الفصل الثامن

مسائل ناقصية غير خطية

نتناول في هذا الفصل بعض المسائل الناقصية غير الخطية وبعض طرق حلها. وفي هذا الإطار سوف نتطرق إلى المؤثرات الرتيبة غير المحدودة وكذلك إلى طريقة التراص.

1- طريقة الرتابة Monotonocity

كل الفضاءات البناخية المعتبرة في هذا الفصل فضاءات انعكاسية (reflexive) حتى إن لم نشر إلى ذلك صراحة.

تعريف **1.1** (المؤثر الرتيب)

ليكن V فضاء بناخيا ، و V' فضاءه الثنوي. نقول إن المؤثر $A:V \to V'$ رتيب إذا كان :

$$\forall\ u,v \in V, \quad \langle A(u)-A(v)\ ,\ u-v\rangle \geq 0\ ,$$

ونقول إن A رتيب تماماً إذا حقق :

$$\langle A(u)-A(v)\ ,\ u-v\rangle > 0\ , \forall\ u \neq v$$

تعريف **2.1** (نصف الاستمرار)

ليكن V فضاء بناخيا وَ $A:V \to V'$ مؤثراً. نقول إن A نصف مستمر (hemicontinuous) إذا كانت الدالة :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\lambda \mapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle$$

مستمرة مهما كان $u,v,w \in V$.

تعريف 3.1 (المحدودية)

ليكن V فضاء بناخيا.

نقول إن المؤثر $A: V \to V'$ محدود إذا كانت $A(S)$ محدودة في V' لكل مجموعة محدودة $S \subset V$.

تعريف 4.1 (شبه الرتابة)

ليكن V فضاء بناخيا إنعكاسيا.

نقول إن المؤثر $A: V \to V'$ شبه رتيب (pseudo-monotone) إذا كان محدوداً وكان يحقق الآتي:

$$u_j \xrightarrow{w} u \text{ in } V, \ \lim\sup \langle A(u_j), u_j - u \rangle \le 0$$

تستلزم

$$\forall v \in V, \ \lim\inf \langle A(u_j), u_j - v \rangle \ge \langle A(u), u - v \rangle. \tag{1}$$

مبرهنة 5.1

ليكن V فضاء بناخيا وَ $A: V \to V'$ مؤثراً. إذا كان A محدوداً ونصف مستمر ورتيبا فإن A شبه رتيب.

البرهان

بما أن A محدود يبقى أن نحقق الخاصية (1). لنفرض أن (u_j) متتالية من V تحقق $u_j \to u$، وأن $\lim\sup \langle A(u_j), u_j - u \rangle \le 0$. باستعمال رتابة المؤثر A نحصل على :

$$\langle A(u_j), u_j - u \rangle \ge \langle A(u), u_j - u \rangle \xrightarrow{j \to +\infty} 0.$$

إذن :

$$\lim\inf \langle A(u_j), u_j - u \rangle \ge 0$$

مما يؤدي إلى :

$$0 \le \lim\inf \langle A(u_j), u_j - u \rangle \le \lim\sup \langle A(u_j), u_j - u \rangle \le 0.$$

ومنه :

$$\lim_{j\to+\infty}\left\langle A(u_j),u_j-u\right\rangle=0. \qquad (2)$$

ليكن $v\in V$ وَ $0<\theta<1$. نضع $w=\theta v+(1-\theta)u$. لدينا:

$$\left\langle A(u_j)-A(w),u_j-w\right\rangle\geq 0$$

وبالتعويض عن قيمة w نحصل على :

$$\theta\left\langle A(u_j),u-v\right\rangle\geq-\left\langle A(u_j),u_j-u\right\rangle+\left\langle A(w),u_j-u\right\rangle+\theta\left\langle A(w),u-v\right\rangle$$

وباستعمال (2) نصل إلى :

$$\theta\ \liminf\left\langle A(u_j),u-v\right\rangle\geq\theta\ \left\langle A(w),u-v\right\rangle.$$

ومنه :

$$\liminf\left\langle A(u_j),u-v\right\rangle\geq\left\langle A(w),u-v\right\rangle.$$

وحيث إن : $\left\langle A(u_j),u_j-v\right\rangle=\left\langle A(u_j),u_j-u\right\rangle+\left\langle A(u_j),u-v\right\rangle$ فلا بد أن يكون :

$$\liminf\left\langle A(u_j),u_j-v\right\rangle\geq\liminf\left\langle A(u_j),u-v\right\rangle$$
$$\geq\left\langle A(w),u-v\right\rangle.$$

وباستعمال خاصية نصف الاستمرار وجعل θ يؤول إلى الصفر فإن w يؤول إلى u. ومنه :

$$\forall\ v\in V,\ \ \liminf\left\langle A(u_j),u_j-v\right\rangle\geq\left\langle A(u),u-v\right\rangle.$$

وهو ما يثبت أن A شبه رتيب.□

ملاحظة

احذر من استنتاج شبه الرتابة من الرتابة مباشرة دون التحقق من محدودية المؤثر وكذلك من نصف استمراره. فخاصية الرتابة ليست أقوى ولا أضعف من خاصية شبه الرتابة. ولمزيد من المعلومات نحيل القارئ إلى المرجعين إلى [19]، [20].

توطئة 6.1

ليكن $P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ مؤثرا مستمرا يحقق :

$$\left(P(\xi),\xi\right) \geq 0 \,,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \,,\ |\xi| = \rho \tag{3}$$

من أجل عدد حقيقي موجب ρ.

عندئذ يوجد $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ ، $|\xi_0| \leq \rho$ يحقق $P(\xi_0) = 0$.

البرهان

لنعرّف المجموعة المتراصة والمحدبة :

$$K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \rho\right\}$$

ولنفرض أن :

$$\forall\ \xi \in K,\quad P(\xi) \neq 0.$$

إن الدالة المعرفة من K إلى K والمعطاة بـ :

$$\xi \mapsto -\frac{\rho P(\xi)}{|P(\xi)|}$$

مستمرة. وباستخدام مبرهنة النقطة الثابتة لبراور Brouwer[1]، نحصل على $\xi \in K$ يحقق $\xi = -\dfrac{\rho P(\xi)}{|P(\xi)|}$. من الواضح أن $|\xi| = \rho$ وأن :

$$\left(P(\xi),\xi\right) = -\rho\left|P(\xi)\right| < 0.$$

وهو ما يناقض (3). ومن ثمّ فإنه يوجد $\xi_0 \in K$ بحيث $P(\xi_0) = 0$.□

مبرهنة 7.1

ليكن V فضاء بناخيا انعكاسيا وقابلا للفصل. لنفرض أن المؤثر $A : V \to V'$ يحقق ما يلي:

أ) A رتيب، محدود، ونصف مستمر.

---

[1] لويتزن براور (1881- 1966) رياضي هولندي.

ب) $\frac{|\langle A(v),v\rangle|}{\|v\|} \to +\infty$ عندما[2] $\|v\| \to +\infty$.

عندئذ، لكل $f \in V'$، يوجد $u \in V$ بحيث أن $A(u)=f$.

فضلا عن ذلك، إذا كان A رتيباً تماماً فإن العنصر u وحيد.

البرهان

بما أن V فضاء قابل للفصل فإنه يوجد أساس قابل للعدّ $\{e_1,e_2,e_3,...\}$ كثيف في V. لنعرّف الفضاء V_m المنتهي البعد والمولد بمجموعة المتجهات $\{e_1,e_2,...,e_m\}$، أي أن $V_m = \text{span}\{e_1,e_2,...,e_m\}$.

لنبحث عن دالة $u_m \in V_m$ تحقق :

$$\langle A(u_m),e_j\rangle = \langle f,e_j\rangle, j=1,2,...,m \tag{4}$$

ولإيجاد $u_m = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \; e_j$، نعرّف المؤثر

$$P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\xi = (\xi_1,...,\xi_n) \mapsto P(\xi)$$

كما يلي:

$$P(\xi) = \left(\langle A(u_m)-f,e_1\rangle, \langle A(u_m)-f,e_2\rangle,...,\langle A(u_m)-f,e_m\rangle\right).$$

لدينا :

$$P(\xi)-P(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \left(P(\eta_1,...,\eta_{i-1},\xi_i,\xi_{i+1},...,\xi_n) - P(\eta_1,...,\eta_{i-1},\eta_i,\xi_{i+1},...,\xi_n)\right)$$

والمركبة ذات الدليل k لهذه العبارة هي :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle A(\sum_{j=1}^{i-1} \eta_j e_j + \sum_{j=i+1}^{n} \xi_j e_j + \xi_i e_i) - f, e_k \right\rangle$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left\langle A(\sum_{j=1}^{i-1} \eta_j e_j + \sum_{j=i+1}^{n} \xi_j e_j + \eta_i e_i) - f, e_k \right\rangle$$

[2] يسمى أحيانا هذا الشرط شرط "القسرية".

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\langle A\left(\sum_{j=1}^{i-1}\eta_j e_j + \sum_{j=i+1}^{n}\xi_j e_j + \xi_i e_i\right) - A\left(\sum_{j=1}^{i-1}\eta_j e_j + \sum_{j=i+1}^{n}\xi_j e_j + \eta_i e_i\right), e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\langle A(v_i + \xi_i e_i) - A(v_i + \eta_i e_i), e_k \right\rangle$$

حيث وضعنا $v_i = \sum_{j=1}^{i-1}\eta_j e_j + \sum_{j=i+1}^{n}\xi_j e_j$.

ليكن $\varepsilon > 0$. نعلم أن A نصف مستمر، ومن ثمّ يوجد $\alpha > 0$ بحيث يؤدي افتراض $|\xi - \eta| < \alpha$ إلى :

$$\forall i = 1,\dots,n, \quad \left|\left\langle A(v_i + \xi_i e_i) - A(v_i + \eta_i e_i), e_k \right\rangle\right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

(لأن $|\xi - \eta| < \alpha$ يؤدي إلى $|\xi_i - \eta_i| < \alpha$). ومنه :

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle A(v_i + \xi_i e_i) - A(v_i + \eta_i e_i), e_k \right\rangle\right| < \varepsilon$$

وهذا يعني استمرار المركبة ذات الدليل الكيفي k لـ P. ومنه استمرار P.

بالإضافة إلى ذلك فإن الشرط ب) يستلزم، لكل $\alpha > 0$ ، وجود $\rho > 0$ بحيث :

$$\langle A(u), u \rangle \geq \alpha \|u\|_{V_m} , \ \forall \ \|u\|_{V_m} \geq \rho$$

وباختيار $\alpha \geq \|f\|_{V'}$ فإنه يوجد $\rho > 0$ يحقق:

$$\forall \ \|u\| \geq \rho, \ \langle A(u) - f, u \rangle \geq \alpha \|u\|_{V_m} - \|f\|_{V'} \|u\|_{V_m} \geq 0 ,$$

وباستخدام التوطئة 6.1 يتضح وجود $u_m \in V_m$ بحيث $A(u_m) = f$.

ولكن (4) تعطي :

$$\langle A(u_m), u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle, \ \forall \ m = 1,2,\dots$$

ومنه فإن :

$$\frac{|\langle A(u_m), u_m \rangle|}{\|u_m\|_V} \leq \|f\|_{V'} \tag{5}$$

مما يستلزم $\|u_m\|_V \le C$ بمراعاة الشرط ب).

ولما كان A مؤثرا محدودا فإن :

$$\|A(u_m)\|_{V'} \le C, \quad \forall\ m = 1,2,...$$

وبما أن V انعكاسي توجد متتالية جزئية (u_k) بحيث :

$$u_k \rightarrow u \in V\ ,$$
$$A(u_k) \rightarrow \psi \in V'.$$

وباستخدام (4) فإن :

$$\left\langle A(u_k), e_j \right\rangle = \left\langle f, e_j \right\rangle\ ,\ \forall\ j = 1,2,...,k.$$

وحينما نثبّت j ونأخذ $k \rightarrow +\infty$ نحصل على :

$$\left\langle \psi, e_j \right\rangle = \left\langle f, e_j \right\rangle\ ,\ \forall\ j = 1,2,...$$

ومنه فإن $\psi = f$.

كما أن العلاقة (4) تستلزم :

$$\left\langle A(u_k), u_k \right\rangle = \left\langle f, u_k \right\rangle \rightarrow \left\langle f, u \right\rangle$$

وبالتالي فإن :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle A(u_k), u_k \right\rangle = \left\langle f, u \right\rangle$$

أو

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\langle A(u_k), u_k \right\rangle = \left\langle \psi, u \right\rangle \qquad (6)$$

ولإتمام البرهان نستخدم رتابة A للحصول على :

$$\left\langle A(u_k) - A(v)\ ,\ u_k - v \right\rangle \ge 0\ ,\ \forall v \in V$$

ومنه :

$$\left\langle A(u_k), u_k \right\rangle - \left\langle A(u_k), v \right\rangle - \left\langle A(v), u_k - v \right\rangle \ge 0\ .$$

وبأخذ النهاية $k \rightarrow +\infty$ واستعمال (6) نصل إلى

$$\left\langle \psi, u \right\rangle - \left\langle \psi, v \right\rangle - \left\langle A(v), u - v \right\rangle \ge 0.$$

ومن ثمّ لدينا :

$$\langle \psi - A(v), u - v \rangle \geq 0 \ , \forall v \in V \tag{7}$$

نأخذ $v = u - \lambda w$ في (7) حيث $w \in V$ و $\lambda > 0$ لنحصل على :

$$\lambda \langle \psi - A(u - \lambda w), w \rangle \geq 0, \ \forall w \in V \ .$$

ولذا :

$$\langle \psi - A(u - \lambda w), w \rangle \geq 0, \ \forall w \in V \ , \ \lambda > 0 .$$

وبجعل $\lambda \to 0$ وباستعمال خاصية نصف الاستمرار للمؤثر A نحصل على

:

$$\langle \psi - A(u), w \rangle \geq 0, \ \forall w \in V \ . \tag{8}$$

وبأخذ $v = u + \lambda w$ في (7) وإعادة الخطوات السابقة نصل إلى :

$$\langle \psi - A(u), w \rangle \leq 0, \ \forall w \in V \ . \tag{9}$$

وبدمج (8) وَ (9) يكون لدينا :

$$\langle \psi - A(u), w \rangle = 0, \ \forall w \in V \ .$$

وعليه فإن $A(u) = \psi = f \in V'$. وهذا ينهي البرهان.□

تطبيق 8.1

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ ذا حدود ملساء. نود إيجاد حل "ضعيف" للمسألة :

$$\begin{cases} A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f, \ \text{in}\, \Omega, \\ u = 0, \ \text{on}\, \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

حيث $1 < p < +\infty$ وَ $f \in W^{-1,p'}(\Omega) = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ علما أن $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

وللتحقق من شروط المبرهنة 7.1، نعتبر الفضاء البناخي $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ مزودا بالنظيم :

$$\|v\| = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}, \forall v \in V .$$

أولاً : محدودية المؤثر A.

لكل $u,v \in V$، لدينا :

$$\left|\langle A(u),v\rangle\right| = \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|.$$

وباستعمال متباينة هولدر Hölder نصل إلى :

$$\left|\langle A(u),v\rangle\right| \leq C\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p}$$

$$\leq C\|\nabla u\|_V^{p-1}\|v\|_V .$$

وهذا يستلزم أن :

$$\|A(u)\|_{V'} \leq C\,\|u\|_V^{p-1}$$

وهو ما يؤدي إلى محدودية مؤثر A.

ثانياً : الرتابة.

لكل $u,v \in V$، لدينا :

$$\langle A(u)-A(v),u-v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right].$$

وباستعمال المتباينة البسيطة التالية (أثبتها) :

$$\left(|a|^{p-2}\, a - |b|^{p-2}\, b\right)\left(a-b\right) \geq 0 ,\forall a,b \in \mathbb{R} \tag{11}$$

نحصل على :

$$\langle A(u)-A(v),u-v\rangle \geq 0.$$

وهو ما يثبت أن A مؤثر رتيب.

ثالثاً: القسْرية.

ليكن $v \in V$. لدينا :

$$\langle A(v),v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p = \|v\|_V^p ,$$

وهذا يؤدي إلى :

$$\frac{\langle A(v),v \rangle}{\|v\|_V} = \|v\|_V^{p-1} \to +\infty$$

لأن $p>1$. ومنه فالمؤثر A قسري.

رابعاً: نصف الاستمرار

ليكن $u,v,w \in V$. نعرّف :

$$g(t) = \langle A(u+tv),w \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial (u+tv)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial (u+tv)}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} .$$

لإثبات أن A نصف مستمر يكفي أن نبيّن أن $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة.

ولهذا الغرض نأخذ متتالية (t_k) من $\mathbb{R}$ بحيث أن $t_k \to t$ ونكتب :

$$g(t_k) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

وباستعمال كون الدالة $s \mapsto |s|^{p-2} s$ مستمرة لكل $p>1$ فإننا نصل إلى :

$$\left| \frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \to \left| \frac{\partial (u+tv)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial (u+tv)}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

وذلك لكل $x \in \Omega$ ، ولكل $i=1,2,\ldots,n$.

يوجد ثابت $m>0$ بحيث $|t_k| \le m$ لكل k لأن (t_k) متقاربة. ومن ثمّ :

$$\left| \frac{\partial (u+t_k v)}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \le C \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \right] \tag{12}$$

ولما كان الطرف الأيمن في (12) دالة من الفضاء $L^1(\Omega)$ فإنه يمكننا الآن تطبيق مبرهنة لوبيغ (التقارب المسقوف. ومنه نحصل على $g(t_k) \to g(t)$. وهو ما يثبت أن g دالة مستمرة. وبالتالي فإن المؤثر A نصف مستمر.

وبتطبيق المبرهنة 7.1 نصل إلى أن للمسألة (10) حلا ضعيفا $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

الوحدانية: هي نتيجة مباشرة من (11) حيث أن المساواة في هذه المتباينة لا تتحقق إلا إذا كان $a = b$.

لنتطرق الآن إلى طريقة مختلفة تؤدي فيها رتابة المؤثر دوراً أساسياً. ولهذا الغرض نبدأ بتوطئة مهمة.

توطئة 9.1

لتكن $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دالة مستمرة تحقق، لثابتين $C > 0,\ \alpha > 0$:

أ) $\left|A(\xi) - A(\xi')\right| \le C\left|\xi - \xi'\right|,\ \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$.

ب) $\left(A(\xi) - A(\xi')\right).\left(\xi - \xi'\right) \ge \alpha\left|\xi - \xi'\right|^2,\ \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$.

عندئذ، فإنه لكل $b \in \mathbb{R}^n$، يوجد حل وحيد للجملة (النظام) :

$$A(\xi) = b. \tag{13}$$

البرهان

من الواضح أن (13) تكافئ الجملة :

$$\xi - \varepsilon A(\xi) + \varepsilon b = \xi,\ \forall i = 1, 2, \dots, n$$

حيث $\varepsilon > 0$ عدد سوف يختار اختياراً مناسباً. لنعتبر المتتالية التكرارية $\left(\xi^{(p)}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ المعرّفة كما يلي: $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ كيفي معطى وَ

$$\xi^{(p+1)} = \xi^{(p)} - \varepsilon A\left(\xi^{(p)}\right) + \varepsilon b.$$

لدينا :

$$\xi^{(p+1)}-\xi^{(p)}=\xi^{(p)}-\xi^{(p-1)}-\varepsilon\left(A\left(\xi^{(p)}\right)-A\left(\xi^{(p-1)}\right)\right). \tag{14}$$

وباعتبار النظيم الإقليدي للمتجه $\xi^{(p+1)}-\xi^{(p)}$ وباستعمال (14) نصل إلى:

$$\left|\xi^{(p+1)}-\xi^{(p)}\right|^2=\left|\xi^{(p)}-\xi^{(p-1)}\right|^2-2\varepsilon\left(A(\xi^{(p)})-A(\xi^{(p-1)})\right).\left(\xi^{(p)}-\xi^{(p-1)}\right)$$
$$+\varepsilon^2\left|A(\xi^{(p)})-A(\xi^{(p-1)})\right|^2.$$

باستخدام الشرطين أ) وَ ب) من التوطئة يأتي :

$$\left|\xi^{(p+1)}-\xi^{(p)}\right|^2\le(1-2\alpha\varepsilon+\varepsilon^2C^2)\ \left|\xi^{(p)}-\xi^{(p-1)}\right|^2.$$

نختار الآن ε موجباً بحيث يكون $k^2=1-2\alpha\varepsilon+\varepsilon^2C^2<1$. ومن ثمّ فإن :

$$\left|\xi^{(p+1)}-\xi^{(p)}\right|\le k\ \left|\xi^{(p)}-\xi^{(p-1)}\right|\ ,k<1.$$

وتصبح المتتالية $(\xi^{(p)})$ متقاربة نحو نهاية (نرمز لها بـ ξ) تحقق :

$$\xi-\varepsilon A(\xi)+\varepsilon b=\xi$$

أي : $A(\xi)=b$.

لإثبات الوحدانية، هب أن ξ وَ ξ' حلان. عندئذ $A(\xi)-A(\xi')=0$.

وهذا يستلزم :

$$0=\left(A(\xi)-A(\xi')\right).\left(\xi-\xi'\right)\ge\alpha\left|\xi-\xi'\right|^2.$$

ومنه فإن $\xi=\xi'$.□

نفرض الآن، بالإضافة إلى شرطي التوطئة، أن $A(0)=0$. لاحظ أن هذا شرط تقني محض لأنه محقق دوماً ولو اقتضى الأمر استبدال $A(\xi)$ بالقيمة $A(\xi)-A(0)$. تحت هذه الشروط نودّ إيجاد حل للمسألة

$$\begin{cases}-div\ \left(A(\nabla u)\right)=f,\ \text{in}\ \Omega,\\ \qquad u=0,\quad \text{on}\ \partial\Omega.\end{cases} \tag{15}$$

مبرهنة 10.1

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $f \in H^{-1}(\Omega)$.
عندئذ يكون للمسألة (15) حل ضعيف وحيد $u \in H_0^1(\Omega)$ يحقق :

$$\int_\Omega A(\nabla u).\nabla v = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{16}$$

البرهان

لنبدأ بإثبات الوحدانية. نفرض أن للمسألة حلين $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$. لدينا عندئذ :

$$\int_\Omega [A(\nabla u_1) - A(\nabla u_2)].\nabla v = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

وبأخذ $v = u_1 - u_2$ نصل إلى :

$$0 = \int_\Omega [A(\nabla u_1) - A(\nabla u_2)].(\nabla u_1 - \nabla u_2) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2.$$

ومنه فإن $u_1 - u_2 = 0$ لأن $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$. وهذا ما يثبت وحدانية الحل في حال وجوده.

الآن نتناول قضية الوجود. ولهذا الغرض نعتبر أساسا قابلا للعد $\{w_1, w_2, ..., w_m, ...\}$ للفضاء $H_0^1(\Omega)$ متعامدا ومتجانسا بالنسبة للضرب الداخلي في $L^2(\Omega)$ ، ونعرّف الفضاءات ذات الأبعاد المنتهية :

$$V_m = \text{Span}\{w_1, w_2, ..., w_m\}, \ m = 1, 2, 3, ...$$

ونبحث عن حل $u_m = \sum_{j=1}^m c_j w_j$ للمسألة التقريبية :

$$\int_\Omega A(\nabla u_m).\nabla v_m = \langle f, v_m \rangle, \ \forall v_m \in V_m \tag{17}$$

التي تكافئ :

$$\int_\Omega A(\nabla u_m).\nabla w_j = \langle f, w_j \rangle, \ \forall j = 1, 2, ..., m. \tag{18}$$

من أجل ذلك نعرّف $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ كالآتي : $B = (B_1, ..., B_n)$ حيث

$$B_j(\xi) = \int_\Omega A\left(\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i\right)\right).\nabla w_j,\ j = 1,2,\ldots,m.$$

ونضع $b_j = \langle f, w_j \rangle$. ومن ثمّ تردّ المسألة (18) إلى إيجاد حل للجملة

$$B_j(c) = b_j,\ j = 1,\ldots,m. \tag{19}$$

نلاحظ أن الشرط $A(0) = 0$ يؤدي إلى $B(0) = 0$ ، كما أن الشرط أ) للدالة A (التوطئة 9.1) يستلزم أن B يحقق الشرط ذاته. لنتأكد من أن B يحقق الشرط ب) أيضا. لدينا :

$$\begin{aligned}
&\left(B(\xi) - B(\xi')\right).(\xi - \xi') \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(B_j(\xi) - B_j(\xi')\right)\left(\xi_j - \xi'_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\int_\Omega\left[A\left(\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i\right)\right) - A\left(\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi'_i w_i\right)\right)\right].\nabla w_j\left(\xi_j - \xi'_j\right)
\end{aligned}$$

ولذلك، وباستعمال متباينة بوانكريه والشرط أ) على A ، نحصل على :

$$\begin{aligned}
&\left(B(\xi) - B(\xi')\right).(\xi - \xi') \\
&= \int_\Omega\left[A\left(\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i\right)\right) - A\left(\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi'_i w_i\right)\right)\right].\nabla\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\xi_j - \xi'_j\right)w_j\right) \\
&\geq \alpha\left\|\nabla\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\xi_j - \xi'_j\right)w_j\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \beta\left|\xi - \xi'\right|^2.
\end{aligned}$$

حيث β ثابت، علما أن المساواة الأخيرة ناتجة عن تعامد وتجانس الأساس $\{w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots\}$. وبالتالي فإن B يحقق الشرط ب) للتوطئة 9.1.

وباستخدام نفس التوطئة يتبيّن وجود حل وحيد $c \in \mathbb{R}^m$ بحيث تكون (17) محققة. وبأخذ $v_m = u_m$ في العلاقة (17) واستخدام الشرطين أ) وَ ب)، والفرضية $A(0) = 0$ ، نحصل على :

$$\alpha \left\|\nabla u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega A(\nabla u_m).\nabla u_m \le C\left\|f\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\|\nabla u_m\right\|_{L^2(\Omega)}$$

حيث C ثابت. ومنه نصل إلى :

$$\left\|\nabla u_m\right\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\alpha}\left\|f\right\|_{H^{-1}(\Omega)},\ \forall m = 1,2,...$$

أي أن متتالية الحلول التقريبية (u_m) محدودة في الفضاء $H_0^1(\Omega)$. ومنه توجد متتالية جزئية (نرمز لها أيضا بـ (u_m)) ضعيفة التقارب في $H_0^1(\Omega)$، وهو ما نرمز إليه بـ :

$$u_m \xrightarrow{W} u \in H_0^1(\Omega).$$

ولما كان Ω مجالا محدودا فإن الغمس (embedding) $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ متراص، ومن ثمّ يمكننا استخراج متتالية جزئية (نرمز لها أيضاً بـ (u_m)) بحيث :

$$u_m \to u \in L^2(\Omega).$$

وهذا يؤدي مرة أخرى إلى وجود متتالية جزئية (نرمز لها مرة أخرى بـ (u_m)) بحيث :

$$u_m \to u \quad a.e.\ x \in \Omega.$$

ليكن $v \in H_0^1(\Omega)$، ولتكن (v_m) متتالية من V_m تحقق الآتي:

$$v_m \to v \in H_0^1(\Omega)$$

وَ

$$\nabla v_m \to \nabla v,\ a.e.\ x \in \Omega$$

وهذا ممكن، ولو اقتضى الأمر استخراج متتالية جزئية. وباستخدام (17) نحصل على :

$$\int_\Omega \left[A(\nabla u_m) - A(\nabla v_m)\right].\nabla(u_m - v_m) - \int_\Omega A(\nabla v_m).\nabla(v_m - u_m)$$
$$= \langle f, u_m - v_m\rangle.$$

وباستغلال خاصية الرتابة ب) للدالة A نجد :

$$\int_\Omega A(\nabla v_m).\nabla(v_m-u_m)\geq\langle f,v_m-u_m\rangle,\ \forall m=1,2,... \tag{19}$$

وبأخذ النهاية في (19) نحصل على :

$$\int_\Omega A(\nabla v).\nabla(v-u)\geq\langle f,v-u\rangle,\ \forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{20}$$

كما أن وضع $v=u+tw$ ، حيث w كيفي في $H_0^1(\Omega)$ و t عدد حقيقي، يجعلنا نستنتج من (20) العلاقة :

$$\int_\Omega A(u+tw).\nabla w\geq\langle f,w\rangle,\ \forall w\in H_0^1(\Omega).$$

وباستخدام استمرار A وجعل t يؤول إلى الصفر يكون لدينا :

$$\int_\Omega A(u).\nabla w\geq\langle f,w\rangle,\ \forall w\in H_0^1(\Omega). \tag{21}$$

وبتعويض w بـ $-w$ في (21) نحصل على :

$$\int_\Omega A(u).\nabla w\leq\langle f,w\rangle,\ \forall w\in H_0^1(\Omega). \tag{22}$$

وهكذا ينتج من العلاقتين (21) وَ (22) :

$$\int_\Omega A(u).\nabla w=\langle f,w\rangle,\ \forall w\in H_0^1(\Omega)$$

وهو المطلوب.□

ولتعميم الفائدة نورد بعض المبرهنات والتطبيقات المتعلقة بمسائل المتراجحات التغيراتية (Variational inequalities).

مبرهنة 11.1: (حالة مجموعة محدودة)

لتكن K مجموعة جزئية مغلقة ومحدبة ومحدودة وغير خالية من فضاء بناخي V. نفرض أن $A:K\to V'$ مؤثر شبه رتيب.

عندئذ، لكل $f\in V'$، يوجد $u\in K$ بحيث :

$$\langle A(u),v-u\rangle\geq\langle f,v-u\rangle,\ \forall v\in K\ .$$

البرهان

يعتمد على حل مسائل تقريبية كما جاء في إثبات بعض المبرهنات السابقة. ولذلك نحيل القارئ إلى المرجع [15]، ص 247- 245. □

مبرهنة **12.1** (حالة مجموعة غير محدودة)

لتكن K مجموعة جزئية مغلقة ومحدبة وغير محدودة وغير خالية من فضاء بناخي V. نفرض أن $A : K \to V'$ مؤثر شبه رتيب يحقق، من أجل عنصر $v_0 \in K$، خاصية القسرية التالية :

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{\left|\langle A(v)\ ,\ v-v_0\rangle\right|}{\|v\|} = +\infty$$

عندئذ، لكل $f \in V'$، يوجد $u \in K$ بحيث :

$$\langle A(u)\ ,\ v-u\rangle \geq \langle f , v\rangle,\ \forall v \in K . \tag{23}$$

وفضلا عن ذلك، إذا حقق A العلاقة

$$\langle A(u_1)-A(u_2)\ ,\ u_1-u_2\rangle > 0,\ \forall u_1 \neq u_2$$

فإن الحل وحيد.

البرهان

ليكن $R > 0$ و $B_R = \{v \in V\ :\ \|v\| \leq R\}$ وَ $K_R = K \cap B_R$. ولما كانت K_R مجموعة محدّبة ومغلقة ومحدودة فإنه يوجد، حسب المبرهنة 10.1، $u_R \in K_R$ يحقق :

$$\langle A(u_R), v-u_R\rangle \geq \langle f , v-u_R\rangle,\ \forall v \in K_R . \tag{24}$$

لتكن R_0 بحيث $\|v_0\| \leq R_0$، ولنختر $R \geq R_0$. بأخذ $v = v_0$ في (24) نحصل على :

$$\langle A(u_R), v_0-u_R\rangle \geq \langle f , v_0-u_R\rangle$$

أو

$$\langle A(u_R), u_R - v_0 \rangle \leq \langle f, u_R - v_0 \rangle$$

وباستعمال خاصية القسرية، وبفرض $\lim\limits_{R\to\infty} \|u_R\| = +\infty$ يأتي :

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\|u_R\|}{\|u_R - v_0\|} \; \frac{\langle A(u_R), u_R - v_0 \rangle}{\|u_R\|} \leq \|f\|_{V'} .$$

ولذلك فإن $\|f\|_{V'} = +\infty$. وهذا غير صحيح. ومنه يوجد ثابت موجب C بحيث

$$\forall R,\ \|u_R\| \leq C .$$

ونتيجة لذلك فإن $(A(u_R))$ تكون أيضاً متتالية محدودة في V'. إذن يمكننا استخراج متتالية جزئية (نرمز لها أيضاً (u_R)) بحيث :

$$u_R \to u \in V ,\ A(u_R) \to \psi \in V' .$$

ولما كان K محدبا ومغلقا فإنه يكون مغلقاً بضعف (Weakly closed).

وبالتالي فإن $u \in K$. وباستخدام (23) يأتي :

$$\langle A(u_R), u_R - u \rangle \leq \langle f, u_R - u \rangle,\ \forall R \geq \|u\|.$$

ومنه نصل إلى :

$$\lim_{R\to+\infty} \sup \langle A(u_R), u_R - u \rangle \leq 0.$$

ثم نستعمل خاصية شبه الرتابة للمؤثر A فيتبيّن أن :

$$\lim_{R\to+\infty} \inf \langle A(u_R), u_R - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle,\ \forall v \in V , \tag{25}$$

ليكن $v \in K$. من الواضح أن $v \in K_R$ لكل $R \geq \|v\|$. ومن ثمّ فإن (24) تعطينا :

$$\langle A(u_R), u_R - v \rangle \leq \langle f, u_R - v \rangle,\ \forall v \in V .$$

وبجعل R يؤول إلى لانهاية نحصل على :

$$\lim_{R\to+\infty} \inf \langle A(u_R), u_R - v \rangle \leq \langle f, u - v \rangle$$

وبالعودة إلى العلاقة (25) يتضح أن :

$$\langle A(u), u - v \rangle \leq \langle f, u - v \rangle$$

وهو ما يعطي (23).

لإثبات وحدانية الحل نفرض وجود حلين $u,u^*\in K$. عندئذ :

$$\langle A(u),v-u\rangle \geq \langle f,v-u\rangle,\ \forall v\in K, \tag{26}$$

$$\langle A(u^*),v-u^*\rangle \geq \langle f,v-u^*\rangle,\ \forall v\in K. \tag{27}$$

عند أخذ $v=u^*$ في (26) وَ $v=u$ في (27) يتبيّن أن :

$$\langle A(u)-A(u^*),u-u^*\rangle \leq 0$$

وهو ما يثبت أن $u=u^*$.□

مثال تطبيقي 1

ليكن $V=H_0^1(\Omega)$ وَ

$$K=\{\phi\in V:\phi(x)\geq 0\ ,\ a.e.\ x\in\Omega\}.$$

إنه من السهل التحقق من أن K محدّب ومغلق وغير محدود. لتكن $A=-\Delta$. نودّ إثبات وجود $u\in K$ يحقق :

$$\langle A(u),v-u\rangle \geq \langle f,v-u\rangle,\ \forall v\in K\ .$$

بإعادة الخطوات المفصلة آنفا يمكننا بسهولة إثبات أن A محدود ونصف مستمر ورتيب. وبالتالي فإنه شبه رتيب. ولإثبات القسرية نأخذ $v_0=0$. ومن ثمّ فإن :

$$\lim_{\|v\|\to+\infty}\frac{\langle A(v),v\rangle}{\|v\|}=\lim_{\|v\|\to\infty}\frac{\|v\|^2}{\|v\|}=+\infty$$

حيث $\|v\|=\int_\Omega|\nabla v|^2$. ولذا، لكل $f\in H^{-1}(\Omega)$، يوجد $u\in H_0^1(\Omega)$ يحقق:

$$\langle -\Delta u,v-u\rangle=\int_\Omega \nabla u.(\nabla v-\nabla u)\geq\langle f,v-u\rangle,\ \forall v\in K\ .$$

ولما كان A رتيبا تماماً فإن الحل وحيد.

مثال تطبيقي 2

ليكن $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ حيث $p > 1$ و Ω مجالا محدودا من $\mathbb{R}^n$ ، وَ

$$K = \left\{\phi \in V : \left|\nabla \phi\right| \le 1 \text{ , } a.e.\ x \in \Omega\right\}.$$

وليكن A المؤثر المعرّف في (10.8)، وهو :

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

بما أن A محدود ونصف مستمر ورتيب فإنه شبه رتيب.

من السهل التحقق من أن K مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة في V إذ إن : $\|u\|_V^p = \int_\Omega |\nabla u|^p \le |\Omega|$ ، وذلك مهما كان $u \in K$ (مع التذكير أن $|\Omega|$ يرمز لقياس Ω) وهي أيضا محدبة وغير خالية (لأن $0 \in K$). وبتطبيق المبرهنة 11.1 فإنه، لكل $f \in V'$، يوجد $u \in K$ يحقق :

$$\forall v \in K,\ \left\langle Au, v-u \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$
$$\ge \left\langle f, v-u \right\rangle.$$

2 – طريقة التراص Compactness

نتعرض في هذا البند لمسألتين غير خطيتين لتوضيح المزيد من تقنيات حل مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية، وذلك باللجوء إلى طريقة تختلف عما رأينا في البند السابق. سوف نستعمل الغمس المتراص.

المسألة 1.2

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ حدودها $\partial\Omega$ ملساء. نودّ إيجاد حل "ضعيف" للمسألة

$$(28)\qquad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f\ ,\ x\in\Omega \\ u=0,\ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

حيث f وَ a دالتان تحققان بعض الشروط نذكرها لاحقاً. بإعادة ما رأينا ضمن البند السابق، تكون الصيغة الضعيفة للمسألة (28) :

$$(29)\qquad \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}=\langle f,v\rangle,\ \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

ويكون الحل الضعيف في هذه الحالة هو دالة $u\in H_0^1(\Omega)$ تحقق (29).

تعريف 2.2 (دالة كرثيودورية Caratheodory[3])

نقول عن الدالة $a:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ إنها كرثيودورية، إذا تحقق الشرطان :

أ) الدالة $a(.,t):\Omega\to\mathbb{R}$ قابلة للقياس (قيوسة) لكل $t\in\mathbb{R}$،

ب) الدالة $a(x,.):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمرة لكل x حيثما تقريبا في Ω .

توطئة 3.2

تعطى متتاليتان $(f_n)\in L^p(\Omega)$ وَ $(g_n)\in L^{p'}$ حيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. إذا كانت : $f_n\xrightarrow{L^p(\Omega)}f$ و $g_n\xrightarrow{L^{p'}(\Omega)}g$ فإن :

$$\int_{\Omega}f_ng_n\xrightarrow{\mathbb{R}}\int_{\Omega}fg\,.$$

البرهان

لدينا :

$$\left|\int_{\Omega}f_ng_n-fg\right|\le\int_{\Omega}|g_n||f_n-f|+\left|\int_{\Omega}f\,(g_n-g)\right|.$$

[3] كستنطين كرثيودوري (1873- 1950) رياضي ألماني.

ولما كان $g_n \xrightarrow{L^{p'}(\Omega)} g$ فإن $\|g_n\|_{L^{p'}(\Omega)}$ محدودة. وعليه:

$$\int_\Omega |g_n||f_n - f| \le \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\le M \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

وبما أن $f \in L^p(\Omega)$ وَ $g_n \xrightarrow{L^{p'}(\Omega)} g$ فلا بد أن يكون :

$$\int_\Omega |f||g_n - g| \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g_n - g\|_{L^{p'}(\Omega)} \to 0.$$

وبالتالي:

$$\int_\Omega f_n g_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_\Omega fg. \square$$

لحل المسألة (29) سوف نقوم أولاً بحل مسألة تقريبية في فضاء منتهي البعد.

نعلم أن لـ $H_0^1(\Omega)$ أساسا $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$. نعتبر الفضاء المنتهي البعد $V_m = \text{span}\{e_1, e_2, ..., e_m\}$. نودّ إيجاد دالة $u_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$ تكون حلا للمسألة التقريبية الخطية التالية :

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega a(x, w_m) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} = \langle f, v_m \rangle, \ \forall v_m \in V_m \tag{30}$$

حيث w_m دالة مثبتة في V_m.

مبرهنة 4.2

لتكن a دالة كرثيودورية. نفرض أنه يوجد ثابتان موجبان α وَ M بحيث :

$$0 < \alpha \le a(x,t) \le M \ , a.e.\ x \in \Omega,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{31}$$

عندئذ، لكل $f \in H^{-1}(\Omega)$، يوجد $u_m \in V_m$ وحيد يحقق (30).

البرهان

نعرّف على الفضاء التام V_m المزوّد بالنظيم $\|u_m\|_{V_m} = \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)}$ ، الشكل الثنائي الخطية :

$$b(u_m, v_m) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a(x, w_m) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_i}$$

والشكل الخطي $F(v_m) = \langle f, v_m \rangle$

باستخدام الشرط (31) نجد بسهولة أن b محدود وقسري حيث إن :

$$|b(u_m, v_m)| \le M \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} ,$$
$$b(v_m, v_m) \ge \alpha \|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

كما أن F شكل محدود إذ إن :

$$|F(v_m)| \le \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v_m\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

وبتطبيق توطئة لاكس- ميلغرام (لازمة 2.2 من الفصل 7) فإننا نحصل على $u_m \in V_m$ وحيد يحقق (30).

نعرّف الآن التطبيق $T : V_m \to V_m$ كالآتي:

لكل w_m نرفق $u_m = T(w_m)$ بحيث u_m هو الحل الضعيف للمسألة (30). بأخذ $v_m = u_m$ في (30) يكون لدينا :

$$\alpha \|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} .$$

وهو ما يعطي

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\alpha} ,$$

أي أن حلول المسائل (30) تبقى محدودة مهما كان اختيارنا للدالة w_m. ولهذا فإن

$$T : \overline{B(0,R)} \to \overline{B(0,R)}$$

حيث يرمز $\overline{B(0,R)}$ للكرة المغلقة ذات المركز 0 ونصف القطر $R=\dfrac{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\alpha}$. فإذا أمكننا إثبات أن T تطبيق مستمر فسوف تكون له نقطة ثابتة $T(u_m)=u_m$ حسب مبرهنة براور.

مبرهنة 5.2

التطبيق T المعرّف أعلاه مستمر.

البرهان

لتكن المتتالية $(w_m^k)\in V_m$ بحيث $w_m^k \to w_m$ في V_m. إن المتتالية (u_m^k) المعرفة بـ $u_m^k=T(w_m^k)$ تحقق $\|u_m^k\|_{V_m}\le \dfrac{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\alpha}$. ومنه يمكننا استخراج من (u_m^k) متتالية جزئية، نرمز لها أيضا بـ (u_m^k)، بحيث :

$$u_m^k \xrightarrow{V_m} u_m,$$

$$u_m^k \xrightarrow{L^2(\Omega)} u_m,$$

$$u_m^k \to u_m \;\; a.e.\; x\in\Omega.$$

نذكّر أن V_m هو فضاء بناخي منتهي البعد.

لتكن المتتالية (w_m^k) المرفقة، أي $u_m^k=T(w_m^k)$، علماً أن :

$$w_m^k \xrightarrow{L^2(\Omega)} w_m.$$

فيمكننا استخراج متتالية جزئية (نرمز لها أيضاً بـ w_m^k) بحيث :

$$w_m^k \to w_m \;\; a.e.\; x\in\Omega.$$

ولما كانت a دالة كرثيودورية فإنه من السهل التحقق من :

$$a\left(x,w_m^k(x)\right)\to a\left(x,w_m(x)\right) \;\; a.e.\; x\in\Omega.$$

ثم إن :

$$\left|a\left(x,w_m^k\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|\le M\left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right|.$$

نلاحظ أن شروط مبرهنة التقارب المسقوف محققة، ومن ثمّ:

$$a\left(x,w_m^k\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\xrightarrow{L^2(\Omega)}a\left(x,w_m\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\quad . \tag{32}$$

ومن جهة أخرى فإنه لدينا $u_m^k\to u_m$ في V_m. مما يستلزم :

$$a\left(x,w_m^k\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m^k}{\partial x_i}\xrightarrow{L^1(\Omega)}a\left(x,w_m\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_i},$$

ولذلك :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a\left(x,w_m^k\right)\frac{\partial u_m^k}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\to\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a\left(x,w_m\right)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_i},\ \forall v_m\in V_m.$$

وبما أن

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a\left(x,w_m^k\right)\frac{\partial u_m^k}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}=\left\langle f,v_m\right\rangle,\ \forall v_m\in V_m$$

فبأخذ النهاية $k\to+\infty$ نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a\left(x,w_m\right)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}=\left\langle f,v_m\right\rangle,\ \forall v_m\in V_m.$$

وهو ما يثبت أن T تطبيق مستمر.

نتيجة 6.2

تحت الشرط (31) فإنه لكل $f\in H^{-1}(\Omega)$ يوجد $u_m\in V_m$ يحقق :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a\left(x,u_m\right)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}=\left\langle f,v_m\right\rangle,\ \forall v_m\in V_m. \tag{33}$$

البرهان

إن التطبيق $T:\overline{B(0,R)}\to\overline{B(0,R)}$ المعرّف أعلاه يحقق شروط مبرهنة براور. وبالتالي فإن له نقطة ثابتة u_m بحيث $u_m=T(u_m)$. وبالتعويض عن w_m بـ u_m في (30) نحصل على (33). وهو المطلوب.

نـودّ الآن إثبـات أن نهايـة متتاليـة الحلـول التقريبيـة (u_m) تزوّدنـا بحـل للمسألة (29). باستخدام (33) نرى أن المتتالية (u_m) محدودة في $H_0^1(\Omega)$ إذ أن

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\alpha}.$$

وباستغلال خاصية الغمس المتراص للفضاء $H_0^1(\Omega)$ في $L^2(\Omega)$ يمكننا استخراج متتالية جزئية (نرمز لها أيضاً بـ u_m) بحيث :

$$u_m \xrightarrow{W} u \text{ في } H_0^1(\Omega)$$

$$u_m \xrightarrow{L^2(\Omega)} u,$$

$$u_m \to u \text{ a.e. } x \in \Omega.$$

ونتيجة لذلك فإن :

$$a\left(x, u_m(x)\right) \to a\left(x, u(x)\right), \text{ a.e. } x \in \Omega.$$

ومن جهة أخرى لتكن $v \in H_0^1(\Omega)$ ومتتالية (v_m) بحيث $v_m \to v$ في الفضاء $H_0^1(\Omega)$. نودّ إثبات :

$$a\left(x, u_m(x)\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} a\left(x, u(x)\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

فباستعمال متباينة مينكوفسكي Minkowski [4] نحصل على :

$$\left(\int_\Omega \left|a\left(x,u_m\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_i} - a\left(x,u\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_\Omega \left|a\left(x,u_m\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_i} - a\left(x,u_m\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\int_\Omega \left|a\left(x,u_m\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} - a\left(x,u\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

نلاحظ أن الحد الأول من الطرف الأيمن يحقق :

[4] هرمن مينكوفسكي (1864- 1909) رياضي ألماني.

$$\left(\int_{\Omega}\left|a\left(x,u_m\right)\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq M\,\|v_m-v\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0$$

ولمعالجة الحد الثاني من الطرف الأيمن، نشير إلى أن :

$$\left|a\left(x,u_m\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}-a\left(x,u\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\to 0 \quad \text{a.e. } x\in\Omega,$$

$$\left|a\left(x,u_m\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}-a\left(x,u\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\leq 2M\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\in L^2(\Omega).$$

وباستخدام مبرهنة التقارب المسقوف نصل إلى :

$$\int_{\Omega}\left|a\left(x,u_m\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}-a\left(x,u\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\xrightarrow{m\to+\infty}0,$$

وبهذا نكون قد أثبتنا (34).

وباستعمال التوطئة 3.2، والعلاقة (34) وملاحظة أن :

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\xrightarrow{L^2(\Omega)}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \forall i=1,2,\dots n$$

يتضح أن (33) تعطى عند المرور إلى النهاية :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}=\langle f,v\rangle\ ,\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega).$$

وهو المطلوب.□

المسألة 7.2

نتطرق الآن إلى مسألة تتناول مؤثرا من نوع p - لابلاس. نودّ إيجاد حل للمسألة :

$$\left\{\begin{array}{l}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,u)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f \quad \text{in } \Omega,\\ \qquad\qquad u=0 \quad \text{on } \partial\Omega,\end{array}\right. \tag{35}$$

حيث Ω مجال محدود وأملس من $\mathbb{R}^n$ ، بينما a وَ f دالتان معطيان، وَ p عدد حقيقي يحقق $p \geq 2$. بإعادة ما سبق فإن الصيغة الضعيفة للمسألة (35) تأخذ الشكل التالي :

أوجد $u \in V = W_0^{1,p}(\Omega)$ بحيث :

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n a(x,u)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle f, v\rangle \,,\ \forall v \in V. \tag{36}$$

ولحل هذه المسألة، نثبّت $w \in V$ ونعرّف المؤثر غير الخطي $A_1 : V \to V'$ بـ

$$A_1(u) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,w)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

توطئة 8.2

نفرض أن a دالة كرثيودورية تحقق (31). عندئذ يكون المؤثر A_1 محدودا ورتيبا ونصف مستمر وقسريا، أي يحقق :

$$\frac{\left|\langle A_1(u), u\rangle\right|}{\|u\|} \xrightarrow{\|u\|_V \to +\infty} +\infty . \tag{37}$$

البرهان

بمراعاة الشروط على a وإعادة خطوات التطبيق 8.1 نصل إلى النتيجة المطلوبة (وضّح ذلك).□

نتيجة 9.2

ليكن Ω مجالاً محدوداً وأملس من $\mathbb{R}^n$. نفرض أن a دالة كرثيودورية تحقق (31). عندئذ, لكل $f \in V'$، يوجد حل وحيد و"ضعيف" للمسألة :

$$A_1(u) = f \tag{38}$$

البرهان

باستخدام التوطئة 8.2 وتطبيق المبرهنة 7.1 نصل إلى المطلوب.

لإتمام البرهان على وجود حل للمسألة (35)، أي وجود دالة $u \in V$ تحقق الصيغة الضعيفة (36)، نعرّف تطبيقا $T : V \to V$ يرفق بكل عنصر $w \in V$ عنصرا $u \in V$ يمثل الحل الوحيد للمسألة (38). نلاحظ من خلال (38) أن الحل u يحقق :

$$\langle A_1(u), u \rangle = \langle f, u \rangle$$

أي :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a(x,u) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p = \langle f, u \rangle$$
$$\leq \|f\|_{V'} \|u\|_V .$$

وباستخدام (31) نحصل على :

$$\alpha \|u\|_V^p \leq \|f\|_{V'} \|u\|_V .$$

مما يستلزم :

$$\|u\|_V \leq \left(\frac{\|f\|_{V'}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

وهذا محقق مهما كان $w \in V$.

وعليه فإذا اخترنا $w \in \overline{B(0,R)}$، حيث $R = \left(\frac{\|f\|_{V'}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}}$، فإن $u = T(w) \in \overline{B(0,R)}$ أي أن :

$$T : \overline{B(0,R)} \to \overline{B(0,R)} .$$

لتطبيق مبرهنة براور يجب إثبات أن T مستمر. ولهذا الغرض نأخذ متتالية (w_k) تتقارب نحو w في الفضاء V. ولتكن (u_k) متتالية الحلول

المرفقـــة، أي أن $u_k = T(w_k)$. إن المتتاليـــة (u_k) محـــدودة في الفـــضاء الإنعكاسي V. ومن ثمّ فإنه يمكننا استخراج متتالية جزئية (u_l) وإيجاد عنصر $u \in V$ بحيث $u_l \xrightarrow{V} u$.

كما أن المتتالية (w_l) تتقارب نحو w في V، وكذلك في $L^p(\Omega)$. وبالتالي يمكن استخراج متتالية جزئية (w_r) بحيث :

$$w_r \to w \quad \text{a.e. } x \in \Omega .$$

وعليه فإنه لكل $z \in V$، يكون لدينا :

$$a(x,w_r)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i} \to a(x,w)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i} \quad a.e.\ x \in \Omega .$$

وفضلا عن ذلك :

$$\left|a(x,w_r)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right| \le M\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-1} .$$

وبما أن $\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ فتطبيق مبرهنة التقارب المسقوف يؤدي إلى :

$$a(x,w_r)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i} \xrightarrow{L^{p'}(\Omega)} a(x,w)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i}$$

حيث إن $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

إذن، لكل $v \in V$، لدينا :

$$a(x,w_r)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \xrightarrow{L^1(\Omega)} a(x,w)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} .$$

ومن ثمّ :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} a(x,w_r)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \to \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} a(x,w)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} . \tag{39}$$

فإذا عرّفنا المؤثر A_r التالي :

$$A_r(z) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x, w_r)\left|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right)$$

فإن (39) تعطي :

$$\langle A_r(z), v\rangle \to \langle A_1(z), v\rangle,\ \forall v \in V. \tag{40}$$

والحل u_r المرفق بـ w_r ، يحقق $A_r(u_r) = f$. ومن ثمّ :

$$\langle A_r(u_r), v\rangle = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in V. \tag{41}$$

كما أن التقارب الضعيف $u_r \xrightarrow{w} u$ يستلزم :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A_r(u_r), u_r\rangle = \langle f, u\rangle.$$

نذكّر أن :

$$a(x, w_r)\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \xrightarrow{L^{p'}(\Omega)} a(x, w)\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

وأن :

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_i} \xrightarrow{L^{p}(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

وباستخدام التوطئة 3.2 فإننا نحصل على :

$$\langle A_r(v), u_r\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} a(x, w_r)\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u_r}{\partial x_i} \to \langle A_1(v), u\rangle. \tag{42}$$

ومن جهة أخرى ينتج من رتابة المؤثر A_r :

$$0 \le \langle A_r(u_r), u_r\rangle - \langle A_r(u_r), v\rangle - \langle A_r(v), u_r\rangle + \langle A_r(v), v\rangle.$$

وبأخذ النهاية $r \to +\infty$ واستغلال العلاقات (40)- (42) نصل إلى :

$$\langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle - \langle A_1(v), u\rangle + \langle A_1(v), v\rangle \ge 0.$$

مما يستلزم أن :

$$\langle A_1(v), v-u\rangle \ge \langle f, v-u\rangle\ . \tag{43}$$

نأخذ الآن $v = u + \lambda z$ في (43)، حيث $z \in V$ وَ $\lambda > 0$. وبالتالي نحصل على :

$$\langle A_1(u+\lambda z),z\rangle \ge \langle f,z\rangle.$$

وبأخذ النهاية $\lambda \to 0$ ، واستعمال نصف استمرار A_1 يتبيّن :

$$\langle A_1(u),z\rangle \ge \langle f,z\rangle,\ \forall z\in V\ . \tag{44}$$

وبإعادة الخطوات نفسها ، واستبدال $u+\lambda z$ بالمقدار $u-\lambda z$ نجد :

$$\langle A_1(u),z\rangle \le \langle f,z\rangle,\ \forall z\in V\ . \tag{45}$$

تؤدي المتباينتان (44) وَ (45) إلى :

$$\langle A_1(u),z\rangle = \langle f,z\rangle\ ,\ \forall z\in V$$

أي أن u هو الحل المرفق بـ w . إذن $u=T(w)$. ومن ثمّ فإن T تطبيق مستمر من $\overline{B(0,R)}$ إلى $\overline{B(0,R)}$. وبتطبيق مبرهنة براور يتضح أن للتطبيق T نقطة ثابتة تحقق $T(u)=u$ ، أي أن :

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} a(x,u)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}=\langle f,v\rangle\ ,\ \forall v\in V.$$

وهو المطلوب إثباته.□

3- تمارين

تمرين 1

نفرض أن $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ مؤثر يحقق شروط التوطئة 9.1 بحيث إن $A(0)=0$. تعطى $f\in H^{-1}(\Omega)$ علما أن Ω مجال محدود وأملس من $\mathbb{R}^n$.

أوجد حداً أدنى للقيم c حتى تقبل المعادلة التالية حلا :

$$-div\left(A(\nabla u)+c\nabla u\right)=f\ .$$

تمرين 2

ليكن Ω مجالاً محدوداً وأملس من $\mathbb{R}^n$. نعرّف الدوال الكراثيودورية $a_{ij}:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث يوجد $c_0>0,\ M>0$ يحققان :

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,u)\zeta_i\zeta_j \ge c_0|\zeta|^2,\quad a.e.\ x\in\Omega,\quad \forall u\in\mathbb{R},$$

$$|a_{ij}(x,u)|\le M,\quad a.e.\ x\in\Omega,\quad \forall u\in\mathbb{R}.$$

لتكن $f\in H^{-1}(\Omega)$. بيّن أن للمسألة الحدية حلا وحيدا $u\in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f, & x\in\Omega \\ u=0, & \text{on}\,\partial\Omega \end{cases}$$

تمرين 3

ليكن Ω مجالاً محدوداً وأملس من $\mathbb{R}^n$. تعطى الدالتان المستمرتان $a,b:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اللتان تحققان

$$0<a_0\le a(x,u,v)\le a_1,\quad \forall x\in\Omega,\quad \forall u,v\in\mathbb{R}$$

$$0<b_0\le b(x,u,v)\le b_1,\quad \forall x\in\Omega,\quad \forall u,v\in\mathbb{R}$$

نفرض أن $f,g\in H^{-1}(\Omega)$. بيّن أن للمسألة الحدية

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f, & x\in\Omega, \\ -\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(b(x,u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)=g, & x\in\Omega, \\ u=v=0, & \text{on}\,\partial\Omega. \end{cases}$$

حلا وحيدا $(u,v)\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^2$.

تمرين 4

نفرض أن $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ مؤثر يحقق شروط التوطئة 9.1 بحيث إن $A(0)=0$. تُعطى الدالة $f\in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. بيّن أن للمعادلة :

$$-div\big(A(\nabla u)\big)+u=f,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

حلا وحيدا $u\in H^1(\mathbb{R}^n)$.

تمرين 5

ليكن Ω مجالاً محدوداً وأملس من $\mathbb{R}^n$. تعطى $f\in W^{-1,p'}(\Omega)$ والدوال $a_i,\ i=1,2,\ldots,n$ التي تحقق من أجل ثابتين $a>0$ و $b>0$:

$$0<a\le a_i(x)\le b,\ \ \forall i=1,2,\ldots,n,\ \ a.e.\ x\in\Omega.$$

بيّن أن للمسألة الحدية

$$\begin{cases}-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x)\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

حلاً وحيداً $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$. نذكّر أن $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$.

تمرين 6

تعطى $f\in W^{-1,p'}(\Omega)$. بيّن أن لمسألة كوشي

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+|u|^{p-2}u=f$$

حلاً وحيداً $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

تمرين 7

ليكن Ω مجالاً محدوداً وأملس. نعرّف المجموعة

$$K=\left\{\phi\in H^1(\Omega):\int_\Omega\phi=0\right\}$$

ونعتبر $f\in H^{-1}(\Omega)$.

أ) بيّن أن K مجموعة غير خالية ، ومحدبة ، ومغلقة وغير محدودة.

ب) بيّن أن للمتباينة التغيراتية

$$\langle-\Delta u,v-u\rangle\geq\langle f,v-u\rangle,\qquad\forall v\in K$$

حلا وحيدا $u\in K$.

تمرين 8

نعرّف المجموعة

$$K=\left\{\phi\in H^1(\mathbb{R}^n):|\nabla\phi(x)|\leq1\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

أ) بيّن أن K مجموعة غير خالية ، ومحدبة ، ومغلقة وغير محدودة.

ب) نعرّف المؤثر $A:H^1(\mathbb{R}^n)\to H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ كما يلي

$$Au=-\Delta u+u\ .$$

لتكن $f\in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. بيّن أنه يوجد عنصر وحيد $u\in K$ يحقق

$$\langle-\Delta u+u,v-u\rangle\geq\langle f,v-u\rangle,\qquad\forall v\in K\ .$$

تمرين 9

ليكن Ω مجالاً محدوداً وأملس. نعرّف المجموعة

$$K=\left\{\phi\in W_0^{1,p}(\Omega):\phi(x)\geq0\qquad a.e.\ x\in\Omega\right\}$$

حيث $p>1$ وَ المؤثر A بـ :

$$Au=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

أ) بيّن أن K مجموعة غير خالية ، ومحدبة ، ومغلقة وغير محدودة.

ب) نفرض أن $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. بيّن أنه يوجد عنصر وحيد $u \in K$ بحيث

$$\langle \Delta u, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle, \quad \forall v \in K,$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖