

## الفصل السابع

## مسائل ناقصية خطية

في هذا الفصل نتطرق إلى مبرهنة ستانباكيا Stampacchia ومبرهنة لاكس-ميلغرام Lax-Milgram. كما نتعرض إلى بعض التطبيقات المتمثلة في حل بعض المسائل الخطية الناقصية Elliptic.

## 1- تمهيدات

نقدم هنا، بعض المعلومات التي نرى ضرورتها في إثبات بعض المبرهنات التي سوف نعرضها في هذا الفصل حتى إن كان بعضها معروفا لدى القارئ.

## قضية 1.1 (مبرهنة النقطة الثابتة)

ليكن  $(X, d)$  فضاءً مترياً تاماً و  $S : X \rightarrow X$  تطبيقاً يحقق :

$$d(Su, Sv) \leq k d(u, v), \forall u, v \in X, 0 < k < 1.$$

عندئذ تكون لـ  $S$  نقطة ثابتة وحيدة  $w \in X$ ، أي بحيث أن  $Sw = w$ .

## قضية 2.1 (مبرهنة تمثيل ريس Riesz)

ليكن  $H$  فضاء هيلبرتيا، وليكن  $H'$  فضاءه الثنوي. عندئذ، لكل

$f \in H'$ ، يوجد عنصر وحيد  $u \in H$  بحيث :

$$\langle f, v \rangle = (u, v), \forall v \in H$$

حيث تمثّل  $\langle ., . \rangle$  الثنوية بين  $H$  و  $H'$ ، بينما يرمز  $(. , .)$  للضرب الداخلي.

## 2- المسائل التغيرائية Variational Problems

نتعرض في هذا الباب إلى مبرهنة ستانباكيا Stampacchia<sup>1</sup> وكذلك إلى مبرهنة لاكس - ميلغرام<sup>2</sup> Lax<sup>3</sup>-Milgram.

### تعريف 1.2 (شكل ثنائي الخطية)

ليكن  $H$  فضاء هيلبرتيا، وليكن التطبيق  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ .

نقول إن  $a$  شكل ثنائي الخطية على  $H$  إذا:

$$(1) \quad a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$

$$(2) \quad a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)$$

لكل  $u, v, w \in H$  ولكل  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

### تعريف 2.2 (التناظر)

ليكن  $H$  فضاء هيلبرتيا و  $a$  شكلاً ثنائي الخطية معرفاً على  $H$ .

نقول إن  $a$  متناظر (تناظري) إذا تحقق:

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in H.$$

### تعريف 3.2 (القسرية)

ليكن  $H$  فضاء هيلبرتيا و  $a$  شكلاً ثنائي الخطية معرفاً على  $H$ .

نقول إن  $a$  قسري<sup>4</sup> coercive إذا وجد ثابت  $\alpha > 0$  بحيث:

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

<sup>1</sup> غيدو ستامباكيا (1922 - 1978) رياضي إيطالي.

<sup>2</sup> آرثر نورتن ميلغرام (1912 - 1960) رياضي أمريكي.

<sup>3</sup> بيتر لاكس (1926 - .) رياضي أمريكي من أصل مجري.

<sup>4</sup> تستعمل في بعض المراجع أيضاً كلمة ناقصي أو أهليجي للتعبير عن القسرية (coercivity).

## قضية 4.2

ليكن  $H$  فضاء هيلبرتيا و  $a$  شكلاً ثنائي الخطية معرفاً على  $H$ .  
نقول إن  $a$  مستمر (أو محدود) إذا وجد ثابت  $C > 0$  بحيث :

$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|, \forall u,v \in H.$$

## تعريف 5.2 (التحدّب)

ليكن  $X$  فضاء بناخياً وليكن  $K \subset X$ . نقول إن  $K$  مجموعة  
جزئية محدّبة إذا كان :

$$tu + (1-t)v \in X, \forall u,v \in K, 0 \leq t \leq 1.$$

## مبرهنة 6.2 (ستانباكيا)

لتكن  $K$  مجموعة جزئية مغلقة ومحدّبة وغير خالية من فضاء  
هيلبرتي  $H$ . وليكن  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  شكلاً ثنائي الخطية مستمراً وقسرياً.

عندئذ، لكل  $\varphi \in H'$  يوجد عنصر وحيد  $u \in K$  بحيث :

$$(1) \quad a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \forall v \in K$$

بالإضافة، إذا كان  $a$  متناظراً فإن  $u$  يتمتع بالخاصية :

$$(2) \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

## البرهان

بما أن  $\varphi \in H'$ ، فإن استخدام مبرهنة تمثيل ريس يبيّن وجود عنصر وحيد

$f \in H$  يحقق :

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v), \forall v \in H.$$

ومن جهة أخرى، لكل عنصر مثبت  $w \in H$ ، فالتطبيق  $v \rightarrow a(w, v)$

شكل خطي مستمر معرف على  $H$ ، ولذا يوجد عنصر وحيد  $Aw \in H$  بحيث :

$$(3) \quad a(w, v) = (Aw, v), \forall v \in H.$$

التطبيق  $A: H \rightarrow H$  المعرف بـ (3) له الخواص الآتية:

(أ) الخطية: ليكن  $w \in H$  و  $z \in H$  و  $\alpha \in \mathbb{C}$ . لدينا:

$$\forall v \in H, (A(w+z), v) = a(w+z, v)$$

$$= a(w, v) + a(z, v)$$

$$= (Aw, v) + (Az, v)$$

$$= (Aw + Az, v),$$

$$(A(\alpha w), v) = a(\alpha w, v) = \alpha a(w, v) = \alpha (Aw, v) = (A(\alpha w), v).$$

وعليه فإن  $A(\alpha w + z) = \alpha Aw + Az$ .

(ب) الاستمرار: ليكن  $w \in H$ . لدينا:

$$\forall v \in H, |(Aw, v)| = |a(w, v)|$$

$$\leq C \|w\| \|v\|,$$

مما يستلزم وجود ثابت موجب  $C$  بحيث:

$$\|Aw\| = \sup_{v \in H} \frac{|(Aw, v)|}{\|v\|}$$

$$\leq C \|w\|$$

مهما كان  $w \in H$ . إذن التطبيق  $A$  خطي ومستمر ويحقق:

$$\forall w \in H, (Aw, w) = a(w, w)$$

$$\geq \alpha \|w\|^2.$$

الآن نود أن نبين أنه يوجد عنصر  $u \in H$  يحقق:

$$(4) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K$$

لنأخذ  $\delta$  صغيراً بحيث  $0 < \delta < \frac{2\alpha}{C^2}$ . إن المتباينة (4) تكافئ:

$$(5) \quad (\delta f - \delta Au + u - u, v - u) \leq 0, \forall v \in K$$

مما يستلزم أن:  $u = P_K(\delta f - \delta Au + u)$  حيث إن  $P_K: H \rightarrow K$  هو مؤثر

الإسقاط العمودي على  $K$ . نعرّف الآن  $S: K \rightarrow K$  كالآتي:

$$Sv = P_K(\delta f - \delta Av + v), \forall v \in K$$

فمن خواص مؤثر الإسقاط لدينا :  $\|Sv - Sw\| \leq \|(v - w) - \delta(Av - Aw)\|$  ،  
ومنه يأتي :

$$\begin{aligned} \|Sv - Sw\|^2 &\leq \|v - w\|^2 - 2\delta(Av - Aw, v - w) + \delta^2 \|Av - Aw\|^2 \\ &\leq [1 - 2\delta\alpha + \delta^2 C^2] \|v - w\|^2. \end{aligned}$$

ولما كان  $0 < \delta < \frac{2\alpha}{C^2}$  فإن  $0 < \beta = 1 - 2\delta\alpha + \delta^2 C^2 < 1$ .

وباستخدام مبرهنة النقطة الثابتة (القضية 1.1) فإنه يوجد عنصر وحيد  $u \in K$  يحقق  $Su = u$  ، ومن ثمّ يحقق (5) و (4).

وباستغلال (3) نصل إلى أن  $u$  هو الحل الوحيد للمتباينة (1).

وعندما يكون  $a$  متناظراً فإنه من السهل التحقق من أن  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  يعرف ضرباً داخلياً له تنظيم (norm)  $\sqrt{a(v, v)}$  مكافئ للتعظيم الأساسي للفضاء  $H$ . وباستخدام مبرهنة تمثيل ريس فإن، لكل  $\varphi \in H'$  ، يوجد عنصر وحيد  $g \in H$  بحيث :

$$(6) \quad \langle \varphi, v \rangle = a(g, v), \forall v \in H.$$

ومنه فإن (1) تكافئ :

$$(7) \quad a(g - u, v - u) \leq 0, \forall v \in K$$

وهذا يعني أن  $g$  هي إسقاط  $u$  على  $K$  بالنسبة للضرب الداخلي الجديد، أي أن  $g = P_K(u)$  (بالنسبة للضرب الداخلي الجديد). وبالتالي فإن  $u$  هو الحل الوحيد للمسألة  $\min_{v \in K} [a(g - v, g - v)]^{\frac{1}{2}}$  أو للمسألة  $\min_{v \in K} [a(g - v, g - v)]$  ، أي

$$\min_{v \in K} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right] \text{ أو } \min_{v \in K} [a(v, v) - 2a(g, v)]$$

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

وهي العلاقة المطلوبة في (2).  $\square$

لازمة 7.2 (توطئة لأكس - ميلغرام)

ليكن  $H$  فضاء هيلبرتيا و  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  شكلاً ثنائي الخطية مستمراً وقسرياً. عندئذ، لكل  $\varphi \in H'$ ، يوجد عنصر وحيد  $u \in H$  بحيث :

$$(8) \quad a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in H.$$

بالإضافة إلى ذلك، إذا كان  $a$  متناظراً فإن  $u$  تحقق :

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

البرهان

باستخدام المبرهنة 1.2 يتضح وجود عنصر وحيد  $u \in H$  يحقق :

$$a(u, w - u) \geq \langle \varphi, w - u \rangle, \forall w \in H.$$

لنأخذ  $w = v + u$ . ومن ثم نصل إلى :

$$(9) \quad a(u, v) \geq \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in H.$$

ولنأخذ الآن  $w = -v + u$ . فنحصل على :

$$(10) \quad a(u, v) \leq \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in H.$$

وبمراعاة (9) و (10) نحصل على (8).

الجزء الباقي من اللازمة هو نتيجة مباشرة من المبرهنة 1.2.

### 3 - تطبيقات

كل الدوال التي نعتبرها في الأمثلة الموالية ستكون ذات قيم حقيقية.

المثال 1

تعطى  $f \in H^{-1}(\Omega)$  (علما أن  $H^{-1}(\Omega)$  هو الفضاء الثنوي للفضاء  $H_0^1(\Omega)$

الذي يمثل ملاصقة  $(D(\Omega))$ .

نودّ إيجاد دالة  $u \in H_0^1(\Omega)$  تحقق :

$$(11) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

حيث  $(a_{ij})$  دوال تتمتع بالخاصية :

$$(12) \quad \begin{cases} a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \forall i, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \geq \alpha |\zeta|^2, & a.e x \in \Omega, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

و  $\alpha > 0$  عدد حقيقي و  $\Omega$  مجال محدود من  $\mathbb{R}^n$ .

نضرب المعادلة (11) في  $\varphi \in D(\Omega)$ ، ونكامل على  $\Omega$  لنحصل،

مستعملين الشرط الحدي وصيغة غرين Green للتكامل، على :

$$(13) \quad \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

تسمى المعادلة (13) الصيغة التغيرانية (Variational form) أو الصيغة الضعيفة

(Weak form) للمعادلة (11). ولما كان  $D(\Omega)$  كثيفا في  $H_0^1(\Omega)$  يمكن صياغة

المسألة (11) كالآتي: أوجد  $u \in H_0^1(\Omega)$  بحيث :

$$(14) \quad \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**مبرهنة 1.3** (وجود ووحداية)

إذا كانت  $f \in H^{-1}(\Omega)$  وكانت الدوال  $(a_{ij})$  تحقق (12) فإن للمسألة

(11) حلا  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

البرهان

نعرف الشكل الثنائي الخطية الآتي :

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx,$$

كما نأخذ الشكل الخطي التالي:

$$F(v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

وحيث إن  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$  فإنه يوجد  $M > 0$  يحقق  $|a_{ij}(x)| \leq M$  ، وذلك لكل  $i, j = 1, 2, \dots, n$  ولكل  $x$  تقريباً على  $\Omega$ . ومنه فإن :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in H_0^1(\Omega), |a(u, v)| &\leq M \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن  $a$  شكل ثنائي الخطية محدود.  
لدينا أيضاً :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

وهو ما يبيّن أن  $a$  شكل قسري.

تجدد الإشارة هنا إلى أننا استعملنا التنظيم المكافئ على الفضاء  $H_0^1(\Omega)$ .

الآن نبيّن أن  $F$  محدود. لدينا :  $|F(v)| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ .

وباستعمال توطئة لاكس - ميلغرام فإنه يوجد  $u \in H_0^1(\Omega)$  وحيد يحقق (14)

لكل  $v \in H_0^1(\Omega)$ . □

### تعريف 2.3 (الحل الضعيف)

تسمى المسألة (11) بمسألة حدّية، ويسمى الشرط الحدي  $u = 0$  على

$\partial\Omega$  (حافة  $\Omega$ ) بشرط ديرشلت<sup>5</sup> Dirichlet.

تسمى الدالة  $u \in H_0^1(\Omega)$  التي تحقق (14) الحل الضعيف للمسألة (11).

<sup>5</sup> لوجان ديرشلت (1805 - 1859) رياضي ألماني.

ملاحظة

نحصل على نفس النتيجة إذا كانت  $f \in L^2(\Omega)$ . كما يمكن للدالة  $u$  أن تكون ملساء إذا انتمت  $f$  والمعاملات  $(a_{ij})$  إلى فضاءات سوبولوف ذات رتب عالية. قارن هذه النتيجة بما جاء في المبرهنة 1.3 من الفصل السادس.

مثال 2

ليكن  $\Omega$  مجالا محدودا من  $\mathbb{R}^n$ ، نبعث عن  $u \in H^1(\Omega)$  تحقق المسألة

الحدية :

$$(15) \quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u(x) = f(x), x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

حيث تحقق  $f$  و  $(a_{ij})$  شروط المسألة (11). بالإضافة إلى ذلك نفترض أن :  
 $a_0 \in L^\infty(\Omega)$  و  $a_0(x) \geq \beta > 0$  تقريبا لكل  $x \in \Omega$ .

هذه المسألة تسمى مسألة نيومان Neumann<sup>6</sup> حيث يمثل  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  المشتق

الناظمي ل  $u$  على الحافة  $\partial\Omega$ . يسمى الشرط  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$  على  $\partial\Omega$  شرط نيومان.

نفرض أن  $\Omega$  ذات حدود ملساء بكفاية (يكفي أن تكون من الصنف  $C^1$ )، ولتكن  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ . بضرب المعادلة (15) في  $\varphi$  والمكاملة على  $\Omega$  نحصل على :

$$(16) \quad \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + a_0(x)u(x)\varphi(x) \right] dx = \langle f, \varphi \rangle$$

ولما كان  $C(\bar{\Omega})$  كثيفا في  $H^1(\Omega)$  فإن (16) تبقى صحيحة، لكل  $v \in H^1(\Omega)$

<sup>6</sup> فون نيومان (1832 - 1925) رياضي ألماني.

$$(17) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + a_0(x)u(x)v(x) \right] dx = \langle f, v \rangle,$$

تعريف 3.3 (الحل الضعيف)

تسمى (17) الصياغة الضعيفة أو التغيرائية للمسألة (15). كما تسمى الدالة  $u$  الحل الضعيف للمسألة (15).

مبرهنة 4.3 (وجود ووحدانية)

ليكن  $\Omega$  مجالاً ذا حدود ملساء من  $\mathbb{R}^n$ . نفرض أن  $f \in H^{-1}(\Omega)$  وأن  $a_0$  و  $(a_{ij})$  تحقق الشروط المذكورة أعلاه. عندئذ يكون للمسألة (15) حل ضعيف وحيد  $u \in H^1(\Omega)$  يحقق (17).

البرهان

نعرف الشكل الثنائي الخطية على  $H^1(\Omega)$ :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + a_0(x)u(x)v(x) \right] dx.$$

ولما كان  $a_0, a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$  فإنه يوجد ثابت موجب  $C$  بحيث :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq M \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|C_0\|_{\infty} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن  $a$  شكل ثنائي خطية محدود. كما أن :

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\Omega} u^2 dx \\ &\geq \alpha_0 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \end{aligned}$$

حيث  $\alpha_0 = \min(\alpha, \beta)$ . وهو ما يثبت أن  $a$  شكل قسري. أما التطبيق  
 $F(v) = \langle f, v \rangle$  فقد بيننا سابقاً أنه خطي ومحدود.  
 وباستعمال توطئة لاكس- ميلغرام، يتبين وجود  $u \in H^1(\Omega)$  وحيد يحقق  
 (17). وهو الحل الضعيف المطلوب.  $\square$

## ملاحظة

لو اعتبرنا المسألة (15) بشرط ديرشلت، بدل شرط نيومن فإننا نحصل  
 على حل وحيد دون اشتراط محدودية  $\Omega$  ولا ملوسة حدودها.  
 يمكن أيضاً حل المسألة (11) في مجال  $\Omega$  محدود باتجاه واحد وذلك لأن  
 متباينة بوانكاريه Poincaré<sup>7</sup> صالحة للتطبيق في هذه الحالة.

## مثال 3

نعتبر في الفضاء  $H_0^1(\Omega)$ ، حيث  $\Omega$  مجال محدود من  $\mathbb{R}^n$ ، المجموعة

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v(x) \geq 0, a.e. x \in \Omega\}.$$

نود إيجاد حل للمترابحة التغيرائية :

$$(18) \quad \langle -\Delta u, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \forall v \in K$$

حيث  $f \in H^{-1}(\Omega)$ .

## مبرهنة 5.3

للمسألة (18) حلّ وحيد  $u \in K$ .

بالإضافة إلى ذلك فإن  $u$  يحقق :

$$(19) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \langle f, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - \langle f, v \rangle \right\}.$$

<sup>7</sup> هنري بوانكاريه (1854 - 1912) رياضي فرنسي.

البرهان

الشكل التغيراتي للمتراحة (18) هو :

$$(20) \quad \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot (\nabla v(x) - \nabla u(x)) dx \geq \langle f, v - u \rangle, \forall v \in K.$$

لنعتبر الشكل الثائي الخطية :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx .$$

من الواضح أن:

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

وهو ما يبين أن  $a$  شكل مستمر وقسري. أما الشكل الخطي  $F(v) = \langle f, v \rangle$  فقد سبق ورأينا أنه مستمر.

ليكن  $v, w \in K$  من السهل رؤية (الرمز "a.e." يعني "تقريباً حيثما كان"):

$$t v(x) + (1-t)w(x) \geq 0, \text{ a.e. } x \in \Omega$$

أي أن  $t v + (1-t)w \in H_0^1(\Omega)$  ومنه نستنتج أن  $K$  مجموعة محدّبة.

لتكن  $(v_n)$  متتالية من  $K$ . إنها من  $H_0^1(\Omega)$ . وإذا كانت  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$  فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) \geq 0 \text{ فإن } v_n(x) \geq 0 \text{ فإن } v \in H_0^1(\Omega), \text{ ذلك لأن } H_0^1(\Omega) \text{ مغلق. ولما كان}$$

وذلك تقريباً لكل  $x \in \Omega$  (a.e.). إذن  $v \in K$  ومنه فإن  $K$  مجموعة محدّبة ومغلقة.

باستخدام مبرهنة ستانباكيا نستنتج وجود عنصر وحيد  $u \in K$  يحقق

$$(20) \text{ وكذلك (19). ومن ثمّ فهو حل ضعيف للمتراحة (18). } \square$$

## 4- مبدأ الأعظمية Maximum Principle

نتناول في هذا البند موضوع تطبيق مبدأ الأعظمية على حلول بعض المسائل الناقصية.

### مبرهنة 1.4

لتكن  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$  دوالاً تحقق الشرط القسري (12)، ولتكن  $f \in L^2(\Omega)$ . إذا كانت  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  تحقق :

$$(21) \quad \int_{\Omega} \left( \sum_{ij=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + uv \right) = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

فإن (حيث يرمز  $\Gamma$  لحافة  $\Omega$ ) :

$$(22) \quad \min \left\{ \inf_{\Gamma} u, \inf_{\Omega} f \right\} \leq u(x) \leq \max \left\{ \sup_{\Gamma} u, \sup_{\Omega} f \right\}.$$

البرهان

لإثبات النتيجة نستعمل طريقة البتر Truncation لستانباكيا. ولهذا الغرض

نعتبر دالة  $G \in C^1(\mathbb{R})$  بحيث :

- $|G'(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$
- $G$  متزايدة (تماماً) على  $(0, +\infty)$  ،
- $G(s) = 0, \forall s \leq 0$

الآن نبدأ بالبرهان على المتباينة اليمنى في (22). نضع :

$$k = \max \left\{ \sup_{\Gamma} u, \sup_{\Omega} f \right\}.$$

إذا كانت  $k = +\infty$  فالمتباينة محققة. أما إذا كان  $k < +\infty$  فنعرّف الدالة

$$w = G(u - k)$$

ونميز بين الحالتين:

الحالة الأولى : قياس  $\Omega$  محدود، أي  $|\Omega| < +\infty$ .

في هذه الحالة، من السهل التحقق من أن  $w \in H^1(\Omega)$  وأن

$$w(x) = 0, \forall x \in \Gamma.$$

ومنه فإن  $w \in H_0^1(\Omega)$ . نعوّض بهذه الدالة في (21) لنحصل على :

$$(23) \quad \int_{\Omega} \sum_{ij=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} G'(u-k) + \int_{\Omega} (u-k) G(u-k) = \int_{\Omega} (f-k) G(u-k)$$

والتي تعطي بدورها :

$$\int_{\Omega} (u-k) G(u-k) = - \int_{\Omega} \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} G'(u-k) + \int_{\Omega} (f-k) G(u-k) \leq 0.$$

ولكن :

$$(24) \quad \int_{\Omega} (u-k) G(u-k) = \int_{\Omega^+} (u-k) G(u-k) \leq 0$$

حيث إن :

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : u-k > 0\}.$$

وباستعمال تزايد  $G$  على  $(0, +\infty)$  فإننا نحصل على :

$$(25) \quad \int_{\Omega^+} (u-k) G(u-k) \geq 0.$$

وبمراعاة (24) و (25) نصل إلى :  $\int_{\Omega^+} (u-k) G(u-k) = 0$ . وهو ما يستلزم أن

قياس  $\Omega^+$  منعدم. ومن ثمّ فإن :

$$u-k \leq 0 \quad a.e. x \in \Omega$$

أي :

$$u(x) - k \leq 0, \quad a.e. x \in \Omega$$

ولما كان  $u \in C(\bar{\Omega})$  فإن :

$$u(x) \leq k, \quad \forall x \in \Omega.$$

الحالة الثانية : قياس  $\Omega$  غير محدود، أي  $|\Omega| = +\infty$ .

في هذه الحالة يكون  $k \geq 0$  وذلك لأن :

$$f \in L^2(\Omega) \text{ و } f \leq k, \text{ a.e. } x \in \Omega.$$

ليكن  $k' > k \geq 0$  ولنأخذ  $w = G(u - k')$  إذن  $w \in H^1(\Omega)$ ، وذلك لأن :

$$\begin{aligned} w &= G(u - k') - G(-k') \\ &= uG'(\zeta) \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = G'(u - k') \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega).$$

لدينا أيضاً :

$$w(x) = 0, \forall x \in \Gamma.$$

ومنه فإن  $w \in H_0^1(\Omega)$ . نستعمل، كما سبق،  $w$  في (21) لنصل إلى (23).

وبإعادة كل الخطوات السابقة نحصل على :

$$u(x) \leq k', \forall x \in \Omega.$$

ولما كان  $k' > k$  عدداً كيفياً فإن :

$$u(x) \leq k, \forall x \in \Omega.$$

وللحصول على المتباينة اليسرى من (21) نعوض  $u$  بالدالة  $w = -u$  ونعيد

كل الخطوات السابقة لنحصل على :

$$w(x) \leq \max \left\{ \sup_{\Gamma} w, \sup_{\Omega} (-f) \right\}$$

وهذا يؤدي بدوره إلى :  $\square. u(x) \geq \min \left\{ \inf_{\Gamma} u, \inf_{\Omega} f \right\}$

## لازمة 2.4

لتكن  $f \in L^2(\Omega)$  و  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$  تحقق شرط القسرية. نفرض أن

$u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  تحقق العلاقة (21). عندئذ :

أ) إذا كان  $u \geq 0$  على  $\Gamma$  و  $f \geq 0$  على  $\Omega$  فإن  $u \geq 0$  على  $\Omega$ .  
 وبالإضافة إلى ذلك  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\{\|u\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\}$  ، ولدينا :  
 ب) إذا كانت  $f = 0$  على  $\Omega$  فإن  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$  ،  
 ج) إذا كانت  $u = 0$  على  $\Gamma$  فإن  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  .

### مبرهنة 3.4

نفرض أن  $(a_{ij})$  و  $f$  كما في المبرهنة 1.4. إذا كانت  $u \in H^1(\Omega)$  تحقق :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) = \int_{\Omega} fv$$

فإن :

$$\inf_{\Omega} f \leq u(x) \leq \sup_{\Omega} f, \quad a.e. x \in \Omega.$$

البرهان

تعاد خطوات إثبات المبرهنة 1.4. □

## 5- تمارين

### تمرين 1

تعطى المسألة :

$$(P) \begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

حيث  $I = (0,1)$  ،  $p \in C^1(\bar{I})$  ،  $q \in C(\bar{I})$  ،  $f \in L^2(\Omega)$

أوجد شروطاً على الدالتين  $p$  و  $q$  لكي تقبل المسألة (P) حلاً وحيداً.

## تمرين 2

(أ) بين أن :

$$\|u\| = \left( \int_0^1 |u''(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعرفُ نظيماً مكافئاً للنظيم المعتاد للفضاء  $W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I)$  حيث  $I = (0,1)$ .

(ب) برهن أن للمسألة

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

حلاً وحيداً  $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$  إذا كان  $f \in L^2(I)$ .

## تمرين 3

ليكن  $\Omega$  مجالاً محدوداً منتظماً من  $\mathbb{R}^n$ . نعرف

$$\lambda_1 = \inf_{u \in C_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}.$$

(أ) بين أن  $\lambda_1 > 0$ .(ب) لتكن  $f \in L^2(\Omega)$ ، أثبت أنه إذا كان  $c > -\lambda_1$  فإن للمسألة :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حلاً وحيداً  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

## تمرين 4

لتكن  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ، وليكن  $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$  حلاً للمسألة :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

أثبت أن هذا الحل وحيد.

## تمرين 5

ليكن  $\Omega$  مجالاً محدوداً وأملساً من  $\mathbb{R}^n$  و  $f \in L^2(\Omega)$ . بيّن أن

للمسألة :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{in } \Omega \\ \Delta u = u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حلاً وحيداً.

## تمرين 6

نفرض أن الدالة  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  تحقق :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv,$$

حيث إن  $a > 0$  ،  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$  وتحقق شروط القسرية.

بيّن أن :

$$\forall x \in \Omega, \quad \min \left\{ \inf_{\partial\Omega} u, \inf_{\Omega} \frac{f}{a} \right\} \leq u(x) \leq \max \left\{ \sup_{\partial\Omega} u, \sup_{\Omega} \frac{f}{a} \right\}.$$

## تمرين 7

تعطى  $f \in L^2(\Omega)$  ، حيث  $\Omega$  مجال محدود وأملس من  $\mathbb{R}^n$ . ليكن

$u \in H^2(\Omega)$  حلاً للمسألة :

