2})=(\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4a}}.$$

البرهان

يكفي إثبات العلاقة من أجل $n=1$ لأن :

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix.\xi}e^{-a|x|^2}dx=\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix_i.\xi_i}e^{-ax_i^2}dx_i\ .$$

لنضع $g(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix.\xi}e^{-ax^2}dx$ باعتبار $n=1$.

إن التكامل الموسع (المعتل) الذي يعرّف الدالة g متقارب بانتظام، كما أن التكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(e^{-ix.\xi}e^{-ax^2}\right)dx$$

متقارب بانتظام أيضا. ومنه نستطيع كتابة :

$$g'(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(e^{-ix.\xi}e^{-ax^2}\right)dx\ .$$

وهكذا يتبيّن أن الدالة g تحقق المعادلة التفاضلية $+2ag'(\xi)\quad \xi g(\xi)=0$

وحلّ هذه المعادلة هو (باستخدام تكامل غاوس Gauss[3]) :

$$\begin{aligned}g(\xi)&=g(0)e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\\&=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx\right)e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.\end{aligned}$$

[3] كارل فردريك غوس (1777- 1855) رياضي ألماني.

وهو المطلوب في التوطئة.□

لنستخدم ما جاء في التمرين السابق والتوطئة (باعتبار $a=\frac{1}{4}$):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} G_1(z)dz &= \int_{\mathbb{R}^n} G_1(-z)dz \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz.\xi} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} d\xi dz \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} F(e^{-\frac{|\xi|^2}{4}})dz \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} 2^n(\sqrt{\pi})^n e^{-|z|^2} dz \\ &= 1,\end{aligned}$$

لأن $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}dz = \left(\sqrt{\pi}\right)^n$ ، وهــذا نــاتج مــن كــون $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. ومنــه نستخلص أن $\int_{\mathbb{R}^n} G_1(z)dz = 1$.

نسلّم بالنتيجة المعروفة التالية :

توطئة 4.1

> ليكن $\chi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\int_{\mathbb{R}^n}\chi(x)dx = 1$. نضع :
>
> $$I_\varepsilon = \chi_\varepsilon * f \quad \text{و} \quad \chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n}\chi(z/\varepsilon)$$
>
> حيث $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. عندئذ : $I_\varepsilon \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^n)} f$.

ملاحظة

لاحظ أن فـرض التوطئـة لم يتطلـب تـراص حامـل χ ولا إيجابيـة هـذه الدالة.

بتطبيق هذه التوطئة واعتبار $\chi = G_1$ نحصل على :

$$I_\varepsilon = G_\varepsilon * f \xrightarrow{L^1} f \in L^1.$$

في الأخير نلاحظ أننا توصلنا إلى :

$I_\varepsilon \xrightarrow{D'} (2\pi)^{-n}\overline{F}Ff$ و $I_\varepsilon \xrightarrow{D'} f \in L^1$.

ومنه : $f \overset{D'}{=} (2\pi)^{-n}\overline{F}Ff$. وبالتالي $f \overset{L^1}{=} (2\pi)^{-n}\overline{F}Ff$ لأن $f \in L^1$.

ومنه ينتهي إثبات المبرهنة.□

2- فضاء الدوال السريعة التناقص $S(\mathbb{R}^n)$

يتمتع فضاء شوارتز $S(\mathbb{R}^n)$ المؤلف من الدوال السريعة التناقص (rapidly decreasing functions) بخاصية مهمة مرتبطة بتحويل فوريي : تحويل فوريي لأي عنصر منه يبقى في الفضاء ذاته.

لنتعرّف بإيجاز على هذه الخاصية وعلى خواص أخرى تميز هذا الفضاء.

تعريف **1.2** (الدوال سريعة التناقص)

يكون $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ إذا تحقق الشرطان :

1) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ،

2) φ سريعة التناقص، وكذا مشتقاته، أي أن $P(x)D^\alpha\varphi$ محدود لكل كثير حدود P وكل دليل متعدّد $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ؛ بمعنى :

لكل كثير حدود P ، ودليل متعدد α ، يوجد ثابت موجب C بحيث $\|P.D^\alpha\varphi\|_{L^\infty} \le C$.

يسمى $S(\mathbb{R}^n)$ فضاء الدوال من الصنف C^∞ السريعة التناقص.

ملاحظة

من بين خواص الفضاء $S(\mathbb{R}^n)$ نشير بدون برهان إلى :

1) ليكن $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$. نضع :

$$\forall p\in \mathbb{N},\ \ N_p(\varphi)=\sum_{\substack{|\alpha|\le p\\|\beta|\le p}}\left\|x^{\alpha}D^{\beta}\varphi(x)\right\|_{L^\infty}.$$

لدينا التكافؤ : $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ يكافئ

$$\begin{cases}\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n),\\ \forall p\in \mathbb{N},\ \ N_p(\varphi)<+\infty.\end{cases}$$

نلاحظ أن طبولوجيا $S(\mathbb{R}^n)$ هي تلك المعرفة بمتتالية أنصاف النظيمات $.\left(N_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$

2) $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى $D^{\alpha}\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ لكل دليل متعدد α.

3) $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى $P.\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ لكل كثير حدود P.

4) $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى $P.\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ و $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}P(x)\varphi(x)=0$.

5) لدينا :

$$\forall p\in \mathbb{N},\exists C_p:\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n),\sum_{\substack{|\alpha|\le p\\|\beta|\le p}}\left\|x^{\alpha}D^{\beta}\varphi(x)\right\|_{L^1}\le C_p.N_{p+n+1}(\varphi).$$

حيث $N_{p+n+1}(\varphi)$ هي العبارة المعرفة في الخاصية الأولى.

6) التباينات القانونية التالية مستمرة :

$$\begin{aligned} i:S(\mathbb{R}^n)&\to L^p \quad 1\le p\le+\infty\\ f&\mapsto f,\end{aligned}$$

$$i : S(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$
$$f \mapsto f\,,$$
$$i : D(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$
$$f \mapsto f\,.$$

7) فضاء الدوال الاختبارية $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $S(\mathbb{R}^n)$.

مبرهنة 2.2

1) لدينا العلاقات:

$$\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)\,,$$
$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p : \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad N_p(\widehat{\varphi}) \le C_p . N_{p+n+1}(\varphi)\,,$$
$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p : \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad N_p(\overline{F}\varphi) \le C_p . N_{p+n+1}(\varphi)\,.$$

2) تحويل فوريي $F : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ تشاكل، ولدينا : $F^{-1} = (2\pi)^{-n}\,\overline{F}$.

البرهان

نكتفي بإثبات كيف أن 1) $\Leftarrow$ 2) تاركين باقي البرهان كتمرين :

نفرض صحة 2). وليكن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. عندئذ $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ و $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. ينتج من المبرهنة 2.1 أن :

$$\varphi = (2\pi)^{-n}\,\overline{F}\widehat{\varphi}\,.$$

- حتى نتأكد من تباين التطبيق $F : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ نستفيد من العلاقة السابقة حيث يكفي أن نلاحظ بأن الفرض :

$$\begin{cases} \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \;\; \psi \in S(\mathbb{R}^n), \\ \widehat{\varphi} = \widehat{\psi} \end{cases}$$

يؤدي حتما إلى :

$$\begin{aligned}\varphi &= (2\pi)^{-n}\overline{F}\widehat{\varphi}\\ &= (2\pi)^{-n}\overline{F}\widehat{\psi}\\ &= \psi.\end{aligned}$$

❖ وحتى نثبت غمر $F: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ نعتبر $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ونتساءل عن وجود $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\widehat{\varphi} = f$. لهذا الغرض نضع $\varphi = (2\pi)^{-n}\overline{F}f$ فيأتي $F\varphi = (2\pi)^{-n}F\overline{F}f = f$. وهو المطلوب في الغمر. ومنه نستخلص أن التطبيق $F: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ تقابل.

❖ نعلم أن التطبيق $F: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ خطي. لنتأكد من استمراره، أي من قيام الاستلزام التالي، حيث $(\varphi_n)_n \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0 \Rightarrow \widehat{\varphi_n} \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0.$$

ماذا يعني التقارب $\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$ من أجل متتالية $(\varphi_n)_n \in S(\mathbb{R}^n)$ ؟ إنه يعني :

$$N_p(\varphi_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

نذكّر بصحة العلاقة التالية (حسب 1)) :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p : \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad N_p(\widehat{\varphi}) \le C_p . N_{p+n+1}(\varphi)$$

ولتكن $(\varphi_n)_n$ متتالية من الدوال السريعة التناقص بحيث $\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$. إذن $N_p(\varphi_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} 0$ وذلك لكل عدد طبيعي p.

ولما كان :

$$\begin{cases}\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p : \forall n \in \mathbb{N}, \quad N_p(\widehat{\varphi_n}) \le C_p . N_{p+n+1}(\varphi_n),\\ \forall p \in \mathbb{N}, \ N_{p+n+1}(\varphi_n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0\end{cases}$$

فإن :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(\widehat{\varphi_n}) \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

وهذا يكافئ: $\widehat{\varphi_n} \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$. ومنه استمرار التطبيق $F: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$.

❖ بقي إثبات استمرار $F^{-1}:S(\mathbb{R}^n)\to S(\mathbb{R}^n)$. قم بذلك بناءً على :

$$\forall p\in\mathbb{N},\exists C_p:\forall n\in\mathbb{N},\quad N_p(\widehat{\varphi_n})\le C_p.N_{p+n+1}(\varphi_n),$$

وعلى كون $\varphi=(2\pi)^{-n}\overline{F}f$ لما $\hat{\varphi}=f$.□

لدينا النتيجة المهمة التالية التي تربط بين تحويل فوريي والاشتقاق :

مبرهنة **4.2**

> ليكن $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$. لدينا (علما أن i هو العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$ وأن $(x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n)$:
>
> $$\forall j=1,...,n,\quad \partial_j\hat{\varphi}(x)=-i\,\widehat{x_j\varphi}(x),$$
> $$\forall j=1,...,n,\quad \widehat{\partial_j\varphi}(x)=-ix_j\,\hat{\varphi}(x).$$

البرهان : نتركه للقارئ كتمرين (بسيط)، ونطلب منه استنتاج بأن :

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\quad D^\alpha\hat{\varphi}(x)=(-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha\varphi}(x),$$
$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\quad \widehat{D^\alpha\varphi}(x)=(-i)^{|\alpha|}x^\alpha\hat{\varphi}(x).\square$$

3- فضاء التوزيعات المعتدلة $S'(\mathbb{R}^n)$

نوجز فيما يلي بعض التعاريف والنتائج المرتبطة بفضاء التوزيعات المعتدلة (Tempered distributions)، وسنرى أنه يطابق الفضاء الثنوي لفضاء الدوال السريعة التناقص.

تعريف **1.3** (التوزيعات المعتدلة)

> ليكن $T\in D'(\mathbb{R}^n)$. نقول إن T توزيع معتدل إذا كان :
>
> $$\exists p\in\mathbb{N},\exists C:\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^n),\quad |\langle T,\varphi\rangle|\le C.N_p(\varphi).$$
>
> نرمز لفضاء التوزيعات المعتدلة بـ $S'(\mathbb{R}^n)$.

يعني التعريف أن T مستمر على $D(\mathbb{R}^n)$ عند تزويده بطبولوجيا $S(\mathbb{R}^n)$.

أمثلة

من الأمثلة الشهيرة للتوزيعات المعتدلة توزيع ديراك δ لأن :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad \left|\langle \delta, \varphi \rangle\right| = |\varphi(0)| \leq N_0(\varphi).$$

كمـا أن كـل دالـة $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ محـدودة بكـثير حـدود توزيـع معتـدل، بمـا فيها كثيرات الحدود ذاتها.

تمرين

أثبت أن :

1) كل التوزيعات المتراصة الحامل توزيعات معتدلة، بل إن التطبيق

$$\begin{aligned} E'(\mathbb{R}^n) &\to S'(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

تباين مستمر.

2) كل $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ توزيع معتدل، وهذا مهما كان $1 \leq p \leq +\infty$. بل إن التطبيق

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{R}^n) &\to S'(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

تباين مستمر.

ملاحظة

ليكن $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. يُمدَّد التوزيع

$$\begin{aligned} T : D'(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

بالاستمرار إلى شكل خطي ومستمر على $S'(\mathbb{R}^n)$ وحيد، بمعنى أن :

$$\exists p\in \mathbb{N}, \exists C>0 : \forall \varphi\in S(\mathbb{R}^n), \quad \left|\langle \mathrm{T},\varphi\rangle\right| \leq C.N_p(\varphi).$$

ولذلك نستطيع مطابقة $S'(\mathbb{R}^n)$ مع ثنويّه. ومن ثمّ نفهم لماذا رمزنا بـ $S'(\mathbb{R}^n)$ لفضاء التوزيعات المعتدلة (وهو الرمز المخصص عموما للثنوي).

تعريف 2.3 (التقارب في $S'(\mathbb{R}^n)$)

يكون $T_j \xrightarrow{S'(\mathbb{R}^n)} T$ إذا كان : $$\forall \varphi\in S(\mathbb{R}^n), \quad \langle \mathrm{T_j},\varphi\rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle \mathrm{T},\varphi\rangle.$$

ملاحظة

من بين خواص الفضاء $S'(\mathbb{R}^n)$ نشير إلى :

1) لكل $\alpha\in\mathbb{N}^n$، لدينا :

$$T\in S'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D^\alpha T\in S'(\mathbb{R}^n).$$

2) لكل $\alpha\in\mathbb{N}^n$، لدينا :

$$T_j \xrightarrow{S'(\mathbb{R}^n)} T \Rightarrow D^\alpha T_j \xrightarrow{S'(\mathbb{R}^n)} D^\alpha T.$$

3) نرمز بـ $O_M(\mathbb{R}^n)$ لمجموعة الدوال البطيئة التناقص وكذا مشتقاتها، أي مجموعة الدوال $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ التي تحقق العلاقة :

$$\forall \alpha\in\mathbb{N}^n,\ \exists C>0,\ \exists m\in\mathbb{N} : \forall x\in\mathbb{R}^n, \quad \left|D^\alpha f(x)\right| \leq C.\left(1+\|x\|\right)^m.$$

إذا كان $f\in O_M(\mathbb{R}^n)$ فإن الخواص الثلاث التالية محققة :

أ) $\varphi\in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$.

ب) $T\in S'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f\,T\in S'(\mathbb{R}^n)$.

جـ) $T_j \xrightarrow{S'(\mathbb{R}^n)} T \Rightarrow f\,T_j \xrightarrow{S'(\mathbb{R}^n)} f\,T$.

4- تحويل فوريي للتوزيعات المعتدلة

نوجز فيما يلي الحديث حول تحويل فوريي وارتباطه بالتوزيعات المعتدلة مشيرين إلى بعض الأمثلة. وقبل ذلك سنؤكد على أن تحويل فوريي لأي عنصر من هذا الفضاء يبقى في الفضاء ذاته.

نذكّر أنه إذا كان $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ فإن :

$$\begin{aligned}
\left\langle f,\hat{\varphi}\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x).\hat{\varphi}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx\right)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \\
&= \left\langle \hat{f},\varphi\right\rangle.
\end{aligned}$$

ولذلك يجوز لنا أن نضع التعريف التالي المتبوع بمبرهنة :

تعريف **1.4** (تحويل فوريي لتوزيع)

ليكن $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. نعرّف تحويل فوريي $\hat{T}$ (أو FT) لـ T والمؤثر $\overline{F}T$ بـ :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n),\quad \left\langle \hat{T},\varphi\right\rangle = \left\langle T,\hat{\varphi}\right\rangle_{S'(\mathbb{R}^n),S(\mathbb{R}^n)},$$

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n),\quad \left\langle \overline{F}T,\varphi\right\rangle = \left\langle T,\overline{F}\varphi\right\rangle_{S'(\mathbb{R}^n),S(\mathbb{R}^n)}.$$

ملاحظة

لاحظ أن التعريف السابق لا يسمح عموما بالقيام بحساب صريح لـ $\hat{T}$ أو $\overline{F}T$.

مبرهنة 2.4

لدينا :

1) $T \in S'(\mathbb{R}^n) \Leftarrow \hat{T} \in S'(\mathbb{R}^n)$.

2) إن تحويل فوريي $F : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ تشاكل ومقلوبه هو $F^{-1} = (2\pi)^{-n} \overline{F}$.

البرهان

1) نلاحظ أنه إذا كان $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ فإن $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. ومن جهة أخرى، يتضح من المبرهنة 2.2 أن $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ عندما يكون $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. ومن ثمّ يأتي من ملاحظة التعريف 1.3 عندما $T \in S'(\mathbb{R}^n)$:

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists C : \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad \left|\left\langle \mathrm{T}, \hat{\varphi} \right\rangle\right| \le C.N_p(\hat{\varphi}).$$

لكن ذلك يؤدي، حسب المبرهنة 2.2، إلى :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists C' : \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad \left|\left\langle \hat{\mathrm{T}}, \varphi \right\rangle\right| = \left|\left\langle \mathrm{T}, \hat{\varphi} \right\rangle\right| \le C'.N_{p+n+1}(\varphi),$$

أي أنه يوجد q $(= p+n+1)$ بحيث :

$$\exists C' > 0 : \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad \left|\left\langle \hat{\mathrm{T}}, \varphi \right\rangle\right| \le C'.N_q(\varphi).$$

وهذا يعني أن $\hat{T} \in S'(\mathbb{R}^n)$.

وبنفس الطريقة نثبت أن :

$T \in S'(\mathbb{R}^n) \Leftarrow \overline{F}T \in S'(\mathbb{R}^n)$.

2) يكفي أن نبيّن بأن :

$$\forall T \in S'(\mathbb{R}^n), \quad (2\pi)^{-n} F\overline{F}T = (2\pi)^{-n} \overline{F}FT = T.$$

لاحظ أن 1) يؤدي إلى:

$$\forall T \in S'(\mathbb{R}^n), \overline{F}FT \in S'(\mathbb{R}^n), \ F\overline{F}T \in S'(\mathbb{R}^n).$$

ومن ثمّ، يتضح من المبرهنة 2.2 :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad \left\langle (2\pi)^{-n}\overline{F}FT, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathrm{T}, (2\pi)^{-n}\overline{F}FT\varphi \right\rangle$$
$$= \left\langle \mathrm{T}, \varphi \right\rangle,$$

وهذا يعني أن :

$$\forall T \in S'(\mathbb{R}^n), \quad (2\pi)^{-n}\overline{F}FT = T.$$

وبنفس الطريقة نثبت العلاقة:

$$\forall T \in S'(\mathbb{R}^n), \quad (2\pi)^{-n}F\overline{F}T = T. \square$$

أمثلة (يرمز δ لتوزيع ديراك)

1) لدينا : $\hat{\delta} = 1$. للتأكد من ذلك نكتب :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \ \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}.0.\xi}\varphi(\xi)d\xi = F\varphi(0)$$
$$= \left\langle \delta, \hat{\varphi} \right\rangle$$
$$= \left\langle \hat{\delta}, \varphi \right\rangle,$$

أي أن :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \ \int_{\mathbb{R}^n} 1.\varphi(\xi)d\xi = \left\langle 1, \varphi \right\rangle \quad \left\langle \hat{\delta}, \varphi \right\rangle,$$

وهذا يعني $\hat{\delta} = 1$.

2) لدينا : $\hat{1} = (2\pi)^n \delta$. لرؤية ذلك نكتب، بناءً على المثال السابق :

$$\begin{cases} (2\pi)^{-n}\overline{F}F\delta = \delta, \\ (2\pi)^{-n}\overline{F}1 = \delta. \end{cases}$$

ونلاحظ أن $\overline{F}1 = F1$ نظرا لكون :

$$\begin{aligned}\forall \varphi\in S(\mathbb{R}^n),\ <F1,\varphi> &= <1,F\varphi> \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)dx \\ &\overset{x=-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy.\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)dy \\ &= <\overline{F}1,\varphi>.\end{aligned}$$

ومن ثمّ :

$$\begin{aligned}\delta &= (2\pi)^{-n}\overline{F}1 \\ &= (2\pi)^{-n}\hat{1}.\end{aligned}$$

نشير إلى أن هناك طريقة مباشرة لإثبات العلاقة $\hat{1}=(2\pi)^n\delta$ مبنية على المساواة التالية :

$$\forall a>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\qquad F(e^{-a|x|^2})=(\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}}.e^{-\frac{|x|^2}{4a}}$$

الواردة في التوطئة 3.1.

3) لنثبت أن $F(\tau_aT)=e^{-ia.\xi}FT$ لكل $T\in S'(\mathbb{R}^n)$ حيث τ_aT هو انسحاب التوزيع $T\in S'(\mathbb{R}^n)$. لدينا :

$$\begin{aligned}\forall \varphi\in S(\mathbb{R}^n),\quad \langle F(\tau_aT),\varphi\rangle &= \langle \tau_aT,\widehat{\varphi}\rangle \\ &= \langle T,\tau_{-a}\widehat{\varphi}\rangle.\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى :

$$\begin{aligned}\forall \varphi\in S(\mathbb{R}^n),\quad \tau_{-a}\widehat{\varphi}(x) &= \widehat{\varphi}(x+a) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x+a).\xi}\varphi(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}e^{-ia.\xi}\varphi(\xi)d\xi \\ &= F\left(e^{-ia.\xi}\varphi(\xi)\right).\end{aligned}$$

إذن :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad \left\langle F(\tau_a T), \varphi \right\rangle = \left\langle T, F\left(e^{-ia.\xi}\varphi(\xi)\right)\right\rangle$$
$$= \left\langle FT, e^{-ia.\xi}\varphi(\xi)\right\rangle$$
$$= \left\langle e^{-ia.\xi}FT, \varphi \right\rangle.$$

ومن ثم يأتي $F(\tau_a T) = e^{-ia.\xi}FT$.

4) من السهل أن نثبت أيضا : $F(e^{ia.\xi}T) = \tau_a \widehat{T}$.

مبرهنة 3.4

ليكن T توزيعا متراص الحامل على $\mathbb{R}^n$ (أي $T \in E'(\mathbb{R}^n)$). لدينا :

$$\widehat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$
$$\widehat{T}(\xi) = \left\langle T(x), e^{-ix.\xi}\right\rangle.$$

البرهان

نضع $u(\xi) = < T(x), e^{-ix.\xi} >$. حسب المبرهنة 2.1 من الفصل الرابع فإن $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ علما أننا نستطيع المبادلة بين عمليتي الاشتقاق والمكاملة :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad < u, \varphi >_{D',D} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi)\varphi(\xi)d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} < T(x), e^{-ix.\xi} >_{E',E} \varphi(\xi)d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} < T(x), e^{-ix.\xi}\varphi(\xi) >_{E',E} d\xi$$
$$= < T(x), \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi(\xi)d\xi >_{E',E}$$
$$= < T, \widehat{\varphi} >_{S',S}$$
$$= < \widehat{T}, \varphi >_{S',S}.$$

ومنه المطلوب.

ملاحظة

1) نعيد إثبات العلاقة $\hat{\delta}=1$. نعلم أن δ توزيع متراص الحامل (حامله $\{0\}$). لدينا حسب المبرهنة السابقة، لكل توزيع متراص الحامل T :

$$\widehat{T}(\xi)=\left\langle T(x),e^{-ix.\xi}\right\rangle.$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(\xi)&=\left\langle \delta(x),e^{-ix.\xi}\right\rangle\\&=e^{-i\,0.\xi}\\&=1.\end{aligned}$$

2) لنبحث عن $F(D^{\alpha}\delta)$ من أجل $\alpha\in\mathbb{N}^n$. لدينا (باعتبار أن $\varphi_{\xi}(x)=e^{-ix.\xi}$) :

$$\begin{aligned}F(D^{\alpha}\delta)(\xi)&=\left\langle D^{\alpha}\delta,\varphi_{\xi}\right\rangle\\&=(-1)^{|\alpha|}\left\langle \delta,D^{\alpha}\varphi_{\xi}\right\rangle\\&=(-1)^{|\alpha|}(-i)^{|\alpha|}\xi^{\alpha}\left\langle \delta,\varphi_{\xi}\right\rangle\\&=i^{|\alpha|}\xi^{\alpha}\underbrace{\left\langle \delta,\varphi_{\xi}\right\rangle}_{=1}\\&=i^{|\alpha|}\xi^{\alpha}.\end{aligned}$$

ومنه : $F(D^{\alpha}\delta)(\xi)=i^{|\alpha|}\xi^{\alpha}$ لكل $\xi\in\mathbb{R}^n$.

3) لدينا أيضا:

$$\begin{aligned}&F(\delta_a)(\xi)=e^{-ia.\xi},\\&F(e^{ia.\xi})=(2\pi)^n\delta_a,\\&F(\xi^{\alpha})=(2\pi)^n i^{|\alpha|}D^{\alpha}\delta.\end{aligned}$$

لنقدم الآن نتيجة مرتبطة بفضاء لوبيغ $L^2(\mathbb{R}^n)$:

مبرهنة 4.4

إن التطبيق

$$(2\pi)^{-n/2}F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$f \to (2\pi)^{-n/2}\widehat{f}$$

تقايس (إزومترية)، أي أنه تشاكل يحقق لكل $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2}\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

البرهان

يتم وفق الخطوات التالية :

1) باعتبار f و g من $S(\mathbb{R}^n)$ ، ووضع $h = \overline{\widehat{g}}$ نتأكد بسهولة من أن :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{h}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)h(x)dx,$$
$$\hat{h} = (2\pi)^n \overline{g}.$$

2) نستنتج المساواة الخاصة بالضرب الداخلي في $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(2\pi)^n (f,g)_{L^2} = (\widehat{f},\widehat{g})_{L^2}.$$

3) باللجوء إلى كثافة $S(\mathbb{R}^n)$ في $L^2(\mathbb{R}^n)$ نثبت قيام العلاقة الأخيرة من أجل f و g في $L^2(\mathbb{R}^n)$. ومن ثمّ تأتي العلاقة $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2}\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ لكل $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. نستخلص من ذلك أن التطبيق الخطي :

$$(2\pi)^{-n/2}F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

تباين مستمر؛ وهو غامر لأن العلاقة $g = \widehat{f}$ تعني $(2\pi)^{-n}\overline{F}g = f$.

والعودة مرة أخرى إلى $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2}\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ تثبت أن التطبيق العكسي مستمر.□

ملاحظة

1) ينبغي الانتباه إلى أننا لم نعرّف تحويل فوريي لـ $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ كدالة من خلال تكامل بل نعرّفه بوصف $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ ، أي أن :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \quad \langle \hat{f}, \varphi \rangle_{S',S} = \langle f, \hat{\varphi} \rangle_{S',S}$$
$$= (f, \hat{\varphi})_{L^2}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x).\overline{\hat{\varphi}}(x)dx.$$

2) إذا كانت u و v دالتين قابلتين للمكاملة على $\mathbb{R}^n$ ، وكذا $\hat{u}$ و $\hat{v}$ فإن : $F(u*v) = Fu.Fv$.

3) ينتج مما سبق أن لدينا العلاقة $F(u*v) = Fu.Fv$ في الحالة التي يكون فيها $u \in S(\mathbb{R}^n)$ و $v \in S(\mathbb{R}^n)$ لأن ذلك يستلزم أن $\hat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$ و $\hat{v} \in S(\mathbb{R}^n)$ ، علما أن $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

4) لدينا أيضا $F(u*v) = Fu.Fv$ في الحالة التي يكون فيها u توزيعا متراص الحامل على $\mathbb{R}^n$ و $v \in S'(\mathbb{R}^n)$. نلاحظ في هذه الحالة أن :

$$\begin{cases} u*v \in S'(\mathbb{R}^n), \\ \hat{u} \in O_M(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

5) يتأتى من ذلك الاستلزام التالي :

$$u \in S'(\mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha Fu, \\ F(x^\alpha u) = i^{|\alpha|} D^\alpha Fu. \end{cases}$$

5- المعادلات التزاوجية

نقدم هنا عيّنة من المعادلات التفاضلية الجزئية التي يمكن حلها بفضل استخدام تحويل فوريي.

1.5. مسألة وحل

نذكّر أن $E'(\mathbb{R}^n)$ يرمز لفضاء التوزيعات المتراصة الحامل، ونعتبر $A\in E'(\mathbb{R}^n)$ و $f\in S'(\mathbb{R}^n)$. لنبحث عن حلّ $u\in S'(\mathbb{R}^n)$ للمعادلة :

$$A*u=f\ .$$

نلاحظ أن هذه المعادلة تكافئ (في حال $u\in S'(\mathbb{R}^n)$) :

$$\widehat{A}(\xi)\hat{u}(\xi)=\widehat{f}(\xi).$$

إذا افترضنا أن $\widehat{A}(\xi)\neq 0$ لكل $\xi\in\mathbb{R}^n$ ، فإننا نستطيع كتابة:

$$\hat{u}(\xi)=\frac{\widehat{f}(\xi)}{\widehat{A}(\xi)}.$$

ولما كان $\widehat{A}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ حسب المبرهنة 3.4 فإن $\frac{1}{\widehat{A}}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ومن ثمّ :

$$\frac{\widehat{f}}{\widehat{A}}\in S'(\mathbb{R}^n).$$

ومنه ينتج أن:

$$u(\xi)=(2\pi)^{-n}\overline{F}\left(\frac{\widehat{f}(\xi)}{\widehat{A}(\xi)}\right).$$

وهو الحل المنشود عندما نفترض أن $\widehat{A}(\xi)\neq 0$ لكل $\xi\in\mathbb{R}^n$. أما إذا كان هذا الشرط غير متوافر فلا نستطيع اتباع هذه الطريقة.

لاحظ أن هذه الطريقة لا توفّر معلومات حول الحل u عندما يكون ذلك الحل توزيعا غير معتدل.

2.5. مثالان في استخدام تحويل فوريي

1) معادلة لابلاس: نعتبر $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ومعادلة لابلاس $\Delta u = 0$ ، أي أننا نبحث عن التوزيعات المعتدلة التوافقية Harmonic (نذكّر أن دالة u تكون توافقية إذا كان $\Delta u = 0$). باستخدام تحويل فوريي نجد $F(\Delta u) = 0$.

ومن جهة أخرى :

$$\begin{aligned} F(\Delta u) &= F\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^{\,2}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^{\,2}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} F\left(-ix_j\right)^2 \hat{u} \\ &= -\|x\|^2 \hat{u}. \end{aligned}$$

وبالتالي فإن حلّ المعادلة $\Delta u = 0$ يحقق $\|x\|^2 \hat{u} = 0$.

إذن $\hat{u}_{|\mathbb{R}^n_*} = 0$ ، ذلك أن :

$$\begin{cases} \varphi \in D(\mathbb{R}^n_*) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\varphi}{\|x\|^2} = \psi \in D(\mathbb{R}^n_*), \\ \left\langle \hat{u}, \varphi \right\rangle = \left\langle \hat{u}, \|x\|^2 . \dfrac{\varphi}{\|x\|^2} \right\rangle = \left\langle \|x\|^2 \hat{u}, \psi \right\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

ومنه : $\operatorname{supp} \hat{u} = \{0\}$.

يمكننا أن نستنتج (وهذا يتطلب القيام ببعض الحسابات التي تميّز توزيع ديراك δ) بأن $\hat{u}$ يكتب على الشكل :

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \le m \in \mathbb{N}} a_\alpha D^\alpha \delta.$$

لذا :

$$u=\sum_{|\alpha|\leq m\in\mathbb{N}}(2\pi)^{-n}a_\alpha\overline{F}D^\alpha\delta$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq m}\underbrace{(2\pi)^{-n}a_\alpha i^{|\alpha|}}_{b_\alpha}\xi^\alpha$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq m}b_\alpha\xi^\alpha.$$

وهكذا يتضح أن u كثير حدود (لأن المعاملات (b_α) ثابتة). ومنه يمكن صياغة النتيجة التي بلغناها على النحو التالي :

مبرهنة 3.5

> التوزيعات المعتدلة التوافقية هي كثيرات الحدود التوافقية.

2) نعتبر الآن المعادلة

$$\Delta u-\lambda u=f$$

حيث $f\in S'(\mathbb{R}^n)$ و $0<\lambda$ ثابت معطى، ونبحث عن الحل $u\in S'(\mathbb{R}^n)$. من أجل ذلك نستخدم تحويل فوريي فنكتب $F(\Delta u-\lambda u)=Ff$. وعند تفصيل الحساب نجد :

$$-\left(\|x\|^2+\lambda\right)\hat{u}=\hat{f}\ .$$

ومنه :

$$\hat{u}=-\frac{\hat{f}}{\|x\|^2+\lambda}.$$

ومن ثمّ :

$$u=(2\pi)^{-n}\overline{F}\left(-\frac{\hat{f}}{\|x\|^2+\lambda}\right).$$

وهكذا نستطيع صياغة النتيجة التالية :

مبرهنة 4.5

لدينا :

$$\forall \lambda > 0,\ \forall f \in S'(\mathbb{R}^n),\ \exists! u \in S'(\mathbb{R}^n):\ \Delta u - \lambda u = f\ ,$$

والحل u هو $u = (2\pi)^{-n}\overline{F}\left(-\dfrac{\hat{f}}{\|x\|^2+\lambda}\right)$.

فعلى سبيل المثال إذا أخذنا $f = \delta$ فإن الحل المطلوب يصبح هو الحل الأساسي، ونحن نعلم أن $\hat{\delta} = 1$. ولذا :

$$u = (2\pi)^{-n}\overline{F}\left(-\frac{1}{\|x\|^2+\lambda}\right).$$

6- تمارين

تمرين 1

ليكن $T \in D'(\mathbb{R})$ بحيث :

$$\forall f \in S(\mathbb{R}),\quad f.T \in S(\mathbb{R}).$$

أثبت أن $T \in C^\infty(\mathbb{R})$.

تمرين 2

أثبت أنه إذا كان $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ فإن $T * \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

تمرين 3

عيّن $\widehat{pv\,\frac{1}{x}}$ (إرشاد : لاحظ أن $x.pv\,\frac{1}{x} = 1$ وأن $pv\frac{1}{x}$ فردي).

تمرين 4

1) أثبـت أن الدالـة f المعرفـة علـى $\mathbb{R}$ بــ $f(x)=e^x\cos e^x$ تنتمـي إلى الفضاء $S'(\mathbb{R})$.

2) برهن أن الدالة الأسّية $x\mapsto e^x$ من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ لا تنتمي إلى الفضاء $S'(\mathbb{R})$ (إرشاد : يمكن البدء باعتبار دالة $\varphi\in D(\mathbb{R})$ وإثبات أنه مهما كان العدد الطبيعي m يوجد ثابت موجب C بحيث : $N_m(\tau_a\varphi)\leq C.(1+|a|)^m$).

تمرين 5

تأكد من وجود جداءات التـزاوج التاليـة : $\delta_a*\delta_b$ ، $\delta'*H$ ، $\delta'*1$ ، $1_{]a,b[}*1_{]c,d[}$ (حيـث H هـي دالـة هيفسـايد و δ_c توزيـع ديـراك عنـد c و 1_A الدالة المميزة للمجموعة A).

تمرين 6

احسب جداء التزاوج في كل حالة من الحالات التالية بعد التأكد من وجوده (حيث H هي دالة هيفسايد و δ توزيع ديراك) :

1) δ_a*H.

2) $\delta'*1$.

3) $T\in E'(\mathbb{R}),\ T*1$.

4) $T\in E'(\mathbb{R}),\ T*e^x$.

5) $\delta'*pv\frac{1}{x}$.

6) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_n^{(n)}\right)*\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_n\right)$.

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖