الباب السابع

الحركة التوافقية البسيطة

The Simple Harmonic Motion

7.1 الحركة التوافقية البسيطة

The Simple Harmonic Motion

إذا تحرك جسم حول نقطة مبتعداً عنها تارة ومقترباً منها تارة أخرى فإن هذه الحركة تسمى **بالحركة الاهتزازية**.

وسوف ندرس في هذا الباب نوعاً منها هو الحركة الاهتزازية البسيطة "التوافقية" ومن أمثلتها حركة جسم معلق بحلزون، حركة البندول البسيط، حركة الرقاص في الساعة، حركة الأوتار، وكذلك فإن حركة الجزيئات في الأجسام الصلبة تكاد تكون حركة توافقية بسيطة.

إن دقائق الوسط الذي تنتشر فيه الموجة مهما كان شكلها تهتز اهتزازاً توافقياً. ويتضح ذلك حتى مع الأمواج الكهرومغناطيسية التي تتحرك في الفضاء الخارجي، لكن المقادير المهتزة هنا هي المجال الكهربائي والمغناطيسي المصاحب للموجة. ومثال أخير على الحركة الاهتزازية وهو الدائرة للتيار المتردد والذي يُعرف بدلالة الجهد، التيار، والشحنات الكهربية، والذي يهتز Oscillates مع الزمن.

ومن هذا يتضح أن دراسة الحركة التوافقية هو أمر أساسي ومقدمة مهمة لدراسة عدد من فروع الفيزياء.

تعريفات أساسية:

الزمن الدوري τ Periodic Time

هو الزمن اللازم لجسم ليعمل هزة كاملة أو دورة كاملة. فالبندول البسيط يبدأ من نقطة ثم يعود إليها ليكمل الدورة. والموجة تقطع مسافة تعرف بطول الموجة في هذا الزمن لتكرر نفسها بعد ذلك وهكذا.

التردد Frequency

هو عدد الاهتزازات الكاملة في وحدة الزمن. ومن الواضح أن التردد يساوي مقلوب الزمن الدوري أي أن $f = \frac{1}{\tau}$ ووحدته الدولية هي دورة لكل ثانية وتسمى هيرتز Hertz $(1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1})$. ويعرف تبعاً لها التردد الزاوي وهو قيمة ثابتة لها الصيغة $\omega = 2\pi f$

السعة Amplitude

يرمز له بالرمز A وهو أكبر إزاحة رأسية للموجة عن خط الاتزان شكل (7.1) أي أن $A = |x|_{max}$.

طول الموجة Wavelength

يرمز لها بالرمز λ وهي الإزاحة التي تتحركها الموجة لتكرر نفسها بعد ذلك شكل (7.1) وتحسب من المعادلة :

$$\lambda = v\,\tau \tag{7.1}$$

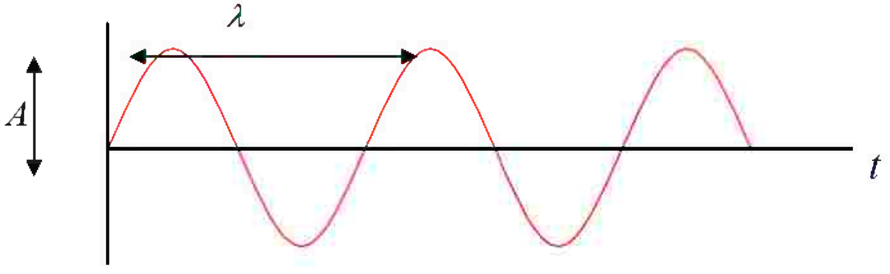
$$= v/f \tag{7.2}$$

حيث v هي سرعة الموجة.

قوة الإعادة The Restoring Force

عند دراستنا للمرونة رأينا أنه عند التأثير على جسم بقوة F فاستطال مسافة x فإنه وفي حدود المرونة التامة تكون العلاقة بينهما طردية أي أن:

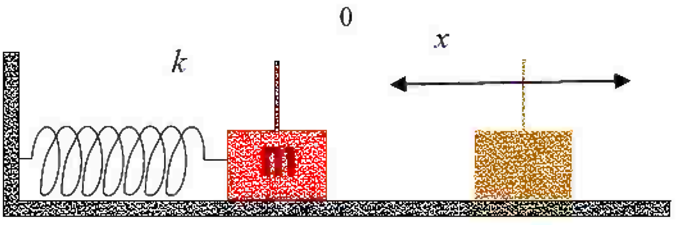
$$F' = kx$$



شكل (7.1) حركة اهتزازية

k ويسمى ثابت القوة أو ثابت التناسب ويسمى أحياناً ثابت هوك Hook's constant إذ أن القانون أعلاه يعرف بقانون هوك. إذا رفعت القوة التي أحدثت التمدد x فإن الجسم يعود إلى حالته بتأثير قوة جذب تسمى قوة الإعادة وهي القيمة السالبة لقوة التأثير شكل (7.2) أي أن:

$$F = -k\,x \qquad (7.3)$$



شكل (7.2) قوة الإعادة

مثال 7.1

احسب طول الموجة لموجة راديو AM تتحرك في الهواء بتردد 1MHz وكذلك بتردد 100MHz .

الحل :

1– نعلم أن موجات الراديو في الفراغ لها سرعة الضوء وعليه فإن:

$$\lambda_1 = v\tau_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3\times10^8 m/s}{1MHz} = 300m$$

2- وفي الحالة الثانية فإن:

$$\lambda_2 = \frac{3\times10^8 m/s}{100MHz} = 3m$$

7.2 معادلات الحركة التوافقية البسيطة

Equations of Simple Harmonic Motion

للوصول إلى معادلات الحركة التوافقية البسيطة نساوي القوة في المعادلة (7.3) بتلك في قانون نيوتن الثاني

$$F = -kx = ma \tag{7.4}$$

حيث m هي كتلة الجسم و a هي تسارعه الخطي.

ويعاد كتابة المعادلة (7.4) في صيغتها التفاضلية على الصورة التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{7.5}$$

أي أنه عند لحظة معينة يتناسب التسارع طرداً مع القيمة السالبة للإزاحة.

وقبل استنتاج المعادلات نتعرف على شكل طاقة الوضع والطاقة الكلية للجسم لأهميتها ثم ليسهل استنتاج معادلات الحركة.

ولمعرفة الطاقة الكلية للجسم المهتز نحسب أولاً الطاقة المخزونة أو طاقة الوضع Potential energy من تكامل القوة

$$U = \int_{x}^{0} F dx = \frac{1}{2} k\ x^2 \qquad (7.6)$$

وحيث إن الطاقة الكلية هي مجموع طاقتي الحركة والوضع وهي دائماً ثابتة أي أن:

$$E = K + U = \text{ثابت}$$

أو

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{ثابت} \qquad (7.7)$$

وللفائدة ، فإننا نعيد استنتاج هذه المعادلة باستخدام حقيقة أن القوة تمثل معدل تغير كمية الحركة بالنسبة للزمن

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt}(mv) = \frac{dv}{dx}(mv) = -kx$$

إذن

$$mvdv + kxdx = 0.0$$

وبالتكامل نحصل على المعادلة (7.7).

ولمعرفة الثابت فإننا نعلم أنه عند $x = A$ أي عند أقصى نقطة يصلها المهتز تنعدم السرعة وتكون الطاقة كلها طاقة وضع ،

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \qquad (7.8)$$

وعندما تكون السرعة أكبر ما يمكن أي عند $x = 0.0$ فإن الطاقة كلها طاقة حركة ،

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \qquad (7.9)$$

ومن المعادلات (7.8) و (7.9) نحصل على العلاقات بين السعة والطاقة الكلية والسرعة الكبرى للمهتز

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A \tag{7.10}$$

$$v_{MAX} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \tag{7.11}$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \tag{7.12}$$

ومن المعادلة (7.8) نجد أن:

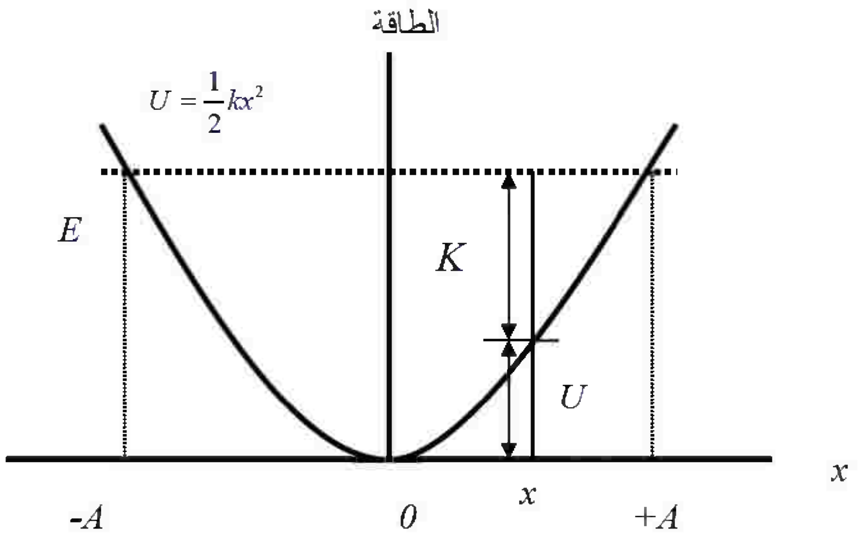
$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sqrt{A^2 - x^2} \tag{7.13}$$

أو

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) = v_{\max}^2 - \frac{k}{m}x^2$$

وهي معادلة تشبه شكلاً معادلة الحركة الخطية

$$v^{2} = v_0^2 + 2ax$$



شكل (7.3) ويمثل العلاقة بين الطاقة الكلية والطاقة الحركية والطاقة الكامنة.

ويبين الشكل (7.3) أهمية المعادلة (7.8) إذا رسمنـــا الطاقة عمودياً و x أفقياً ومثلنا U و K فإننا نلاحظ من الرسم ماذكرناه عن قانون حفظ الطاقة إذ أنه عند أي نقطة على الرسم نجد دائما أن **U+K = ثابت** .

ولاستنتاج معادلة الحركة نعوض في المعادلة (7.13) عن السرعة v بالمشتقة $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

وبفصل المتغيرات نحصل على:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\int dt$$

ولإجراء التكامل نفرض الزاوية θ في مثلث وتره A ومقابل الزاوية x

$$\sin\theta = \frac{x}{A} \rightarrow \quad dx = A\cos\theta \, d\theta$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه يكون:

$$\int\frac{A\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{A^2 - A^2 \sin^2\theta}} = \int d\theta = \sqrt{\frac{k}{m}}\int dt$$

أي أن:

$$\theta = \sqrt{\frac{k}{m}}\; t + C$$

عند الزمن $t = 0$ تكون $\theta_0 = C$

أي أن:

$$\theta = \theta_0 + \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

لكن:

$$\theta = \sin^{-1}\frac{x}{A}$$

أي أن:

$$x = A\sin\theta$$

أو:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \theta_0\right) \qquad (7.14)$$

الكمية بين قوسين في المعادلة (7.14) تمثل زاوية وحيث إن المعادلة تمثل حركة دورية فإنها تأخذ قيماً بين صفر و 2π .

أي أنه عند إكمال دورة تكون الزاوية 2π والزمن τ ولنفرض أن $\theta_0 = 0.0$

فيكون:

$$2\pi = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\tau$$

أو

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

أي أن زمن الدورة يحدّد بمعرفة ثابتين هما الكتلة للجسم المهتز ونوع مادته أي معرفة k ولا يعتمد على الطاقة أو سعة الموجة.

وحيث إن التردد هو مقلوب الزمن الدوري فإن:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.15)$$

ويعرف التردد الزاوي للحركة بأنه:

$$\omega = 2\pi f$$

ومنها مع المعادلة (7.15) نجد أن:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

وغالباً ما تكتب المعادلات السابقة بدلالة ω والتي لها وحدة radian/second أو rad/sec والآن نعيد كتابة معادلتي الإزاحة والسرعة

$$x = A\sin(\omega t + \theta_0) \quad (7.16)$$

$$v = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (7.17)$$

ويمكن الحصول على السرعة والتسارع بتفاضل الإزاحة

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \theta_0) \quad (7.18)$$

$$a = \frac{d2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \theta_0) \quad (7.19)$$

أو

$$a = -\,\omega^2\, x \quad (7.20)$$

وهذه هي المعادلة (7.5) بدلالة التردد الزاوي.

جدول (7.1)يبين معادلات الحركة التوافقية البسيطة والحركة الخطية

الحركة التوافقية البسيطة	الحركة الخطية ذات التسارع الثابت
$x = A\sin(\omega t + \theta_\circ)$	$x = x_o + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
$v = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2}$	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
$v = \omega A\cos(\omega t + \theta_\circ)$	$v = v_0 + at$
$a = -\omega^2 x$	$a =$ ثابت
$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \theta_\circ)$	

يمكن تلخيص معادلات الحركة التوافقية البسيطة ومقارنتها بمعادلات الحركة الخطية كما يظهر في الجدول (7.1).

بالرجوع إلى المعادلة (7.2) نجد أن :

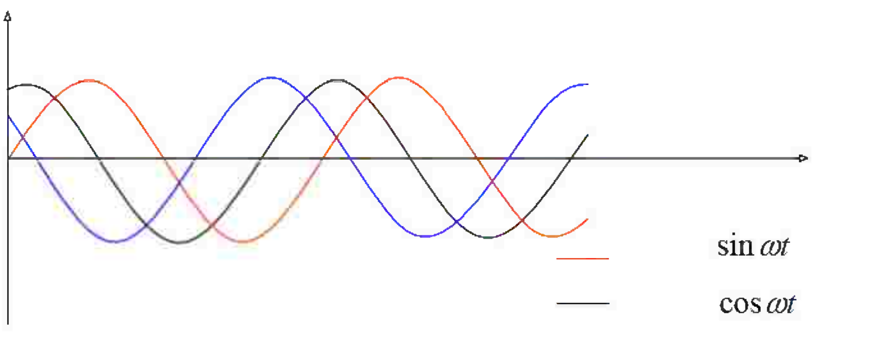
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

وهذه معادلة تفاضلية تعني أن x دالة إذا فاضلناها مرتين نحصل على ثابت سالب مضروب في الداله نفسها وهذا ينطبق على العديد من الدوال منها :

$$x = A \sin \omega t \qquad (7.21a)$$

$$x = A \cos \omega t \qquad (7.21b)$$

$$x = A \cos(\omega t + \theta_o) \qquad (7.21c)$$



شكل(7.4) علاقة الطور للمعادلات (7.21)

والفرق بين الثلاث معادلات هو في زاوية الطور ، انظر الشكل (7.4) ، ولكي نعرف أي المعادلات السابقة نستخدم نعود إلى الزمن $t = 0$ ونرى نوع السرعة والإزاحة ، فمثلاً المعادلة $x = A \sin \omega t$ لها القيم الابتدائية $x_o = 0.0$ و v_o

$= A\omega$. إذن إذا أعطى الجسم المهتز سرعة ابتدائيـة قصوى وبغير إزاحة ابتدائية فإننا نستخدم $x = A \sin \omega t$. أما المعادلة $x = A\ cos \omega t$ فإنها تستخدم عند إزاحة ابتدائية قصوى وسرعة ابتدائية تساوي صفراً . عندما يُعطى الجسم المهتز سرعة ابتدائية لا تساوي الصفر وكذلك إزاحة ابتدائية لا تساوي الصفر فإن المعادلة المستخدمة هي $x = A\cos(\omega t + \theta_0)$. ولمعرفة العلاقة بين زاوية الطور والسعة والإزاحة الابتدائية x_o فإننا نستخدم المعادلة (7.21c) حيث:

$$x_o = A\ cos\ \theta_\circ \tag{7.22}$$

و

$$v_o = -\omega A\ sin \theta_0 \tag{7.23}$$

نقسم المعادلة (7.23) على ω ثم نُربع المعادلتين ونستخدم الحقيقة

$$sin^2\ \theta_\circ + cos^2\ \theta_\circ = 1.0 \tag{7.24}$$

لنجد أن:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \tag{7.25}$$

ولمعرفة قيمة زاوية الطور نقسم المعادلة (7.23) على المعادلة (7.22) لنجد أن

$$\tan \theta_0 = -\frac{v_0}{\omega\ x_0} \tag{7.26}$$

مثال 7.2

سيارة كتلتها $1500.0\ kg$ وبها أربعة رُكّاب متوسط كتلة الراكب $70.0\ kg$ لها أربعة مساعدات حلزونية ثابت القوة لكل منها $25000.0\ N/m$.

احسب التردد لاهتزاز السيارة إذا مرت على مطب وكم الزمن للسيارة لتعمل اهتزازين.

الحل :

كتلة السيارة مع الركاب = 1780.0kg

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25000.0\ \text{N/m}}{1780.0\ \text{kg}}} = 0.6\ \text{Hz}$$

$$\tau = \frac{2.0}{f} = 3.35 \quad \text{seconds}$$

مثال 7.3

ربط الطرف الحر لحلزون بجسم كتلته $1.0kg$ وسحب مسافة $10.0\ cm$ ليترك يهتز. إذا علمت أن القوة تتناسب طرداً مع الإزاحة وأن قوة قدرها $10.0N$ تعطي إزاحة قدرها $5.0cm$.

أ- احسب زمن الدورة والتردد الزاوي .

ب- احسب أقصى سرعة وأقصى تسارع .

ج- احسب السرعة والتسارع عند إزاحة $4.0cm$.

د- احسب الزمن اللازم للجسم ليتحرك إلى منتصف المسافة بين موضع سكونه والإزاحة القصوى.

الحل :

أ- نعلم أن

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

لكن

$$k = \frac{F}{x} = \frac{10.0\ N}{0.05\ m} = 200.0\ N/m$$

إذن

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{1.0kg}{200.0N/m}} = 0.444 \ \ s;$$

$$f = \frac{1}{\tau} = 2.25 \text{ Hz};$$

$$\omega = 2\pi f = 14.14 s^{-1}$$

ب-

$$v_{max} = \pm\omega A = \pm 1.414 \text{ m/s}$$

$$a_{max} = -\omega^2 A = 19.99 \text{ m/s}^2$$

جـ- السرعة عند إزاحة قدرها $4.0\ cm$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$= \pm 14.14 s^{-1}\sqrt{0.1^2 m^2 - 0.04^2 m^2} = \pm 1.3 m/s$$

د- لحساب الزمن ليصل الجسم إلى منتصف المسافة فإننا نعود إلى الشروط الابتدائية حيث إنه عند الزمن $t = 0.0\sec$ كانت الإزاحة $10.0cm$ والسرعة الابتدائية تساوي صفراً. فإن المعادلة الأنسب هي:

$$x = A\cos\omega t$$

هنا

$$x = \frac{A}{2}$$
$$\frac{A}{2} = A\cos\omega t$$

أو

$$0.5 = \cos\omega t$$

إذن

$$(14.14\,s^{-1})t = \cos^{-1} 0.5 = 60.0^0 = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{3\times 14.14\,s^{-1}} = 0.074\,s$$

مثال 7.4

في المثال السابق أُعطي الجسم إزاحة ابتدائية قدرها $2.0cm$ وسرعة ابتدائية قدرها $1.0m/s$ احسب السعة ، زاوية الطور والطاقة الكلية، ثم اكتب معادلة مكان الجسيم.

الحل:

من المعادلة (7.25)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(0.02m)^2 + \left(\frac{1.0m/s}{14.14\,s^{-1}}\right)^2}$$
$$= 0.0735\,m$$

ومن المعادلة (7.26)

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = \tan^{-1}\frac{-1.0m/s}{(14.14s^{-1})(0.02m)} = -74.2^{\circ} = 1.3rad$$

لحساب الطاقة لدينا

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\times 200.0\frac{N}{m}\times(0.0735m)^2$$
$$= 0.54\,J$$

أو تحسب من المعادلة

$$E = \frac{1}{2}m v_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$
$$= 0.5\ x1.0kg x\ (1.0m/s)^2 + 0.5x200.0N/m\ x\ (0.02m)^2$$
$$= 0.54\ J$$

من المعادلة العامة للإزاحة

$$x = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

نحصل على

$$x = 0.073m \cos[14.14\, s^{-1}t - 1.3\, rad]$$

مثال 7.5

جسم كتلته $0.5kg$ مربوط بحلزون أفقي ، حرك حركة توافقية بسيطة وفقاً للمعادلة $x = 0.1\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$

1 - عين الموقع الذي عنده تتساوى طاقتا الحركة والوضع .

2 - احسب القيمة الكبرى لكل من طاقتي الحركة و الوضع وعين قيمة ثابت الحلزون وأكبر سرعة للجسم .

3 - احسب كلا من طاقتي الوضع والحركة عند 0.04m .

4 - احسب النسبة بين طاقتي الحركة والوضع عند إزاحة تعادل نصف السعة .

الحل:

1 - تتساوى طاقة الحركة و طاقة الوضع عند الشرط $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$

و في هذه الحالة تكون $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$

أي عند

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2.0}} = \pm\frac{0.1}{\sqrt{2.0}} = \pm 0.071m$$

2 - تأخذ طاقة الوضع قيمتها الكبرى عندما تساوي الطاقة الكلية وكذلك الحال بالنسبة لطاقة الحركة ، أي أن

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

أي أن:

$$U_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\times 0.5kg\times(\frac{\pi}{2})^2(0.1m)^2 = 6.16\times10^{-3}J = K_{max}$$

يحسب الثابت k بأكثر من طريقة منها

$$k = \frac{2E}{A^2} = 1.23N/m$$

أقصى سرعة للجسم هي

$$v_m = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1.57m/s$$

3 - طاقة الوضع عند x = 0.04m

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 1.23N/m\times 0.04m^2 = 9.84\times10^{-4}J$$

طاقة الحركة عند نفس الإزاحة

$$K = E - U = (6.16\times10^{-3} - 9.84\times10^{4})J = 5.18\times10^{-3}J$$

4 - النسبة بين طاقتي الوضع والحركة عند إزاحة $x = \frac{1}{2}A$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(\frac{1}{2}A)^2 = \frac{1}{8}kA^2$$

$$K = E - U = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{8}kA^2 = \frac{3}{8}kA^2$$

إذن

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{8}kA^2}{\frac{3}{8}kA^2} = \frac{1}{3}$$

7.3- حركة الحلزون الراسية

Motion of A body Suspended from A spring

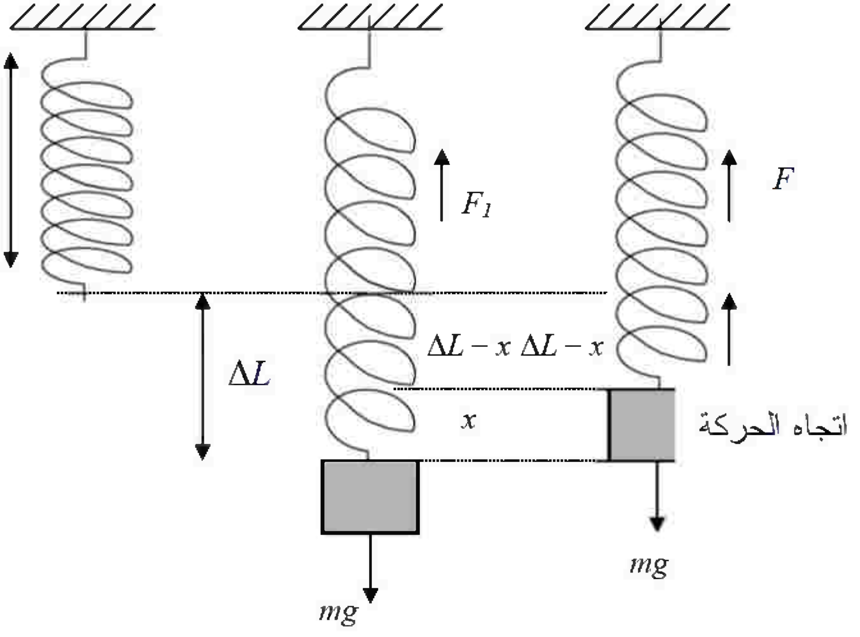
لنعلق حلزون طوله l ثم نعلق به جسم وزنه mg ليستطيل بمقدار ΔL مما يتسبب في قوة إعادة معاكسة لاتجاه الوزن ولها القيمة $F_1 = k\,\Delta L$ حيث k هو ثابت الزنبرك ومساوية للوزن أي أن:

$$k\Delta L = mg$$

والآن نفرض أن المجموعة في حالة حركة ولندرسها عند اللحظة التي يبعد الجسم عن نقطة الاتزان مسافة x ، وفي هذه الحالة فإن الاستطالة هي $\Delta L - x$ وهنا تكون القوة إلى أعلى تساوي $k\left(\Delta L - x\right)$ ويكون صافي القوة هو:

$$F = k\left(\Delta L - x\right) - mg = -kx$$

وهنا يكون صافي القوة يتناسب طرداً مع إزاحة الجسم عن مكان الاتزان ويهتز الجسم راسياً بتردد زاوي $\omega = \sqrt{k/m}$



شكل (7.5) ويمثل الشكل الحلزون قبل تعليق الجسم ثم الحلزون والجسم في حالة اتزان وأخيراً الحلزون مع اتجاه حركة الجسم إلى أعلى.

مثال 7.6

علق جسيم راسياً بحلزون طوله L ليستطيل بمقدار 1.0cm وليكون في حالة اتزان ، احسب زمنه الدوري؟

الحل:

حيث إن الجسم في حالة اتزان فإن $x = 0.0$ وبالتعويض فإن:

$$F = k\left(\Delta L - x\right) - mg = 0.0$$

أي أن:

$$k = \frac{mg}{\Delta L}$$

لكن:

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

إذن:

$$\tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{\Delta L}{g}} = 0.1\sec$$

مثال 7.7

وضع جسم كتلته $10.0kg$ على طاولة تم ربطه بسلك من الفولاذ طوله $5.0m$ ليربط الكلاب في السقف ، إذا أزيلت الطاولة فإن السلك يستطيل ويبدأ الجسم في الاهتزاز إلى أعلى وإلى أسفل بحركة توافقية بسيطة . إذا كانت مساحة مقطع السلك $1.0mm^2$ ومعامل يونج لمادته $1.9\times 10.0^{11}Pa$.

فاحسب زمن الدورة للجسم .

الحل:

نعلم أن معامل يونج يعطى بالعلاقة

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

وبإعادة ترتيبها فإن القوة :

$$F = Y\frac{\Delta L}{L}A$$

لكن قانون نيوتن الثاني هو :

$$F = m\,a$$

ومن المعادلتين أعلاه نجد صيغة للتسارع هي :

$$a = \frac{F}{m} = \left(\frac{Y\ A}{m\ L}\right)\Delta L \qquad (1)$$

أي أن التسارع يتناسب طرداً مع الاستطالة وهذا يدل أن لدينا حركة توافقية بسيطة, ومعلوم في هذه الحالة أن

$$a = \ \omega^2\ x \qquad (2)$$

وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$\omega^2 = \frac{\mathrm{Y\ A}}{\mathrm{m\ L}} = 4\,\pi^2\ \mathrm{f}^2$$

$$\therefore f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{Y\ A}{m\ L}} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{1.9\times10^{11}\times\left(1.0\times10^{-6}\right)}{10.0\times5.0}}\ Hz$$

$$= 9.8\ Hz$$

$$\tau = \frac{1}{\mathrm{f}} = 0.1\ \mathrm{s}$$

مثال 7.8

علق جسم كتلته $2.0\ kg$ رأسياً بحلزون ليستطيل $5.0cm$. ثم سحب إلى أسفل مسافة إضافية قدرها $2.5cm$ ثم ترك يهتز. **احسب** زمنه الدوري وصافي قوة الهز .

الحل :

عندما كان الجسم في حالة اتزان فإن:

$$k\ \Delta L = mg$$

$$k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{2.0 \times 9.8}{0.05}\ N/m = 392.0\ N/m$$

$$\tau = 2\ \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\ \pi \sqrt{\frac{2.0}{392.0}} = 0.45\ s$$

وصافي قوة الهز هي

$$F = -kx = (-392.0 N/m)(0.025 m) = 9.8 N$$

مثال 7.8

سحبت قوة مقدارها $28.0N$ حلزون رأسي ليستطيل بمقدار $12.0cm$ ، احسب كتلة جسم يعلق بالحلزون بحيث إذا اهتز كان زمنه الدوري $0.5sec$.

الحل :

لدينا قوة السحب والاستطالة ومنها يمكن معرفة ثابت الزنبرك

$$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{28.0\ N}{0.12\ m} = 233.3\ N/m$$

لكن

$$\tau = 2\ \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ومنها فإن

$$m = \frac{k\ \tau^2}{4\ \pi^2} = \frac{233.3 \times 0.5^2}{4\ \pi^2}\ kg = 1.48 kg$$

7.4 البندول البسيط The Simple Pendulum

البندول البسيط هو مثال آخر للحركة التوافقية البسيطة ويتكون من جسم كتلته m رُبط بطرف خيط خفيف وثُبت الطرف الآخر للخيط في نقطة يتدلى منها وتتم الحركة في مستوى رأسي تحت تأثير المركبة الجيبية للوزن انظر الشكل (7.6) . وسوف نثبت أنه إذا كانت الزاوية التي يميل بها البندول عن المحور الرأسي صغيرة فإن الحركة تمثل اهتزازاً توافقياً.

وبالنظر إلى الشكل نجد أن القوى المؤثرة على الكتلة هي قوة الشد T على امتداد الخيط ووزن الجسم mg والمركبة الجيبية $mg\ sin\theta$ والتي تتجه نحو الداخل أي أنها قوة رادة restoring force ومن معادلات الاتزان يكون

$$F_{11} = mg\sin\theta = -m\frac{d2S}{dt^2} \qquad (7.27)$$

حيث S هو طول القوس الذي يمثل مسار الجسم نحو نقطة الاتزان. الإشارة السالبة تعني أن القوة F_{11} تتجه نحو مكان الاتزان.

وحيث إنه في حال الزوايا الصغيرة يمكن تقريب طول القوس بالآتي:

$$S = L\theta$$

فإن المعادلة تصبح:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

إذا افترضنا أن الزاوية صغيرة ومقاسة بالريديان فإن $\sin\theta \approx \theta$ لتقرب المعادلة إلى:

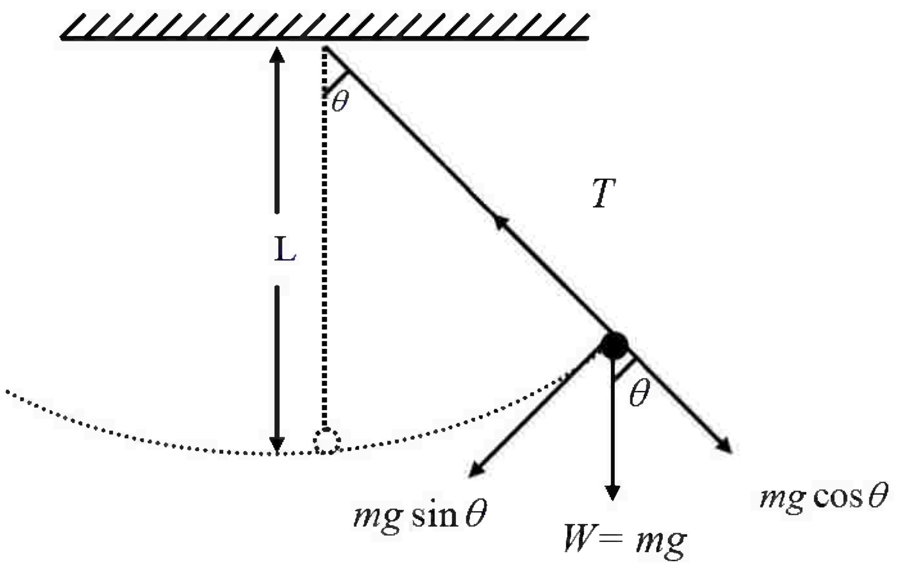
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \qquad (7.28)$$

أي أن لدينا معادلة من الدرجة الثانية في θ وهي شبيهة للمعادلة (7.5) وقياساً عليها فإن التردد الزاوي هو:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (7.29)$$

وزمن الدورة هو

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (7.30)$$



شكل (7.6) البندول البسيط

وحيث إن الزمن الدوري يعتمد فقط على طول الخيط وعلى عجلة الجاذبية ولا يعتمد على الكتلة فإن أي بندول له نفس الطول ونفس الموقع يكون له نفس الزمن الدوري بغض النظر عن وزن الجسم المعلق به. ونشير هنا إلى أنه في حالة الزاوية

الاختيارية $\sin\theta \neq \theta$ فإن زمن الدورة يُعطى بالعلاقة :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2}+....\right) \qquad (7.31)$$

حيث θ_0 هي أكبر إزاحة زاوية.

معادلات الحركه للبندول البسيط

Equations of Motion for the Simple Pendulum

يمكن وبسهولة التحقق أن أحد حلول المعادلة (7.28) هو:

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t+\phi) \qquad (7.32)$$

حيث θ_0 و ϕ هما على التوالي , السعة الزاوية وزاوية الطور. ويمكن معرفة قيمتيهما من معرفة موقع وسرعة الجسم عند بداية الحركة. أما السرعة الزاوية فتعرف بتفاضل المعادلة (7.32) لتعطي:

$$w(t) = -\omega\theta_0\sin(\omega t+\phi) \qquad (7.33)$$

وبتربيع المعادلة (7.32) و ضربها في ω^2 ثم جمعها إلى مربع المعادلة (7.33) نحصل على:

$$w^2 = \omega^2(\theta_0^2-\theta^2) \qquad (7.34)$$

ومنها نحصل على القيمة الكبرى للسرعة الزاوية

$$w_m = \pm\omega\theta_0 \qquad (7.35)$$

أما التسارع الزاوي فيعرف بتفاضل المعادلة (7.33) لتعطي:

$$\alpha(t) = -\omega^2\theta_0\cos(\omega t+\phi) \qquad (7.36)$$

أو

$$\alpha(t) = -\omega^2\theta = -\frac{l}{g}\theta \qquad (7.37)$$

ونلاحظ هنا أن المعادلات (7.32) - (7.37) هي معادلات توافقية للحركة على قوس وتناظر معادلات الحركة (7.16) - (7.19) .

مثال 7.10

بندول بسيط طول خيطه $1.0m$ يهتز بسعة قدرها $0.2m$. احسب

أ- سرعة البندول الخطية عند أوطى نقطة. ب- تسارعه الخطي عند نهايتي المسار. ج- السعة الزاوية. د- السرعة الزاوية الكبرى. و- سرعة الجسم الزاوية عند الزاوية $\theta = 5.0°$.

الحل:

أ- أولاً نحسب زمن الدورة.

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.0\text{m}}{9.8\text{m/s}^2}} = 2.01\,\text{sec}$$

عند أوطى نقطة تكون السرعة أقصى مايمكن

$$v_{max} = |\omega A| = (3.1416\ s^{-1})\,(0.2\ m) = 0.628\ m/s$$

ب- عند الطرفين يكون التسارع كذلك أكبر مايمكن

$$a_{max} = \pm\ \omega^2 A = \pm 1.974\ m/s^2$$

ج- لحساب السعة الزاوية فإن:

$\sin\theta_0 \cong \frac{A}{L} = 0.2$ ومنها فأن $\theta_0 = 11.54°$

د- لحساب السرعة الزاوية الكبرى فإن:

$$w_m = \omega\theta_0 = \sqrt{\frac{L}{g}}\theta_0 = 0.319s^{-1} \times 11.54^\circ = 0.064 rad/\sec$$

و– لحساب السرعة الزاوية للجسم عند الزاوية $\theta = 5.0^\circ$ نستخدم المعادلة $w^2 = \omega^2(\theta_0^2 - \theta^2)$

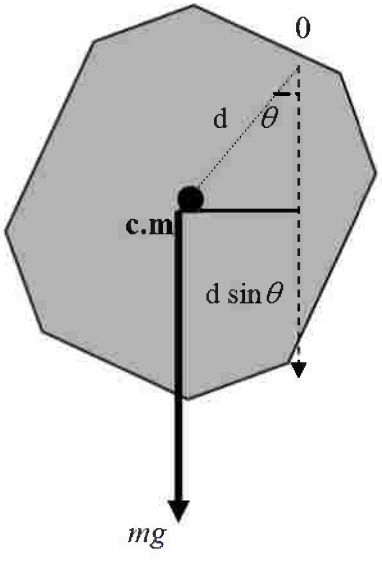
$$w^2 = (0.102\sec^{-2})(0.04rad^2 - 0.0077rad^2) = 03.3\times10^{-3} rad^2/\sec^2$$

ومنها فإن

$$w = \pm 0.0574 rad/\sec$$

7.5- البندول المركب The Compound Pendulum

يتركب من أي جسيم صلب منتظم معلق من نقطة لاتمر عبر مركز ثقله . نفرض أن جسماً وزنه mg معلق من النقطة O والتي تبعد مسافة d عن مركز الثقل center of gravity (c.g) أو ما يعرف بمركز الكتلة center of mass $(c.m)$. العزم حول النقطة O للوزن هو $mgd\sin\theta$ لكن العزم يعطى بالصيغة $\tau = I\alpha$ حيث α يمثل التسارع الزاوي و I يمثل عزم القصور الذاتي أي أن



شكل(7.7) جسم منتظم يمثل البندول المركب

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

والإشارة السالبة كذلك تدل على أن قوة الإعادة تتجه نحو جهة النقص في θ . وإذا فرضنا ثانية أن θ صغيرة كما سبق فإن $\sin\theta \approx \theta$ أي أن

$$\frac{d2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \qquad (7.38)$$

حيث

$$\omega^2 = mgd/I$$

وبأخذ الجذر لها فإن

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (7.39)$$

أما الزمن الدوري فيعطى بالعلاقة

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (7.40)$$

مثال 7.11

قضيب طوله L علق من نقطة تبعد مسافة $\frac{L}{4}$ عن مركز الكتلة. إذا هُز هذا القضيب حول هذه النقطة بحركة توافقية بسيطة فاحسب زمن الدورة له.

الحل:

نعتبر القضيب منتظماً وعليه فإن مركز الكتلة يكون في منتصفه أي أن نقطة التعليق تبعد أيضاً $\frac{L}{4}$ من طرفه العلوي.

نحسب أولاً عزم القصور الذاتي للقضيب من التكامل.

$$I=\int x^2 dm=\frac{m}{L}\int_{-L/4}^{3L/4} x^2 dx=\frac{m}{L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-L/4}^{3L/4}$$

$$=\frac{m}{3}L^2\left[\frac{28}{64}\right]=\frac{7}{48}mL^2=\frac{m}{3L}\left[\left(\frac{3}{4}L\right)^3-\left(\frac{-L}{4}\right)^3\right]$$

ثم نستخدم المعادلة (7.40) لحساب الزمن الدوري مع التعويض عن الذراع بالقيمة $L/4$

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{48}mL^2}{mg\frac{L}{4}}}=2\pi\sqrt{\frac{7}{12}\frac{L}{g}}$$

افرض $L = 1.5\ m$ فيكون $\tau = 1.88\ sec$

مثال 7.12 :

قضيب خفيف، يمكن إهمال وزنه، طوله $1.0m$. ثبت به خمسة أجسام كتلة كل منها $0.5kg$ وتبعد عن طرف التعليق المسافات:

$25.0cm$ و $40.0cm$ و $60.0cm$ و $75.0cm$ و $100.0cm$. إذا حركت المجموعة حول نقطة التعليق فكم زمن الدورة الواحدة؟

الحل:

نحسب أولاً بعد مركز الثقل عن نقطة التعليق

$$L=\frac{\sum m_i L_i}{\sum m_i}=\frac{0.5kg(0.25+0.4+0.6+0.75+1.0)}{2.5kg}=0.6m$$

عزم القصور الذاتي

$$I=mL^2=2.5kg\times0.6^2=0.9kg.m^2$$

ويحسب الزمن الدوري من المعادلة (7.40)

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{0.9kg.m^2}{2.5kg \times .9.8m/s^2 \times 0.6m}} = 1.55\,\sec onds$$

7.6- الحركة التوافقية البسيطة المخمدة :

Damped Simple Harmonic Motion

تطرقنا عند شرح الحركة التوافقية البسيطة المثالية إلى أن القوة التي تحدث هذه الحركة هي قوة محافظة . كانت هذه القوة هي قوة الحلزون في حالة جسم مربوط بحلزون وفي الرقاص كانت قوة الجاذبية الأرضية في البندول البسيط . ولكن مثل هذه الحركات تتعرض لقوى غير محافظة كقوة الاحتكاك ومقاومة المائع (الهواء مثلا) التي تحاول إخماد هذه الحركة عن طريق تبديد الطاقة الميكانيكية التي تصحب حركة الجسم أو خلال الوسط الذي ينتج القوة غير المحافظة .

إن مقاومة المائع أو قوة الاحتكاك تتناسب طردًا مع سرعة الجسم بشكل تقريبي وعليه فإن قانون نيوتن الثاني الذي يصف حركة الجسم يمكن كتابته بشكل أكثر دقة كالتالي :

$$m\frac{d2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

أو

$$m\frac{d2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (7.41)$$

حيث يصف الحد $-b\dfrac{dx}{dt}$ مقاومة المائع أو قوة الاحتكاك و b ثابت موجب يسمى عامل الإخماد (Damping coefficient) . إن الحل العام للمعادلة

التفاضلية أعلاه هو:

$$x = A_0 e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \theta) = A_0 e^{-\omega_b t} \cos(\omega' t + \theta) \qquad (7.42)$$

حيث تكون سعة الذبذبة في هذه الحالة هي $A_0 e^{-\omega_b t}$ والتي تتغير مع الزمن نتيجة لضياع جزء من الطاقة الميكانيكية للجسم المهتز الذي يتذبذب بتردد زاوي مقداره ω'.

وقيمتها يمكن معرفتها من تعويض المعادلة (7.42) في المعادلة (7.41) فينتج أن:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{b}{2m})^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_b^2} \qquad (7.43)$$

أما قيم الثابتين θ و A_0 فيمكن معرفتهما من شروط بدء الحركة أي موقع وسرعة الجسم عند بداية الحركة أي عند الزمن $t=0$. ويسمى الثابت $\omega_b = \frac{b}{2m}$ بالتردد الزاوي الإخمـــادي (Damping angular frequency) و A_0 بسعة الذبذبة عند بدء الحركة .

إن طبيعة الحركة الاهتزازية مع الزمن يعتمد على قيمة $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بالنسبة لقيمة w_b.

7.8 الرنين والحركة التوافقية البسيطة المجبرة

Resonance and Forced Simple Harmonic Motion

لنأخذ جسماً يتحرك حركة توافقية بسيطة وتؤثر عليه قوة غير محافظة تحاول إخماد حركته بالإضافة إلى قوة خارجية محركة تجبره على الاهتزاز مثل

$$F = F_0 \cos \omega t$$

حيث تكون القيمة العظمى للقوة المحركة F تساوي الثابت F_0 وتتغير مع الزمن كدالة جيب التمام $(\cos\omega t)$ ويسمى هذا النوع من الحركة بالاهتزاز المجبر (Forced oscillation). يلاحظ أن معادلة الحركة تحوي ثلاثة ترددات زاوية تختلف في مصدرها وطبيعتها وقيمتها عن بعضها فالأولى هي التردد الزاوي للقوة المحدثة للاهتزاز المجبر F ، والثانية التردد الزاوي الطبيعي $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ والمصحوبة بالاهتزاز المثالي . والثالثة التردد الزاوي الإخمادي $\omega_b = \dfrac{b}{2m}$ ويمكن أن يأخذ التردد الزاوي ω أية قيمة بينما تعتمد ω_0 و ω_b على الجسم والقوة المحدثة للاهتزاز مثل قوة الزنبرك (F_s) وطبيعة الوسط .

تؤثر على الكتلة المهتزة في هذه الحالة ثلاث قوى هي قوة الإعادة $(-k\mathbf{x})$ وقوة الإخماد والقوة المحركة $(F_0 \cos\omega t)$ وعند تطبيق قانون نيوتن الثاني على حركة جسم كتلته m فإن معادلة الحركة تصبح :

$$m\frac{d2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx - F_0 \cos\omega t = 0 \qquad (7.44)$$

وسنكتفي بالإشارة إلى الحل وشرح ظاهرة الرنين (Resonance) فقط . أما الحل للمعادلة(7.44) فهو :

$$x = A\cos(\omega t + \theta) \qquad (7.45)$$

حيث تكون سعة الذبذبة في هذه الحالة :

$$A = \frac{F_0 / m}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\omega\omega_b)^2]^{1/2}} \qquad (7.46)$$

وفي الحالة التي يكون التردد الزاوي ω للقوة F مساويا للتردد الزاوي الطبيعي ω_0 للجسم المهتز دون إخماد عندها نقول إن الجسم قد تناغم في تردده مع

القوة المحركة وتعرف هذه الحالة بحالة الرنين حيث تصل سعة الذبذبة للجسم قيمتها العظمى أي :

$$A = \frac{F_0 / m}{2\omega\omega_b} \tag{7.47}$$

ويسمى هذا التردد بالتردد الرنيني (Resonance frequency) . نلاحظ أيضاً أن سعة الذبذبة تصل إلى مالانهاية في غياب قوة الإخماد أي عندما تكون $\omega_b = 0.0$

مثال 7.13

ربط جسم كتلته $10.0g$ بطرف حلزون يتحرك حركة دورية مخمدة. إذا كان ثابت الزنبرك $50.0dyne/cm$ وكانت قوة الإخماد المناظرة لسرعة خطية قدرها $15.0cm/s$ هي $300.0dyne$ وإذا كانت الإزاحة الابتدائية $10.0cm$ فعين موضع الجسم عند أي لحظة واحسب السعة .

الحل :

لدينا المعادلة

$$m\frac{d2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

وحيث إن قوة التخميد هي

$$F = b\frac{dx}{dt}$$

فإن

$300.0dyne = (15.0cm/s)b$ ومنها فإن $b = 20.0g.s^{-1}$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه فإن

$$10\frac{d2x}{dt^2}+20\frac{dx}{dt}+50x=0$$

والتي لها الحل العام

$$x=ae^{-bt/2m}\cos(\omega t+\theta) \qquad (1)$$

حيث a هي السعة. هذا الحل يمكن كتابته أيضا بالصيغة

$$x=e^{-bt/2m}(A\cos\omega_b t+B\sin\omega_b t)$$

وحيث إنه عند $t=0.0$ تكون $x=10.0cm$ فإن $A=10.0cm$

إذن

$$x=e^{-t}(10\cos t+B\sin t)$$

وبالتفاضل نحصل على

$$\frac{dx}{dt}=-x+e^{-t}(-10\sin t+B\cos t)$$

ومن الشروط الابتدائية عند $t=0.0$ و $\frac{dx}{dt}=0.0$ فإن

$-10.0cm+B=0$ ومنها فإن $B=10.0cm$

إذن يكون للحل الصيغة

$$x=10e^{-t}(\cos t+\sin t) \qquad (2)$$

ولمعرفة زاوية الطور θ فإننا نساوي المعادلتين (1) و (2) لنحصل على

$$10\cos t+10\sin t=a(\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta)$$

من هـذه المعادلة نجد أن

$10=a\cos\theta$ و $10=a\sin\theta$

وبقسمة المعادلة الثانية على المعادلة الأولى فإن

$\tan\theta = 1$ أي أن $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

وبالتعويض عن θ فإن

$a = 10\sqrt{2}cm = 14.14cm$

أي أن سعة الموجة هي

$(14.14e^{-t})$

وبالتعويض عن السعة في المعادلة (1) فإن موضع الجسم عند أي لحظة هو

$x = 14.14e^{-t}\cos(t + \dfrac{\pi}{4})$

❊ ❊ ❊

مســـــائـل

1- أثرت قوة سحب أفقية على جسم كتلته $0.2kg$ ربط بزنبرك ثابت الإعادة له $100.0N/m$ بدأ الجسم حركته التوافقية بطاقة كامنة $0.5J$ وطاقة حركة $0.3J$ احسب :

أ–السعة ، التردد ، الزمن الدورى ، التردد الزاوي .

ب– الطاقة الكامنة عند إزاحة تساوى نصف السعة .

ج–الإزاحة التى عندها تتساوى طاقتا الحركة والكمون .

د–السرعة عند منتصف المسار.

2- يتحرك جسم توافقيا بتردد $5.0\ Hz$ وسعة $15.0\ cm$ احسب :

أ– القيمة الكبرى للسرعة والتسارع.

ب– السرعة والتسارع عند إزاحة $8.0\ cm$.

ج– الزمن اللازم ليتحرك الجسم من نقطة الاتزان إلى نقطة تبعد$10.0\ cm$عنها.

3 – علق جسم كتلته $0.5\ kg$ في زنبرك يصنع 5.0 ذبذبات في الثانية وسعته $5.0cm$. احسب طاقة الحركة له عند إزاحة $2.5\ cm$.

4 – ربط جسم كتلته $0.5kg$ في زنبرك أفقي وعلى سطح أملس. عند تحريكه صنع 5.0 ذبذبات في الثانية. إذا أستبدل الجسم بآخر كتلته $0.25kg$, فكم يكون عدد الذبذبات في الثانيه؟

5- ربط جسم كتلته m في زنبرك أفقي وعلى سطح أملس. عند تحريكه كان تردده 1.0Hz, عند اضافة جسم آخر كتلته 1.5kg أصبح التردد 0.5Hz. احسب كتلة الجسم.

6 – جسم كتلته $250.0\ g$ ربط بحلزون ثابتة $250.0\ N/m$ ..عند الزمن صفر بدأت الحركة بإزاحة ابتدائية قدرها $10.0cm$ لتبدأ الحركة بسرعة قدرها $10.0m/s$. احسب :

أ – الزمن الدوري و التردد الزاوي .
ب – الطاقة الكلية .
جـ – سعة الموجة .
د – زاوية الطور .
هـ – أقصى سرعة وأقصى تسارع .
و – مكان وسرعة وتسارع المكان عند زمن قدره $5.0\ sec$.

7– مكبس ماكينة سيارة يتحرك توافقيا وكان طول الأسطوانة $7.0cm$ وتردد دوران الماكينة $60.0rev/s$ وكتلة المكبس $0.5kg$. **احسب**:

أ – تسارع المكبس عند نهاية الأسطوانة .

ب – قوة الإعادة عند نهاية الأسطوانة .

ج – سرعة المكبس عند منتصف الأسطوانة .

8– يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة ومعادلة حركته هي

$$x = 0.15\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

احسب ما يلي :

أ – سعة الذبذبة ، زمنها ، ترددها ، وثابت الطور لها .

ب– موقع الجسم وسرعته وتسارعه بعد ثلاث ثوان من ابتداء الحركة .

ج – القيمة العظمى للسرعة والتسارع .

9- يتحرك جسم كتلته $100.0g$ حركة توافقية بسيطة وفقا للمعادلة

$$x = a\cos(\omega t + \phi_0)$$

إذا كان تردده $4.0Hz$ وسرعتة $9.0m/s$ عندما كان موقعه $0.2m$ احسب :

أ – السعة ، زاوية الطور والزمن الدورى .

ب – الطاقة الكلية للجسم .

ج – عين موقع الجسم بعد 3.0 ثوان .

10- علق جسم وزنه $50.0\ N$ من حلزون رأسي فاستطال $10.0\ cm$ حرك الجسم ليتحرك بتردد $1.5\ Hz$.

أ – احسب كتلة الجسم .

ب – احسب مكان الجسم واتجاهه عند زمن قدره $0.25sec$.

ج – احسب قوة الإعادة عند إزاحة $2.0\ cm$ تحت نقطة الاتزان .

11- علق جسم كتلته $5.0\ kg$ من حلزون . عند هزه كان تردده $2.0Hz$. كم النقص في طوله عند ازاحة الجسم ؟

12- ربط جسم كتلته $0.2\ kg$ بخيط طوله $1.0m$ حرك حركة بندولية . إذا كان طول القوس الذي يتحرك عليه الجسم $10.0\ cm$ فاحسب :

أ – تردد الجسم و سعة الذبذبة .

ب – السرعة الزاوية الكبرى وأكبر تردد زاوي .

ج – السرعة عندما يكون الجسم عند $\theta = 1.0\times10^{-2}\ rad$.

13- طفل كتلته $20.0kg$ يجلس في أرجوحة طولها L أعطيت إزاحة أفقية مقدارها $0.5\ m$ ليتحرك الطفل حركة توافقية بسيطة وبزمن دوره $15.0sec$ احسب:

أ – التردد الزاوي و طول الخيط .

ب – السعة الزاوية وأكبر سرعة زاوية, وكذلك أكبر تسارع زاوي .

ج – سرعة الطفل الخطية عند نقطة الاتزان .

د- السرعة الزاوية عند البعد الزاوي $\theta = 2.5^\circ$

14 – سلك خفيف يمكن إهمال وزنه طوله L يهتز حول أحد طرفيه ويحمل ثلاثة أجسام كتلها متساوية ، m ، وعلى الأبعاد $\frac{L}{3}, \frac{2L}{3}, L$ من نقطة التعليق .

احسب زمن الذبذبة .

15 – بندول بسيط زمنه الدوري $2.0\ sec$ احسب الزمن الدورى لهذا البندول على سطح القمر حيث $g_m = 1.7 m/s^2$

16- طفل وزنه $160.0N$ يجلس في أرجوحة طولها $1.5m$. أعطي إزاحة أفقية مقدارها $0.4m$ فبدأ الطفل يتحرك توافقياً وبزمن دوري يساوي $10.0\sec$.

أ- احسب طول الأرجوحة .   ب- احسب السعة الزاوية .

ج- استنتج معادلة الحركة للطفل .

د- احسب سرعة الطفل الخطية والزاوية عند نقطة الاتزان .

هـ- احسب أكبر عزم زاوي على محور الدوران .

17- أسطوانة مفرغة نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها L وكتلتها M علقت من أحد طرفيها لتهتز اهتزازا توافقيا . احسب زمنها الدورى ثم احسب الزمن الدوري لو كانت مصمتة.

18 – مسطرة منتظمة طولها L تهتز حول نقطة تبعد مسافة X من مركزها .

أ – اثبت أن التردد الزاوى يعطى بالصيغة $\omega = \sqrt{\dfrac{g\,X}{L^2/12 + X^2}}$.

ب – اثبت أن أكبر قيمة للتردد الزاوي يكون عند $\left(X = \dfrac{L}{\sqrt{12}} \right)$.

ج – ما طول المسطرة عندما يأخذ التردد الزاوي القيمة $2\pi\, rad/s$.

* * *