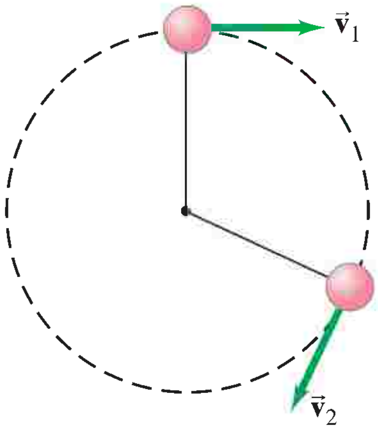
يعمل روّاد الفضاء في الجزء العلويّ الأيسر من الصورة في مكّوك الفضاء. إنّهم يشعرون بانعدام وزنهم الظاهريّ بسبب سرعة دورانهم العالية حول الأرض. ويدور القمر أيضًا كما هو ظاهر في الصّورة حول الأرض بسرعة عالية. كما يخضع كلّ من مكّوك الفضاء والقمر في مداريهما شبه الدّائريين إلى تسارع مركزيّ. فما الذي يمنع القمر ومكّوك الفضاء (وروّاد الفضاء) من التّحرك مبتعدين عن الأرض في خطّ مستقيم؟ إنّها قوّة الجاذبية الأرضيّة. ينصّ قانون نيوتن للتّجاذب الكونيّ على أنّ أيّ جسمين يتجاذبان بقوة يتناسبان طرديًا مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسيًا مع مربع المسافة بينهما.

الفصل 5

الحركة الدّائريّة والجاذبيّة



الشكل 5 – 1 جسم صغير يتحرك على محيط دائرة، ويظهر كيفية تغير السرعة المتجهة. اتجاه السرعة اللحظية عند كلّ نقطة هو المماس للمسار الدائري.

يتحرّك جسم ما في خط مستقيم إذا كانت القوة المؤثرة فيه تعمل باتّجاه حركته، أو عندما تكون محصلة القوى المؤثرة فيه تساوي صفرا. أما إذا كان اتّجاه محصلة القوى يميل بزاوية ما عن اتّجاه حركة الجسم عند أيّ لحظة، فإنّ الجسم سيبدأ بالحركة في طريق منحنٍ. وتُعدّ حركة المقذوفات كما نوقشت في الفصل الثالث أفضل مثال على ما ذكر. كما يُعدّ الجسم المتحرك على محيط دائرة مثالا مهمّا آخر على ذلك، مثل حركة الكرة المثبتة بنهاية حبل والمرغمة على الدوران حول رأس شخص ما، أو حركة القمر شبه الدائرية حول الأرض.

وسندرس في هذا الفصل الحركة الدائرية للأجسام، وطرق تطبيق قوانين نيوتن في الحركة. وسنناقش كذلك كيفية توصّل نيوتن إلى قانون مهم آخر نتيجة تطبيقه لمبادئ الحركة الدائرية على حركة كلّ من القمر والكواكب الأخرى. وهذا ما ساعد نيوتن لاحقًا على صياغة قانون التجاذب الكونيّ الذي يعدّ حجر الأساس في تحليله للعالم الماديّ.

5-1 كينماتيكا الحركة الدائرية المنتظمة

يقال للجسم الذي يتحرك على محيط دائرة بسرعة ثابتة مقدارها v بأنه يخضع **لحركة دائرية منتظمة**. وفي هذه الحالة، تبقى قيمة سرعته المتجهة ثابتة، في حين يتغير اتّجاه هذه السرعة باستمرار نتيجةً للحركة الدائرية (الشكل 5 – 1). ولأنّ التّسارع يعرّف على أنه معدل تغير

السرعة الانتقالية المتجهة. فإن تغير اتجاه هذه السرعة يحدث تسارعًا. مثلما كان تغير قيمة السرعة المتجهة يسببها. وعليه. فإنّ الجسم الذي يتحرك في مسار دائريّ يتسارع باستمرار. حتى وإن بقيت قيمة سرعته ثابتة $(v_1 = v_2 = v)$. ولنتفحص هذا التسارع الآن بتمعن أكبر: لقد تمّ تعريف التسارع كالتالي:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$

تمثل $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ التّغير في السّرعة المتجهة خلال الفترة الزمنية القصيرة Δt. وسوف نتناول الآن الحالة التي يكاد يصل الزمن Δt خلالها إلى الصفر. لنشتق عندها قيمة التسارع اللحظي. وسوف نفترض الآن. كما في (الشكل 5 – 2). أنّ Δt لا تصل إلى الصفر لكي يصبح الرسم التوضيحي أكثر سهولة في إيصال المفهوم . وخلال الفترة الزمنية Δt. يتحرك الجسم. كما في (الشكل 5 – 2 أ). من النقطة أ إلى النقطة ب. قاطعًا مسافة Δl على القوس الذي يحيط بزاوية مقدارها $\Delta\theta$. وأنّ التغير في متجه السرعة هو: $\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 = \Delta\vec{\mathbf{v}}$ كما هو واضح في (الشكل 5 – 2 ب). وعندما نختار قيمة Δt لتكون صغيرة جدًا. فسينعكس ذلك على كلّ من Δl و $\Delta\theta$ لتكونان صغيرتين أيضًا. ولتصبح $\vec{\mathbf{v}}_2$ وكأنها موازية تماما لـ $\vec{\mathbf{v}}_1$. وعليه. سنجد أنّ $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ تكاد تكون عمودية تمامًا عليهما (الشكل 5 – 2 جـ). وهكذا. فإن $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ ستشير باتجاه مركز الدائرة. وبما أنّ $\vec{\mathbf{a}}$ بالتعريف تشير إلى اتجاه $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ نفسه. فهي إذن ستشير إلى مركز الدائرة أيضًا. ومن هنا جاءت تسمية هذا التسارع بالتسارع الباحث عن المركز أو **التسارع المركزي** أو التسارع القطري (نتيجة اتجاهه الموازي لنصف قطر الدائرة) ويرمز إليه بـ $\vec{\mathbf{a}}_R$.

أما الآن. فسنحدد قيمة هذا التسارع المركزي (القطري). a_R. بما أنّ الضلع جـ أ في (الشكل 5 – 2 أ) عمودي على $\vec{\mathbf{v}}_1$. والضلع جـ ب عمودي على $\vec{\mathbf{v}}_2$. فإنّ الزاوية $\Delta\theta$ (الزاوية المحصورة بين كلّ من الضلعين جـ أ و جـ ب) هي الزاوية ذاتها المحصورة بين $\vec{\mathbf{v}}_1$ و $\vec{\mathbf{v}}_2$. أي أنّ المتجهات $\vec{\mathbf{v}}_1$ و $\vec{\mathbf{v}}_2$ و $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ في (الشكل 5 – 2 ب) تشكل مثلثًا متماثلًا* هندسيًا مع المثلث جـ أ ب المبين في (الشكل 5 – 2 أ). وعندما نأخذ $\Delta\theta$ على أنها زاوية صغيرة جدًا (عن طريق إرغام Δt على أن تكون صغيرة جدًا) ونضع $(v = v_1 = v_2)$ نتيجة ثبات قيمة السرعة المتجهة. فإننا نستطيع كتابة :

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta l}{r}$$

وهي متساوية بالتأكيد في حال اقتراب قيمة Δt من الصفر. التي عندها سيتعادل طول القوس مع طول الوتر أب. ولمعرفة قيمة التسارع اللحظي: نجعل قيمة Δt تقترب من الصفر. ونضع إشارة مساواة بدلًا من التقريب في العلاقة السابقة: أي أنّ

$$\Delta v = \frac{v}{r}\Delta l$$

وللحصول على التسارع المركزي. a_R . نقسم Δv على Δt:

$$a_R = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

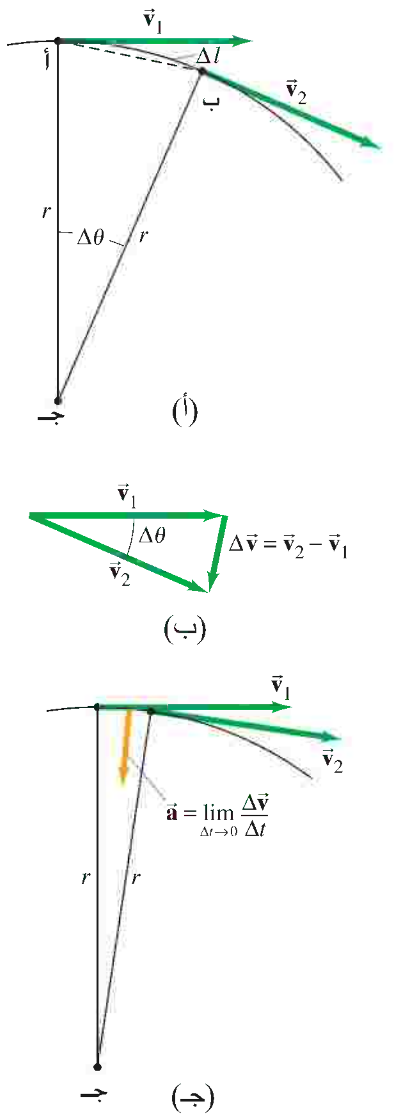
ولكن $\Delta l/\Delta t$ هي السرعة الخطية v للجسم. وعليه. فإنّ

$$a_R = \frac{v^2}{r}. \qquad (1 - 5)$$

وُتعدّ (المعادلة 5 – 1) صحيحة في الحالات جميعها التي تشمل سرعة v المتغيرة. وباختصار. فإنّ الجسم الذي يقطع محيط دائرة نصف قطرها r. بسرعة ثابتة v . يمتلك تسارعًا يشير باتجاه مركز الدائرة. وتبلغ قيمته $a_R = v^2/r$. وكلما ازدادت قيمة سرعة الجسم v. يُغيّر اتجاه هذه السرعة المتجهة بسرعة أكبر. وكلما ازداد نصف قطر المسار. قلّت السرعة التي يتغير عندها اتجاه سرعته المتجهة.

* يحتوي الملحق أ على مراجعة الهندسة

الشكل 5 – 2 تحديد التغير في السرعة $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ المتجهة لجسم يتحرك في مسار دائري. والطول Δl هو المسافة على امتداد القوس من A إلى B.

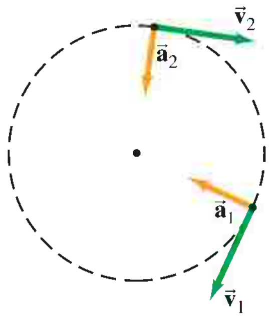


تسارع مركزي (قطري)

تنويه:
تبقى قيم السرعة ثابتة خلال الحركة الدائرية المنتظمة. ومع هذا، فإنّ التسارع لا يساوي صفرًا.

وعلى الرغم من أنّ التسارع يشير إلى مركز الدائرة، فإنّ متجه السرعة يشير دائما إلى اتّجاه الحركة، وهو مماس للدائرة. وعليه، فإنّ كلا من متجهي التسارع المركزي والسرعة متعامدان على بعضهما بعضًا عند كلّ نقطة خلال المسار المعرّف في هذه الحركة الدائرية المنتظمة (الشكل 5 – 3). ويمكن عدّ الحركة الدائرية مثالًا آخر يؤكد خطأ الفرضية القائلة بأنّ السرعة والتسارع يجب أن يشيرا إلى الاتجاه نفسه. إنّ $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{v}}$ متجهان متوازيان لجسم يسقط سقوطا حرًا، أمّا بالنسبة إلى الحركة الدائرية، فهما غير متوازيين بل إنّهما متعامدان (ولقد ظهر هذا جليّا بأنهما متجهان غير متوازيين خلال عرضنا لحركة المقذوفات، البند 3 – 5).

تنويه:
متجهـا الحركـة $(\vec{\mathbf{v}})$ والتسـارع $(\vec{\mathbf{a}})$ ليسـا في الاتجاه نفسه بل هما متعامدان: $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{v}}$.



الشكل 5 – 3 تكون $\vec{\mathbf{a}}$ عمودية على $\vec{\mathbf{v}}$ دائما خلال الحركة الدائرية المنتظمة.

الزمن الدوري والتردد

وغالبا ما توصف الحركة الدائرية لجسم ما بدلالة تردّده f، وهي عدد الدورات الكاملة التي يقطعها جسم خلال الثانية الواحدة. إنّ **الزّمن الدّوري** T لجسم يتحرك على محيط دائرة، هو الزمن اللازم لهذا الجسم ليمسح محيط الدائرة مرة واحدة خلال دورة كاملة. ويرتبط التردد وزمن الدورة الواحدة بالعلاقة التالية:

$$T = \frac{1}{f} \qquad \textbf{(2 – 5)}$$

فعلى سبيل المثال، إذا كان تردد جسم ما 3 دورات/ث، فإنه سيحتاج إلى $\frac{1}{3}$s لكي يمسح دائرة كاملة. ونستطيع أن نكتب لجسم يدور دورة كاملة حول محيط دائرة $(2\pi r)$ بسرعة ثابتة v:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

المثال 5-1 تسارع كرة دوّارة

تدور كرة كتلتها 150-g مثبتة بنهاية حبل بانتظام في دائرة أفقية نصف قطرها 0.600 m، كما في (الشكل 5 – 1 أو 5 – 3). ما مقدار التسارع المركزي للكرة إذا قطعت الكرة دورتين كاملتين في الثانية الواحدة؟

النّهج: يعطى التسارع المركزي بالعلاقة التالية: $a_R = v^2/r$، ويمكن حساب السرعة v بدلالة نصف القطر r، والتردد f.

الحـــلّ: بما أنّ الكرة تقطع دورتين كاملتين خلال الثانية الواحدة، فإنّ الكرة سوف تمسح دائرة كاملة خلال $0.500\ s$، وهو ما يمثل زمن الدورة الواحدة T. إنّ المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة هي محيط الدائرة $2\pi r$ ، حيث إن r هو نصف قطر الدائرة. وعليه، فإنّ سرعة الكرة:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2(3.14)(0.600\ \mathrm{m})}{(0.500\ \mathrm{s})} = 7.54\ \mathrm{m/s}$$

ويصبح التسارع المركزي*:

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(7.54\ \mathrm{m/s})^2}{(0.600\ \mathrm{m})} = 94.7\ \mathrm{m/s^2}$$

التّمرين أ: ما معامل تضاعف التسارع المركزي إذا ما تضاعف طول الحبل إلى 1.20 m وبقيت المعطيات الأخرى جميعها دون تغيير؟

* تعتمد الاختلافات في المنزلة الأخيرة لقيمة السرعة v على ما يتم قراءته من الآلة الحاسبة (التي تعطي $a_R = 94.7\ \mathrm{m/s^2}$)، ولكن عند استخدام $\pm 0.1\ \mathrm{m/s}$ فسيكون الناتج $a_R = 94.8\ \mathrm{m/s^2}$، ويمكن اعتبار القراءتين السابقتين صحيحتين بناء على درجة الدقة المقبولة، وهي $v = 7.54\ \mathrm{m/s}$ (البند 1 – 4).

المثال 2-5 تسارع القمر المركزيّ

احسب تسارع القمر باتجاه الأرض عندما يقترب نصف قطر مسار القمر الدائريّ حول الأرض من 384,000 km، وزمن الدورة الكاملة T من 27.3 يوما.

النهج: علينا إيجاد السرعة v للحصول على a_R. ويعدّ استخدام نظام الوحدات الدولي (SI) ضروريًّا لتكون وحدة v المستخدمة هي m/s.

الحــل: عندما يدور القمر حول الأرض، فهو يقطع مسافة $2\pi r$ خلال الدورة الواحدة الكاملة، علمًا بأنّ قيمة نصف قطر المسار الدائري هي $r = 3.84 \times 10^8\,\text{m}$. إنّ الزمن اللازم لكي يقطع القمر دورة واحدة كاملة هو 27.3 يوم (d). وعليه، سنستخدم المعادلة التالية لحساب سرعة القمر في مساره حول الأرض: $v = 2\pi r/T$. إنّ زمن الدورة الواحدة T بالثواني هو: $T = (27.3\,\text{d})(24.0\,\text{h/d})(3600\,\text{s/h}) = 2.36 \times 10^6\,\text{s}$

وعليه:

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(3.84 \times 10^8\,\text{m})}{(2.36 \times 10^6\,\text{s})^2}$$
$$= 0.00272\,\text{m/s}^2 = 2.72 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2$$

ونستطيع إعادة التعبير عن هذا التسارع بدلالة مضاعفات عجلة الجاذبية الأرضية بالقرب من سطح الأرض $g = 9.80\,\text{m/s}^2$:

$$a = 2.72 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2\left(\frac{g}{9.80\,\text{m/s}^2}\right) = 2.78 \times 10^{-4}\,g$$

ملحوظة: لا يمكن عدّ التسارع المركزي للقمر، $a = 2.78 \times 10^{-4}\,g$ ناتجًا من جاذبية القمر للأجسام، ولكنه ناتج من جاذبية الأرض للأجسام، كالقمر الذي يبتعد عن سطح الأرض مسافة 384,000 km. وعليه، يجب ملاحظة صغر قيمة هذا التسارع مقارنة بتسارع الأجسام بالقرب من سطح الأرض.

تنويه:

ميّز جاذبية القمر للأجسام على سطحه، من جاذبية الأرض المؤثرة في القمر (المثال الحالي).

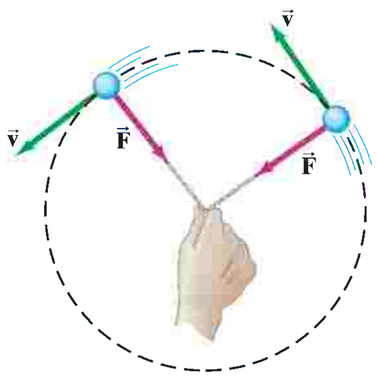
2-5 ديناميكا الحركة الدّائريّة المنتظمة

ضرورة وجود قوة لتحفيز التسارع المركزيّ

بناءً على قانون نيوتن الثاني ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$)، هناك قوة محصلة تؤثر في الجسم المتسرّع. وعليه، فإنّ الجسم الذي يتحرك دائريًا، مثل الكرة المثبتة بطرف حبل، يتأثر بقوة محصلة تبقي على حركته الدائرية، أي أنّ هذه القوة هي المسؤولة عن كلّ من تسارعه المركزي وحركته الدائرية. ويمكن حساب هذه القوة باستخدام قانون نيوتن الثاني باتجاه مواز لنصف القطر، $\Sigma F_R = ma_R$، حيث إن a_R هي تسارع الجسم المركزي و $a_R = v^2/r$ و ΣF_R هي القوة المحصلة المشيرة باتجاه نصف القطر:

$$\Sigma F_R = ma_R = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{[الحركة الدائرية]} \qquad (3-5)$$

تساوي v خلال الحركة الدائرية المنتظمة مقدارًا ثابتًا، وتمثل a_R التسارع الذي يشير عند كلّ لحظة إلى مركز الدائرة. لذا، فإنّ محصلة القوى -هي الأخرى- تشير باتجاه مركز الدائرة (الشكل 5 – 4). ويُعدّ وجود محصلة للقوى شيئًا ضروريًّا. ولهذا، فإنّ غياب هذه المحصلة المؤثرة في الجسم يجعل من غير الممكن إرغام الجسم على اتخاذ مسار دائريّ بدلًا من مساره الأصلي في خطٍّ مستقيم، كما يخبرنا بذلك قانون نيوتن الأول. ومن أجل الحصول على حركة دائرية، يجب أن يتغيراتجاه محصلة القوة باستمرار ليشير إلى مركز الدائرة عند كلّ لحظة. وتُسمّى هذه القوة أحيانًا بالقوة المركزية ("المشيرة باتجاه المركز أو الباحثة عن المركز"). وتجدر الإشارة هنا إلى عدم اعتبار هذه القوة المركزية قوّةً جديدةً، علمًا بأنّ التسمية جاءت هنا لتصف اتجاه محصلة القوى الضرورية للمسار الدائري. وبناءً على ذلك، فإنّ اتجاه محصلة القوى المؤثرة في الجسم المعني من الأجسام الأخرى سيشير إلى مركز الدائرة. وعلى سبيل المثال، فمن أجل تحريك كرة مثبتة بطرف حبل في حركة دائرية؛ يجب أن يتم جذب الحبل ليؤثر الحبل بعد ذلك في الكرة (جرّب ذلك بنفسك).



الشكل 5 – 4 وجود القوة ضروري لإبقاء الجسم متحرّكا في مسار دائريّ. فإذا كانت السرعة ثابتة، فإنّ اتجاه القوة سيشير إلى مركز الدائرة.

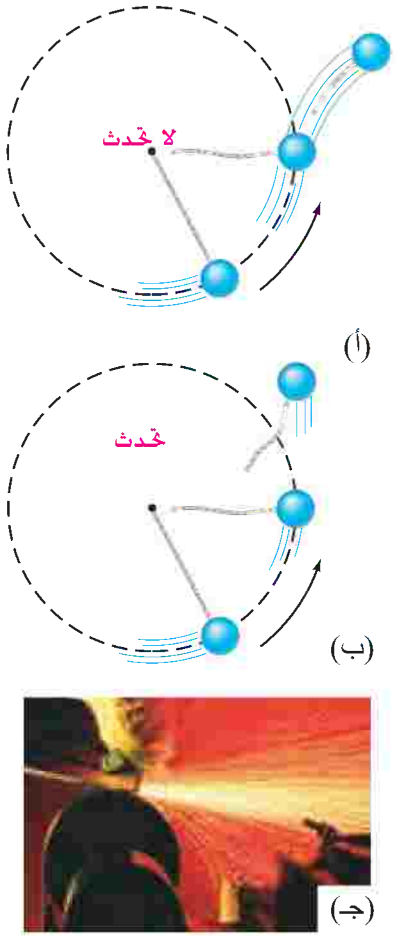
تنويه:

لا تعد القوة المركزية نوعاً جديداً من القوة (فأية قوة يجب أن توثر في جسم ما).

تنويه:
ليست هناك "قوة نابذة" حقيقية

الشكل 5 – 5 التلويح بكرة مثبتة بنهاية حبل.

الشكل 5 – 6 إذا وجدت القوة الطاردة المؤثرة، فإنّ الكرة الدوارة ستحلق مبتعدة إلى الخارج كما في (أ) عندما يتم إفلاتها. وفي الحقيقة، ستطير الكرة مماسيا كما في (ب). وعلى سبيل المثال، كما في (جـ) فإنّ الشرارة ستطير في خطوط مستقيمة بالاتجاه المماس لحافة عجل الشحذ الدوّار.



هناك مفهوم خطأ مفاده أنّ الجسم الذي يتحرك على محيط دائرة يتأثر بقوة طاردة مركزية تسمى القوة النابذة. (الطاردة) والسبب هو عدم وجود أيّ قوة نابذة (طاردة) تؤثر في الجسم الدوّار. فلنأخذ على سبيل المثال فتاة تلوّح بكرة مثبتة بنهاية حبل حول رأسها (الشكل 5 – 5). وإذا قمت بهذا العمل من قبل، فمن المحتمل أن تكون قد شعرت بقوة سحبٍ على يدك إلى الخارج. إنّ منشأ المفهوم الخطأ للقوة النابذة (الطاردة) يظهر القوة النابذة (الطاردة) الساحبة للكرة إلى الخارج وكأنها انتقلت خلال الحبل إلى اليد. ولكن ليس هذا ما يحدث إطلاقا؛ فمن أجل بقاء حركة الكرة دائرية، يجب أن يتم سحب الحبل إلى الداخل ليؤثر الحبل بهذه القوة في الكرة. وعليه، فإنّ الكرة ستؤثر في الحبل بقوة مساوية بالمقدار ومعاكسة بالاتجاه حسب قانون نيوتن الثالث، وهي ردّ الفعل الذي ستشعر اليد به (انظر الشكل 5 – 5).

إنّ القوة على الكرة هي تلك التي يؤثر بها الشخص في الكرة إلى الداخل من خلال الحبل. ولكي ترى دليلًا أكثر إقناعًا على عدم تأثير القوة النابذة على الكرة، لاحظ ما يحدث للكرة عند إفلات الحبل . ستحلق الكرة مبتعدة في حال وجود قوة نابذة مؤثرة كما هو موضح في (الشكل 5 – 6 أ). ولكن ليس هذا ما يحدث إطلاقًا؛ لأنّ الكرة سوف تبتعد باتجاه موازٍ تمامًا لماس الدائرة (الشكل 5 – 6 ب). وهو اتجاه السرعة المتجهة نفسه لحظة تحرير الكرة نتيجة توقف عمل القوة المتجهة المشيرة إلى الداخل. جرّب ذلك لتشاهد ما سيحدث!

المثال 5-3 قدّر القوة المؤثّرة في كرة تتحرّك في دائرة أفقيًا

قدّر قيمة القوة الواجب أن يؤثر بها شخص ما في حبل مثبت بطرفه الآخر كرة كتلتها 0.150 kg لكي تمسح الكرة دائرة أفقية نصف قطرها 0.600 m. علمًا بأنّ الكرة تدور دورتين كاملتين خلال الثانية الواحدة ($T = 0.500\,\text{s}$)، كما في (المثال 5 – 1).

النّهج: يجب أن نرسم مخطط الجسم الحر للكرة حيث إنّ القوى المؤثرة في الكرة هي قوة الجاذبية $m\vec{\mathbf{g}}$ إلى أسفل، وقوة الشّدّ $\vec{\mathbf{F}}_T$ التي يؤثر بها الحبل باتجاه اليد نحو المركز (التي تنتج بسبب تأثير الشخص بالقوة نفسها في الحبل). ويظهر مخطط الجسم الحرّ للكرة في (الشكل 5 – 7). ويُعدّ وزن الكرة من الأمور التي تزيد المسألة تعقيدًا لتجعل من الاستحالة دوران الكرة والحبل ممتدًا أفقيًّا بطريقة مثالية . ومن أجل تسهيل هذا: نفترض أنّ وزن الكرة صغير، ونضع $\phi \approx 0$ في (الشكل 5 – 7). ونتيجة لذلك، فإنّ $\vec{\mathbf{F}}_T$ ستؤثر باتجاه قريب جدًّا من الأفقي لتوفر القوة اللازمة لتمنح الكرة تسارعها المركزي.

الحـــلّ: سنطبق قانون نيوتن الثاني في الاتجاه القطري:

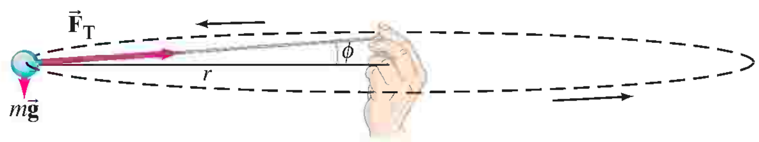
$$(\Sigma F)_R = ma_R$$

حيث إن $a_R = v^2/r$ و $v = 2\pi r/T = 2\pi(0.600\,\text{m})/(0.500\,\text{s}) = 7.54\,\text{m/s}$، وعليه، فإنّ

$$F_T = m\frac{v^2}{r} = (0.150\,\text{kg})\frac{(7.54\,\text{m/s})^2}{(0.600\,\text{m})} \approx 14\,\text{N}$$

ملحوظة: إن سبب إبقائنا على رقمين مميزين في الحل النهائي بعد أن أهملنا تأثير mg هو أنّ $mg = (0.150\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 1.5\,\text{N}$، وهو رقم صغير يعادل $\frac{1}{10}$ من حلنا أعلاه تقريبا. ومع هذا، فهو لا يُعدّ صغيرا جدّا لدرجة نحتاج عندها إلى إجابة أكثر دقة.

ملحوظة: يجب أن نحلل $\vec{\mathbf{F}}_T$ في (الشكل 5 – 7) إلى مركبتها، وجعل مركبة $\vec{\mathbf{F}}_T$ الأفقية تعادل mv^2/r والمركبة العمودية تعادل mg، وهذا فقط من أجل إضافة تأثير $m\vec{\mathbf{g}}$.



الشكل 5 – 7. (المثال 5 – 3)

المثال 5-4 كرة تتحرك في دائرة (رأسيًّا)

لوّحت كرة كتلتها $0.15\ \mathrm{kg}$، وتتدلى من نهاية حبل طوله 1.10-m (مهمل الكتلة)، في دائرة رأسية .
(أ) حدد السرعة الدنيا اللازم توافرها عند أعلى القوس لكي تبقى الكرة مستمرة في حركتها الدائرية.
(ب) احسب قيمة الشد في الحبل عند أسفل القوس على افتراض أنّ الكرة تتحرك بضعف سرعتها مقارنة مع الفرع السابق (أ).

النهج: ستتحرك الكرة في دائرة رأسية ولن تخضع للحركة الدائرية المنتظمة. ويعود السبب في ذلك إلى تغير مقدار سرعة الكرة بسبب الجاذبية مع بقاء نصف قطر المسار ثابتا. ومع ذلك، فإنّ (المعادلة $5-1$) لا تزال تُعدّ صحيحة وقابلة للتطبيق عند كلّ نقطة خلال المسار الدائري. وعليه، سنستخدمها عند كلّ من الموضعين 1 و 2. انظر إلى مخطط الجسم الحر الموضح في (الشكل $5-8$) لكلا الموضعين 1 و 2.

الحـل: (أ) تخضع الكرة لقوتين عند القمة (عند أعلى موضع في المسار، نقطة 1) وهما قوة الجاذبية، $m\vec{g}$ وقوة شد الحبل عند النقطة 1، $\vec{F}_{T1}$. ويؤثر كلاهما إلى أسفل، حيث تعمل محصلتهما المتجهة على تزويد الكرة بتسارع مركزي a_R. ونطبق قانون نيوتن الثاني بالاتجاه الرأسي، ونختار الاتجاه الموجب إلى أسفل مع اتجاه التسارع (باتجاه المركز): $(\Sigma F)_R = ma_R$

$$F_{T1} + mg = m\frac{v_1^2}{r} \qquad \text{[عند القمة]}$$

ونستطيع أن نرى من هذه المعادلة أنّ قوة الشّدّ F_{T1} عند النقطة 1 تزداد كما كان متوقعا كلما ازدادت v_1(سرعة الكرة عند قمة الدائرة). ولكن التساؤل كان ولا يزال قائمًا عن قيمة السرعة الدنيا الكافية لإبقاء الكرة في مسارها الدائري، علمًا بأنّ الحبل سيبقى مشدودًا طالما ظلّت قوّة الشدّ تؤثّر فيه. أمّا عند اختفاء الشدّ (بسبب صغر قيمة v_1)، فإنّ ذلك سيؤدّي إلى ارتخاء الحبل مّما قد يتسبب بسقوط الكرة خارج مدارها الدائري. لذا، فإنّ السرعة الدنيا ستتحقق عندما تكون $F_{T1} = 0$، وعندها ستصبح:

$$mg = m\frac{v_1^2}{r} \qquad \text{[السرعة الدنيا عند القمة]}$$

ونحلّ لإيجاد v_1:

$$v_1 = \sqrt{gr} = \sqrt{(9.80\ \mathrm{m/s^2})(1.10\ \mathrm{m})} = 3.28\ \mathrm{m/s}$$

وتمثل هذه السرعة أقلّ قيمة يجب أن تصلها الكرة عند أعلى نقطة في المسار لكي تستمر في مدارها الدائريّ.

(ب) وعندما تقترب الكرة من أخفض نقطة في المسار الدائري (نقطة 2 في الشكل $5-8$)، يصبح اتجاه الشد في الحبل F_{T2} إلى الأعلى، في حين يبقى اتجاه قوة جذب الأرض $m\vec{g}$ إلى الأسفل. وعند تطبيقنا لقانون نيوتن الثاني مفترضين أنّ الاتجاه الموجب إلى الأعلى هو اتجاه تسارع الكرة (اتجاه مركز الدائرة) فسنحصل على ما يلي:

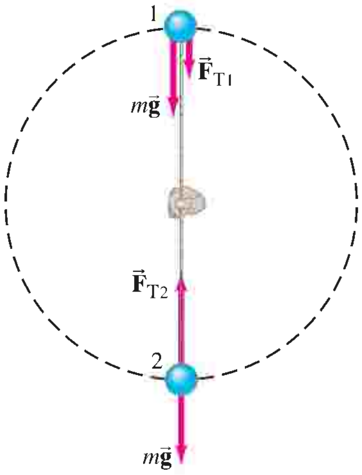
$$(\Sigma F)_R = ma_R$$

$$F_{T2} - mg = m\frac{v_2^2}{r} \qquad \text{[عند القاع]}$$

وبتعويض قيمة السرعة، v_2، بضعف ما كانت عليه في الفرع أ، أي $6.56\ \mathrm{m/s}$، نحصل على قيمة F_{T2}:

$$F_{T2} = m\frac{v_2^2}{r} + mg$$

$$= (0.150\ \mathrm{kg})\frac{(6.56\ \mathrm{m/s})^2}{(1.10\ \mathrm{m})} + (0.150\ \mathrm{kg})(9.80\ \mathrm{m/s^2}) = 7.34\ \mathrm{N}$$



الشكل 5 – 8 (المثال 5 – 4).
مخطط جسم حرّ للموضعين 1 و 2.

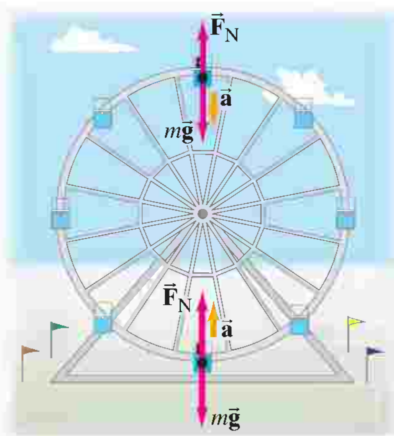
يزود الشـد في الحبل والجاذبية معا بتسارع مركزي.

تولد الجاذبية تسارع نحو المركز.

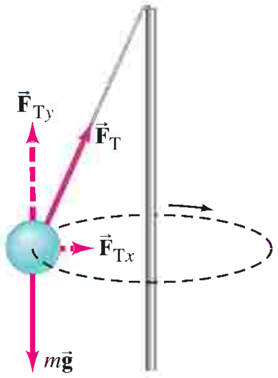
يؤدي الشد في الحبل والجاذبية المؤثران في اتجاهين متعاكسين إلى تسارع مركزي

التمرين ب: عند مراقبة آلة تجفيف ثياب تعمل بطريقة الدوران، وُجد أنّ الثياب تسقط إلى الأسفل داخل الآلة لحظة وصولها إلى أعلى نقطة في مسارها الدائري، وذلك بدلًا من بقائها على السطح الداخلي للأسطوانة، وهي تمسح دورات كاملة خلال فترات طويلة. حدّد ما إذا كانت سرعة دوران الأسطوانة الداخلية لآلة تجفيف الثياب ستزداد أم ستنقص نتيجة لثقل الثياب أو خفتها.

الشكل 5 – 9 التمرين جـ



التمرين جـ: يتحرك راكب عجلة "فيريس" (Ferris) في دائرة رأسية نصف قطرها r، وبسرعة ثابتة مقدارها v عند أعلى نقطة (الشكل $5-9$). هل تكون القوة الرأسية التي يؤثر بها المقعد في الراكب عند أعلى نقطة (أ) أقلّ من القوة التي يؤثر بها المقعد في الراكب عند أخفض نقطة في مدار العجلة؟ أم (ب) أكبر منها؟ أم (جـ) تساويها؟



الشكل 5 – 10 (المثال 5 – 5).

المثال المفاهيمي 5-5 **الكرة المطولة (Tetherball)**

كرة مربوطة بحبل مثبت من طرفه الآخر بوتد. تدور الكرة حول الوتد دورات كاملة كما هو موضح في (الشكل 5 – 10). حدّد كلًّا من اتجاه تسارع الكرة والقوة المسببة لهذا التسارع؟

الإجابــــة: عندما تمسح الكرة دوائر أفقية خلال حركتها كما هو مبين، سيشير اتجاه تسارعها إلى مركز الدائرة (أي ليس على امتداد الوتد). وقد لا تكون القوة المسببة لهذا التسارع المركزي ظاهرة لوهلة؛ وذلك لعدم وجود قوة تشير مباشرة إلى الاتجاه الأفقي. ومع هذا، فإنّ محصلة القوى، (في هذا المثال هي الجمع المتجه لكلّ من $m\vec{g}$ و $\vec{F}_T$)، هي التي يجب أن تشير باتجاه التسارع؛ لأنّ المركبة الرأسية للشّدّ في الحبل F_{Ty}، ستعادل وزن الكرة، $m\vec{g}$. أما المركبة الأفقية للشّدّ، F_{Tx}، فهي المسؤولة عن وجود التسارع المركزي.

طريقة حل المسائل: **الحركة الدائرية المنتظمة**

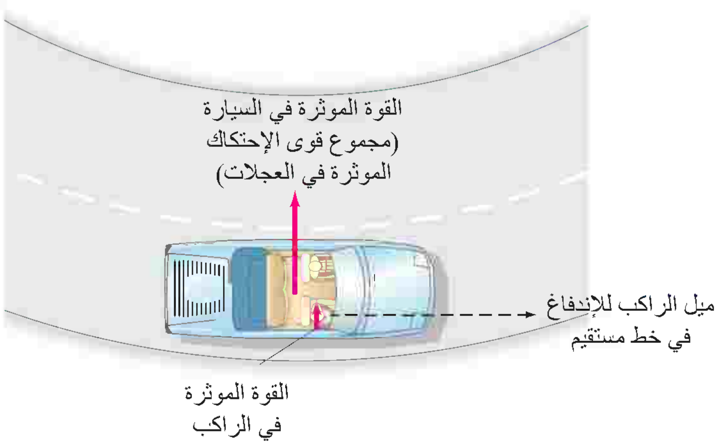
1. **ارسم مخطط الجسم الحرّ** مظهرًا القوى المؤثرة جميعها في الأجسام موضع الدراسة. وكن متأكّدًا من تحديد مصدر كلّ قوة (الشد في الحبل، وقوة الجاذبية الأرضية، والاحتكاك، والقوة الرأسية ....إلخ). ولا تضع أيّ معلومة غير مفيدة (مثل القوة النابذة).
2. **حدّد أيًّا من هذه القوى أو مركباتها التي تُسبب التسارع المركزي،** التي تعمل قطريًّا باتجاه مركز المسار الدائري أو بعكس اتجاهه. إن **مجموع هذه القوى (أو مركباتها)** يسبب تسارعا مركزيًّا يعطى بالعلاقة: $a_R = v^2/r$.
3. **اختر نظام إحداثيات مناسب** حيث من الأفضل أن يتم اختيار أحد محاور النظام موازيًا لاتجاه التسارع.
4. **طبّق قانون نيوتن الثاني للمركبة القطرية:**

$$(\Sigma F)_R = ma_R = m\frac{v^2}{r}. \quad \text{[الاتجاه القطري]}$$

5-3 منعطفات الطريق السريع المائلة وغير المائلة

تطبيق الفيزياء
القيادة حول منعطف

سنتناول الآن مثالا على الحركة الدائرية عندما تنعطف السيارة على أي منعطف، ولنقل إلى اليسار. وفي هذه الحالة تحديدًا؛ أي عندما ينعطف السائق يسارًا، فسيشعر وكأنه يُدفع إلى الخارج من موضعه باتجاه باب السيارة الأيمن. ومع هذا، فليس هناك أيّ وجود لمثل هذه القوى النابذة كي تعمل على دفعه إلى الخارج. وحقيقة ما يحدث هنا، أنه عندما تبدأ السيارة بدخول المنعطف ذي المسارالدائريّ، يكون جسم السائق لا يزال متأثّرًا بالحركة الانتقالية باتجاهٍ موازٍ للسرعة المتجهة. ولكي يتبع السائق سيارته في مسارها الدائري، يبدأ المقعد (عن طريق الاحتكاك)، أو باب السيارة (عن طريق الاتصال المباشر) بالتأثير بقوة في جسم السائق (الشكل 5 – 11). ويجب ألا ننسى هنا أنّ السيارة تتأثر بقوّة أيضًا لتجبرها على تتّبع المسار الدائريّ. وتوفر قوة الاحتكاك بين عجلات السيارة وسطح الطريق هذه القوة عندما يكون سطح الطريق أفقيًا.



الشكل 5 – 11 يؤثر الطريق بقوة إلى الداخل في السيارة (الاحتكاك المؤثر في العجلات) فيرغمها على اتباع مسار دائريّ. ومن ثَمّ تؤثر السيارة بقوة إلى الداخل في الراكب.

وستكون القوة التي يؤثر بها الطريق في العجلات هي قوة الاحتكاك السّكونيّ في حالة دوران عجلات السيارة على الأرض على نحو طبيعي من غير انزلاق أو انزياح ليُلامس أسفلها سطح الطريق عند كلّ لحظة. وإذا كانت قيمة الاحتكاك صغيرة أو غير كبيرة بما فيها الكفاية كما يحدث في أيام الصقيع، فلن تستطيع قوة الاحتكاك هذه إبقاء السيارة في مدارها الدائريّ لتستمر في حركتها بخط مستقيم، انظر (الشكل 5 – 12). وفي اللحظة التي تبدأ عندها السيارة بالانزلاق أو الانزياح، تتبدل قوة الاحتكاك السكونية لتصبح قوة احتكاك حركية، وتكون أقلّ من قوة الاحتكاك السّكونيّ.

الشكل 5 – 12 سيارة سباق تسير باتجاه منعطف. ونرى من آثار العجلات أنّ معظم السيارات قد حصلت على قوة احتكاك كافية لتزويدها بتسارع مركزي للدوران مع المنعطف بأمان، وكذلك، نرى أيضا آثار عجلات تظهر قوة غير كافية على السيارات – التي اتبعت بناءً على ذلك مسارات تكاد تكون مستقيمة.

المثال 6-5 الانزلاق عن المنعطف

هل ستنزلق سيارة كتلتها 1000-kg تسير على طريق أفقي عندما تلف حول منعطفٍ نصف قطره 50 m بسرعة مقدارها 50 km/h (14 m/s) أم لا؟ افرض أنّ: (أ) سطح الطريق جاف ومعامل الاحتكاك السّكونيّ $\mu_s = 0.60$. (ب) سطح الطريق مغطى بطبقة من الصقيع ومعامل الاحتكاك السّكونيّ $\mu_s = 0.25$.

النهج: إن القوى المؤثرة في السيارة هي قوة الجاذبية، mg التي تشير إلى الأسفل، والقوة الرأسية F_N التي تشير إلى الأعلى التي يؤثر بها الطريق في السيارة، وقوة الاحتكاك الأفقية الناجّة من الطريق . ويوضح (الشكل 5 – 13) مخطط الجسم الحرّ للسيارة حيث ستتبع السيارة المنعطف عندما تكون قوة الاحتكاك العظمى أكبر من حاصل ضرب كتلة السيارة في التسارع المركزي.

الحـل: ليس هناك أيّ تسارع للسيارة في الاتجاه الرأسي. ويظهر قانون نيوتن الثاني أنّ القوة الرأسية F_N على السّيارة إلى الأعلى تعادل وزن السيارة إلى الأسفل، علمًا بأنّ الطريق أفقيّ تمامًا:

$$F_N = mg = (1000\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) = 9800\,\text{N}$$

وبما أنّ القوة الوحيدة في الاتجاه الأفقي هي قوة الاحتكاك، فيجب أن تتم مقارنتها مع القوّة اللازمة لإنتاج التسارع المركزي للحكم على ما إذا كانت كافية لذلك أم لا. إنّ محصّلة القوى الأفقية اللازمة لإبقاء السيارة تتحرك في مسار دائريّ حول المنعطف هي:

$$(\Sigma F)_R = ma_R = m\frac{v^2}{r} = (1000\,\text{kg})\frac{(14\,\text{m/s})^2}{(50\,\text{m})} = 3900\,\text{N}$$

ويجب حساب قوة الاحتكاك الكلية العظمى (وهي مجموع قوى الاحتكاك الناجّة من العجلات الأربع) لتحديد ما إذا كانت كبيرة لدرجة كافية لتوفير تسارع مركزي آمن (ونتذكّر من البند 4 – 8 أنّ $F_{fr} \le \mu_s F_N$) وعليه:

(أ) فإنّ أعلى قيمة ممكنة للاحتكاك السّكونيّ عندما تكون $\mu_s = 0.60$ هي:

$$(F_{fr})_{max} = \mu_s F_N = (0.60)(9800\,\text{N}) = 5900\,\text{N}$$

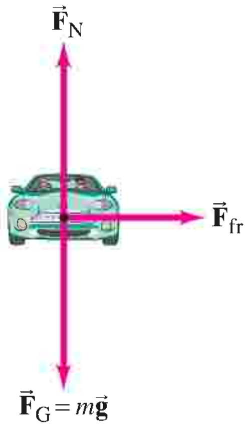
وبما أنّ القوّة الأفقية اللازمة لإبقاء السيارة تتحرك في مسار دائري حول المنعطف هي 3900 N وهو ما سيؤثر به الطريق من قوة احتكاك في السيارة، فإنّ السيارة ستتبع المنعطف بالطبع.

ولكن بالنسبة إلى الفرع الثاني (ب)، فإنّ القيمة العظمى لقوة الاحتكاك السّكونيّ الممكنة، هي:

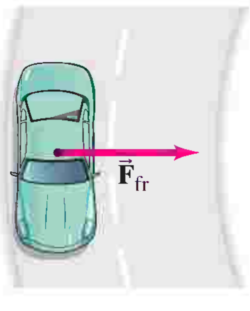
$$(F_{fr})_{max} = \mu_s F_N = (0.25)(9800\,\text{N}) = 2500\,\text{N}$$

وعليه، فإنّ السيارة ستبدأ الإنزلاق؛ لأنّ الطريق لن تكون قادرة على التأثير بقوة احتكاك كافية، علما بأنّ المطلوب هو تأمين 3900 N لإبقاء السيارة تتحرك على الطريق بسرعة 50 km/h من غير أن تنزلق خلال المنعطف الذي يساوي نصفُ قطره 50 m.

الشكل 5 – 13 (المثال 5 – 6). القوى المؤثرة في سيارة تلف منعطفا على طريق أفقي. (أ) منظر أماميّ. (ب) منظر عُلويّ.



(أ)



(ب)

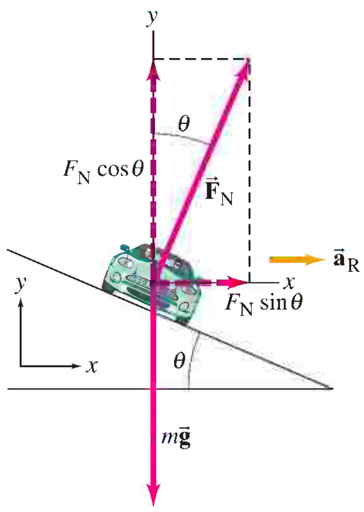
وكذلك هناك احتمال كبير جدًّا لانزلاق السيارة عن الطريق، خاصة في حالة انغلاق العجلات وتوقفها عن الدوران نتيجة لضغط كوابح السيارة بشدة، علمًا بأنّ قوة الاحتكاك السّكونيّ لا تظهر إلا عندما تدور عجلات السيارة على الطريق دورانًا صحيحًا. وعندما تنغلق العجلات وتتوقف عن الدوران، فإنّ السيارة ستبدأ بالانزلاق على سطح الطريق لتصبح قيمة الاحتكاك أقلّ ممّا كانت عليه قبل ذلك؛ وهذا ما يميّز عادةً قوّة الاحتكاك الحركي. وما يترتب على ذلك هو التغير الفجائي على اتجاه قوة الاحتكاك عند انغلاق العجلات. وتشير قوة الاحتكاك السّكونيّ باتجاه رأسي بالنسبة إلى اتجاه السرعة، كما هو مبين في (الشكل 5 – 13 ب). وعندما تبدأ السيارة بالانزلاق، فإنّ اتجاه قوة الاحتكاك الحركي سيشير إلى عكس اتجاه السرعة المتجهة. وعليه، فإنّ القوة لن تشير إلى مركز الدائرة كما في (الشكل 5 – 12). والأسوأ من ذلك عندما يكون سطح الطريق مبلّلًا أو مغطّى بطبقةٍ رقيقةٍ مصقولةٍ من الصقيع، فإنّ انغلاق الدواليب سينتج مع أقل جهد قد يبذل على الكوابح نظرًا لصغر قيمة قوة الاحتكاك الناجّة من سطح الطريق. ونتيجة لما سبق ذكره جميعه، فقد تم تصميم مانع انغلاق الكوابح (ABS) للتقليل من الضغط على الكوابح والتحكم بها مباشرةً قبل حدوث الانزلاق بمساعدة حسّاسات دقيقة وحاسوب سريع.

تطبيق الفيزياء
مانع انغلاق الكوابح

إن تصميم منعطفات تميل بزوايا معينة يساعد على تقليل احتمال الانزلاق؛ حيث من الممكن للقوة الرأسية الناتجة من الطريق المائل والمؤثرة باتجاه رأسي في الطريق أن يكون لها مركبة تشير إلى مركز الدائرة، لتساعد على التقليل من الاعتماد على الاحتكاك، كما في (الشكل 5 − 14). وهناك سرعة وحيدة لكلّ زاوية ميل θ لا تحتاج السيارة عندها إلى قوة احتكاك. وهي الحالة التي تكون عندها المركبة الأفقية $F_N \sin\theta$ للقوة العمودية تشير باتجاه مركز المنعطف، وتعادل القوة اللازمة لإعطاء السيارة تسارعًا مركزيًّا (انظر شكل 5 − 14):

$$F_N \sin\theta = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{[الاحتكاك غير ضروريّ]}$$

وعادة ما يتم اختيار زاوية ميل الطريق θ بحيث تتوافر الظروف لسرعة معينة تسمى "سرعة التصميم".



الشكل 5 − 14 مركبتا القوة العمودية (الرأسية والأفقية) المؤثرتان في سيارة تسير حول منعطف مائل. التسارع المركزي أفقي (وغير موازٍ للطريق المائل). ويمكن لقوة الاحتكاك (غير الظاهرة) أن تشير إلى الأعلى أو الأسفل على امتداد الميل اعتمادا على سرعة السيارة. وستؤول قوة الاحتكاك إلى الصفر عند سرعة معينة.

تطبيق الفيزياء

المنعطفات المائلة

تنويه:

F_N لا تعادل mg دائما.

تعمل المركبة الأفقية للقوة العمودية على توليد تسارع مركزي (ويجب أن يكون الاحتكاك منعدما – وإلا فإنه سيساعد في توليد التسارع المركزي أيضا).

المثال 5-7 منعطف بزاوية ميل

(أ) حدّد صيغة لزاوية ميل طريق بحيث تنعدم الحاجة عندها إلى قوة الاحتكاك لسيارة تتحرك بسرعة v حول منعطف نصف قطره r. (ب) احسب زاوية ميل مخرج طريق سريع على شكل منعطف نصف قطره 50 m تم تصميمه لقيادة الحافلات بأمان عند سرعة 50 km/h.

النهج: بالرغم من أنّ المخرج مائل، فإنّ السيارة لا تزال تتحرك من خلال دائرة أفقية. وعليه، فإنّ التسارع المركزيّ يجب أن يبقى أفقيًّا. ولذلك يجب أن يتمّ اختيار نظام إحداثيات بحيث يكون أحد المحاور أفقيًّا والمحور الآخر رأسيًّا، لتكون a_R منطبقة على المحور الأفقي تمامًا. إنّ القوى التي على السيارة هي قوة الجاذبية الأرضية إلى الأسفل mg، والقوة العمودية F_N التي تؤثر بها الطريق في السيارة واتجاهها يصنع زاوية قائمة مع سطح الطريق. انظر (الشكل 5 − 14) حيث تظهر مركبتا F_N أيضًا. ولن نحتاج إلى التعامل مع قوة الاحتكاك هنا، نظرًا إلى تصميم الطريق بحيث يمكن الاستغناء عنها.

الحــلّ: (أ) تعطي $\Sigma F_R = ma_R$ في الاتجاه الأفقي:

$$F_N \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

وبما أنه لا توجد حركة في الاتجاه الرأسي، فإنّ مركبة التسارع الرأسية تساوي صفرًا. لذا، فإنّ $\Sigma F_y = ma_y$ تعطي:

$$F_N \cos\theta - mg = 0$$

أي

$$F_N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

[لاحظ في هذه الحالة أنّ $F_N \geq mg$ لأنّ $\cos\theta \leq 1$]

ونعوض هذه العلاقة لـ F_N في المعادلة في الاتجاه الأفقي:

لنحصل على

$$F_N \sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

أو:

$$\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

لذلك فإن

$$mg\tan\theta = m\frac{v^2}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

زاوية الميل (لا حاجة إلى الاحتكاك)

وهذه هي الصيغة لزاوية الميل θ حيث إنه لا حاجة إلى الاحتكاك عند السرعة v.

(ب) وعندما $r = 50$ m و $v = 50$ km/s (14 m/s)

$$\tan\theta = \frac{(14\,\text{m/s})^2}{(50\,\text{m})(9.8\,\text{m/s}^2)} = 0.40$$

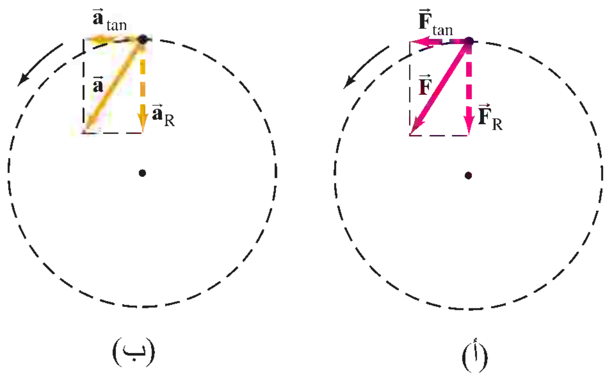
لذلك $\theta = 22°$

تمرين د: وضع سائق أكياسًا من الرمل داخل سيارته رغبةً منه برفع قيمة قوّة الاحتكاك بين عجلات سيارته والطريق لكي يتمكّن من دخول المنعطف بسرعة مرتفعة. هل ستساعد هذه الأكياس على ذلك؟

التمرين هـ: هل يمكن لسيارة صغيرة وشاحنة ثقيلة أن تقطعا المنعطف المائل نفسه بالسرعة والأمان ذاتيهما؟

* 4-5 الحركة الدائرية غير المنتظمة

عندما يتحرك جسم ما بسرعة ثابتة على محيط دائرة لتشير محصّلة القوى المؤثرة فيه إلى مركز هذه الدائرة، فإنّ هذا الجسم سيخضع إلى حركة دائرية بالطبع. وأما إذا كانت محصلة القوى المؤثرة فيه تصنع زاوية ما مع المحور الرئيس ولا تشير إلى مركز الدائرة، كما هو مبين في (الشكل 5 – 15 أ)، فسيكون بالإمكان تحليل هذه القوة إلى مركبتين: الأولى تشير باتجاه مركز الدائرة F_R وتحفز التسارع المركزي a_R وتحافظ على حركة الجسم الدائرية. والمركبة الأخرى مُماسّة للدائرة F_{tan} تعمل على زيادة السرعة أو نقصانها؛ أي أنّها تعمل على إيجاد مركبة تسارع مُماسّة للدائرة a_{tan}. وتبدأ مركبة القوة المُماسّة بالعمل عندما تتغير سرعة الجسم.



الشكل 5 – 15 تغير سرعة جسم يتحرك حول محيط دائرة عندما تمتلك القوة المؤثرة فيه مركبة مُماسّة F_{tan}. يظهر الفرع (أ) القوة $\vec{F}$ ومركبتيها المتجهتين. ويظهر الفرع (ب) متجه التسارع ومركبتيه المتجهتين.

لقد أكسبت الكرة المثبتة بنهاية الحبل تسارعًا مُماسًّا عندما بدأت بتحريكها حول رأسك في حركة دائرية. وكان ذلك نتيجة لسحب الحبل باليد وهي في موضع بعيد عن مركز الدائرة. وفي الرياضة، يسرّع رامي الجُلّة مُماسًّا بطريقة مماثلة للوصف السابق لتصل إلى سرعة عالية قبل أن يتركها.

المركبة المماسّة للتسارع a_{tan} هي معدل تغير قيمة السرعة المتجهة للجسم، ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$a_{tan} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

وينشأ التسارع القطري (المركزي) نتيجة تغير اتجاه السرعة المتجهة، وكما رأينا في (المعادلة 5 – 1) فهو كالتالي:

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

ويشير التسارع المُماس إلى اتجاه الحركة الموازي لـ $\vec{v}$ نفسه عندما تكون السرعة متزايدة وهو مُماسٌّ للدائرة، كما هو مبين في (الشكل 5 – 15 ب). أما إذا كانت السرعة متناقصة، فإنّ $\vec{a}_{tan}$ سيشير بالاتجاه الموازي والمعاكس لاتجاه $\vec{v}$. وفي الحالتين السابقتين، فإنّ $\vec{a}_{tan}$ و $\vec{a}_R$ يكونان متعامدين على بعضهما ليتغير اتجاههما باستمرار كلما تحرك الجسم في مداره الدائريّ. وعليه، فإنّ محصلة التسارع المتجه $\vec{a}$ ستعادل مجموع هاتين المركبتين حسب المعادلة التالية:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_R$$

وبما أنّ مركبتي التسارع $\vec{a}_R$ و $\vec{a}_{tan}$ تكونان دائمًا متعامدتين على بعضهما بعضًا، فإنَّ قيمة $\vec{a}$ عند أيّ لحظة هي:

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_R^2}$$

المثال 5-8 مركبتا التّسارع

تبدأ سيارة سباق بالحركة من وضع السّكون، وتتسارع على نحو منتظم في مسار دائري نصف قطره 500 m لتصل سرعتها إلى 35 m/s خلال 11 s. إذا افترضت أنّ التسارع المماس ثابت، فأوجد: (أ) التسارعَ المماسّ. (ب) التسارعَ القطريّ عند اللحظة التي تكون فيها السرعة تساوي $v = 15\,\mathrm{m/s}$.

النّهج: يرتبط التسارع المماس بتغير السرعة المماسة للسيارة، ويمكن حسابه من المعادلة التالية: $a_{\tan} = \Delta v/\Delta t$. أمّا التسارع المركزي، فيرتبط بالتغير في اتجاه السرعة المتجهة، ويمكن حسابه باستخدام المعادلة الآتية: $a_R = v^2/r$.

الحـــلّ: (أ) سوف نفترض بأنّ التسارع المماس $a_{\tan}$ ثابت خلال فترة الإحدى عشرة ثانية، ونحسب قيمته كما يلي:

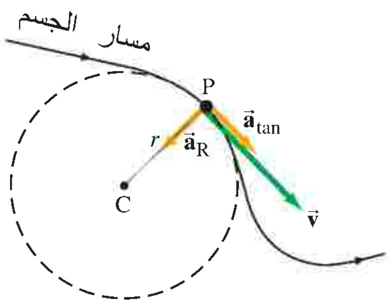
$$a_{\tan} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(35\,\mathrm{m/s} - 0\,\mathrm{m/s})}{11\,\mathrm{s}} = 3.2\,\mathrm{m/s^2}$$

(ب) وعند حساب التسارع المركزي عند $v = 15\,\mathrm{m/s}$ نحصل على

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(15\,\mathrm{m/s})^2}{(500\,\mathrm{m})} = 0.45\,\mathrm{m/s^2}$$

التمرين و: كيف تتغير قيمة كلّ من: (أ) $a_{\tan}$ و (ب) a_R عندما تساوي سرعة سيارة السباق في (المثال 5 – 8) 30m/s؟

يمكن استخدام هذه المبادئ لجسم يتحرك خلال مسار منحنٍ كما هو مبين في (الشكل 5 – 16)؛ حيث يمكننا التعامل مع أيّ جزءٍ من المنحنى وكأنه قوس في دائرة نصف قطرها r. إنّ السرعة المتجهة عند أيّ نقطة هي دائمًا مماسّة للمسار. ويمكن كتابة التسارع الكليّ على نحو عام كمجموع اتجاهي لمركبتين هما المركبة المماسة $a_{\tan} = \Delta v/\Delta t$ والمركبة القطرية (المركزية) $a_R = v^2/r$.



الشكل 5 – 16 جسم يتبع مسارًا منحنيًا (الخط المتصل). ويمتلك المسار عند النقطة P نصف قطر تكور r، وسرعة متجهة $\vec{\mathbf{v}}$، و تسارعًا مماسًا $\vec{\mathbf{a}}_{\tan}$ (حيث تزداد سرعة الجسم)، وتسارعًا مركزيًا (قطري) $\vec{\mathbf{a}}_R$ (قيمته $a_R = v^2/r$) ويشير إلى مركز التكور C.

5-5 الطّرد المركزيّ

تطبيق الفيزياء
الطرد المركزي

تقدم أجهزة الطرد المركزي، وخصوصًا فائقة السرعة منها، أمثلةً رائعةً على الحركة الدائرية. وتستخدم هذه الأجهزة لترسيب مكونات المواد أو فصلها عن بعض. تُوضع أنابيب الاختبار في قرص جهاز الطرد المركزي الدوّار ليعمل على تسريعها وإيصالها إلى سرعات عالية جدًا. انظر (الشكل 5 – 17)؛ حيث يظهر أنبوب الاختبار في موضعين مختلفين خلال دوران القرص. وتمثل النقطة الخضراء الصغيرة جسمًا صغيرًا، ربما جزيئًا مجهريًّا، في السائل المعبأ في أنبوب الاختبار. وعندما يكون الأنبوب في الموضع (أ) خلال دوران القرص، يميل الجسم إلى التحرك في خطٍّ مستقيمٍ موازٍ لاتجاه السهم المخطّط. ولكنّ السائل المانع لحركة هذه الأجسام يسبّب قوةً مركزيّةً تكاد ترغم الأجسام على التحرّك في مسارٍ دائريّ. وبما أنّ مقاومة الموائع (سواء كانت سائلة أو غازية أو هلامية) عادةً لا تعادل mv^2/r تمامًا ، فإنّ ذلك سيدفع الأجسام في نهاية الأمر إلى التحرك باتجاه قاع الأنبوب. وعليه، فإنّ الهدف الأساس من الطرد المركزي هو توفير "جاذبية فاعلة" ذات قيمة أعلى بكثيرٍ من قيمة الجاذبية الرأسية بسبب السرعات الدورانية العالية، مما يؤدّي إلى تسريع عملية الترسيب.

المثال 5-9 الطّرد المركزيّ فائق السّرعة

يدور قرص جهاز الطرد المركزي فائق السرعة بمعدل 50,000 دورة لكلّ دقيقة. فإذا علمت أنّ قمة أنبوب اختبار طوله 4.00 cm مثبت داخل القرص تبتعد مسافة 6.00 cm عن محور الدوران (كما هو موضح في الشكل 5 – 17)، وأنّ قاعدة الأنبوب تبتعد مسافة 10.00 cm عن المحور، فاحسب مقدار التسارع المركزي بدلالة مضاعفات "g" عند قمة الأنبوب وقاعه.

النّهج: نحسب التسارع المركزي باستخدام المعادلة التالية: $a_R = v^2/r$، ومن ثَمّ نقسم على قيمة تسارع الجاذبية الأرضية $g = 9.80\ \text{m/s}^2$ فنحصل على قيمة a_R بدلالة g.

الحــلّ: عندما يتحرك الأنبوب في دائرة محيطها $2\pi r$، تصبح المسافة عند قمة الأنبوب كالتالي:

$$2\pi r = (2\pi)(0.0600\ \text{m}) = 0.377\ \text{m}$$

وبما أنّ الأنبوب يدور بمعدل 5.00×10^4 دورة لكلّ دقيقة، أو عند القسمة على $60\ \text{s/min}$، $833\ \text{rev/s}$، فإنّ الزمن اللازم لعمل دورة واحدة (الزمن الدوري) هو:

$$T = \frac{1}{(833\ \text{rev/s})} = 1.20 \times 10^{-3}\ \text{s/rev}$$

وعليه، فإنّ سرعة الجسم هي

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \left(\frac{0.377\ \text{m/rev}}{1.20 \times 10^{-3}\ \text{s/rev}}\right) = 3.14 \times 10^2\ \text{m/s}$$

ويصبح التسارع المركزي

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(3.14 \times 10^2\ \text{m/s})^2}{0.0600\ \text{m}} = 1.64 \times 10^6\ \text{m/s}^2$$

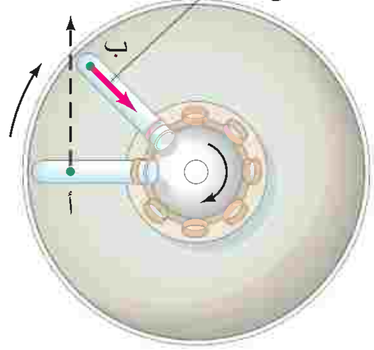
وعند القسمة على $g = 9.80\ \text{m/s}^2$، نحصل على $1.67 \times 10^5\ g$.
أما السرعة عند أسفل الأنبوب $(r = 0.1000\ \text{m})$ فهي

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{(2\pi)(0.1000\ \text{m})}{1.20 \times 10^{-3}\ \text{s/rev}} = 523.6\ \text{m/s}$$

لذا،

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(523.6\ \text{m/s})^2}{(0.1000\ \text{m})} = 2.74 \times 10^6\ \text{m/s}^2 = 2.80 \times 10^5\ g\text{'s}$$

أو $280{,}000\ g\text{'s}$.

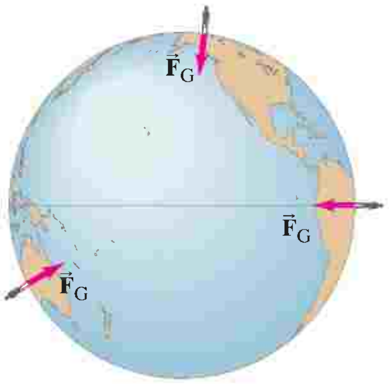


الشكل 5 – 17 موضعان لأنبوب اختبار يدور في جهاز طرد مركزي (منظر عُلويّ). وتمثل النقطة الخضراء عند أ جزيئًا مجهريًّا أو جسمًا آخر تمّ ترسيبه، والذي سيميل إلى اتباع المسار المتقطع ليتجه نحو قاع الأنبوب. ولكن المائع سيمنع هذه الحركة، فيؤثر بقوة في الجزيء، كما هو مبين عند النقطة ب.

5-6 قانون نيوتن للجذب الكونيّ

أسرت حركة الكواكب والقمر مخيّلة العالم إسحاق نيوتن لفترة من الزمن، واستحوذت على تفكيره، وهي الفترة نفسها التي عمد خلالها على تطوير قوانينه الثلاثة في الحركة وصياغتها. كما وجعلت القوةُ اللازمة لإبقاء القمر في مداره شبه الدائري حول الأرض نيوتن متحيّرًا.
وبدأ نيوتن بالتفكير في طبيعة الجاذبية الأرضية ليستنتج أنّ الأجسام الساقطة باتّجاه الأرض والمسرعة نتيجة لذلك، لابدَّ لها وأن تخضع لقوة ما تؤثر فيها. لذا، فقد أطلق على هذه القوة قوة الجذب الأرضي. وقاده تفكيره إلى أنّه عندما يتأثر جسم أو يخضع لقوّةٍ ما، فإنّ هذه القوة بالطبع ستكون ناتجة من جسم آخر. لذلك كان التساؤل الذي يلحّ عليه وعمل على إجابته هو: ما مصدر الجاذبية الأرضية؟ ليستنتج نيوتن بناءً على ملاحظاته وتساؤلاته أنّ الأرض هي التي تؤثر بقوة الجاذبية في الأجسام الموجودة على سطحها. وعليه، فإنّ كلّ جسم يقع على سطح الأرض يتأثر بقوة الجاذبية، وأينما كان هذا الجسم، فإنّ اتجاه هذه القوة المؤثرة فيه سيشير إلى مركز الأرض (انظر إلى الشكل 5 – 18).
ووفق ما ورد، فإنّ نيوتن لاحظ سقوط التفاحة من الشجرة، وقيل بأنه استوحى من تلك الحادثة ما يلي : إذا كانت الجاذبية تؤثرعند قمم الأشجار وكذلك عند قمم الجبال ، فربما سيظهر تأثير الجاذبية أيضا في كلّ مكان وعلى الأجسام جميعها ومن ضمنها القمر!

الشكل 5 – 18 تعمل قوة الجاذبية في أيّ مكان في العالم سواء كان ذلك في ألاسكا أو في البيرو، أو في أستراليا إلى الأسفل باتجاه مركز الأرض.



وانطلاقًا من فكرة أنّ الجاذبية الأرضية تعمل على إبقاء القمر في مداره، فقد طوّر نيوتن نظريته العظيمة عن الجاذبية. ولقد ظهر في ذلك الوقت بعض الجدل حول هذه النظرية؛ لأنّ كثيرًا من المفكرين في بداية الأمر كان يجد نفسه غير قادر على تقبل فكرة "القوة التي تعمل عن بعد". لقد كان الجميع في تلك الفترة يعي ويتقبل فكرة القوى العادية التي تعمل من خلال التلامس، مثل اليد التي تدفع عربة، أو تسحب سيارة شحن، أو المضرب الذي يدفع الكرة، وهكذا دواليك. أما فكرة الجاذبية التي تعمل عن بعد من غير تلامس فقد كانت غريبة وجديدة وتحتاج إلى وقفة تأمل. ومع هذا، فقد أعلن نيوتن للجميع بأنّ الأرض تؤثر بقوة في الأجسام المختلفة، مثل التفاحة الساقطة ومثل القمر في السماء، بالرغم من عدم ملامسة الأرض لهذه الأجسام، وعلى الرغم من المسافة الشاسعة التي تفصل بينها وبين الأرض كذلك.

وبدأ نيوتن بتحديد قيمة هذه القوة الجاذبة التي تؤثر بها الأرض في القمر مقارنة مع القوة الجاذبة للأجسام عند سطح الأرض. وقد كان تسارع القمر المركزي كما تم حسابه في (المثال 5 – 2) يساوي $a_R = 0.00272\ \mathrm{m/s^2}$. ولدى مقارنته مع تسارع الجاذبية عند سطح الأرض $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ وُجد أنّ:

تسارع القمر باتجاه الأرض

$$a_R = \frac{0.00272\ \mathrm{m/s^2}}{9.8\ \mathrm{m/s^2}} \approx \frac{1}{3600}\, g$$

أي أنّ تسارع القمر باتجاه الأرض هو $\frac{1}{3600}$ تقريبًا من تسارع الأجسام عند سطح الأرض. وبما أنّ القمر يبتعد مسافة $384{,}000\ \mathrm{km}$ عن الأرض وهو ما يعادل 60 ضعفًا لنصف قطر الأرض المكافئ لـ $6380\ \mathrm{km}$، فإنّ القمر سيبتعد عن مركز الأرض مقدار 60 ضعفًا مقارنةً بالأجسام الموجودة على سطح الأرض.

وبما أنّ $60 \times 60 = 60^2 = 3600$، فقد استنتج نيوتن أنّ قوّة الجاذبية التي تؤثر بها الأرض في الأجسام الأخرى تتناقص مع مربع بعدها r عن مركز الأرض:

$$\text{قوة الجاذبية} \propto \frac{1}{r^2}$$

وأنّ القمر الذي يقبع على بعد يعادل 60 ضعف نصف قطر الأرض سيشعر بقوة جاذبية تعادل $\frac{1}{3600} = \frac{1}{60^2}$ ضعف ما ستشعر به كتلة مماثلة عند سطح الأرض. وأدرك نيوتن أنّ قوة الجاذبية على جسم ما لا تعتمد على بعده فقط، بل وعلى كتلته أيضًا. وفي حقيقة الأمر فهي تتناسب طرديًا مع كتلته كما رأينا. وبناءً على قانون نيوتن الثالث: عندما تؤثر الأرض في جسم ما، مثل القمر بقوة الجاذبية، فإنّ الجسم سيؤثر في الأرض بقوة جاذبية مماثلة تعادلها بالمقدار وتعاكسها بالاتجاه (الشكل 5 – 19). واستنتج نيوتن بسبب هذا التماثل أنّ قيمة قوة الجذب هذه يجب أن تتناسب مع كلّ من الكتلتين، وعليه

$$F \propto \frac{m_E\, m_{Obj}}{r^2}$$

حيث m_E هي كتلة الأرض، أما m_{Obj} فهي كتلة الجسم الآخر، في حين تمثل r المسافة من مركز الأرض إلى الجسم الآخر.

الشكل 5 – 19 تتجه قوة الجاذبية التي يؤثر بها جسم في آخر باتجاه الجسم الثاني وهي (حسب قانون نيوتن الثالث) مساوية بالمقدار ومعاكسة بالاتجاه للقوة التي يؤثر بها الجسم الثاني في الأول.

وقد ذهب نيوتن إلى أبعد من ذلك خلال تحليله للجاذبية، وخطا خطوةً إضافية أخرى في الاستنتاج الذي توصل إليه نتيجة اختباره لمدارات الكواكب السيارة في أنّ القوة اللازمة لإبقاء الكواكب في مداراتها حول الشمس تتلاشى عكسيًا مع مربع بعدها عن الشمس. وهذا ما عزّز اعتقاده بأنّ قوة الجاذبية التي تعمل بين الشمس والكواكب السيارة التي تدور حولها هي التي تبقي هذه الكواكب في مداراتها. ومن ثَمَّ تساءل: لماذا لا تعمل هذه الجاذبية أيضا بين الأجسام جميعها في الكون، وليس بين ما تم ذكره إلى الآن فقط ؟

قانون نيوتن للجذب الكونيّ

وهنا اقترح نيوتن قانون الجذب الكوني، الذي نستطيع صياغته كالتالي:

كلّ جسم في الكون يجذب كلّ جسم آخر بقوة تتناسب طرديًا مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسيًا مع مربع المسافة بينهما، وتعمل هذه القوة على امتداد الخطّ الفاصل بين هذين الجسمين.

ويمكن كتابة قيمة قوة الجاذبية هذه كما يلي:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (5-4)$$

حيث تمثل كلّ من m_1 و m_2 كتلتي الجسمين، في حين تمثل r المسافة الفاصلة بينهما. أما G فتمثل ثابت الجذب الكوني الذي يمكن قياسه تجريبيا، والتأكد من قيمته الرقمية الثابتة لمختلف الأجسام.

ونستطيع أن نجزم هنا نتيجة لعدم ملاحظتنا لأيّ قوة تجاذب بين الأجسام طبيعية الحجوم مثل تلك المتبادلة بين كرتي بيسبول بأنّ قيمة G صغيرة جدّا. وقد أجرى العالِم "هنري كافندش" أول تجربة لقياس القوة المتبادلة بين جسمين اعتياديين سنة 1798، أي بعد مرور أكثر من 100 عام على نشر نيوتن لقانونه. ولكي يستطيع " كافندش" قياس القوة المتناهية في الصغر وتحديدها بين جسمين صغيرين عاديين، فقد استخدم آلة كتلك المبينة في (الشكل 5 – 20). وأكد "كافندش"صحة فرضية نيوتن عن جذب الأجسام لبعضها بعضًا ودقة (المعادلة 5 – 4) القادرة على وصف القوة. بالإضافة إلى ذلك، ونتيجة لقدرة "كافندش" على قياس كلّ من F و m_1، m_2 و r بدقة، فقد استطاع أن يحدد قيمة الثابت G . إنّ قيمة ثابت الجذب الكوني المقبولة في أيامنا هذه هي

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

[تعطي (المعادلة 5 – 4) قيمة قوة الجذب الكوني التي يؤثر بها جسم في جسم آخر تفصل بينهما مسافة r. ويجب أن نعرف كيف نقيس r عندما يكون الجسم ممتدًا (غير متمركز في نقطة). وغالبًا ما يتم ذلك باستخدام حساب التكامل الذي ابتكره العالِم نيوتن. ولقد أوضح نيوتن أنّ (المعادلة 5 – 4) تعطي الشكل الصحيح للقوّة المتبادلة بين كرتين منتظمتين، حيث تمثل r المسافة الفاصلة بين مركزيهما. وعندما تكون الأجسام الممتدة صغيرة بالنسبة إلى المسافة الفاصلة بينها (كما في نظام الشمس والأرض) فسيكون بالإمكان إهمال نسبة الخطأ الناتجة عند التعامل مع هذه الأجسام وكأنها أجسام نقطية.]

المثال 5-10 قدّر **هل يمكن لك أن تسحب شخصًا باتجاهك عن طريق قوة التجاذب؟**

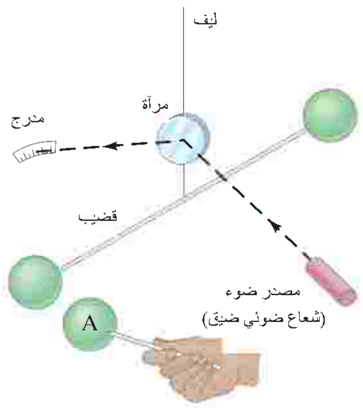
يجلس شخص كتلته 50-kg على مقعد بجوار شخص آخر كتلته 75-kg. قدر قيمة قوة جذب كلّ منهما للآخر؟

النّهج: تُعدّ هذه عملية تقديرية: لنجعل المسافة بينهما $\frac{1}{2}$m، ونقرب G إلى $10^{-10}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

الحــلّ: باستخدام (المعادلة 5 – 4):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \approx \frac{(10^{-10}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(50\ \mathrm{kg})(75\ \mathrm{kg})}{(0.5\ \mathrm{m})^2} \approx 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

و هي قيمة صغيرة و غير ملموسة إلا في حالة استخدام أجهزة حساسة جدّا.



الشكل 5-20 رسم تخطيطي لآلة كافندش. كرتان ملتصقتان بنهايتي عمود خفيف الوزن، ومعلق من منتصفه بوساطة خيط ليفي رفيع. وعند تقريب كرة ثالثة مسماة A من إحدى الكرتين المعلقتين، فإنّ قوة الجاذبية تعمل على تحريك الأخيرة ليسبب ذلك التواء خيط الليف قليلا. ويتم تضخيم الحركة الضئيلة باستخدام شعاع ضوئي ضيق يوجه إلى مرآة معلقة على الخيط الليفي لينعكس الشعاع على تدريج. إنّ التحديد المسبق لمدى كبر قوة ما تعمل على ليّ الخيط بمقدار معين يسمح بتحديد مقدار قوة التجاذب بين جسمين.

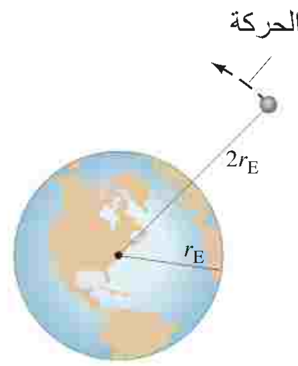
المثال 5-11 سفينة فضاء عند $2r_E$

ما مقدار قوة الجاذبية المؤثرة في سفينة فضاء كتلتها 2000-kg عندما تدور حول الأرض على ارتفاع يعادل نصف قطر الأرض $r_E = 6380\ \text{km}$ (الشكل 5 – 21)؟ افرض أنّ كتلة الأرض هي: $M_E = 5.98 \times 10^{24}\ \text{kg}$.

النّهج: على الرغم من استطاعتنا التعويض مباشرة في (المعادلة 5 – 4)، إلا أنّ هناك طريقة أخرى أكثر سهولة لحلّ السؤال اعتمادًا على بعد سفينة الفضاء عن مركز الأرض. وبما أنّ قوة الجاذبية تتناقص مع مربع المسافة $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ أي أنّ قوة الجاذبية على القمر الصناعي ستعادل ربع وزنها عند سطح الأرض.

الحــلّ: إنّ قيمة F_G تعادل mg عند سطح الأرض، في حين تعادل ربع قيمتها العظمى على بعد $2r_E$ من مركز الأرض:

$$F_G = \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{1}{4}(2000\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)$$
$$= 4900\ \text{N}$$



الشكل 5 – 21 (المثال 5 – 11).

المثال 5-12 القوة على القمر

أوجد القوة المحصلة المؤثرة في القمر $(m_M = 7.35 \times 10^{22}\ \text{kg})$ الناجمة من جذبه من قبل كلّ من الأرض $(m_E = 5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})$ والشّمس $(m_S = 1.99 \times 10^{30}\ \text{kg})$ على افتراض أنّهما يصنعان زاوية قائمة فيما بينهما، كما في (الشكل 5 – 22).

النّهج: إنّ القوة المؤثرة في القمر هي قوة الجذب الناجمة عن كلّ من الشّمس F_{MS} والأرض F_{ME} كما هو موضح في مخطط الجسم الحرّ في (الشكل 5 – 22). وعليه، سنستخدم قانون التجاذب الكوني لإيجاد قيمة كلّ قوة على حدة، ومن ثم نجمع هاتين القوتين جمعا اتجاهيا.

الحــلّ: تبتعد الأرض عن القمر مسافة $3.84 \times 10^5\ \text{km} = 3.84 \times 10^8\ \text{m}$. لذا، فإنّ F_{ME} (قوة الجذب الكوني للقمر من قبل الأرض) تساوي

$$F_{ME} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.35 \times 10^{22}\ \text{kg})(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{(3.84 \times 10^8\ \text{m})^2}$$
$$= 1.99 \times 10^{20}\ \text{N}.$$

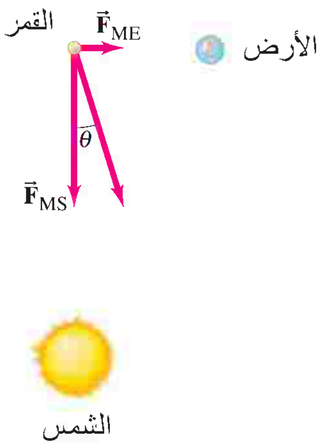
وتبتعد الشّمس عن كلّ من الأرض والقمر مسافة $1.50 \times 10^8\ \text{km}$. لذلك، فإنّ F_{MS} (قوة الجذب الكوني للقمر من قبل الشمس) هي

$$F_{MS} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.35 \times 10^{22}\ \text{kg})(1.99 \times 10^{30}\ \text{kg})}{(1.50 \times 10^{11}\ \text{m})^2}$$
$$= 4.34 \times 10^{20}\ \text{N}.$$

وبالنظر إلى (الشكل 5 – 22) حيث تظهر القوتان متعامدتين على بعضهما بعضًا، سنستخدم نظرية فيثاغورس لنجد قيمة القوة الكلية:

$$F = \sqrt{(1.99 \times 10^{20}\ \text{N})^2 + (4.34 \times 10^{20}\ \text{N})^2} = 4.77 \times 10^{20}\ \text{N}$$

ويعطى اتجاه القوة الكلية بدلالة الزاوية θ (الشكل 5 – 22) حيث: $\theta = \tan^{-1}(1.99/4.34) = 24.6°$.



الشكل 5 – 22 (المثال 5 – 12). تصنع مواضع كلّ من الشمس (S) والأرض (E) والقمر (M) زوايا قائمة بالنسبة إلى بعضها بعضا (الرسم غير دقيق).

تنويه:
ميّز بين قانون نيوتن الثاني وقانون الجذب الكوني.

ونذكّر هنا بضرورة الانتباه وعدم الخلط بين قانون الجذب الكوني، $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r_2}$ من جهة، وقانون نيوتن الثاني في الحركة، $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ من جهة أخرى؛ حيث يصف القانون الأول قوة الجاذبية وكيفية تغيّر قيمتها بدلالة كلّ من المسافة والكتلتين المعنيتين. وعلى الجانب الآخر، فإنّ قانون نيوتن الثاني يربط القوة المحصّلة المؤثّرة في جسم ما (أي المحصّلة المتجهة للقوى المختلفة جميعها المؤثرة في الجسم بغض النظر عن مصادرها) مع كتلة الجسم المعني وتسارعه.

7-5 الجاذبية قرب سطح الأرض: تطبيقات فيزياء علوم الأرض.

عند تطبيق (المعادلة 5 – 4) لحساب قوة الجاذبية بين الأرض وجسم موجود على سطحها، فإنّ m_1، و m_2 . و r_g تمثل كلًّا من كتلة الأرض، وكتلة الجسم، وبعد الجسم عن مركز الأرض على الترتيب*. وستعادل قوة الجاذبية هذه بالنسبة إلى الأرض وزن الجسم mg:

$$mg = G\frac{mm_E}{r_E^2}$$

ونحلّ المعادلة لإيجاد تسارع الجاذبية الأرضية g عند سطح الأرض:

$$g = G\frac{m_E}{r_E^2} \qquad (5-5)$$

g بدلالة G

تنويه:

ميز G من g

أي أنّ تسارع الجاذبية عند سطح الأرض g سيُحدّد بدلالة كلّ من m_E و r_E. (ويجب عدم الخلط بين G و g لأنهما كميتان مختلفتان على الرغم من أنهما مترابطتان بالمعادلة 5 – 5).

ولقد كانت قيمة الكتلة الأرضية لا تزال غير معروفة إلى أن تمّ قياس ثابت الجذب الكوني G. وبقياس G، فقد أصبح بالإمكان استخدام (المعادلة 5 – 5) لحساب كتلة الأرض، ليكون "كافندش" أول من قام بذلك. وعندما نعوض بقيمة $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ ونصف قطر الأرض $r_E = 6.38 \times 10^6\ \mathrm{m}$ ، فسنحصل من (المعادلة 5 – 5) على كتلة الأرض:

كتلة الأرض

$$m_E = \frac{gr_E^2}{G} = \frac{(9.80\ \mathrm{m/s^2})(6.38 \times 10^6\ \mathrm{m})^2}{6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}} = 5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

ويمكن تطبيق (المعادلة 5 – 5) على الكواكب الأخرى، علما بأنّ g، و m_g، و r_g سوف تشير إلى ثوابت تلك الكوكب.

المثال 13-5 قدّر قيمة الجاذبية الأرضية عند قمة جبل إيفريست

قدر القيمة الفاعلة لـ g عند قمّة جبل إيفريست الذي يرتفع مسافة 8850 m (29,035 ft) فوق مستوى سطح البحر. واحسب تسارع الجاذبية للأجسام القادرة على السقوط الحر عند ذلك الارتفاع.

النّهج: تعتمد قوة الجاذبية (وتسارعها) على بعد الأجسام عن مركز الأرض. وعليه، فستكون فاعلية قيمة g عند قمة جبل إيفريست أصغر من قيمتها عند مستوى سطح البحر. وكتقدير مقبول، سوف نتعامل مع الأرض وكأنها كرة منتظمة.

الحــلّ: نستخدم (المعادلة 5 – 5) بعد تعويض r_E بالقيمة التالية:

$$r = 6380\ \mathrm{km} + 8.9\ \mathrm{km} = 6389\ \mathrm{km} = 6.389 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

ونحلّ لإيجاد الجاذبية الأرضية بما يلي:

$$g = G\frac{m_E}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6.389 \times 10^6\ \mathrm{m})^2} = 9.77\ \mathrm{m/s^2}$$

وهو تخفيض بمقدار يقارب 3 أجزاء بالألف (0.3%).

ملحوظة: يُعدّ هذا تقريبًا مقبولًا؛ لأننا أهملنا الكتلة المتراكمة أسفل قمّة الجبل، بالإضافة إلى بعض الأشياء الأخرى.

الجدول 5 – 1 تسارع الجاذبية عند مواقع مختلفة على سطح الأرض

الموقع	الارتفاع (m)	g $(\mathrm{m/s^2})$
نيويورك	0	9.803
سان فرانسيسكو	0	9.800
دنفر	1650	9.796
قمم بايك	4300	9.789
سيدني أستراليا	0	9.798
خط الاستواء	0	9.780
القطب الشمالي (حسابيا)	0	9.832

لاحظ أنّ (المعادلة 5 – 5) لا تعطي قيمًا دقيقة لـ g عند المناطق المختلفة لكون الأرض غير كروية تمامًا، ولأنّ كتلتها غير موزعة بانتظام، ولأنها كذلك تحتوي على الجبال والوديان والنتوءات المختلفة خاصةً عند خط الاستواء (انظر إلى الجدول 5 – 1). وبالرغم من أنّ دوران الأرض يؤثر في قيمة g، فإننا، ومن وجهة نظر تطبيقية، سنستخدم $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ للأجسام القريبة من سطح الأرض، ونعبّر عن وزن الجسم بدلالة mg في معظم الأحيان.

* إنّ قياس المسافة من مركز الأرض لا يعني بأنّ قوة الجاذبية تنبثق من تلك النقطة. بل إن أجزاء الأرض جميعها تشارك بالجذب لتكون المحصلة قوة تعمل باتجاه مركز الأرض.

وتتغيّر قيمة g من موضع إلى آخر عند سطح الأرض بسبب الاختلافات الظاهرة في طبيعة تكوينها، ومن ضمنها توزيع الصخور المختلفة ذات الكثافات المختلفة على سطحها. ويعرف هذا التفاوت في قيمة g "بانحرافات الجاذبية" وهو مقدار صغير جدًا يتراوح بين جزء واحد لكلّ 10^6، أو جزء واحد لكلّ 10^7 من قيمة g. ومع هذا، فبالإمكان قياس هذه الانحرافات باستخدام جهاز قياس الجاذبية "*gravimeter*" بدقة تصل إلى جزء واحد لكلّ 10^9. ويستخدم علماء فيزياء الأرض هذه الأقيسة كجزء من استكشافاتهم للنفط والمعادن الأخرى، وكذلك في دراساتهم لتركيب القشرة الأرضية. وعلى سبيل المثال، فإنّ كثافة المعادن المترسبة تكون عادةً أعلى من كثافة الوسط المحيط بها. ويمكن لعجلة الجاذبية g أن تكون قيمتها أعلى بقليل عند قمة الطبقة الرسوبية مقارنةً بأطرافها؛ بسبب ازدياد الكتلة في الحجم المعني. وعادة ما يكتشف النفط تحت "القباب الملحية" ذات الكثافة المنخفضة، علمًا بأنّ البحث عن مناطق الانخفاض البسيط في قيمة g قد أفضى في السابق إلى اكتشاف النفط.

تطبيق الفيزياء

علوم الأرض: استكشاف النفط والمعادن

8-5 الأقمار الصناعية و"انعدام الوزن".

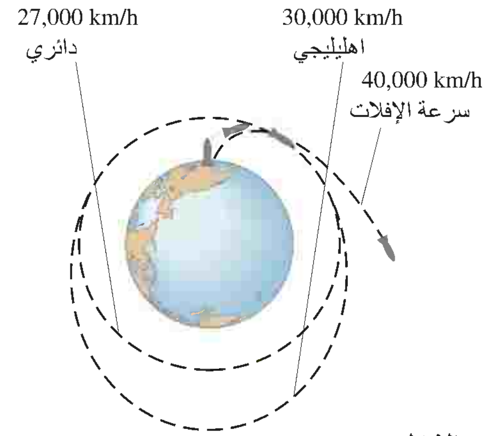
حركة الأقمار الصناعية علوم

تطبيق الفيزياء

أقمار صناعية أرضية

يُعدّ وجود الأقمار الصناعية المتحركة في مدارات حول الأرض في وقتنا الحالي أمرًا عاديًا (الشّكل 5 – 23). ويتمّ وضع القمر الصناعي في مداره بعد إيصاله إلى سرعة مماسة كافية بمساعدة الصواريخ، كما هو موضح في (الشّكل 5– 24). ولكن إذا كانت هذه السرعة مرتفعة جدًا فإنّ مركبة الفضاء سوف تنطلق إلى الفضاء الخارجي دون أيّ أمل في رجوعها لانفلاتها من الجاذبية الأرضية. أمّا إذا كانت هذه السرعة منخفضة جدًا، فإنها قد تسبب في عودتها وسقوطها باتجاه الأرض. ويتم وضع هذه الأقمار الصناعية عادة في مداراتها الدائرية أو شبه الدائرية نظرا إلى أنها تتطلب سرعات إقلاع منخفضة.

الشكل 5 – 23 قمر صناعي يدور حول الأرض.



الشكل 5 – 24 إطلاق قمر صناعي بسرعات مختلفة.

ويتم التساؤل أحيانا: ما الذي سيبقي أيّ قمر صناعي في مداره؟ والحل هو بسبب سرعته المرتفعة. علمًا بأنّ القمر سيهوي باتجاه الأرض إذا ما توقف عن الحركة، أو أنه سينطلق إلى الفضاء الخارجي إذا تحرك بسرعة مرتفعة جدًا (الشّكل 5 – 25). وللجاذبية الأرضية دور مهم لإبقاء القمر في مداره. وفي حقيقة الأمر، فإنّ القمر يتسارع باستمرار هاويًا باتجاه الأرض، ولكن سرعته العالية المماسة تعمل على منعه من الاصطدام بها.

الشكل 5 – 25 "سقوط" قمر صناعي من مساره في خط مستقيم باتجاه الأرض.

المثال 14-5 قمر صناعي متزامن مع دوران الأرض Geosynchronous satellite

تطبيق الفيزياء
أقمار صناعية متزامنة مع دوران الأرض

إنّ القمر الصّناعيّ المتزامن مع دوران الأرض هو القمر الذي يبقى عند نقطة واحدة ثابتة فوق الأرض. وهذا ما لا يمكن تحقيقه إلا إذا كانت هذه النقطة تقع فوق خط الاستواء. تستخدم هذه الأنواع من الأقمار الصناعية للبث المرئي والإذاعي، ولإجراءالاتصالات، إضافةً إلى المساعدة في التنبؤ بالأحوال الجوية. حدّد: (أ) الارتفاع الضروري لمدار القمر الصناعي فوق سطح الأرض. (ب) سرعة القمر الصناعي. ومن ثَمَّ (جـ) قارن سرعته مع سرعة قمر يدور حول سطح الأرض على ارتفاع 200 km.

النّهج: من أجل بقاء هذا القمر عند نقطة واحدة فوق الأرض وهي تدور، يجب أن يكون الزمن الدوري للقمر هو يوم واحد. وإذا فرضنا أنّ مداره دائري تمامًا، فعندها نستطيع تطبيق قانون نيوتن الثاني، $F = ma$، حيث $a = v^2/r$.

الحـلّ: (أ) إنّ القوة الوحيدة المؤثرة في القمر الصناعي هي قوة الجذب الكوني. وعليه، يمكن الحصول على القوة من (المعادلة $5 - 4$)، ومن ثم نعوضها في قانون نيوتن الثاني

$$F = ma$$

$$G\frac{m_{\text{Sat}}m_{\text{E}}}{r^2} = m_{\text{Sat}}\frac{v^2}{r} \qquad \text{[معادلة القمر الصّناعيّ]}$$

وتحتوي هذه المعادلة على مجهولين: r و v. ولكن القمر يدور حول الأرض خلال زمن دوران الأرض نفسه حول محورها، أي مرة واحدة خلال كلّ 24 ساعة تقريبا. لذا، فإنّ سرعة القمر يجب أن تكون

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

حيث $T =$ يوما واحدا $= (24h)\ (3600\ \text{s/h}) = 86{,}400\ \text{s}$.

ونعوض هذا المقدار في "معادلة القمر الصناعي" أعلاه، وبعد اختصار كتلة القمر الصناعي من جانبي المعادلة نحصل على

$$G\frac{m_{\text{E}}}{r^2} = \frac{(2\pi r)^2}{rT^2}$$

وبعد الاختصار نجد أنّ

$$r^3 = \frac{Gm_{\text{E}}T^2}{4\pi^2} = \frac{(6.67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98\times10^{24}\ \text{kg})(86{,}400\ \text{s})^2}{4\pi^2}$$

$$= 7.54\times10^{22}\ \text{m}^3$$

وعند أخذ الجذر التكعيبي نحصل على $r = 4.23\times10^7\ \text{m}$، أو 42,300 km من مركز الأرض. وعندما نطرح مقدار نصف قطر الأرض (6380 km)، سنكتشف بأنّ القمر الصناعي المتزامن مع دوران الأرض يجب أن يدور فوق سطح الأرض على ارتفاع 36,000 km (حوالي $6r_E$).(ب) وعندما نحلّ معادلة القمر الصناعي كما أعطيت أعلاه في (أ) فسنحصل على v

$$v = \sqrt{\frac{Gm_{\text{E}}}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98\times10^{24}\ \text{kg})}{(4.23\times10^7\ \text{m})}} = 3070\ \text{m/s}$$

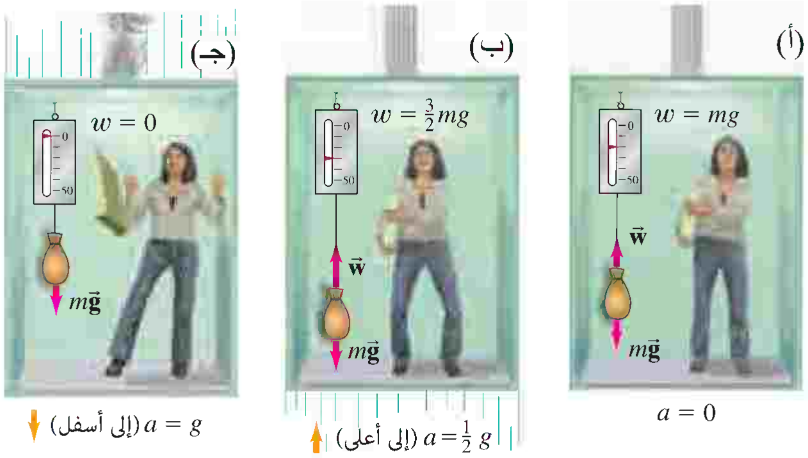
وسنتوصل إلى النتيجة نفسها كذلك إذا استخدمنا $v = 2\pi r/T$.

(ج) تظهر المعادلة في فرع (ب) أن $v \propto \sqrt{1/r}$. لذلك، عند التعويض في قيمة $r = r_{\text{E}} + h = 6380\ \text{km} + 200\ \text{km} = 6580\ \text{km}$ سنحصل على

$$v' = v\sqrt{\frac{r}{r'}} = (3070\ \text{m/s})\sqrt{\frac{(42{,}300\ \text{km})}{(6580\ \text{km})}} = 7780\ \text{m/s}$$

ملحوظة: يقع مركز دوران القمر الصناعي دائمًا عند مركز الأرض. وعليه، فمن غير الممكن أن نجد قمرًا صناعيًا يدور حول نقطة ثابتة فوق الأرض عند أيّ ارتفاع عدا عند $0°$.

التمرين ز : يدور قمران صناعيان حول الأرض بمدارين دائريين لهما نصف القطر نفسه. فإذا كانت كتلة أحدهما ضعف كتلة الآخر، فأيّ من العبارات التالية صحيحة بالنسبة إلى سرعتيهما:
(أ) يتحرك القمر الصناعي الأثقل بضعف سرعة القمر الأخف. أم (ب) يمتلك القمران الصناعيان السرعة نفسها. أم (جـ) يتحرك القمر الأثقل بأربعة أضعاف سرعة القمر الأخفّ؟



الشكل 5 – 26 (أ) يؤثر جسم داخل مصعد في ميزان زنبركي بقوة تعادل وزنه. (ب) الوزن الظاهري لجسم داخل مصعد يتسارع إلى الأعلى بمعدل $\frac{1}{2}g$ أكبر بمعدل $1\frac{1}{2}$ من الوزن الحقيقي. (جـ) يشعر الجسم داخل مصعد يسقط سقوطا حرًا "بانعدام الوزن": ويقرأ الميزان صفرًا.

انعدام الوزن

"انعدام الوزن" داخل مصعد يهوي إلى الأسفل.

يخضع الموجودون جميعهم من أناس ومقتنياتهم لظاهرة انعدام الوزن وهم داخل قمر صناعي يدور حول الأرض. لنتناول المصعد الهابط أولًا كمثال بسيط. تتدلى حقيبة معلقة من ميزان زنبركي داخل مصعد ساكن، كما هو مبين في (الشّكل 5 – 26 أ). وتظهر قراءة الميزان قوة الحقيبة المؤثرة في الميزان إلى أسفل، التي تعادل في القيمة وتعاكس بالاتجاه القوةَ المؤثرةَ في الحقيبة إلى أعلى. ونعبّر عن قيمة هذه القوة بالوزن w. وعليه، فهناك قوتان تؤثران في الحقيبة وهما: قوة الجاذبية الأرضية التي تشير إلى الأسفل، وقوة الميزان التي تشير إلى الأعلى (قانون نيوتن الثالث) وقيمتها w. وعندما نطبق قانون نيوتن الثاني $\Sigma F = ma$ على الحقيبة، وبسبب عدم تسارعها كما في (الشكل 5 – 26 أ)، فإننا نحصل على

$$w - mg = 0$$

حيث mg هي وزن الحقيبة. وعليه، فإنّ $w = mg$ وبما أنّ الميزان يشير إلى القوة w التي تؤثر بها الحقيبة فيه، فهو يسجل قوة تعادل وزن الحقيبة كما كان متوقعًا. ولكن إذا كان المصعد يتحرك بتسارع a ، فإننا نحصل على $w - mg = ma$ عند تطبيق قانون نيوتن الثاني $\Sigma F = ma$ على الحقيبة.

وعندما نحلّ لإيجاد w، فسيكون الناتج

$$w = mg + ma \qquad [\text{تشير } +a \text{ إلى الأعلى}]$$

وإذا أشارت a إلى الأعلى فستكون ذات قيمة موجبة. لذا، سيقرأ الميزان مقدارًا أكبر من mg. وتُسمّى عندها w الوزن الظاهري للحقيبة. وفي هذه الحالة، ستكون أكبر من الوزن الأصلي (mg). وأما إذا تسارع المصعد إلى الأسفل، فسوف تكون a سالبة، ويصبح الوزن الظاهري w أقلّ من mg. ونشير هنا إلى أنّ اتجاه $\vec{\mathbf{a}}$ هو الوحيد الذي يؤثر في قراءة الميزان الذي لا يتأثر باتجاه السرعة اللحظية $\vec{\mathbf{v}}$.

وعلى سبيل المثال، لو تسارع مصعد إلى الأعلى بمقدار $\frac{1}{2}g$، فسيتأثر وزن الحقيبة الظاهري ليصبح

$$w = mg + m(\tfrac{1}{2}g) = \tfrac{3}{2}mg$$

أي أنّ قراءة الميزان ستظهر $1\frac{1}{2}$ ضعف الوزن الأصلي (الشكل 5 – 26 ب). وكذلك سيكون الوضع بالنسبة إلى شخص ما في المصعد حيث سيعادل وزنه الظاهري (أي قوة دفع أرض المصعد الرّأسيّة له) $1\frac{1}{2}$ ضعف وزنه الأصلي. ونستطيع القول هنا بأنه سيتأثر بتسارع جاذبية يعادل $1\frac{1}{2}$ وهذا مشابه لما سيشعر به رواد الفضاء من مضاعفات عجلة الجاذبية الأرضية g عند انطلاق مركباتهم.

ولكن إذا كان تسارع المصعد $a = -\frac{1}{2}g$ إلى الأسفل، فسيصبح الوزن الظاهري $w = mg - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}mg$. وعليه، فإنّ قراءة الميزان ستظهر نصف الوزن الأصلي. وأخيرا، إذا ما سقط المصعد سقوطًا حرًّا نتيجة انقطاع أسلاك كوابحه، فستصبح $a = -g$. لذا، فإنّ الوزن الظاهري سيؤول إلى الصفر $w = mg - mg = 0$ لتظهر الحقيبة وكأنها بلا وزن (انظر الشّكل 5 – 26 ج). فإذا كان هناك شخص ما داخل المصعد وهو في وضع السقوط الحرّ متأثر بالجاذبية الأرضية$(-g)$ وأوقع هذا الشخص قلمًا من يده، فإنّ القلم لن يصل إلى أرض المصعد مع أنه يسقط إلى الأسفل بتسارع g. إنّ هذا في حقيقة الأمر ما سيحدث؛ لأنّ كلًّا من أرض المصعد والشخص الموجود داخله يهوي إلى الأسفل في الوقت نفسه، وبتسارع الجاذبية الأرضية. وتُسمَّى هذه الظاهرة "انعدام الوزن الظاهري"لأنّه خلال الإطار المرجعي للشخص، فإنّ الأغراض لا تسقط، وتبدو وكأنها دون وزن بالرغم من عدم اختفاء الجاذبية. ونستطيع الجزم بأنّ الجاذبية لا تزال تؤثر في الجسم الساقط، وأنّ وزنه لا يزال يعادل mg.

الشكل 5 – 27 الشعور بانعدام الوزن على الأرض.

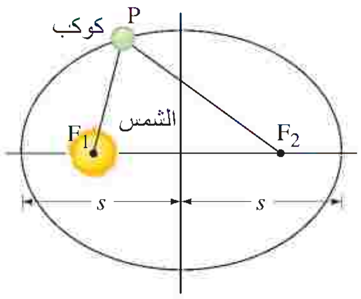
وتظهر الأجسام داخل المصعد وكأنها بلا وزن خلال فترة هبوط المصعد إلى أسفل، أو خلال سقوطه سقوطًا حرًّا. وقد يكون هذا بالإضافة إلى عدم وجود أيّ قوة تلامس محفّزًا على الشعور بالوزن خلال السقوط. إنّ ظاهرة انعدام الوزن الذي يشعر بها الرّواد في القمر الصناعي ذي المدارالقريب من سطح الأرض مشابهة تمامًا لانعدام الوزن الظاهري الذي يشعر به الشخص الموجود في مصعد يسقط سقوطا حرًّا. وللوهلة الأولى، لعلّه يُعدّ شيئًا غريبًا أن يتمّ التفكير في القمر الصناعي وكأنّه يسقط سقوطًا حرًّا. وفي حقيقة الأمر هذا ما يحدث فعلًا؛ حيث يتهاوى القمر الصناعي باتجاه الأرض كما يظهر في (الشّكل 5 – 25). وتتسبب قوة الجاذبية الأرضية بسقوطه خارج مساره الطبيعي ذي الخطّ المستقيم. وبما أنّ تسارع القمر هو نفسه تسارع الجاذبية الأرضية عند ذلك الموضع، فإنّ القوة الوحيدة التي ستؤثر فيه هي قوة الجاذبية. لذلك، وبالرغم من أنّ قوة الجاذبية تؤثر في الأجسام داخل القمر الصناعي، فإنّ الأجسام ستشعر بانعدام الوزن الظاهريّ وكأنها تسقط سقوطا حرّا بسبب تسارعها مع القمر الصناعي.

"انعدام الوزن" داخل قمر صناعيّ

يظهرالشكل 5 – 27 أمثلة لأشخاص على الأرض يخضعون للسقوط الحرّ، ولظاهرة انعدام الوزن الظاهري للحظات قصيرة.

وهناك حالة أخرى مختلفة تحدث عندما تكون سفينة الفضاء بعيدة عن كلّ من الأرض والقمر والأجسام الأخرى الجاذبة لها جميعها. وفي هذه الحالة، تكون قوة الجاذبية المؤثرة فيها صغيرة جدًّا كنتيجةٍ مباشرةٍ لبعدها عنهما، مما يؤدّي إلى شعور الأشخاص على متن تلك السفينة بانعدام وزنهم.

* 9-5 قوانين كبلر وتركيب نيوتن



الشكل 5 – 28 (أ) قانون كبلر الأول. القطع الناقص هو منحنى مغلق بحيث تكون مجموع المسافات من أيّ نقطة P على المنحنى إلى نقطتين معينتين (تسميان البؤرتين F_1 و F_2) مقدارًا ثابتًا. أي أنّ مجموع المسافتين $F_1P + F_2P$ ثابت للنقاط جميعها التي على المنحنى. وتُعدّ الدائرة حالة خاصّة من القطع الناقص حيث تتحد البؤرتان عند مركز الدائرة.

قدّم عالِم الفلك الألماني جوهانز كبلر (1571 – 1630) وصفًا دقيقًا لحركة الكواكب حول الشّمس قبل أن يقترح نيوتن قوانين الحركة الثلاثة، وقانون الجذب الكوني بأكثر من نصف قرن. وتضمن الوصف الدقيق ثلاثة اكتشافات عمليّة نشير إليها اليوم بقوانين كبلر لحركة الكواكب. ويمكن تلخيصها بعد الاستعانة بالرسومات التوضيحية المبينة في (الشّكلين 5 – 28 و 5 –29) كالتالي:

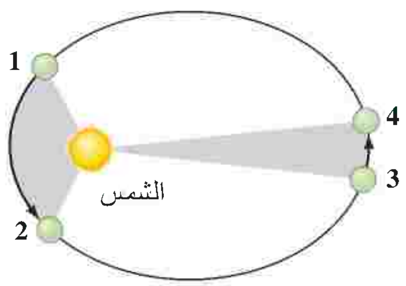
قانون كبلر الأول: يدور كلّ كوكب من كواكب المجموعة الشمسية في مسار إهليلجيّ (على شكل قطع ناقص) حول الشمس الموجودة عند إحدى بؤرتيه (الشكل 5 – 28).

قانون كبلر الثاني: يمسح الخطّ المستقيم الوهمي الواصل بين الشمس وأيّ كوكب يدور حولها مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية (الشكل 5 – 29).

قانون كبلر الثالث: تعادل نسبة مربع الزمنين الدوريين لكوكبين يدوران حول الشمس نسبة مكعب بعديهما عنها $(T_1/T_2)^2 = (s_1/s_2)^3$.

[ويمثل s المحور شبه الرئيس الذي تمّ تعريفه على أنه نصف محور المدار الطويل (الرئيس)، كما هو موضح في الشّكل 5 – 28]. ونستطيع أن نعدّه أيضًا متوسط بعد الكوكب عن الشّمس. (ويظهر الجدول 5 – 2) بيانات حديثة : انظر إلى العمود الأخير.

الشكل 5 – 29 قانون كبلر الثاني. للمنطقتين المظللتين المساحة نفسها. يتحرك الكوكب من النقطة 1 إلى النقطة 2 خلال الفترة الزمنية نفسها التي يستغرقها للتحرك من النقطة 3 إلى النقطة 4. وتتحرك الكواكب بسرعات أعلى خلال مداراتها عندما تكون قريبة من الشمس.



لقد وصل كبلر إلى قوانينه نتيجة تحليله الدقيق للقراءات العملية. واستطاع نيوتن بعد ذلك بخمسين عامًا اشتقاق قوانين كبلر بطريقة رياضية مستندًا إلى قانون الجذب الكوني وقوانين الحركة. ولقد أظهر أنّه يوجد شكل وحيد لقانون الجاذبية يتلاءم مع قوانين كبلر، ويعتمد على التربيع العكسي للمسافة. وبذلك يكون نيوتن قد استخدم قوانين كبلر دليلًا على قانونه للجذب الكوني كما أوجزه في (المعادلة 5 – 4).

الجدول 5 – 2 بيانات الكواكب مطبقة على قانون كبلر الثالث.

الكوكب	متوسط المسافة من الشمس $s(10^6\,\mathrm{km})$	الزمن الدوري T	s^3/T^2 $(10^{24}\,\mathrm{km^3/y^2})$
عطارد	57.9	0.241	3.34
الزهرة	108.2	0.615	3.35
الأرض	149.6	1.0	3.35
المريخ	227.9	1.88	3.35
المشتري	778.3	11.86	3.35
زحل	1427	29.5	3.34
أورانوس	2870	84.0	3.35
نبتون	4497	165	3.34
بلوتو	5900	248	3.34

اشتقاق قانون كبلر الثالث

سنشتق الآن قانون كبلر الثالث للحالة الخاصة للمدار الدائري مفترضين أنّ معظم مدارات الكواكب قريبة جدًّا من الدائرية. وسنكتب أولًا قانون نيوتن الثاني في الحركة $\Sigma F = ma$. ومن ثم سنعوض عن قيمة F باستخدام قوة الجذب الكوني بين الشمس وكوكب آخر كتلته m_1 باستخدام (المعادلة 5 – 4)، ونعوّض عن a بالتسارع المركزي v^2/r. وسنفرض بأنّ كتلة الشّمس M_S أكبر بكثير من كتلة كواكبها. وعليه، فإنّ

$$\Sigma F = ma$$

$$G\frac{m_1 M_S}{r_1^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1}$$

لتمثل r_1 بُعد أحد هذه الكواكب عن الشمس، في حين تمثل v_1 متوسط سرعة هذا الكوكب في مداره. أما M_S فتمثل كتلة الشمس، علمًا بأنّ جذب الشمس هو ما سيبقي الكواكب في مساراتها. ويُعدّ الزمنُ الدوري T_1 للكوكب الزمنَ اللازم لهذا الكوكب، لكي ينهي دورةً واحدةً كاملة، وهي مسافة تعادل محيط مداره $2\pi r_1$. وعليه، فإنّ

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}$$

ونعوض هذا في المعادلة أعلاه

$$G\frac{m_1 M_S}{r_1^2} = m_1 \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$$

ونعيد ترتيب القانون لنحصل على

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \qquad \text{(5 – 6 أ)}$$

وبذلك تم اشتقاق هذه المعادلة للكوكب الأول (وليكن كوكب المريخ). ويمكن تطبيق الاشتقاق نفسه على أي كوكب آخر يدور حول الشّمس (مثل كوكب زحل):

$$\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

حيث إن T_2، و r_2 هما الزمن الدوري ونصف قطر مدارالكوكب الثاني على الترتيب. وبما أنّ الحدّ الأيمن من المعادلتين السابقتين متساو، فسنجد أنّ $T_1^2/r_1^3 = T_2^2/r_2^3$، أو بإعادة الترتيب:

قانون كبلر الثالث

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \qquad \text{(5 – 6 ب)}$$

وهذا هو قانون كبلر الثالث.

ومع أنّ اشتقاق (المعادلتين السابقتين 5 – 6 أ و 5 – 6 ب) قد تم بناءً على المقارنة بين كوكبين يدوران حول الشمس، إلّا أنّه من الممكن تطبيقهما على أنظمة أخرى لعموميتهما. وكمثال على ذلك، نستطيع تطبيق (المعادلة 5 – 6 أ) على قمرنا الذي يدور حول الأرض (وعندها نضع M_E "كتلة الأرض" مكان M_S "كتلة الشّمس"). وأنستطيع أيضًا تطبيق (المعادلة 5 – 6 ب) للمقارنة بين قمرين يدوران حول الكوكب نفسه كالمشتري. وبما أنّ قانون كبلر الثالث ينطبق على الأجسام التي تدور حول المركز الجاذب نفسه فقط، فلن نستطيع استخدام (المعادلة 5 – 6 ب) للمقارنة بين دوران القمر حول الأرض من ناحية، ودوران المريخ حول الشّمس من ناحية أخرى؛ لأنّ كلًّا منهما يعتمد على مركز جذب مختلف.

تنويه: قارن مدارات الأجسام حول المركز نفسه فقط.

وسنفترض الآن بأنّ المدارات في الأمثلة التالية جميعها دائرية، على الرغم من مخالفة هذا للواقع.

المثال 5-15 أين يقع المريخ؟

لاحظ كبلر أنّ الزمن الدوريّ للمريخ (عام واحد) يعادل 687 يومًا (من أيام الأرض) تقريبًا، أي مايعادل (687 d/365 d)=1.88yr من سنوات الأرض. حدّد بُعْدَ المريخ عن الشّمس باستخدام الأرض مرجعًا.

النهج: بما أننا نعلم الزمن الدوري لكلّ من الأرض والمريخ، وكذلك بُعد الأرض عن الشمس، فإنّنا نستطيع استخدام قانون كبلر الثالث للحصول على بُعد المريخ عن الشمس.

الحـــــلّ: يعادل الزمن الدوريّ للأرض $T_E = 1\ \text{yr}$ سنة واحدة. وتبتعد الأرض عن الشـــــمس مسافة $r_{ES} = 1.50 \times 10^{11}\ \text{m}$. ونكتب من قانون كبلر الثالث (معادلة 5 – 5 ب):

$$\frac{r_{MS}}{r_{ES}} = \left(\frac{T_M}{T_E}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1.88\ \text{yr}}{1\ \text{yr}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.52$$

أي أنّ المريخ يبتعد 1.52 مرة ضعف بعد الأرض عن الشمس، أو $2.28 \times 10^{11}\ \text{m}$ متر.

المثال 5-16 تحديد كتلة الشمس

حدّد كتلة الشّمس بدلالة بُعد الأرض عنها ، أو $r_{ES} = 1.5 \times 10^{11}\ \text{m}$.

النّهج: يرتبط الزمن الدوري وبُعد أيّ كوكب يدور حول الشمس (الأرض في هذا المثال) بكتلة الشمس M_S حسب (المعادلة 5 – 6 أ).

الحـلّ: نحسب الزمن الدوريّ للأرض كالتالي: $T_E = 1\ \text{yr} = (365\tfrac{1}{4}\ \text{d})(24\ \text{h/d})(3600\ \text{s/h}) = 3.16 \times 10^7\ \text{s}$

ونحلّ (المعادلة 5 – 6 أ) من أجل M_S:

$$M_S = \frac{4\pi^2 r_{ES}^3}{GT_E^2} = \frac{4\pi^2(1.5 \times 10^{11}\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(3.16 \times 10^7\ \text{s})^2} = 2.0 \times 10^{30}\ \text{kg}$$

تطبيق الفيزياء
تحديد كتلة الشمس

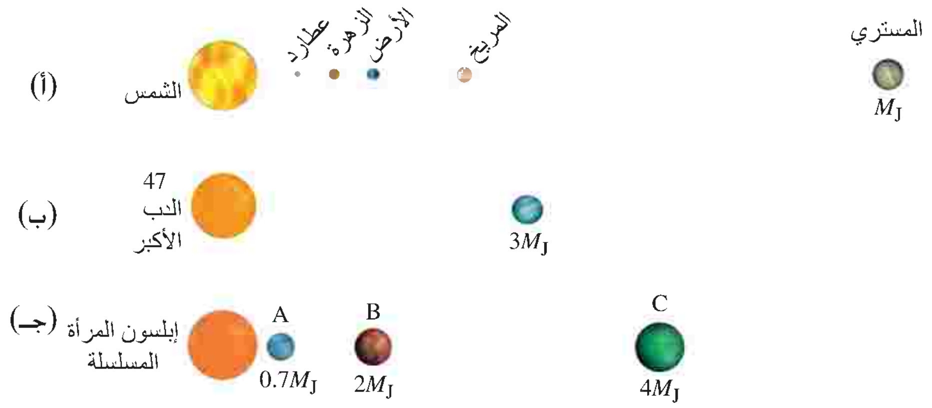
اضطرابات كواكب واكتشافها

لقد أظهرت الأقيسة الدقيقة لمدارات الكواكب عدم اتباع الكواكب قوانين كبلر بدقة. فقد لوحظت على سبيل المثال - انحرافات طفيفة على مدارات الكواكب البيضوية. وقد توقع نيوتن حدوث ذلك معلّلا - بأنّ الكواكب لن تتأثر بقوّة جذب الشمس لها فقط، بل بقوّة جذبها الضعيفة لبعضها بعضًا أيضًا. ولقد كانت هذه الانحرافات أو **الاضطرابات** البسيطة جدّا في مدار زحل بمثابة التلميح الذي ساعد نيوتن على صياغة قانون الجذب الكوني، مفترضًا أنّ الأجسام جميعها تجذب بعضها بعضًا. وأفضت ملاحظة هذه الاضطرابات البسيطة لاحقًا إلى اكتشاف كوكبي نبتون وبلوتو. وعلى سبيل المثال، فلقد كان من غير الممكن إرجاع الانحرافات جميعها في مدار أورانوس (سابع الكواكب السيارة) إلى الاضطرابات الناجمة من الكواكب الأخرى المعروفة في حينه. وأشارت الحسابات الدقيقة لاحقًا في القرن التاسع عشر إلى تفسير هذه الانحرافات، بناءً على وجود كوكب آخر في المجموعة الشمسية نفسها. كما تمّ التنبؤ بموضع الكوكب الجديد استنادًا إلى هذه الحسابات، وعند النظر من خلال التليسكوب (المقراب) بالاتجاه المحسوب فقد عُثر على الكوكب الجديد، الذي سُمِّيَ لاحقاً "نبتون". وأفضت الاضطرابات الصغيرة جدًّا في مدار كوكب نبتون إلى اكتشاف كوكب بلوتو في عام 1930. ولقد تم اكتشاف عدد من الكواكب السيارة حول النجوم البعيدة منذ منتصف تسعينيّات القرن العشرين (الشّكل 5 – 30) بدلالة "التذبذب" المنتظم لكلّ نجم نتيجة انجذابه باتجاه الكوكب (أو الكواكب) الدوّارة حوله.

كواكب حول نجوم أخرى

تركيبات نيوتن

ويُعدّ تطوير نيوتن لقانون الجذب الكوني وقوانين الحركة الثلاثة إنجازًا فكريًّا رئيسًا؛ حيث استطاع وصف حركة الأجسام على الأرض وفي الفضاء باستخدام هذه القوانين. واتضح أنّ هذه الأجسام السماوية وكذلك الأجسام على سطح الأرض تتبع القوانين نفسها. ولهذا السبب تحديدًا، بالإضافة إلى قيام نيوتن بدمج نتائج العلماء السابقة في نظامه، فإنّنا نتكلم أحياناً عمّا يُسَمّى بـ "تركيب نيوتن".



الشكل 5 – 30 يقارن نظامنا الشمسي (آ) بالكواكب السيارة المكتشفة حديثًا. (ب) وبالنجم 47 آوريس ماجوريس M_J. (جـ) والنجم إسيلون آندروميدا مع ثلاثة كواكب على الأقل M_J له كتلة المشتري نفسها (الرسوم ليست بالمقياس الدقيق).

السببية

يشار إلى القوانين التي صاغها نيوتن **بقوانين السّبب**. ويقصد **بالسّببيّة** هنا إمكانية أن يفضي حدث ما إلى حدث آخر. فعندما يُضرب زجاج نافذة بحجر نستنتج أنّ الحجر قد يتسبب بكسر هذا الزجاج. ومن الممكن اعتبار قوانين نيوتن على أنّها ذات صلة بفكرة "السبب والأثر". حيث يُنظر إلى الجسم المتسارع على أنه (الأثر) الناجّ من تأثّره بمحصلة قوى (السبب).

10-5 أشكال القوى في الطبيعة.

لقد ناقشنا سابقًا قانون نيوتن للجذب الكوني (المعادلة 5 – 4) الذي يصف كيفية اعتماد قوّةٍ ما مثل قوّة الجاذبيّة على الكتل ذات الصلة، وعلى المسافات الفاصلة بينها. وعلى الوجه الآخر، فإنّ قانون نيوتن الثاني $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ يخبرنا كيف سيتسارع جسم ما إذا ما تأثّر بقوّة خارجيّة. ولكي تكتمل الصورة، يجب أن نتساءل عن أنواع القوى المختلفة الأخرى الموجودة في الطبيعة، إضافةً إلى قوة الجاذبية.

بدأ الفيزيائيون في القرن العشرين بالتمييز بين أربعة أنواع من القوى في الطبيعة، وهي: (1) قوة الجاذبية. (2) القوة الكهرومغناطيسيّة (وسوف نرى لاحقًا كيف أنّ كلًّا من القوى الكهربائية والمغناطيسيّة ترتبط إحداهما بالأخرى ارتباطًا وثيقًا). (3) القوّة النووية الشديدة. (4) القوة النووية الضعيفة. ولقد ناقشنا في هذا الفصل قوة الجاذبية بالتفصيل. وسوف نتناول طبيعة القوّة الكهرومغناطيسيّة ابتداءً من الفصل السادس عشر حتى نهاية الفصل الثاني والعشرين. v وتعمل القوى النووية الشديدة والضعيفة التي ستناقش ابتداءً من الفصل الثلاثين وحتى الفصل الثاني والثلاثين على مستوى نواة الذرة. ومع أنّ القوى الأخيرة تظهر جليّةً خلال النشاط الإشعاعي والطاقة النووية، إلا أنّها لا تظهر بوضوح في الحياة اليومية.

الكهرباء الضعيفة و *GUT*

ولا يزال الفيزيائيون يحاولون استنباط النظريات الموحّدة لهذه القوى الأربع؛ أي اعتبار هذه القوى جميعها أو بعضها أشكالًا مختلفةً لقوّة أساسيّة واحدة. وحتى وقتنا الحالي، فقد تمّ توحيد كلٍّ من القوتين الكهرومغناطيسيّة والنوويّة الضعيفة نظريًّا لتشكيل النظريّة الكهرباء الضعيفة، التي يتم النظر من خلالها إلى القوة الكهرومغناطيسيّة والقوة النوويّة الضعيفة كشكلين مختلفين من أشكال القوة الكهرباء الضعيفة المنفردة. وتُعدّ محاولات الدفع باتجاه التوسّع بتوحيد القوى فيما يعرف بالنظريات الموحّدة العملاقة (GUT) موضوعَ الأبحاث النشطة الحالية.

القوى التي نتعامل معها يوميا هي الجاذبية والكهرومغناطيسية.

ولكن، ما مكانة أو موضع القوى التي نتعامل معها في حياتنا اليومية من كلّ هذا المخطط؟ تُعدّ القوى جميعها التي نتعامل معها في حياتنا اليومية، كالدفع، والسحب، والأشكال الأخرى لقوى التلامس مثل القوة العمودية (أو الرأسية)، وقوة الاحتكاك نتاجَ القوة الكهرومغناطيسية التي تعمل على المستوى الذرّي . ومثالًا على ذلك القوة التي تؤثّر بها أصابعك في القلم، التي تنتج من التنافر الكهربائي بين إلكترونات المدارات الخارجية لذرّات كلّ من الأصابع والقلم.

ملخّص

يخضع الجسم الذي يتحرّك بسرعةٍ ثابتة v على محيط دائرة نصف قطرها r **لحركة دائريّة منتظمة**. ويتجه تسارع الجسم المركزي a_R نحو مركز الدائرة على امتداد نصف قطرها للداخل (يُسمّى أيضًا **التّسارع القطري**) وتُعطى قيمته بالمعادلة التالية:

$$a_R = \frac{v^2}{r} \qquad (1-5)$$

وبالرغم من تغيّر اتجاه سرعة $\vec{\mathbf{v}}$ وتسارع $\vec{\mathbf{a}}_R$ للجسم الخاضع للحركة الدائرية باستمرار، فإنّهما يظلّان متعامدين على بعضهما بعضًا في كلّ لحظة.

وهناك ضرورةٌ واضحةٌ لوجود محصّلة قوّة مؤثّرة لإبقاء الجسم في مدارٍ دائري، على أن يشير اتجاه هذه القوة إلى مركز الدائرة. وقد تكون هذه القوّة ناجمةً من الجاذبيّة أو من الشدّ في الحبل، أو من مركبةٍ ما للقوّة العموديّة، أو لنوع قوّةٍ آخر، أو لمجموعة من هذه القوى.

[* وعندما تكون السرعة للحركة الدائرية غير ثابتة، يصبح للتسارع مركبتان، إحداهما مماسة والأخرى مركزية].

وينصّ **قانون نيوتن للجذب الكوني** على أنّ كلّ جسم في الكون يجذب كلّ جسمٍ آخر بقوّةٍ تتناسب طرديًّا مع حاصل ضرب كتلتيهما، وعكسيًّا مع مربع المسافة بينهما، وفق المعادلة الآتية:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (4-5)$$

ويظهر اتجاه هذه القوّة على امتداد الخط الفاصل بين الجسمين. وهي القوّة نفسها التي ترغم القمر على الدوران حول الأرض، وكذلك الكواكب الأخرى السيارة على الدوران حول الشمس.

ومع أنّ الأقمار الصناعية تدور حول الأرض تحت تأثير الجاذبية الأرضية، فإنّ النصيحة للجميع هي أن "يبقوا يقظين" بسبب سرعة الأقمار المماسة الهائلة.

[*وتشكل قوانين نيوتن الثلاثة للحركة بالإضافة إلى قانون الجذب الكوني نظريةً واسعةً المدى عن الكون. فلقد أصبح من الممكن وصف الحركة بدقة متناهية للأجسام على الأرض، وكذلك للكواكب السيارة في الفضاء باستخدام هذه القوانين. وتوفر هذه القوانين الأساس النظري **لقوانين كبلر لحركة الكواكب**].

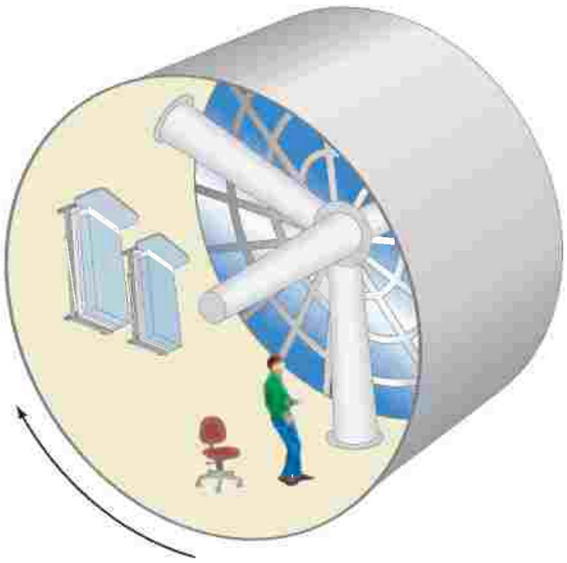
إنّ القوى الأربع الأساسية في الطبيعة، هي:

(1) قوّة الجاذبيّة. (2) القوى الكهرومغناطيسية. (3) القوة النووية الشديدة. (4) القوة النووية الضعيفة. وتُعدّ القوتان الأساسيتان الأولى والثانية مسؤولتين في الأغلب عن معظم القوى المؤثرة "اليومية".

1. يقول بعض الناس أحيانًا بأنّ الماء قد أزيل عن الملابس في آلة تجفيف الثياب بوساطة القوّة المركزيّة عن طريق طرد المياه إلى الخارج. ما وجه الخطأ في هذه العبارة؟
2. هل يمكن اعتبار معدّل تسارع سيّارة حول منعطف تسير بسرعة ثابتة مقدارها 60 km/h هو المعدّل نفسه مقارنةً بالسيارة ذاتها عندما تتسارع حول منعطف أقلّ حدّة وبالسرعة السابقة الثابتة ذاتها؟ وضّح ذلك.
3. افرض أنّ هناك سيارةً تسير بسرعة ثابتة على طريق جبلي. حدّد أين ستؤثر هذه السيارة بأقصى قوة على الطريق خلال مسارها: (أ) عند أعلى التلة؟ أم (ب) عند السفح بين التلتين؟ أم (جـ) عند الأرض المنبسطة قرب أسفل التلة؟
4. صِفِ القوى المؤثرة جميعها في طفل يركب حصانًا خشبيًّا يتحرك على محيط دائرة في مدينة الألعاب. وما طبيعة القوة التي ستوفّر التسارع المركزي للطفل؟
5. من الممكن أن يتمّ التلويح بسرعةٍ بدلو مليء بالمياه في دائرة رأسية من غير أن تسكب المياه خارجه. وضّح ذلك.
6. ما عدد المسرعات في السيارة؟ هناك على الأقلّ ثلاث أدوات تنظم تسارع السيارة. فما هي؟ ما مقدار التسارع الذي تسببه كلّ منها؟
7. يسير طفل يركب مزلاجة بسرعةٍ عاليةٍ جدًا فوق قمّة تلّة. كما في (الشّكل 5 – 31). ويشعر الطفل بتناقص القوة العمودية بين صدره والمزلاجة كلّما تسلّق التلة إلى الأعلى. بالرغم من أنّ مزلاجته لا ترتفع عن الأرض نهائيًّا. وتبقى ملتصقةً بها. فسّر تناقص القوّة بناءً على قانون نيوتن الثاني.

الشكل 5 – 31 (السؤال 7).

8. لماذا يتمايل سائقو الدراجات الهوائية إلى الداخل عندما يدورون حول المنعطفات بسرعات عالية؟
9. لماذا تميل الطائرات عندما تطير في مسار دائري؟ وكيف يمكنك حساب زاوية ميل الطائرة إذا علمت سرعتها ونصف قطر مسارها؟
10. تلوّح طفلة بكرة مثبتة بحبل في دائرة أفقية حول رأسها. فإذا أرادت الطفلة أن تترك الحبل من يدها عند لحظة ما. لتصطدم الكرة بهدفٍ محددٍ في طرف الملعب الآخر. فما اللحظة المناسبة التي يجب أن يُتركَ الحبلُ عندها ؟
11. هل تستطيع التفاحة أن تؤثّر في الكرة الأرضية بقوة جذب ما؟ وكم تبلغ قيمة هذه القوة إذا كان هذا صحيحا؟ خذ بالحسبان تفاحة: (أ) معلقة على الشجرة. (ب) خلال سقوطها.
12. إذا تضاعفت كتلة الأرض مقارنةً بما هي عليه. فما التغيّرات التي ستطرأ على مدار القمر؟
13. ما الذي يجذب الآخر بقوّةٍ أكبر: الأرض للقمر أم القمر للأرض؟ وأيّهما يمتلك أعلى تسارع؟
14. يُعدّ جذب الشّمس للأرض أعلى من جذب القمر لها. ومع هذا فإنّ القمر هو المسؤول عن المدّ والجزر. فسر. (تنويه: افترض الفرق بين الجاذبية عند طرفي الكرة الأرضية).
15. هل يزن الجسم أكثر عند خط الاستواء أم عند قطبي الأرض؟ ما المؤثران الفاعلان؟ هل يعمل أحدهما ضد الآخر؟
16. إذا علمت أنّ قوة جاذبية الأرض للقمر تعادل نصف قوة جاذبية الشمس للقمر. فلماذا لم يتسبب ذلك بسحب القمر بعيدًا عن الأرض؟
17. هل يمكن اعتبار تسارع المريخ المركزي في مداره حول القمر أكبر من تسارع الأرض المركزي أم أصغر ؟
18. هل يتطلب الأمر سرعة أقل لإطلاق قمر صناعي: (أ) عند إطلاقه باتجاه الشرق؟ أم (ب) عند إطلاقه باتجاه الغرب؟ خذ بالحسبان اتجاه دوران الأرض.
19. يقرأ ميزان معلّق في مصعد يتحرّك إلى الأعلى وزنًا ظاهريًّا عندما يكون المصعد: (أ) يتسارع إلى الأسفل؟ أم (ب) يتسارع إلى الأعلى؟ أم (جـ) في حالة السقوط الحرّ؟ أم (د) يتحرّك إلى الأعلى بسرعة ثابتة؟ وفي أيّ حال سيكون الوزن أقلّ ما يمكن؟ أين سيظهر الميزان القراءة نفسها مقارنة بالوضع عند سطح الأرض؟
20. ما الذي يبقي القمر الاصطناعي في مداره حول الأرض؟
21. يتأثّر روّاد الفضاء الذين يقضون فتراتٍ طويلةً في الفضاء الخارجي سلبيًّا بظاهرة انعدام الوزن. وإحدى طرائق تمثيل الجاذبية هي تمثيل مركبة الفضاء على شكل قشرة أسطوانية دوّارة يسير على سطحها الداخلي روّاد الفضاء (الشّكل 5 – 23). فسّر كيف يمثّل ذلك الجاذبية الأرضية مع الأخذ بالحسبان: (أ) كيفية سقوط الأجسام. (ب) القوة التي نشعر بها على أقدامنا. (جـ) أيّ نواح أخرى للجاذبية من الممكن التفكير فيها.



الشكل 5 – 32 (السؤال 21 ومسألة 45).

22. فسّر كيف يشعر العدّاء "بالسّقوط الحرّ"، أو بانعدام وزنه الظاهري خلال خطواته.

* 23. تتحرك الأرض في شهر يناير بسرعة أعلى خلال مدارها حول الشمس مقارنةً بشهر يوليو. فهل تكون الأرض أقرب إلى الشمس خلال شهر يناير أم خلال شهر يوليو؟ وضّح ذلك.(ملحوظة: يُعدّ العامل المهم في تحديد الفصول هو ميل محور الأرض مقارنةً مع سطح مدارها).

* 24. لم تكن كتلة كوكب بلوتو معروفةً إلى أن تمّ اكتشاف قمره. فسّر كيف جعل اكتشاف القمر من تحديد كتلة بلوتو أمرًا ممكنًا؟

مسائل

5 – 1 إلى 5 – 3 الحركة الدائرية المنتظمة ومنحيات الطرق السريعة

1. (I) يتحرك طفلٌ يجلس على مسافة $1.10\ m$ من مركز طاولة العجلة الدوارة بسرعة مقدارها $1.25\ m/s$. احسب ما يلي: (أ) التسارع المركزي للطفل. (ب) محصّلة القوّة الأفقية المؤثرة في الطفل (كتلة الطفل = $25.0\ kg$).

2. (I) تحلّق طائرة نفاثة بسرعة $1890\ km/h$ $(525\ m/s)$ في مدار دائري نصف قطره $6.00\ km$. ما مقدار تسارعها بدلالة g؟

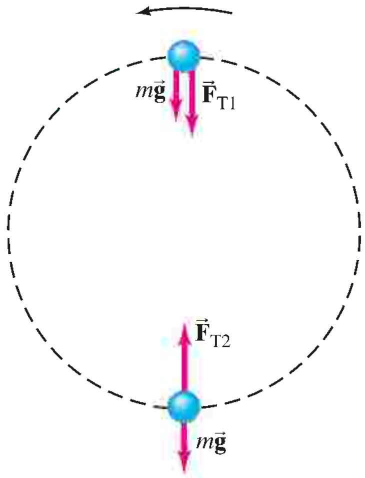
3. (I) احسب تسارع الأرض المركزي في مدارها حول الشمس ومحصّلة القوّة المؤثّرة فيها. ما الذي يؤثر بهذه القوة في الأرض. افرض أنّ مدار الأرض دائريّ ذو نصف قطر $1.50 \times 10^{11}\ m$. (تنويه : انظر الجدول داخل الغلاف الأمامي لهذا الكتاب).

4. (I) تؤثر قوة أفقية مقدارها $210\ N$ في قرص كتلته $2.0\ kg$ خلال دورانه المنتظم في دائرة أفقية نصف قطرها $0.90\ m$. احسب سرعة القرص.

5. (II) احسب التسارع المركزي لمكوك الفضاء في مداره حول الأرض إذا كان على ارتفاع $400\ km$ فوق سطح الأرض ويمسح دورة كاملة حولها كلّ 90 دقيقة. عبّر عن الإجابة بدلالة عجلة الجاذبية الأرضيّة g عند سطح الأرض.

6. (II) ما تسارع قطعة معجون صغيرة ملتصقة بطرف عجلة صانع الفخار إذا كان قطر العجلة $32\ cm$، ومعدل دورانها 45 دورة في الدقيقة؟

7. (II) تدور كرةٌ مثبتةٌ في نهاية حبل بمعدل منتظم في دائرةٍ رأسيّةٍ نصف قطرها $72.0\ cm$، كما هو مبين في (الشّكل 5 – 33). إذا كانت سرعة الكرة $4.00\ m/s$ وكتلتها $0.300\ kg$، فاحسب الشّدّ في الحبل إذا كانت الكرة عند: (أ) أعلى نقطة في مسارها. (ب) أخفض نقطة في المسار.



الشكل 5-33 (المسألة 7)

8. (II) تدور كرة كتلتها $0.45\ kg$ مثبتة بنهاية حبل في دائرة نصف قطرها $1.3\ m$ على سطح طاولة أفقي أملس. احسب أعلى سرعة تستطيع الكرة أن تصلها، إذا علمت أنّ الحبل سينقطع عندما يصبح الشّدّ فيه أعلى من $75\ N$؟

9. (II) ما أعلى سرعة تستطيع سيارة كتلتها $1050\ kg$ أن تصلها وهي لا تزال تسير على طريق أفقي دائري نصف قطره $77\ m$. علمًا بأنّ معامل الاحتكاك السكوني بين سطح الطريق وعجلات السيارة هو 0.80 ؟ وهل تعتمد السرعة على كتلة السيارة؟

10. (II) ما مقدار معامل الاحتكاك السكوني بين سطح طريق دائري أفقي وعجلات السيارة إذا كانت سرعة السيارة $95\ km/h$ ونصف قطر الطريق $85\ m$؟

11. (II) تمّ تصميم جهاز لتدريب روّاد الفضاء والطيارين الحربيين ليدور بهم في دوائر أفقية نصف قطرها $12.0\ m$. ما سرعة دوران المتدرّب إذا علمت أنّ القوّة التي يشعر بها على ظهره تعادل 7.85 ضعف وزنه؟ عبّر عن إجابتك بدلالة كلّ من: m/s و دورة/ث.

12. (II) وُضعت قطعةُ نقدٍ معدنيّة على بُعد $11.0\ cm$ من محور دوران طاولة قادرة على الدوران بسرعات مختلفة. ما مقدار معامل الاحتكاك السكوني بين سطح الطاولة وقطعة النقد، إذا علمت أنه عند ازدياد سرعة دوران الطاولة تدريجيًّا بقيت القطعة المعدنيّة ساكنةً في مكانها إلى أن وصلت سرعة الدوران إلى 36 دورة/ دقيقة لتنزلق بعدها القطعة المعدنية بعيدًا عن موضعها على الطاولة؟

13. (II) ما أقلُّ سرعةٍ يجب أن تصلها عربة أفعوانية قبل أن يقع راكبوها عنها، وهي في الوضع المقلوب عند أعلى نقطة في مسار دائري نصف قطره $7.4\ m$ كما هو موضح في (الشّكل 5 – 35)؟

الشّكل 5– 34 (المسألة 13)

14. (II) تمرّ سيارة رياضية كتلتها $950\ kg$ (بما فيها السائق) عن قمة تلّة دائرية (نصف قطرها = $95\ m$) بسرعة $22\ m/s$. احسب ما يلي: (أ) القوة العمودية التي يؤثر بها الطريق في السيارة. (ب) القوة العمودية المؤثرة في السائق (ذي الكتلة $77\ kg$) من السيارة. (جـ) سرعة السيارة عندما تؤول القوة العمودية على السائق إلى الصفر.

15. (II) ما عدد الدورات الكاملة لكلّ دقيقة التي يجب أن يدورخلالها دولاب مدينة ألعاب قطره 15-m لكي يشعر الركاب بانعدام الوزن عند أعلى نقطة؟

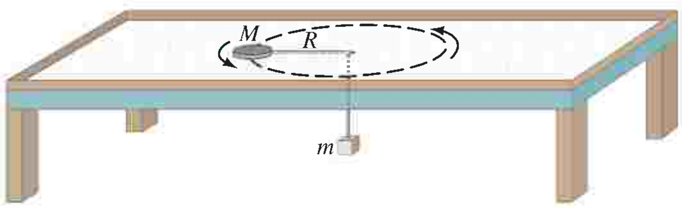
16. (II) يُلفُّ دلوٌ كتلته 2.00 kg في دائرة عمودية نصف قطرها 1.10 m. إذا كانت قيمة الشّدّ في الحبل المثبت بالدلو عند أخفض نقطة في المسار 25.0 N: (أ) أوجد سرعة الدلو. (ب) ما سرعة الدلو اللازمة لكي يبقى الحبل مشدودًا عند أعلى نقطة في المسار الدائري؟

17. (II) ما مقدار السرعة اللازم لجهاز الطرد المركزي لكي يشعر جسم داخل الجهاز على بعد 9.00 cm من محور دورانه بتسارع قدره 115,000 g؟

18. (II) تلفُّ الغرفة الأسطوانية الدوّارة في مدينة الملاهي بالركاب لتصل إلى تردد 0.50 دورة/ث كما في (الشكل 5 – 35). فإذا تمّ سحب أرض الغرفة التي نصف قطرها 4.6 m عند ذلك التردد، فما أقلّ قيمة لمعامل الاحتكاك السكوني الذي يضمن عدم سقوط الرّكاب إلى الأسفل؟ وهل هناك قوة فعلية تضغط على الركاب باتجاه جدران الغرفة لتمنعهم من السقوط كما يدّعون؟ وإذا كان الجواب لا، فما هو إذن الوصف الدقيق لوضع الركاب إضافة إلى خوفهم؟ (تنويه: ارسم مخططًا حرًّا لشخص ما داخل الغرفة).

الشّكل 5 – 35 (المسألة 18).

19. (II) أثبت أنّ سرعة القرص الصلب المطاطي المستخدم في لعبة الهوكي الذي يتحرك في دائرة على سطح طاولة الهوكي الأملس هي $v = \sqrt{\frac{mgR}{M}}$ حيث M كتلة القرص، و m الكتلة المعلقة المثبّتة بطرف الحبل أو المسبب لسرعة القرص على سطح الطاولة، كما هو مبين في (الشّكل 5 – 36).



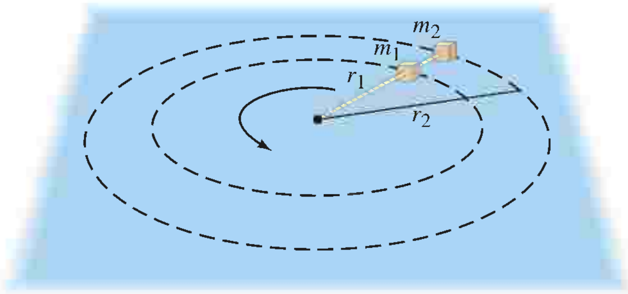
الشّكل 5–36 (المسألة 19).

20. (II) أعِدْ حلّ (المثال 5 – 3) بدقة تامة دون إهمال وزن الكرة الدوارة حول الحبل الذي طوله 0.600 m. ثمّ أوجد قيمة $\vec{F}_T$ والزاوية التي تصنعها مع الأفقي بدقة. وماذا تستطيع أن تستنتج عن المركبة العمودية لـ $\vec{F}_T$ باعتبار أنّ المركبة الأفقية لـ $\vec{F}_T$ تساوي ma_R وأنه لا توجد أيّ حركة عمودية؟

21. (III) ما مقدار معامل الاحتكاك السكوني اللازم لمنع سيارة تسير بسرعة 95 km/h من الانزلاق على طريق دائري مائل نصف قطره 88 m تم تصميمه ليتلاءم مع سرعة قدرها 75 km/h تحديدًا؟

22. تدور سيارة كتلتها 1200-kg حول منعطف نصف قطره 67 m ويميل بزاوية 12° عن الأفقي. هل هناك ضرورة لوجود الاحتكاك إذا كانت سرعة السيارة تصل إلى 95 km/h؟ وإذا كان الحل نعم، فما مقدار قوة الاحتكاك واتجاهها؟

23. (III) ترتبط كتلتان m_1 و m_2 ببعضهما بعضًا، وكذلك بوتد مركزي بوساطة الحبال كما هو مبين في (الشكل 5 – 37). اشتق علاقة رياضية تمثّل الشدّ في كلّ جزء من الحبال عندما تدور كلٌّ من الكتلتين بتردد f (دورة لكلّ ثانية) على سطح أفقي أملس وعلى بعد r_1 و r_2 من الوتد على الترتيب.



الشّكل 5 – 37 (المسألة 23).

24. يعمل طيّارٌ مناورةً للهروب فيهبط بطائرته عموديًّا إلى الأسفل بسرعة 310 m/s. فإذا كان الطيّار يتحمّل تسارعًا قدره 9.0 g's أضعاف تسارع الجاذبية الأرضية دون أن يُغمى عليه، فما مقدار الارتفاع الذي يجب أن يبدأ عنده بالخروج من المناورة كي لا يصطدم بالماء؟

* 5 – 4 الحركة الدائرية غير المنتظمة

* **25.** (I) حدّد مركبتي محصلة القوة (المماسة والمركزية) المؤثرة بوساطة الأرض في السيارة في (المثال 5 – 8). افرض أنّ كتلة السيارة 1100 kg وسرعتها 15 m/s.

* **26.** (II) تتسارع سيارة من السكون إلى سرعة 320 km/s خلال منعطف شبه دائري نصف قطره 220 m. حدّد المركبتين المماسة والمركزية لتسارع السيارة في منتصف المنعطف عند ثبات المركبة المماسة. وما مقدار معامل الاحتكاك السكوني بين عجلات السيارة وسطح الطريق الذي سيمنع السيارة من الانزلاق عند حركتها بالتسارع نفسه على المنحنى لو كان أفقيًّا تمامًا.

* **27.** (III) يدور جسمٌ في دائرة أفقية نصف قطرها 2.90 m. ويصل تسارع الجسم عند لحظة ما إلى $1.05\ m/s^2$ عندما يكون مشيرًا باتجاه يصنع زاوية مقدارها 32.0° مع اتجاه الحركة. حدّد سرعة الجسم: (أ) عند تلك اللحظة. (ب) بعد 2.00 s وعند ثبات التسارع المماس.

5 – 6 و 5 – 7 قانون الجذب الكونيّ

28. (I) احسب قوّة جذب الأرض لمركبة فضاء كتلتها 1350 kg تقع على بعد 12,800 km (يكافئ قطر الأرض) فوق سطح الأرض.

29. (I) يعادل تسارع الجاذبية على سطح كوكب ما $12.0\ m/s^2$. فإذا تمّ نقل كرة نحاسية كتلتها 21.0-kg إلى سطح هذا الكوكب، فاحسب: (أ) كتلة الكرة على كلّ من الأرض والكوكب. (ب) وزن الكرة على كلّ من الأرض والكوكب.

30. (II) احسب تسارع الجاذبية على سطح القمر إذا علمت أنّ كتلة القمر 7.35×10^{22} kg ونصف قطره 1.74×10^6 m.

31. (II) ما تسارع الجاذبية بالقرب من سطح كوكب افتراضي نصف قطره 1.5 ضعف نصف قطر الأرض، وله كتلة الأرض نفسها ؟

32. (II) ما قيمة g قرب سطح كوكب افتراضي كتلته تعادل 1.66 ضعف كتلة الأرض، وله نصف قطرالأرض نفسه ؟

33. (II) إذا تجاذب جسمان بقوة مقدارها 2.5×10^{-10} N عندما تكون المسافة بينهما 0.25 m، فأوجد كتلة كلٍّ منهما إذا كان مجموع كتلتيهما 4.0 kg.

34. (II) احسب مقدار g الفاعل (تسارع الجاذبية) عند: (أ) 3200 m. (ب) 3200 km فوق سطح الأرض.

35. (II) ما مقدار المسافة الفاصلة بين مركز الأرض ونقطة خارج الأرض تكون عندها الجاذبية الناتجة من الأرض $\frac{1}{10}$ قيمتها عند سطح الأرض؟

36. (II) احسب تسارع الجاذبية عند سطح نجم نيوتروني كتلته 5 أضعاف كتلة شمسنا، وشكله كروي نصف قطره حوالي 10 km.

37. (II) ما تسارع الجاذبية على سطح نجم أبيض يكاد يكتمل تطوره إذا كان حجمه الحالي صغيرًا كحجم قمرنا، وكتلته كبيرة تعادل كتلة شمسنا، علما بأنّ حجمه كان في يوم ما كحجم شمسنا؟

38. (II) وأنت تحاول تفسير ظاهرة انعدام الوزن الذي يشعر به روّاد الفضاء عندما يكون مكوك الفضاء في مداره، علّق بعض أصدقائك بأنّ الجاذبية تصبح ضعيفة جدّا عند ذلك الارتفاع. حاول اقناع نفسك وأصدقائك بأنّ الأمر مختلف تمامًا، وذلك عن طريق حساب تسارع الجاذبية الأرضية بدلالة g عند ارتفاع 250 km فوق سطح الأرض.

39. (II) تقع أربع كرات كتلة كلّ منها 9.5-kg على زوايا مربع طول ضلعه 0.60 m. احسب مقدار قوة التجاذب الكليّة واتجاهها لكلّ كرة من الكرات الثلاث الأخرى.

40. (II) تصطف معظم الكواكب في خطٍّ واحدٍ على جانبٍ واحدٍ من الشمس مرّةً واحدةً، على الأقل كلّ حوالي عدة مئات من السنوات. احسب محصلة القوى الكلية المؤثرة في كوكب الأرض من كلّ من الزهرة والمشتري وزحل، عندما تكون الكواكب الأربعة مصطفة في خطّ واحد، كما في (الشكل 5 – 38). افرض أنّ كتلة كلّ منها كما يلي: كتلة الزهرة = 0.815 كتلة الأرض، وكتلة المشتري = 318 كتلة الأرض، و كتلة زحل = 95.1 كتلة الأرض. ومتوسط المسافات التي تفصلها عن الشمس هي: 108، و 150، و 778، و 1430 مليون km بالترتيب. ما مقدار هذه القوة بالنسبة إلى قوة الشمس على الأرض؟

الشكل 5 – 38 (المسألة 40). (لا يعكس الشكل الأبعاد الحقيقية)

41. (II). إذا علمت أن تسارع الجاذبية بجوار سطح كوكب المريخ 0.38 من تسارع الجاذبية عند سطح الأرض، فحدّد كتلة كوكب المريخ، علمًا بأن نصف قطره 3400 km.

42. (II). حدّد كتلة الشمس بدلالة زمن الدورة الواحدة للأرض حول الشمس وبعد الأرض عن الشمس. (ملحوظة: قارن إجابتك بتلك الناتجة من استخدام قوانين كبلر، كما في المثال 5 – 16).

5 – 8 الأقمار الصناعية وانعدام الوزن

43. (I). احسب سرعة قمر صناعي يتحرك في مدار دائري حول الأرض على ارتفاع 3600 km.

44. (I). ما السرعة اللازمة لمكوك الفضاء (بالنسبة إلى الأرض) كي يستطيع أن يطلق قمرًا صناعيًّا قادرًا على البقاء في مدار دائري على بعد 650 km من سطح الأرض؟

45. (II). ما معدّل الدوران المطلوب لمركبةِ فضاءٍ أسطوانيّة الشّكل كي يشعر من بداخلها بتسارع جاذبية يعادل 0.6 g؟ افرض أنّ قطر مركبة الفضاء 32 m، واعط إجابتك بدلالة الزمن اللازم لدورة واحدة كاملة. (انظر السؤال 12، الشكل 5 – 23).

46. (II). حدّد الزمن اللازم لقمر صناعي كي يدور حول الأرض في مدار دائري قريب من سطح الأرض. يُعرف القرب من سطح الأرض على أنه ارتفاع ضئيل مقارنةً مع نصف قطرها. وهل تعتقد أنّ الإجابة النهائية ستعتمد على كتلة القمر الصناعي؟

47. (II). ما مقدار السرعة الأفقية اللازمة لإطلاق قمر صناعي من سطح قمة جبل إيفريست ليستقر في مدار دائري حول الأرض؟

48. (II) لقد بقيت مركبة القيادة تدور حول القمر خلال مهمّة النزول على سطح القمر عند ارتفاع يقارب 100 km. ما الزمن اللازم للدوران حول القمر دورة واحدة كاملة؟

49. (II). تتكون حلقات كوكب زحل من كتل ثلجية تدور حوله ، ويبلغ طول نصف قطر الحلقة الداخلي 73,000 km، في حين يتراوح طول نصف قطر الحلقة الخارجي حوالي 170,000 km. أوجد زمن الدورة الواحدة لقطعة من هذه الكتل الثلجية عند نصف قطرها الداخلي، وكذلك عند نصف قطرها الخارجي، ثمّ قارن هذين الزمنين مع متوسط زمن الدورة الواحدة لكوكب زحل الذي يعادل 10 ساعات و 39 دقيقة. افرض أنّ كتلة كوكب زحل 5.7×10^{26} kg.

50. (II). إذا مسح دولاب ألعاب قطره 24.0 m دورة كاملة خلال 15.5 s (الشّكل 5 – 9)، فما نسبة الوزن الظاهري لشخص ما مقارنة مع وزنه الحقيقي عندما يجلس عند: (أ) قمة الدولاب. (ب) أسفل الدولاب.

51. (II). ما الوزن الظاهري لرائد فضاء كتلته 75-kg عندما يجلس في عربة الفضاءعلى بعد 4200 km من مركز قمرنا عندما: (أ) تسير العربة بسرعة ثابتة؟ (ب) تتسارع العربة باتجاه القمر بمعدل $2.9\ m/s^2$؟ حدّد الاتجاه في كلّ حالة.

52. (II). افرض أنّ هناك نظامًا زوجيًّا نجميًّا يتكون من نجمين متساويين بالكتلة، ويبتعدان عن بعضهما بعضًا مسافة 360 مليون km. احسب مقدار كتلة كلٍّ منهما إذا علمت أنهما يحتاجان إلى فترة 5.7 سنة من سنوات الأرض للدوران حول نقطة في منتصف المسافة بينهما؟

53. (II). ما قراءة الميزان الزنبركي داخل مصعد إذا وقفت فوقه امرأة كتلتها 55-kg وهو يتحرك: (أ) صاعدًا بسرعة ثابتة مقدارها 6.0 m/s؟ (ب) هابطًا بسرعة ثابتة مقدارها 6.0 m/s؟ (جـ) صاعدًا بتسارع مقداره 0.33 g؟ (د) هابطًا بتسارع قدره 0.33 g؟ (هـ) خلال سقوط حرّ؟

54. (II). يتعلق شمبانزي كتلته 17.0-kg بحبل معلّق في سقف مصعد بحيث يتحمّل الحبل قوّة شدٍّ عظمى مقدارها 220 N. ما أقل قيمة ممكنة لتسارع المصعد مقدارًا واتجاهًا التي سينقطع عندها الحبل؟

55. (II). (أ) اثبت أنّ قيمة كثافة كوكب (كتلته / حجمه) هي: $\rho = m/V = 3\pi/GT^2$ وهي مُعَرَّفة بدلالة القمر الصناعي الذي يدور حوله، وقريبًا من سطحه بزمن دوري قدره T. (ب) قدّر كثافة كوكبنا (الأرض) إذا علمت أنّ الزمن الدوري لقمر صناعي يدور حولها قريبا من سطحها حوالي 85 دقيقة.

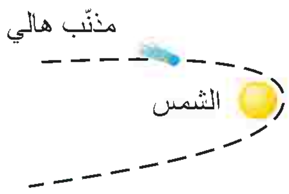
* 5 – 9 قوانين كبلر

* 56. (I). استخدم قوانين كبلر وزمن القمر الدوري (27.4 d) لتحديد الزمن الدوري لقمر صناعي يدور قريبًا جدّا من سطح الأرض.

* 57. (I) ما متوسط بعد الجرم السماوي آيكاروس عن الشمس، الذي يدور حولها بزمن دوري قدره 410 أيام، علمًا بأنّ طوله لا يتعدّى عدّة مئاتٍ من الأمتار.

* **58.** متوسط بُعد كوكب نبتون عن الشمس 4.5×10^9 km. قدّر طول السنة النبتونية إذا علمت أنّ متوسط بُعد الأرض عن الشمس 1.50×10^8 km.

* **59.** (II) يحتاج مُذَنَّبُ هالي إلى 76 يومًا للدوران حول الشمس دورة كاملة، وهو يقترب كثيرًا من سطح الشمس لفترةٍ خلال مساره (الشكل 5 – 39). قدّر طول أبعد مسافة للمذنّب عن الشمس.



الشّكل 5 – 39 (المسألة 59).

* **60.** (II). تدور شمسنا حول مركز مجرتنا ($M_G \approx 4 \times 10^{41}$ kg) على بعد حوالي 3×10^4 سنة ضوئية ($1\ \text{ly} = 3 \times 10^8\ \text{m/s} \times 3.16 \times 10^7\ \text{s/y} \times 1\ \text{y}$). ما الزمن الدوري الناتج من حركة دوراننا حول مركز المجرة؟

* **61.** (II) يبين (الجدول 5 – 3) الكتل، والزمن الدوري، ومتوسط المسافة لأكبر أربعة أقمار تابعة لكوكب المشتري، والتي اكتشفها جاليليو سنة 1609. (أ) حدّد كتلة المشتري باستخدام بيانات القمر "أيو". (ب) حدّد كتلة كوكب المشتري باستخدام بيانات الأقمار الثلاثة الأخرى. وهل البيانات متوافقة؟

الجدول 5 – 3 أقمار المشتري الرّئيسة

القمر	الكتلة (kg)	الزّمن الدوريّ (أيام الأرض)	متوسط المسافة من المشتري (km)
أيو	8.9×10^{22}	1.77	422×10^3
أوروبا	4.9×10^{22}	3.55	671×10^3
جانيميد	15×10^{22}	7.16	1070×10^3
كالستو	11×10^{22}	16.7	1883×10^3

* **62.** (I) حدّد كتلة الأرض من الزمن الدوري والمسافة المعروفين للقمر.

* **63.** (II). حدّد متوسط بُعد كوكب المشتري عن كلّ من أقماره باستخدام قانون كبلر الثالث. استخدم بُعد القمر "أيو" والأزمان الدورية المبينة في (الجدول 5 – 3). وقارن النتائج مع القيم في الجدول.

* **64.** (II). يتكون حزام الأجرام السماوية بين كوكبي المريخ والمشتري من عدد كبير من الشظايا، والذي يعتقد بعض علماء الفضاء أنها كانت جزءًا من كوكب كان يدور حول الشمس قبل أن يُدمّر. (أ) إذا كان مركز ثقل حزام الأجرام (حيث يُفترض موضع الكوكب قبل دماره) يبتعد عن الشمس ثلاثة أضعاف بُعد الأرض عنها، فما الزمن الدوري لهذا الكوكب الافتراضي؟ (ب) استخدم هذه البيانات لاستنتاج كتلة هذا الكوكب؟

* **65.** (III). تصف قصّةٌ مبنيّةٌ على الخيال العلمي "كوكبًا" صناعيًا على شكل حزمة تطوق الشمس تمامًا، ويعيش سكان هذا الكوكب على سطحه الداخلي حيث يكون الوقت ظهرًا طوال الوقت (الشكل 5 – 40). لو افترضنا أنّ هذه الشمس مثل شمسنا، وأنّ المسافة بينها وبين الحزمة كالمسافة بين أرضنا وشمسنا (لكي يكون الطقس معتدلًا)، وأنّ الحلقة تدور بسرعة كافية لتوليد جاذبية g كتلك التي على أرضنا، فما هو إذن الزمن الدوري أو سنة هذا الكوكب بدلالة الأيام على الأرض؟

الشّكل 5 – 40 (المسألة 65).

مسائل عامة.

66. يخطّط طرزان لعبور فلج عن طريق التأرجح على شكل قوس باستخدام ساق شجرة معلقة (الشّكل 5 – 14). إذا كانت ذراعاه قادرتين على بذل قوة مقدارها 1400 N على ساق الشجرة، فما السرعة العظمى التي يستطيع أن يتحملها طرزان عند أخفض نقطة خلال تأرجحه؟ افرض أنّ كتلة طرزان 80 kg وطول ساق الشجرة 5.5 m.

الشّكل 5 – 41 (المسألة 66).

67. عند أيّ ارتفاع فوق سطح الأرض يكون تسارع الجاذبية مساويًا لنصف قيمته عند سطح الأرض؟

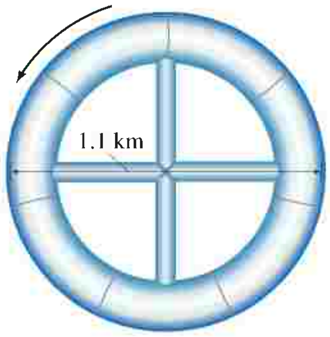
68. تمسك متزلجتان على الجليد بأيدي بعضهما بعضًا داخل قاعة التزلّج وتبدآن بمسح دائرة مشتركة بزمن دوري قدره 2.5 s. ما شدّة جذبهما لبعضهما بعضًا، علمًا بأنّ طول ذراع كلٍّ منهما 0.80 m وكتلة كلٍّ منهما 60.0 kg؟

69. سيقلّ تسارع الجاذبية الظاهري عند خط الاستواء قليلًا عن القيمة الافتراضية لو أنّ الأرض ثابتةً لا تدور، علمًا بأنّ الأرض تنهي دورة كاملة كلّ يوم. اعطِ قيمةً تقديريّةً للتسارع الظاهري بدلالة g.

70. ما المسافة التي تبعدها سفينة فضاء عن الأرض خلال سفرها مباشرةً من الأرض إلى القمر، والتي تصبح عندها محصّلة القوى على السفينة صفرًا نتيجة لتساوي قوّة جذب كلٍّ من الأرض والقمر للسفينة؟

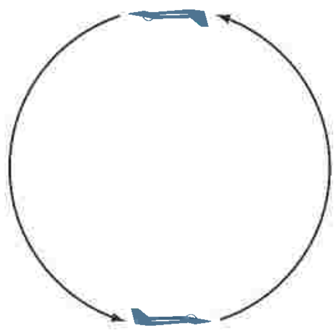
71. إذا كنت مُتيقّنًا من أنّ كتلتك 65 kg، ومع هذا فإنّ قراءة الميزان في المصعد تشير إلى 82 kg، فما تسارع المصعد؟ وفي أيّ اتجاه؟

72. تتكوّن محطّة فضاءٍ مُفترضة من أنبوب دائري قادر على الدوران حول محوره المركزي (مثل عجل الدراجة) (الشكل 5 – 42) . إذا كان نصف قطر الأنبوب الدائري حوالي 1.1 km، فما سرعة الدوران الضرورية (دورة لكلّ يوم) اللازمة لتوليد تسارع جاذبية عند السطح يعادل 1.0 g؟



الشّكل 5 – 42
(المسألة 72)

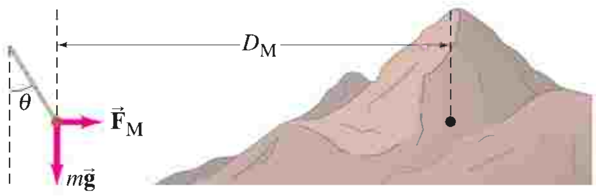
73. يقود طيّار طائرة نفاثة في دائرة عمودية (الشّكل 5 – 43): (أ) حدّد أصغر نصف قطر دائرة إذا كانت سرعة النفاثة 1300 km/h، شرط ألا يتجاوز تسارعها المركزي 6.0 g عند أخفض نقطة في المسار. واحسب الوزن الفاعل للطيار ذي الكتلة 78-kg (القوة العمودية إلى الأعلى على الطيار في مقعده عند: (ب) اخفض نقطة في المسار. (جـ) أعلى نقطة في المسار (افترض السرعة نفسها).



الشّكل 5 – 43
(المسألة 73)

74. أوجد معادلةً لكتلة كوكب بدلالة نصف قطره وتسارع الجاذبية عند سطحه g_P وثابت الجذب الكوني G.

75. تميل كتلة m معلقة بحبل عن الرأسي بزاوية θ نتيجة لوجودها بقرب جبل شاهق (الشكل 5 – 44). (أ) أوجد معادلة تقريبية للزاوية θ بدلالة كلٍّ من كتلة الجبل m_M، والمسافة إلى مركزه D_M، ونصف قطر الأرض وكتلتها. (ب) اعط قيمةً تقريبية لكتلة جبل إيفريست، مفترضًا أنّ شكله مخروطي، ويرتفع 4000 m بقطر يقارب 4000 m. افرض أنّ كتلة وحدة الحجوم $3000\ kg/m^3$. (جـ) قدّر قيمة الزاوية θ إذا كانت الكتلة تبعد مسافة 5 km عن مركز جبل إيفريست.



الشّكل 5 – 44 (المسألة 75).

76. صمّم منعطفًا مائلًا نصف قطره 67 m يسمح بسرعة قصوى مقدارها 95 km/h. ما السرعات التي يمكن لسيارة أن تختبرها بأمان وهي تدخل هذا المنعطف، علمًا بأنّ معامل الاحتكاك السكوني 0.30؟

77. كيف سيصبح طول اليوم إذا كانت سرعة دوران الأرض تجعل الأجسام عند خط الاستواء عديمة الوزن؟

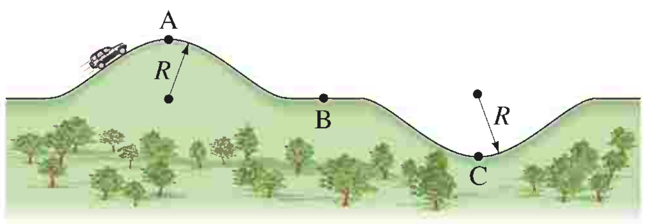
78. يحافظ نجمان متساويان بالكتلة على المسافة الفاصلة بينهما ثابتة عند 8.0×10^{10} m، ويدوران حول نقطة تقع في منتصف المسافة بينهما بمعدّل دورةٍ واحدة كلّ 12.6 سنة. (أ) لماذا لا يصطدم النجمان ببعضهما نتيجة قوة التجاذب بينهما؟ (ب) ما كتلة كلّ منهما؟

79. ما سرعة القطار الثابتة التي عبر فيها منعطفًا نصف قطره 235 m إذا علمت أنّ المصباح المعلّق في القطار مال بزاوية 17.5° طوال فترة العبور؟

80. تبلغ كتلة المشتري 320 ضعف كتلة الأرض، ويُقال بناءً على ذلك بأنّ أيّ شخص يقف فوق ذلك الكوكب سيسحق، ولن يتحمل قوة جاذبية المشتري. احسب مقدار هذه الجاذبية فوق سطح المشتري وعند خط استوائه، ثمّ قارن النتيجة مع g. استخدم البيانات التالية الخاصة بكوكب المشتري: الكتلة = 1.9×10^{27} kg، ونصف القطر عند خط الاستواء= 7.1×10^4 km، والزمن الدوري = 9 ساعات و 55 دقيقة. ملحوظة: لا تهمل التسارع المركزي.

81. استنتج علماء الفلك عند استخدامهم مرصد "هبل" الفضائي وجود لبّ ثقيل جدّا في المجرة البعيدة M87 وكثيف لدرجة أنه من الممكن أن يكون ثقبًا أسود؛ حيث لن يستطيع أيّ ضوء الهروب منه. وكان هذا الاستنتاج مبنيًّا على قياسهم لسرعة سحب الغاز التي تلفُّ حول اللبّ بسرعة 780 km/s وعلى بعد 60 سنة ضوئية(5.7×10^{17} m) من اللب. استنتج كتلة اللب، وقارن النتيجة مع كتلة شمسنا.

82. تحافظ سيارة على سرعتها الثابتة v وهي تقطع الطريق، كما هو في (الشّكل 5 – 45). فإذا كان نصف قطر كلّ من التلة والوادي هو R: (أ) قارن بين القوة العمودية عند كلّ من النقاط أ، و ب، و ج من حيث الأكبر والأصغر، وضّح إجابتك. (ب) عند أيّ موضع سيشعر السائق بأعلى وزن ظاهريّ؟ وعند أيّ موضع سيشعر بأقلّ وزن ظاهريّ؟ وضّح إجابتك. (جـ) ما أعلى سرعة يستطيع السائق الوصول إليها عند النقطة أ قبل أن ترتفع عجلات سيارته عن سطح الطريق؟



الشّكل 5 – 45 (المسألة 85).

83. يستخدم نظام تحديد المواقع العالمي (نافستار) مجموعة من 24 قمرًا صناعيًّا تدور حول الأرض، ويمكن تحديد موقع جهاز الاستقبال على الأرض بدقة متناهية تصل إلى عدة سنتيمترات باستخدام "نظام التثليث" والإشارات المرسلة من الأقمار الصناعية. ولقد تم توزيع الأقمار الصناعية على نحو متساوٍ حول الأرض ليكون هناك أربعة أقمار في كلّ مدار من المدارات الستة كي يسمح هذا التوزيع بالتعديلات الملاحية المستمرة. وتدور الأقمار على ارتفاعات تقارب 11,000 ميل بحري (الميل البحري = 1.852 km = 6076 قدم). (أ) حدّد سرعة كلّ من الأقمار الصناعية. (ب) حدّد الزمن الدوري لكلّ قمر صناعيّ.

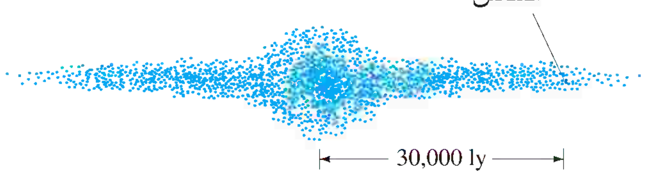
84. بدأ الجرم السّماوي "رينديزفوس" بالدوران حول الجرم السّماوي "إروس" على ارتفاع 15 km بعد أن قطع مسافة 2.1 مليار km. علمًا بأنّ أبعاد "إروس" هي $40\ \text{km} \times 6\ \text{km} \times 6\ \text{km}$، وكثافته (كتلة/حجم) تقارب $2.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. (أ) ما زمن "رينديزفوس" الدوري نسبةً إلى "إروس"؟ (ب) ما نصف قطر "إروس" إذا كان شكله كرويًّا، وله الأبعاد والكثافة نفسها كما ورد أعلاه؟ (جـ) ما قيمة g على سطح "إروس" الكروي؟

85. يجلس رائد الفضاء في مكوك الفضاء منتظرًا الوقت المناسب ليبدأ بإصلاح قمر صناعي. فإذا كان المكوك يدور في مدار القمر الصناعي نفسه (400 km فوق الأرض) ومتأخرًا عنه مسافة 25 km. فما: (أ) الفترة الزمنية اللازمة لوصول المكوك إلى موضع القمر إذا خطط رائد الفضاء إلى إنقاص نصف قطر مدار المكوك بمقدار 1.0 km؟ (ب) مقدار التغير في نصف قطر مدار المكوك إذا خطط رائد الفضاء أن يصل إلى القمر بعد 7 ساعات فقط؟

* 86. إذا كان الزمن الدوري لمذنب هالي – بوب 3000 سنة فما: (أ) متوسط بعده عن الشمس؟ (ب) أقرب موضع لطرف المذنب البعيد عن الشمس بدلالة "AU" (علمًا بأنّ 1AU متوسطُ المسافة بين الأرض والشمس)؟ (جـ) قيمة السرعة عند أبعد نقطة؟ (تنويه: استخدم قانون كبلر الثاني وقدّر المساحات باستخدام مثلث (كما في الشكل 5 – 29 وانظر أيضا إلى مسألة 59).

87. قدّر قيمة G الضرورية لكي تشعر بالانجذاب إلى شخص آخر يجلس بجوارك. استخدم فرضيات منطقية، مثل: $F \approx 1\ \text{N}$.

* 88. تدور الشمس حول مركز مجرة درب التبانة (الشّكل 5 – 46) على بعد 30،000 سنة ضوئية من المركز (السنة الضوئية = 9.5×10^{15} m). احسب كتلة مجرتنا إذا استغرق زمن الدورة الواحدة 200 مليون سنة. افرض أنّ توزيع كتلة المجرة يتركز على هيئة كرة مركزية منتظمة على الأغلب. يبلغ عدد النجوم في مجرتنا إذا كانت النجوم جميعها لها كتلة شمسنا نفسها (2×10^{30} kg) تقريبا؟



الشّكل 5 – 46 (المسألة 88). منظر جانبي لمجرتنا.

89. أوجد مقدار قوّة الجذب واتّجاهها على كتلة مقدارها 1.0-kg وضعت في منتصف الضلع السفلي لمربع طول ضلعه 0.50 m، وترتكز كتلة مقدارها 1.0-kg على كلّ زاوية من زواياه الأربع.

90. يدور قمر صناعي كتلته 5500 kg حول الأرض (كتلة الأرض = 6.0×10^{24} kg) وزمنه الدوري 6200 s. أوجد كلّا من: (أ) قيمة قوة جذب الأرض للقمر الصناعي. (ب) ارتفاع القمر.

91. ما التسارع الذي يشعر به رأس عقرب الثواني الذي طوله 1.5-cm في ساعة اليد؟

92. إذا حركت ثقل حبل الصيد الغاطس لتمسح دوائر في الماء لشعورك ببعض الملل وأنت تصطاد السمك، وإذا كان طول الحبل هو 0.25-m والزمن الدوري 0.50 s، فما الزاوية التي يصنعها حبل الصيد مع الرأسي؟ (تنويه: انظر إلى الشّكل 5 – 10).

93. لقد تم تصميم منعطف دائريّ نصف قطره R على طريق سريع جديد بحيث تستطيع السيارة أن تعبره كاملا بسرعة v_0 بأمان على سطح مغطى بالثلج. وعليه، فإذا تحركت السيارة ببطء شديد، فإنها ستنزلق باتّجاه مركز الدائرة. وإذا كانت مسرعة جدّا، فستقذف في الاتّجاه الآخر خارج مركز الدائرة. وإذا ازدادت قيمة معامل الاحتكاك السكوني فستبقى السيارة تتحرك على الطريق طالما ظلت سرعتها محصورة بين قيمة دنيا للسرعة v_{max}، وقيمة عليا v_{max}. اشتق معادلات لكلّ من: v_{max}، و v_{max} بدلالة كلّ من: μ_s و v_0، و R.

94. يستخدم القطار السريع "آمتراك – أسيلا" طريقة ميل العربات خلال انعطافه، ويتم تعديل زاوية الميل بحيث تصبح القوة الرأسية هي القوة الرئيسة المؤثرة في الركاب التي توفر القوة المركزية. ويشعر الركاب بالراحة أكثر نتيجة لذلك عندما تتناقص قوة احتكاكهم مع المقاعد. افرض أنّ هذا القطار سيسير في منعطف نصف قطره 620 m بسرعة 160 km/h (100 mi/h). احسب كلّا من: (أ) قوة الاحتكاك الضرورية لراكب كتلته 75 kg عندما لا تكون السكة مائلة ويكون القطار مستويا. (ب) مقدار قوة الاحتكاك على الراكب إذا مال القطار إلى أقصى درجة ممكنة $8.0°$ باتّجاه مركز المنعطف.

إجابات التمارين

أ: المعامل 2 (يتضاعف).
ب: لا تعتمد السرعة على كتلة الملابس.
جـ: (أ).
د: لا.
هـ: نعم.
و: (أ) لا يحدث أيّ تغيير. (ب) أربع مرات أكبر.
ز: (ب).