## الفصل الرابع

# الترابط والمسارات (Connectivity and Paths)

## 1.4 القطع والترابط (Cuts and Connectivity)

يعدُّ تعطيل شبكة اتصالات جيدة أمرًا صعبًا. لذا، يُفضَّلُ إيجاد بيان (بيان موجه) يمثِّل النقل أو الإرسال بحيث يبقى هذا البيان (البيان الموجه) مترابطًا حتى في حال فشل (تعطيل) بعض الأضلاع أو الرؤوس. فمثلاً، عندما تكون أدوات الوصل أو الربط للاتصالات مكلفة جدًّا، فإننا نرغب بتحقيق هذه الأهداف بعدد أقل من الأضلاع. وفي هذه الحالة، تكون النشُط غير ذات صلة بعملية الربط، ومن هنا، سنفترض في هذا الفصل أن بياناتنا وبياناتنا الموجهة خالية من النشُط، وخصوصًا عندما نتعامل مع شروط على الدرجات.

## الترابط (Connectivity)

ما عدد الرؤوس التي يجب حذفها من بيان معين لكي يصبح بيانًا غير مترابط؟

**1.1.4 تعريف:** تعرف المجموعة الفاصلة أو قاطعة الرؤوس على أنها مجموعة جزئية $S$ من $S \subseteq V(G)$، حيث تحوي $G - S$ أكثر من مركبة. ونعرف درجة (مقياس) ترابط $G$ الذي نرمز إليه بالرمز $\kappa(G)$ على أنه حجم أصغر مجموعة $S$ من الرؤوس، بحيث يصبح $G\text{-}S$ غير مترابط، أو أن له رأسًا واحدًا فقط. ونقول: إن البيان مترابط من الدرجة $k$ إذا كان $k(G) \geq k$.

لاحظ أنه إذا كان $G$ بيانًا مختلفًا عن البيان التام، فإن درجة ترابط $G$ تساوي $k$ إذا وفقط إذا كان حجم أي مجموعة فاصلة لهذا البيان يساوي $k$ على الأقل. وعندما نقول مترابط من الدرجة $k$، فإننا نعدّ ذلك شرطًا بنيويًّا (بنائيًّا)، ولكن عندما نقول: إن درجة الترابط تساوي $k$، فهذا يعني حلًّا لمسألة الأمثلية.

**2.1.4 مثال:** ترابط $K_n$ و $K_{m,n}$. بما أنه لا توجد مجموعة فاصلة للعصبة (Clique)، فإننا سنحتاج إلى استخدام مصطلح يمثل ترابطها. وهذا يفسر التعبير "أوله رأس واحد فقط" في التعريف. 1.1.4 لاحظ أن $\kappa(K_n)=n\text{-}1$، في حين $\kappa(G) \leq n(G)\text{ -}2$ عندما لا يكون $G$ بيانًا تامًّا، واستنادًا إلى هذا الاصطلاح، نجد أن النتائج العامة المتعلقة بالترابط تبقى صحيحة على البيانات التامة.

افترض التجزئة $X$ و $Y$ لبيان $K_{m,n}$، لاحظ أنّ كل بيان جزئي يكون مترابطًا إذا كان له رأس في $X$ ورأس آخر في $Y$. لذا، فإن كل مجموعة فاصلة للبيان $k_{m,n}$ تحوي $X$ أو $Y$. بما أن $X$ و $Y$ مجموعتان فاصلتان (أو تُبقي رأسًا واحدًا فقط)، فنجد أن $k(K_{m,n}) = min\ \{m,n\}$. لاحظ أن مقياس ترابط $K_{3,3}$ هو $k(K_{3,3}) = 3$. لذا، فإن $K_{3,3}$ مترابط من الدرجات: 1، 2، و3، ولكنه غير مترابط من الدرجة 4. ■

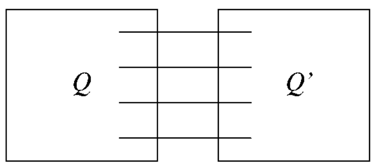
إذا كان $G$ بيانًا له أكثر من رأسين، فإن $k(G)=1$ إذا وفقط إذا كان $G$ مترابطًا، وله رأس فاصل (رأس قطع) ويساوي مقياس ترابط البيان صفرًا إذا وفقط إذا كان غير مترابط. لاحظ أن البيانَ $K_1$ الذي له رأس واحد مترابطٌ. ومن أجل انسجام النقاش لدرجة الترابط، فإننا نضع $k(K_1) = 0$.

**3.1.4. مثال:** المكعب الزائدي $Q_k$. إذا كانت $k \geq 2$، فإن مجموعة جيران أي رأس من رؤوس $Q_k$ تمثل مجموعة فاصلة. لذا، فإن $\kappa\ (Q_k) \leq k$. ولإثبات أن $\kappa\ (Q_k) = k$؛ سنثبت أن حجم كل مجموعة فاصلة لأي رأس عن البيان يساوي $k$ على الأقل عن طريق الاستقراء على $k$.

الخطوة الأساس: $k \in \{0.1\}$، إذا كانت $k \leq 1$، فإن $Q_k$ يمثل بيانًا تامًّا له $k+1$ من الرؤوس ومقياس ترابطه يساوي $k$.

خطوة الاستقراء: $k \geq 2$، من فرضية الاستقراء، نعلم أن $k(Q_{k-1}) = k\text{-}1$، خذ في الحسبان أن $Q_k$ يمثل نسختين هما: $Q$ و $Q'$ من $Q_{k-1}$، بالإضافة إلى الأضلاع التي تربط الرؤوس المتناظرة في $Q$ و $Q'$. (مثال 8.3.1). افترض أن $S$ تمثل مجموعة فصل لأحد الرؤوس. إذا كان كل من $Q\text{-}S$ و $Q'\text{-}S$ مترابطًا، فإن $Q_k\text{-}S$ يكون أيضًا مترابطًا، إلا إذا احتوت $S$ على نقطة طرفية لكل ضلع من الأضلاع التي تربط الرؤوس المتناظرة، وهذا يتطلب $|S| \geq 2^{k-1}$ لكن $2^{k-1} \geq k$ لكل $k \geq 2$.

لذا، نفترض أن $Q\text{-}S$ غير مترابط، وهذا يعني أن $S$ تحوي $k\text{-}1$ رأسًا على الأقلِ من $Q$، وباستخدام فرضيات الاستقراء، لاحظ أنه إذا خلت $S$ من الرؤوس الموجود في $Q'$، فإن $Q'\text{-}S$ يكون مترابطًا، ويوجد جيران في $Q'\text{-}S$ لكل رأس في $Q\text{-}S$. لذا، فإن $Q_k - S$ مترابط، ويجب أن يحوي $S$ رأسًا من $Q'$، وهذا يعني أن $|S| \geq k$ وهو المطلوب. ■

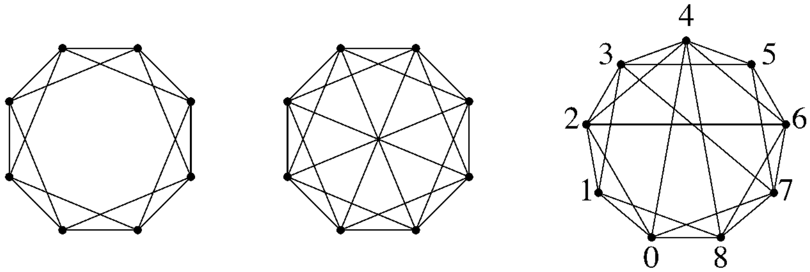



وإذا حذفنا جيران أي رأس، فإننا نحصل على بيان غير مترابط، أو بيان له رأس واحد. لذا، فإن $k(G) \leq \delta\ (G)$، وليس بالضرورة الحصول على المساواة؛ فعلى سبيل المثال، نعلم أن الدرجة الصغرى للبيان 2Km هي m-1 ودرجة ترابطه تساوي صفر.

بما أن مقياس الترابط $k$ يتطلب أن تكون $\delta\ (G) \geq k$، فإنه أيضًا يتطلب أن يكون عدد الأضلاع $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$ على الأقل. لاحظ أن $Q_k$ يحقق هذ الحد ما عدا عندما $n=2^k$ ، وهذا الحد هو أفضل ما يمكن الحصول عليه عندما $k < n$، ويتضح هذا من خلال المثال التالي:

**4.1.4. مثال:** بيانات هراري ($Harary\ graphs$). إذا علمت أن $2 \leq k \leq n$، فضع $n$ رأسًا على دائرة بمسافات متساوية. إذا كان $k$ زوجيًّا، شكِّل $H_{k,n}$ وذلك بجعل كل رأس مجاور لأقرب $k/2$ رأسًا في الاتجاهين على الدائرة. إذا كان $k$ فرديًّا و $n$ زوجيًّا، فشكِّل $H_{k,n}$ بجعل كل رأس مجاور لأقرب $(k-1)/2$ رأسًا في الاتجاهين، وكذلك مجاور للرأس المقابل على القطر المار بهذا الرأس. وفي الأحوال جميعها، لاحظ أن $H_{k,n}$ منتظم من الدرجة $k$.

عندما يكون كلّ من $k$ و $n$ فرديًّا، ضع دليلاً على الرؤوس باستخدام الأعداد الصحيحة بمقياس $n$ (باقي القسمة على $n$). ابنِ $H_{k,n}$ من $H_{k-1,n}$ بإضافة الأضلاع $i \leftrightarrow i+(\frac{n-1}{2})$ لكل $i$ حيث $0 \le i \le (n-1)/2$. في الشكل أدناه تجد البيانات: $H_{4,8}$ ، $H_{5,8}$ ، $H_{5,9}$. ■




**5.1.4. نظرية:** (Harary [1962a]) $\kappa(H_{k,n})=k$، واستنادًا إلى ذلك، فإن أقل عدد ممكن من الأضلاع لبيان مترابط من الدرجة $k$ على $n$ من الرؤوس هو $\lceil kn/2 \rceil$.

**الإثبات:** سنثبت الحالة التي يكون فيها $k$ عددًا زوجيًّا، ولنقل $k = 2r$، تاركين الحالة التي يكون فيها $k$ عددًا فرديًّا إلى تمرين 12. افترض أن $G=H_{k,n}$. بما أن $\delta(G)=k$، فإنه يكفي أن نثبت أن $\kappa(G) \ge k$. افترض أن $S \subseteq V(G)$ حيث $|S| < k$، سنثبت أن $G-S$ مترابط. خذ $u,v$ في $\in V(G) - S$، يوجد في الترتيبة الدائرية الأصلية مساران من $u$ إلى $v$؛ أحدهما مع اتجاه عقارب الساعة، والآخر عكس اتجاه عقارب الساعة. افترض أن $A$ و $B$ مجموعتا الرؤوس الداخلية لهذين المسارين. بما أن $|S| < k$، فإن مبدأ صناديق الحمام يضمن لنا أن إحدى المجموعتين $\{A,B\}$ و $S$ تحوي أقل من $k/2$ رأسًا. وبما أن كل رأس في $G$ يرتبط بأضلاع مع الـ $k/2$ رأسًا التالية في أحد الاتجاهين، فإن حذف عدد من الرؤوس المتتابعة أقل من $k/2$ لا يمنع الانتقال في ذلك الاتجاه. لذا، نستطيع إيجاد مسار من $u$ إلى $v$ في $G-S$ باستخدام إحدى المجموعتين $A$ أو $B$ التي يكون للمجموعة $S$ فيها عدد أقل من $k/2$ من الرؤوس. ■

لاحظ أن البناء بطريقة هراري (Harary) يحدد الشرط على الدرجات الذي يسمح للبيانٍ أن يكون مترابطًا من الدرجة $k$ (k-Gnnected). يحدد التمرين (22) شرط الدرجات الذي يجبر بيانًا بسيطًا ليكون مترابطًا من الدرجة $k$. وبما أن مقياس درجة الترابط يعتمد على حذف الرؤوس، فإنها لا تتأثر بحذف نسخ إضافية من الأضلاع المكررة، لذا نتعامل من شروط الدرجات للترابط من الدرجة $k$ ضمن سياق البيانات البسيطة فقط.

**6.1.4. ملاحظة:** الإثبات المباشر لـ $\kappa(G) \ge k$. إما أن نأخذ في الحسبان مجموعة قطع رؤوس $S$ ونثبت أن $|S| \ge k$، أو نأخذ في الحسبان مجموعة $S$ عدد رؤوسها أقل من $k$ ونثبت أن $G-S$ مترابط. أما في الإثبات غير المباشر، فنفترض مجموعة فاصلة أقل من $k$ ونحصل على تناقض. وهنا نذكر أن لكلا الإثباتين ما يميزه؛ فالإثبات غير المباشر يمكن أن نجده بسهولة، أما الإثبات المباشر فربما يكون أوضح.

لاحظ كذلك أنه إذا كانت $k < n(G)$، وكان للبيان $G$ مجموعة فاصلة لرأس معين بحجم أقل من $k$، فإنه يوجد لـ $G$ مجموعة فصل (قطع) حجمها $k-1$ (أولاً، احذف عناصر مجموعة الفصل، ثم تابع حذف الرؤوس حتى تجد أنه تم حذف $k$-1 من هذه الرؤوس، مستبقيًا رأسًا في كل مركبتين).

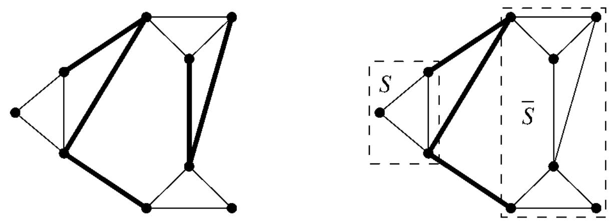
وأخيرًا، فإن إثبات $\kappa(G) = k$ يتطلب إيجاد مجموعة رؤوس فاصلة حجمها $k$، وهذا هو الجزء الأسهل عادة. ■

## درجة ترابط الأضلاع (Edge - Connectivity)

ربما تكون أجهزة النقل التي لدينا آمنة، ولا يمكن أن تتعطل. ولكن يمكن أيضًا أن تكون روابط (أسلاك) الاتصالات خاضعة لبعض الضجيج والأعطال الأخرى، في مثل هذه الحالة، نرغب أن يكون من الصعوبة بمكان فصل البيان الذي لدينا بحذف أضلاع منه.

**7.1.4. تعريف:** لتكن $F \subseteq E(G)$. نقول: إن $F$ مجموعة أضلاع فاصلة للبيان $G$ إذا كان للبيان $G$ - $F$ أكثر من مركبة. ونقول: إن البيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$ $(k - \text{edge - connected})$ إذا كان عدد عناصر كل مجموعة ضلعية فاصلة مساويًا $k$ على الأقل. نعرف مقياس الترابط الضلعي للبيان $G$ الذي نرمز إليه بالرمز $\kappa'(G)$ على أنه أصغر حجم لمجموعة ضلعية فاصلة لهذا البيان (وهذا كقولنا أكبر عدد $k$ بحيث يكون $G$ مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $k$).

إذا أُعطينا $S,T \subseteq V(G)$، فسنكتب $[S,T]$ للتدليل على مجموعة الأضلاع التي أحد نقاطها الطرفية في $S$ والأخرى في $T$. إذا كانت $\phi \neq S \subset V(G)$ مجموعة جزئية من $\overline{S}=V(G)$-$S$، فإن المجموعة $[S,\overline{S}]$ تسمى قاطعة ضلعية (قاطعة أضلاع).




قاطعة خلفية (أضلاع)    مجموعة خلفية فاصلة (قاطعة)

**8.1.4. ملاحظة:** المجموعات القاطعة وأضلاع القطع. لاحظ أن كل قاطعة ضلعية (edge–cut) تكون مجموعة (ضلعية) قاطعة لأن $G$-$[S,\overline{S}]$ لا تحوي أي مسار من $S$ إلى $\overline{S}$. إن عكس العبارة السابقة غير صحيح؛ لأن المجموعة القاطعة ربما تحوي عدد أضلاع أكثر من القاطعة الضلعية. وفي الشكل أعلاه، مثلنا المجموعة القاطعة والقاطعة الضلعية بخطوط غامقة، انظر التمرين 13.

وعلى الرغم من ذلك، فإن أي مجموعة قاطعة صغرى (تحوي أقل عدد من الأضلاع) تكون قاطعة ضلعية (عندما $n(G) > 1$)؟ إذا كان لبيان $G$-$F$ أكثر من مركبة لبعض $F$ المحتواة في $E(G)$. وإذا حذفنا الأضلاع جميعها التي لها نقطة طرفية في مركبة $H$ من مركبات $G$-$F$، فإن $F$ تحوي قاطعة ضلعية $[V(H),\overline{V(H)}]$، ولا تكون $F$ مجموعة قاطعة صغرى إلا إذا كانت $F=[V(H),\overline{V(H)}]$، ■

يبقى الرمز المستخدم للتدليل على درجة الترابط الضلعية باستخدام الشرطة منسجمًا مع الرمز الذي استخدمناه للتدليل على درجة الترابط الرأسية، وهذا لا يسبب لنا أيًّا من الإشكالات التي تنجم عن استخدام الرموز المختلفة.

إن حذف نقطة طرفية (أحد رأسي ضلع معين) لكل ضلع في قاطعة ضلعية $F$ يعني حذف كل ضلع في $F$، وهذا يقودنا إلى اقتراح أن $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$. وعلى أي حال، يجب الحذر من حذف الرأس الوحيد لأحد مركبات $G$-$F$؛ لأن هذا يبقي لنا بيانًا جزئيًّا مترابطًا في هذه الحالة.

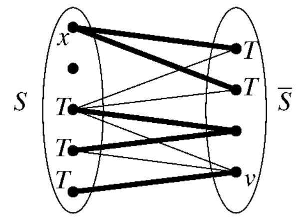
**9.1.4. نظرية:** (whitney [1932a]). إذا كان $G$ بيانًا بسيطًا فإن:

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

**إثبات:** تشكّل الأضلاعُ الواقعة على الرأس $v$ (التي تكون $v$ نقطة طرفية لكل منها) ذي الدرجة الصغرى قاطعةً ضلعية. لذا، فإن: $\kappa'(G) \le \delta(G)$. وبناءً عليه، يبقى أن نثبت أن: $\kappa(G) \le \kappa'(G)$.

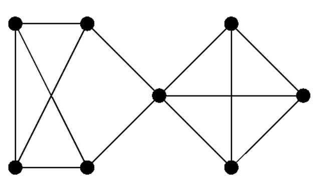
لقد لاحظنا سابقًا أن $\kappa(G) \le n(G) - 1$ (انظر المثال 2.1.4). خذ في الحسبان أصغر قاطعة ضلعية $[S,\overline{S}]$. إذا كان كل رأس في $S$ يجاور كل رأس في $\overline{S}$ فإن: $|[S,\overline{S}]| = |S|\,|\overline{S}| \ge n(G) - 1 \ge \kappa(G)$. وعليه، نحصل على المتباينة المطلوبة.

وإذا لم يكن الأمر كذلك، فاختر $x \in S$ و $y \in \overline{S}$ بحيث إن $x \nleftrightarrow y$. اجعل $T$ تحوي جيران $x$ الموجودة في $\overline{S}$ جميعها بالإضافة إلى الرؤوس الموجودة في $S - \{x\}$ جميعها ولها جيران في $\overline{S}$. لاحظ أن كل مسار من $x$ إلى $y$ يمر من خلال $T$. لذا، فإن $T$ مجموعة فاصلة. وبأخذ الأضلاع من $x$ إلى $T \cap \overline{S}$، وأخذ ضلع واحد من كل رأس في $T \cap S$ إلى $\overline{S}$ (ممثلة بالخطوط الغامقة في الشكل أدناه) نحصل على $|T|$ من أضلاع $[S,\overline{S}]$، المختلفة عن بعضها. وبناءً عليه، فإن: $\kappa'(G) = |[S,\overline{S}]| \ge |T| \ge \kappa(G)$، وهذا هو الإثبات. ■




لقد رأينا أن $\kappa(G) = \delta(G)$ عندما يكون $G$ بيانًا تامًّا، أو عصبة ثنائية، أو مكعبًا زائديًّا، أو بيانًا هراريًّا. وباستخدام النظرية 4.1.9. نجد أيضًا أن $\kappa'(G) = \delta(G)$ لهذه البيانات. وعلى الرغم من ذلك، نجد في العديد من البيانات أن مجموعة الأضلاع التي تقع على رأس معين (هذا الرأس يمثل نقطة طرفية في هذه الأضلاع) له درجة صغرى لا تمثل قاطعة ضلعية صغرى. لذا، فإن الحالة السائدة هي $\kappa'(G) < \delta(G)$ وكذلك عندما لا تكون هناك قاطعة ضلعين صغرى عازلة لأحد الرؤوس (لرأس معين).

**مثال 10.1.4:** إمكانية حدوث $\kappa<\kappa'<\delta$. انظر البيان $G$ المرسوم في الشكل أدناه، ولاحظ أن $\kappa(G)=1$، $\kappa'(G)=2$، و$\delta(G)=3$، لاحظ عدم وجود قاطعة ضلعية صغرى عازلة لرأس. يمكن أن تكونُ كلُّ متباينة هنا ضعيفةً بالقدر الذي نرغب، فمثلاً عندما $G=K_m+K_m$ نجد أن $\kappa(G)=\kappa'(G)=0$، لكن $\delta(G) = m-1$، وعندما تكون $G$ متوائمة من عصبتين على $m$ من الرؤوس يشتركان في رأس واحد فقط، نجد أن $\kappa'(G) = \delta(G) = m-1$، لكن $\kappa(G) = 1$. ■

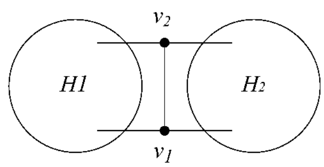


إن الشروط المختلفة تُحدِثُ مساواةً بين الوسطاء (parameters) فعلى سبيل المثال عندما يساوي قطر $G$ 2، فإن $\kappa'(G) = \delta(G)$ (التمرين 25). وكذلك نجد أن البيانات الثلاثية المنتظمة تحققُ أن مقدار (درجة) ترابطها دائمًا مساوٍ لمقدار ترابطها الضلعي.

**نظرية 11.1.4:** إذا كان $G$ بيانًا ثلاثيًّا منتظمًا فإن $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

**الإثبات:** افترض أن $S$ قاطعة رؤوس صغرى ($|S| = \kappa(G)$). وبما أن $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ متحققة دائمًا، فإننا نحتاج فقط إلى قاطعة ضلعية حجمها $|S|$. افترض أن $H_1$ و $H_2$ مركبتان للبيان $G$-$S$، وبما أن $S$ قاطعة رؤوس صغرى، إذن، يوجد لكل $v$ في $S$ جارٌ في $H_1$ وجارٌ آخر في $H_2$، وبما أن $G$ بيان ثلاثي منتظم، فلا يمكن أن يوجد لـ $v$ جاران في $H_1$، وجاران في $H_2$، إذن، يوجد لـ $v$ جارٌ واحدٌ، إما في $H_1$، أو في $H_2$، احذف الضلع الواصل من $v$ إلى المجموعة التي تحوي جارًا واحدًا فقط.

تقوم هذه الـ $\kappa(G)$ من الأضلاع بتبديد شمل المسارات جميعها التي من $H_1$ إلى $H_2$ ما عدا الحالة الموضحة في الشكل أدناه، حيث يمكن للمسار أن يدخل $S$ عن طريق $v_1$، ويخرج عن طريق $v_2$. وفي هذه الحالة، نحذف الضلع الواصل إلى $H_1$ من $v_1$ و $v_2$ من أجل فصل المسارات جميعها من $H_1$ إلى $H_2$ المارة خلال $\{v_1,v_2\}$. ■




عندما تكون $\kappa'(G) < \delta(G)$، فلا يمكن لقاطعة ضلعية صغرى أن تعزل رأسًا. وفي الحقيقة، عندما تكون $|[S,\overline{S}]| < \delta(G)$، فيجب أن تحوي $S$ (وكذلك $\overline{S}$) أكثر من رأس واحد فقط. وهو ما يتبع علاقة بسيطة تربط بين حجم القاطعة الضلعية $[S,\overline{S}]$ وحجم البيان الجزئي الذي تولده $S$.

**12.1.4. قضية:** إذا كانت $S$ مجموعة رؤوس في بيان $G$ فإن:

$$|[S,\overline{S}]| = [\ \Sigma_{v\in S}\, d(v)\ ] - 2e(G[S])$$

**الإثبات:** لاحظ أن الضلع في $G[S]$ يسهم بـ 2 في $\Sigma_{v\in S}\, d(v)$، أما الضلع من $[S,\overline{S}]$، فيسهم بواحد فقط في هذا المجموع، وبما أن هذا يحسب المساهمات جميعها، فإننا نحصل على: $\Sigma_{v\in S}\, d(v) = [S,\overline{S}] + 2e(G[S])$. ■

**13.1.4. النتيجة:** إذا كان $G$ بيانًا بسيطًا، وكان $|[S,\overline{S}]| > \delta(G)$، حيث $S$ مجموعة جزئية فعلية من $V(G)$، فإن $|S| > \delta(G)$.

**الإثبات:** من قضية 12.1.4 نجد أن: $\delta(G) > \Sigma_{v\in S}\, d(v) - 2e(G[S])$ وباستخدام $d(v) \geq \delta(G)$، وأن $2e(G[S]) \leq |S|(|S|-1)$ نجد أن:

$$\delta(G) > |S|\,\delta(G) - |S|(|S|-1)$$

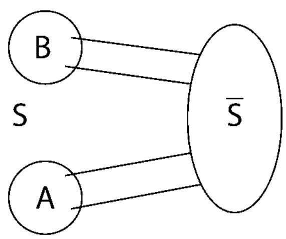
وتتطلب هذه المتباينة أن يكون $|S| > 1$. لذا، نستطيع ربط الحدود التي يظهر فيها $\delta(G)$. وباختصار $|S|-1$ نجد أن $|S| > \delta(G)$ ■

بما أن القاطعةَ الضلعية مجموعةٌ من الأضلاع، فيمكن أن تحوي داخلها قاطعة ضلعية أُخرى. فعلى سبيل المثال، يوجد للبيان $K_{1,2}$ ثلاث قواطع ضلعية، ولكن إحداها تحوي الأخريين. إن للقاطعة الضلعية الصغرى غير الخالية لبيان معين بعضَ الخصائص البنيوية (البنائية) المفيدة.

**14.1.4. تعريف:** نعرف الرابطة (bond) على أنها قاطعة ضلعية صغرى غير خالية. ونعني بصغرى أنه لا يوجد لها مجموعة جزئية فعلاً، بحيث إن هذه المجموعة الجزئية تشكل أيضًا قاطعة ضلعية. نعطي فيما يأتي توصيفًا يميز الروابط في البيانات المترابطة.

**15.1.4. قضية :** إذا كان $G$ بيانًا مترابطًا، فإن القاطعة الضلعية $F$ تكون رابطة إذا وفقط إذا كان للبيان $G-F$ مركبتان فقط.

**الإثبات.** افترض أن $F=[S,\overline{S}]$ قاطعةٌ ضلعيةٌ، وافترض أيضًا أن لـ $G-F$ مركبتين فقط، وافترض كذلك أن$F'$ مجموعة جزئية فعلاً من $F$. إن البيان $G-F'$ يحوي مركبتين $G-F$ بالإضافة إلى ضلع واحد على الأقل يربط بينهما لجعل $G-F'$ مترابطًا. لذا، فإن $F$ تمثل قاطعة ضلعية صغرى. إذن، فهي رابطة. وبالنسبة إلى العكس، افترض وجود أكثر من مركبتين للبيان $G$-$F$. بما أن $G$-$F$ هي الاتحاد المنفصل (*disjoint union*) لكل من $G[S]$ و $G[\overline{S}]$ فإن هناك مركبتين لأحد هذين البيانين الجزئيين على الأقل. افترض (من التماثل) أن هذا البيان هو $G[S]$. لذا، نستطيع كتابة $S$ على الصورة $S=A\cup B$ حيث لا يوجد أضلاع ترتبط بين $A$ و $B$. ولهذا، فإن القواطع الضلعية $[A,\overline{A}]$ و $[B,\overline{B}]$ هي مجموعات جزئية فعلاً من $F$. وعليه، فإن $F$ ليست رابطة؛ وهذا التناقض ينهي الإثبات. ■

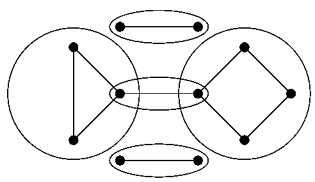



## القوالب (Blocks)

ليس من الضروري أن يكون البيان المترابط الذي ليس له رأس فاصل مترابطًا من الدرجة 2، لأنه قد يكون $K_1$ أو $K_2$. وتزودنا البيانات الجزئية المترابطة التي ليس لها رؤوس فاصلة بتحليل (تفكيك) مفيد للبيان.

**16.1.4. تعريف :** نعرِّف القالب لبيان $G$ (أو في بيان $G$) على أنه أكبر بيان جزئي مترابط محتوًى في $G$؛ بحيث لا يوجد له رأس فاصل. وإذا كان $G$ نفسه مترابطًا وليس له رأس فاصل، فإن $G$ يكون قالبًا.

**17.1.4. مثال :** القوالب. إذا كان $H$ قالبًا في $G$، فإن $H$ بوصفه بيانًا لا يحوي رأسًا فاصلاً، ولكنه قد يحوي رؤوسًا تمثل رؤوسًا فاصلة لـ $G$. فعلى سبيل المثال، يوجد للبيان المرسوم في الشكل أدناه خمسة قوالب هي: ثلاث نسخ من $K_2$، ونسخة من $K_3$، وبيان جزئي آخر ليس حلقة وليس بيانًا تامًّا. ■



**18.1.4. ملاحظة :** خواصّ القوالب. إن أي ضلع في حلقة لا يمكن أن يكون قالبًا؛ لأن هذا الضلع يكون محتوًى في بيان جزئي أكبر ليس له رأس قطع. لذا، فإن أي ضلع يكون قالبًا إذا وفقط إذا كان هذا الضلع ضلعًا فاصلًا (قاطعًا) (cut – edge)، إن أضلاع أي شجرة هي قوالبها. وإذا كان في القالب أكثر من رأسين، فإنه يكون مترابطًا من الدرجة 2. إن قوالب البيان الخالي من النشُطَّ هي: رؤوسه المعزولة، وأضلاعه الفاصلة، وبياناته الجزئية العظمى التي تكون مترابطة من الدرجة 2. ■

**.19.1.4 قضية :** يشترك أيّ قالبين في بيان برأس واحد على الأكثر.

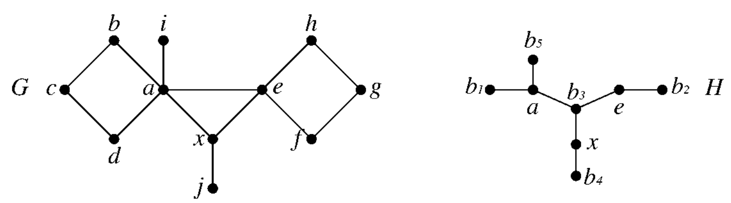
**الإثبات:** باستخدام التناقض، افترض أن $B_1$ و $B_2$ قالبان يشتركان في رأسين على الأقل. سنثبت أن $B_1 \cup B_2$ بيان جزئي مترابط ليس له رأس فاصل، وهذا يناقض كون كل من $B_1$ و $B_2$ بيانات جزئية عظمى مترابطة. ■

عندما نحذف رأسًا واحدًا من $B_i$، فإن ما يتبقى يكون مترابطًا. لذا، نحصل على مسار في $B_i$ من كل رأس باق إلى كل رأس باق في $V(B_1) \cap V(B_2)$، وبما أن للقالبين رأسين مشتركين، فإن حذف رأس واحد يُبْقي رأسًا آخر في التقاطع. ومن هنا نحصل على مسارات من الرؤوس جميعها إلى هذا الرأس. لذا، لا يمكن أن يكون $B_1 \cup B_2$ غير مترابط بحذف رأس واحد فقط. ■

يمثل كل ضلع بيانًا جزئيًّا ليس له رأس فاصل. لذا، فإن كل ضلع يكون موجودًا في قالب، ومن هنا نستنتج أن قوالب البيان تُفكّك (decompose) البيانَ. إن سلوك القوالب في البيان يشبه إلى حد ما سلوك المركبات القوية للبيانات الموجهة (التعريف 12.4.1)، لكن لا يوجد رؤوس مشتركة للمركبات القوية (التمرين 13a.1.4). وعلى الرغم من أن القوالب تفكك مجموعة الأضلاع في البيان، فإن المركبات القوية للبيان الموجه تجزّئ مجموعة الرؤوس وعادةً ما تحذف الأضلاع.

عندما يشترك قالبان في $G$ برأس، فإنه يجب أن يكون هذا الرأس فاصلاً، إن التفاعل بين القوالب والرؤوس الفاصلة (القاطعة) يوصَف من خلال بيان خاص.

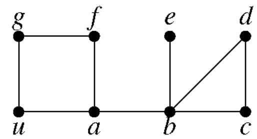
**.20.1.4 تعريف:** يعرف بيان قالب النقطة الفاصلة للبيان $G$ على أنه بيان ثنائي الفرع $H$؛ حيث تتألف إحدى مجموعتي رؤوسه من الرؤوس الفاصلة لـ $G$، في حين تحوي رأس المجموعة الثانية $b_i$ لكل قالب $B_i$ في $G$، علمًا بأن $vb_i$ يكون ضلعًا في $H$ إذا وفقط إذا كان $v \in B_i$.




إذا كان $G$ مترابطًا فإن بيان قالب النقطة (النقاط) الفاصلة لـ $G$ يكون شجرةً (التمرين 34)، حيث إن أوراقه هي قوالب $G$. وبناءً عليه، فإنَّ البيانَ $G$ على افتراض أن $G$ ليس قالبًا واحد فقط له قالبان (قوالب ورق) على الأقل، وكل منهما يحوي رأسًا قاطعًا واحدًا من رؤوس $G$.

يمكن إيجاد القوالب باستخدام طريقة تقنية للبحث عن البيانات. فمثلاً، بطريقة البحث بعمق (العمودي) أولاً (Depth – First Search) والذي نرمز إليه بالرمز (DFS)، نبدأ البحث دائمًا من أحدث رأس مكتشف والذي له أضلاع غير متحرًّى عنها بعد (غير مسبورة) (ويسمى هذا الطريق استرجاع الأثر أيضًا) (back tracking). وبالمقارنة بخوارزمية 8.3.2 المتعلقة بطريقة البحث الأفقي (بالعرض) أولاً (Breadth – First search) (BFS)؛ حيث يبدأ فيها التحري من الرأس الأقدم. لذا، فإن الفرق بين DFS وBFS يتلخص في أننا نحافظ في الأولى على قائمة من الرؤوس التي تبحث على أساس أن العنصر الذي يدخل أخيرًا يخرج أولاً بدلاً من وضعها في طابور أو صف.

**21.1.4. مثال* :(DFS)** في البيان أدناه عند تطبيق الـ (DFS) مرة واحدة بدءًا من $u$، نجد أن الرؤوس مرتبة على الصورة $u,a,b,c,d,e,f,g$. ولكل من الـ $BFS$ والـ $DFS$، يعتمد ترتيب اكتشاف العناصر على ترتيب التحري من خلال الأضلاع بدءًا من رأس معين. ■




لاحظ أن كلًّا من طريقتي البحث الأفقية أولاً، أو العمودية أولاً بدءًا من $u$، تولد شجرة جذرها (قاعدتها) عند $u$. فكلما بدأنا البحث عند رأس $x$، نجد رأسًا آخر $v$، وعليه نضمن الضلع $xv$ في بياننا، وهذا ينمو إلى شجرة تولد مركبة للبيان تحوي $u$. وتعتمد تطبيقات البحث العمودي أولاً على خاصية أساسية للشجرة المولدة الناتجة.

**22.1.4. تمهيدية***. إذا كانت $T$ شجرة مولدة لبيان مترابط $G$ نامية من DFS بدءًا من $u$، فإن كل ضلع في $G$-$T$ يتكون من رأسين هما: $v$، $w$، بحيث يقع $v$ على المسار من $u$ إلى $w$ في $T$.

**الإثبات:** افترض أن $vw$ ضلع في $G$، حيث نصادف $v$ قبل $w$ خلال استخدام طريقة البحث بعمق أولاً. وبما أن $vw$ ضلع في $G$، فلا نستطيع إنهاء $v$ قبل إضافة $w$ إلى $T$. لذا، فإن $w$ يظهر في مكان ما في الشجرة الجزئية المشكلة قبل إنهاء $v$. وكذلك، فإن المسار من $w$ إلى $u$ يحوي $v$. ■

**23.1.4. *خوارزمية**. (حساب القوالب لبيان)

المدخلات (input): بيان مترابط $G$ (إن قوالب البيان هي قوالب مركبات يمكن إيجادها من خلال آلية البحث (DFS) لذا، نفترض أن $G$ مترابط).

**الفكرة** (الخطة). استخدم الـ DFS لإيجاد الشجرة $T$ للبيان $G$، وبحذف بعض الأجزاء من $T$ نحدد عند القوالب، حافظ على رأس واحد يُدعى نشطًا (Active).

**البداية:** إختر جذرًا $x$ في $V(H)$، واجعل $x$ نشطًا، وضع $T = \{x\}$.

**التكرار:** افترض أنَّ $v$ الرأسُ النشطُ الحاليّ.

1) إذا وقع على $v$ ضلع غير مسبور (غير متحرى عنه) مثل $vw$، فإنه:

   1A) إذا كان $w$ لا ينتمي إلى $V(T)$، فأضف $vw$ إلى $T$، علِّم $vw$ على أنه تمّ التحرّي عنه، ثم اجعل $w$ نشطًا.

   1B) إذا كان $w$ ينتمي إلى $V(T)$، فإن $w$ يكون سلفًا (ancestor) لـِ $v$. ضع علامة تشير إلى أنه تمّ التحرّي عن $vw$.

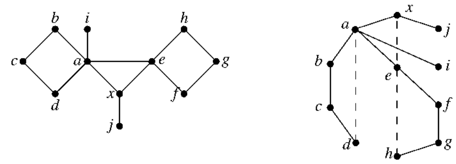
2) إذا كانت الأضلاع التي تقع على $v$ مسبورة (تمّ التحري عنها)، فإن:

   2A) إذا كان $v \neq x$، وأنَّ $w$ والدُ $v$، اجعل $w$ نشطًا. إذا لم يوجد أيُّ رأس في الشجرة الجزئية الحالية $T'$ التي جذرها $v$ بحيث يكون لهذا الرأس ضلع تمَّ التحري عنه سابقًا في سلف فوق $w$، فإن $V(T') \cup \{w\}$ تمثل مجموعة رؤوس لقالب، سجِّل هذه المعلومات واحذف $V(T')$ من $T$.

   2B) إذا كانت $x = v$، فقد انتهى الحلّ. ■

**24.1.4. مثال :(إيجاد القوالب)**. في البيان أدناه، إذا كان العبور لرؤوس البيان من $x$ عموديًّا مرة واحدة يمر بالرؤوس الأخرى بحسب الترتيب: $a,b,c,d,e,f,g,h,i,j$، نجد القوالب بحسب الترتيب: $\{a,b,c,d\}$, $\{e,f,g,h\}$, $\{a, i\}$, $\{x,a,e\}$, $\{x,j\}$ وبعد إيجاد هذه القوالب، نحذف الرؤوس المختلفة عن

الرأس الأعلى. (التمرين 36 يتطلب إثبات صحة العملية السابقة). ■




## تمـــارين (Exercises)

**1.1.4.** (−) أثبت أو انقض كلًّا من العبارات الآتية:

a) إذا كان مقياس ترابط بيان معين يساوي 4، فإن هذا البيان يكون مترابطًا من الدرجة 2.

b) إذا كان البيان مترابطًا من الدرجة 3، فإن مقياس ترابطه يساوي 3.

c) إذا كانت درجة ترابط بيان تساوي $k$، فإن درجة ترابطه الضلعية تساوي $k$.

d) إذا كان البيان مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $k$، فإنه يكون مترابطًا من الدرجة $k$.

**2.1.4.** أعط مثالًا ناقضًا للعبارة الآتية، وأضف فرضيات لتصحيحها، ثم أثبت صحة العبارة المصححة: إذا كان e ضلعًا فاصلًا (cut-edge) لـ $G$، فإن أحد طرفيه على الأقل يكون رأسًا فاصلًا لـ $G$.

**3.1.4.** (−) افترض أن $G$ بيان له أكثر من $k$ من الرؤوس، وبحيث إن $G$ ليس بيانًا تامًا. أثبت أنه إذا لم يكن $G$ مترابطًا من الدرجة $k$، فإن هناك مجموعة فاصلة حجمها $k$-1 لهذا البيان.

**4.1.4.** (−) أثبت أن البيان $G$ مترابط من الدرجة $k$ إذا وفقط إذا كان $G \vee K_r$ (التعريف 6.3.3) مترابطًا من الدرجة $k + r$.

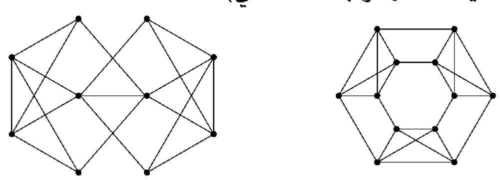
**5.1.4.** (−) افترض أن $G$ بيان مترابط له ثلاثة رؤوس على الأقل، كوّن $G'$ من $G$ بإضافة الضلع $xy$ عندما $d_G(x, y) = 2$، أثبت أن $G'$ مترابط من الدرجة 2.

**6.1.4.** (−) افترض أن $G$ بيان مترابط له قوالب $B_1, \ldots, B_r$. أثبت أنه يوجد للبيان $\sum_{i=1}^{k} n(B_i)$ $G$ - $k$ + 1 رأسًا بالضبط. أو (أثبت أن عدد رؤوس $G$ يساوي $\left(\sum_{i=1}^{k} n(B_i)\right) - k + 1$).

**7.1.4.** (−) جد صيغة تعطي عدد الأشجار المولدة لبيان مترابط بدلالة الأشجار المولدة لقوالبه.

• • • • •

**8.1.4.** جد $\kappa(G)$, $\kappa'(G)$, $\delta(G)$ لكل من البيانين المرسومين أدناه (مساعدة: للبيان الموجود على اليسار، استخدم القضية 12.1.4 لتحديد مقدار ترابطه الضلعي).



**9.1.4.** لكلِّ خيارات الأعداد الصحيحة $l, m$، $k$، حيث $0<k\leq l\leq m$، ابنِ بيانًا بسيطًا $G$ له $\kappa(G) = k$, $\kappa'(G)=l$, و$\delta(G)=m$ (chartrand – Harary [1968]).

**10.1.4.** (!) جد أصغر بيان بسيط منتظم من الدرجة الثالثة بحيث يكون مقدار ترابطه يساوي 1، وأثبت ذلك.

**11.1.4.** أثبت أن $\kappa(G) = \kappa'(G)$ عندما يكون $G$ بيانًا بسيطًا له $\Delta(G)\leq 3$.

**12.1.4.** افترض أن $k, n$ أعداد صحيحة موجبة، بحيث $n$ عدد زوجي، و $k$ عدد فردي، و$n > k > 1$. افترض أن $G$ هو البيان البسيط المنتظم من الدرجة $k$ المشكل بوضع $n$ من الرؤوس على دائرة، وبجعل كل رأس يجاور (يرتبط بضلع) الرأس المضاد له على الدائرة بالإضافة إلى مجاورته لأقرب $(k-1)/2$ رأسًا في كلا الاتجاهين

على الدائرة، أثبت أن $\kappa(G) = k$ (Harary [1962a]).

**13.1.4.** في البيان $k_{m,n}$، اجعل $S$ تتكون من $a$ رأسًا من إحدى مجموعتي الرؤوس، و $b$ رأسًا من المجموعة الثانية:

(a) احسب $|[S,\bar{S}]|$ بدلالة $a,b,m,n$.

(b) استخدم فرع $a$ لإثبات أن: $\kappa'(K_{m,n}) = min\{m,n\}$ حسابيًّا.

(c) أثبت أن كل مجموعة تحوي سبعة أضلاع من $K_{3,3}$ تكون مجموعة فاصلة، ولكن لا توجد قاطعة ضلعية (edge cut) مؤلفة من سبعة أضلاع.

**14.1.4.** (!) ليكن $G$ بيانًا مترابطًا، بحيث توجد لكل ضلع $e$ حلقتان هما: $C_1$ و $C_2$ تحتويان على $e$، وبحيث إن $e$ الضلع الوحيد المشترك بينهما. أثبت أن $G$ مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3، استخدم هذه النتيجة لإثبات أن بيان بيترسون مترابط ضلعيًّا من الدرجة الثالثة.

**15.1.4.** (!) استخدم القضية 12.1.4 والنظرية 11.1.4 لإثبات أن بيان بيترسون مترابط من الدرجة 3.

**16.1.4.** استخدم القضية 12.1.4 لإثبات وجود قاطعة ضلعية لبيان بيترسون حجمها $m$ إذا وفقط إذا كان $3 \le m \le 12$. (مساعدة: افترض $|[S,\bar{S}]|$ حيث $1 \le |S| \le 5$).

**17.1.4.** أثبت أن حذف قاطعة ضلعية حجمها 3 من بيان بيترسون يعزل رأسًا.

**18.1.4.** افترض أن $G$ بيان بسيط خالٍ من المثلثات، حيث تساوي درجته الصغرى (أصغر درجة رأس من رؤوس $G$) 3 على الأقل. أثبت أنه إذا كانت $n(G) \le 11$، فإن $G$ مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3. وأثبت كذلك أن هذه المتباينة حادة (sharp) بإيجاد بيان ثنائيّ الفرع منتظم من الدرجة الثالثة له 12 رأسًا بحيث لا يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 3 (Galvin).

**19.1.4.** أثبت أنه إذا كان $G$ بيانًا بسيطًا بحيث $\delta(G) \ge n(G)$-2، فإن $k(G) = \delta(G)$. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن لكل $n \ge 4$ وذلك ببناء بيان بسيط على $n$ من الرؤوس، حيث درجته الصغرى $n$-3، ومقدار ترابطه أقل من $n$-3.

**20.1.4.** (!) افترض أن $G$ بيان بسيط له $n$ من الرؤوس، بحيث إن $n/2\text{-}1 \le \delta(G) \le n\text{-}2$، أثبت أن $G$ مترابط من الدرجة $k$ لكل $k$ حيث $k \le 2\delta(G)+2\text{-}n$. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن لكل $\delta \ge n/2\text{-}1$ وذلك من خلال بناء بيان بسيط على $n$ من الرؤوس، درجته الصغرى $\delta$ بحيث لا يكون مترابطًا من الدرجة $k$ عندما $k = 2\delta+3\text{-}n$. (تعليق: القضية 15.3.1 حالة خاصة من هذا التمرين عندما $\delta(G) = (n\text{-}1)/2$.

**21.1.4.** (+) افترض أن $G$ بيان بسيط له $n$ من الرؤوس، حيث $n \ge k + 1$ و $\delta(G) \ge \frac{n+L(k-2)}{L+1}$ . أثبت أنه إذا كان $G\text{-}S$ يحوي $l$ مركبة، فإن $|S| \ge k$. أثبت أن الفرض على $\delta(G)$ هو أفضل ما يمكن عندما $n \ge k+l$، وذلك بإيجاد بيان مناسب على $n$ من الرؤوس درجته الصغرى $\lfloor\frac{n+l(k-2)-1}{l+1}\rfloor$ .. (تعليق: هذا تعميم لتمرين 20.1.4).

**22.1.4.** (!) الشروط الكافية لضمان بيان مترابط من الدرجة $k + 1$ (Bondy [1969]):

(a) افترض أن $G$ بيان بسيط على $n$ من الرؤوس، بحيث إن درجات رؤوسه هي $d_1 \le \ldots \le d_n$. أثبت أنه إذا كانت $d_j \ge j+k$ عندما $j \le n\text{-}1\text{-}\ d_{n-k}$، فإن $G$ مترابط من الدرجة $k$+1. (تعليق: تمرين 64.3.1 هو الحالة الخاصة عندما $k$=0).

(b) افترض أن $0 \le j + k \le n$. جد بيانًا $G$ له $n$ من الرؤوس، بحيث إن $\kappa(G) \le k$ وبحيث يكون لـ $G$ $j$ رأسًا درجة كلّ منها $j+k$-1، و $n\text{-}j\text{-}k$ رأسًا درجة كلّ منها $n\text{-}j\text{-}1$، و $k$ رأسًا درجة كلّ منها $n$ - 1. بأيّ جانب يمكن افتراض هذا إثباتًا على أن النتيجة في فرع $a$ هي أفضل ما يمكن؟

**23.1.4.** (!) افترض أن $G$ بيان زوجي الرتبة مترابط من الدرجة $r$ ، بحيث إنَّ $K_{1,r+1}$ بيانٌ جزئي من $G$. أثبت أن لـ $G$ معامل 1 (1-facter) (Summer [1974b]).

**24.1.4.** (!) (شروط الدرجات لتكون $\kappa' = \delta$).

افترض أن $G$ بيان بسيط على $n$ من الرؤوس، استخدم النتيجة 13.1.4 أثبت العبارات الآتية:

(a) إذا كانت $\delta(G) \ge \lfloor n/2 \rfloor$، فإن $\kappa'(G) = \delta(G)$. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن بإيجاد بيان بسيط (لكل $n \ge 3$) على $n$ من الرؤوس يحقق أن $\delta(G) = \lfloor 2/n \rfloor$-1 و $\kappa'(G) < \delta(G)$ .

(b إذا كان $d(x) + d(y) \geq n\text{-}1$ عندما $x \nleftrightarrow y$، فإن $\kappa'(G)=\delta(G)$. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن بإيجاد بيان $G$ (لكل $n \geq 4$ ولكل $\delta(G)=m \leq n/2\text{-}1$) على $n$ من الرؤوس بحيث إن $\kappa'(G) < \delta(G)=m$، وبحيث إن $d(x)+d(y) \geq n\text{-}2$ عندما $x \nleftrightarrow y$.

**25.1.4.** (!) ($\kappa'(G) = \delta(G)$) عندما يساوي القطر 2).

افترض أن $G$ بيان بسيط قطره 2، وأن $[S,\overline{S}]$، أصغر قاطعة ضلعية بحيث إن $|S| \leq |\overline{S}|$:

(a أثبت أن لكل رأس في $S$ جوارًا في $\overline{S}$.

(b استخدم فرع (a) والنتيجة 13.1.4 لإثبات أن $\kappa'(G)=\delta(G)$. (Plesnik [1975])

**26.1.4.**(!) افترض أن $F$ مجموعة جزئية من الأضلاع في بيان $G$. أثبت أن $F$ قاطعة ضلعية إذا وفقط إذا كانت تحوي عددًا زوجيًّا من أضلاع كل حلقة في $G$. فعلى سبيل المثال، عندما $G = C_n$، فإن كل مجموعة زوجية من الأضلاع تشكل قاطعة ضلعية، ولا توجد أي مجموعة فردية تمثل قاطعة ضلعية (مساعدة: لإثبات الشرط الكافي؛ علينا أن نثبت أنه يمكن وضع مركبات $F$ في مجموعتين، بحيث إن لكل ضلع في $F$ نقطة طرفية في كلٍّ من المجموعتين).

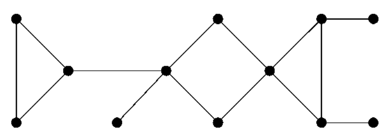
**27.1.4.** (!) افترض أن $[S,\overline{S}]$، قاطعة ضلعية، أثبت على وجود مجموعة روابط منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا، بحيث إن اتحادها (بوصفها مجموعة أضلاع) يساوي $[S,\overline{S}]$، (لاحظ أن هذا بديهي عندما تكون $[S,\overline{S}]$، نفسها رابطة.

**28.1.4.** (!) أثبت أن الفرق التماثلي لقاطعتين ضلعيتين يعطي قاطعة ضلعية. (مساعدة: ارسم صورة توضح قاطعتين ضلعيتين واستخدمها كدليل لإثبات).

**29.1.4.** (!) إذا كان $H$ بيانًا جزئيًّا مولدًا لبيان مترابط $G$، فأثبت أن $H$ يمثل شجرة مولدة للبيان $G$ إذا وفقط إذا كان $H^* = G - E(H)$ لا يحوي أي رابطة من $G$، وإضافة أي ضلع لـ $H$ يُحدث بيانًا جزئيًّا من $G$ يحوي رابطة من $G$.

**30.1.4.** (-) افترض أن $G$ بيان بسيط، رؤوسه؛ $\{1,2,\ldots,11\}$ حيث $i \leftrightarrow j$ إذا وفقط إذا كان لـ $i$ و $j$ عامل مشترك أكبر من 1. حدد قوالب $G$.

**31.1.4.** نعرف الصّبار أو الصّبيرة (cactus) على أنه بيان مترابط، كل قالب فيه هو ضلع أو حلقة (موضح أدناه). أثبت أن أكبر عدد ممكن من الأضلاع لصبّار على $n$ من الرؤوس هو $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ (مساعدة: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$).



**32.1.4.** أثبت أن درجة كل رأس من رؤوس بيان تكون زوجية إذا وفقط إذا كان كلّ قالب فيه أويلريًا.

**33.1.4.** افترض أن $G$ بيان مترابط، أثبت أنه مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$ إذا وفقط إذا كان كلّ قالب فيه مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $k$.

**34.1.4.** (!) بيان قالب النقطة الفاصلة (انظر التعريف 20.1.4). افترض أن $H$ بيان قالب النقطة الفاصلة لبيان $G$ الذي له رأس فاصل ((Harary – prins [1966]):

(a أثبت أن $H$ غابة.

(b أثبت أنه يوجد لـ $G$ قالبان على الأقل، كل منهما يحوي رأسًا فاصلًا واحدًا له.

(c أثبت أنه إذا كان للبيان $G$ $k$ مركبة، فإن $G$ يحوي $k + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1)$ حيث $b(v)$ عدد القوالب التي تحوي $v$.

(d أثبت أن عدد الرؤوس القاطعة لبيان معين أقل من عدد القوالب لهذا البيان.

**35.1.4.** افترض أن $H$ و $H'$ بيانان جزئيان من البيان $G$، بحيث إنهما كبيران مترابطان من الدرجة $k$. أثبت أنهما يشتركان في $k$-1 رأسًا على الأكثر. ((Harary – Kodama . [1964])

**36.1.4.** أثبت أن الخوارزمية 23.1.4 تحسب بدقة عدد قوالب أي بيان.

**37.1.4.** طوِّرْ خوارزمية لحساب المركبات القوية لبيان موجه، وأثبت أن خوارزميتك تعمل. (مساعدة: اعط نموذجًا لهذه الخوارزمية معتمدًا على الخوارزمية 23.1.4).

## 2.4. البيانات المترابطة من الدرجة $k$ ( $k$-connected Graphs )

تعدُّ شبكةُ الاتصالات قادرةً على تحمّل الأعطال إذا وُجد لها مسارات بديلة بين الرؤوس، وكلما زاد عدد المسارات المنفصلة، كانت الشبكة أفضل. وفي هذا الجزء من الفصل، سنثبت أن هذا القياس البديل للترابط هو مفهوم الترابط من الدرجة $k$ نفسه.

عندما $k = 1$، فإن التعريف يقول: إن البيان $G$ مترابط من الدرجة 1 إذا وفقط إذا كان كلّ زوج من الرؤوس يرتبط من خلال مسار. وكلما زادت قيمة $k$، كان هذا التكافؤ دقيقًا أكثر.

### البيانات المترابطة من الدرجة 2 ( 2-connected Graphs )

سنبدأ بتوصيف البيانات المترابطة من الدرجة 2.

**1.2.4. تعريف:** كلُّ مسارين من $u$ إلى $v$ **منفصلان داخليًّا** إذا لم يوجد رأس داخلي مشترك بينهما.

**2.2.4. نظرية:** ( Whitney [1932a] ).

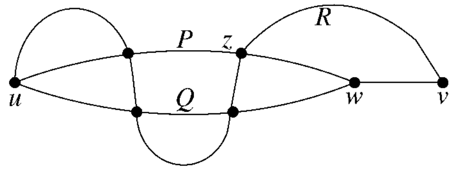
افترض أن $G$ بيان له ثلاثة رؤوس على الأقل. أثبت أن $G$ مترابط من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وُجد لكل رأسين $u$،$v$ من رؤوسه مسارات داخلية منفصلة تربط بين هذين الرأسين.

**الإثبات:** الكفاية: افترض وجود مسارات منفصلة داخليًّا تربط بين أي رأسين $u$،$v$ من رؤوس البيان $G$. لذا، فإن حذف أي رأس لا يفصل $u$ عن $v$، وبما أن هذا الشرط متحقق لكل رأسين من رؤوس $G$، فإن حذف رأس من رؤوس $G$ لا يؤثر في وصولنا من أي رأس إلى أي رأس آخر، لذا نستنتج أن $G$ مترابط من الدرجة 2.

الضرورة: افترض أن $G$ مترابط من الدرجة 2، سنثبت بالاستقراء على $d(u,v)$ بأن $G$ تحوي مسارات منفصلة داخليًّا من $u$ إلى $v$.

الخطوة الأساس: ($d(u,v)=1$). عندما $d(u,v)=1$، فإن البيان $G$-$uv$ مترابط. وبما أن $\kappa'(G) \geq \kappa(G) \geq 2$، فإن مسارًا من $u$ إلى $v$ في $G - uv$ يكون منفصلاً داخليًّا عن المسار من $u$ إلى $v$ المشكل من الضلع $uv$ نفسه.

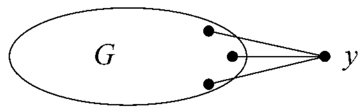
خطوة الاستقراء: ($d(u,v) > 1$). افترض أن $k = d(u,v)$، وافترض كذلك أنّ $w$ الرأسُ الذي يأتي قبل $v$ مباشرة في أقصر مسار من $u$ إلى $v$. لذا، فإن $d(u, w) = k - 1$. وباستخدام فرضيات الاستقراء، يوجد مساران $P$ و $Q$ منفصلان داخليًّا من $u$ إلى $w$. إذا كان $v \in V(P) \cup V(Q)$ فإننا نجد المسار المطلوب في الحلقة $P \cup Q$. لذا، افترض أن $v \notin V(P) \cup V(G)$. بما أن درجة ترابط $G$ تساوي 2، فإن $G$-$w$ مترابط، ويحوي مسارًا $R$ من $u$ إلى $v$. إذا كان $R \cup P=\phi$ أو $R \cap Q =\phi$ ، فإننا نحصل على المطلوب. ولكن يمكن للمسار $R$ أن يشترك برؤوس داخلية مع كل من $P$ و $Q$. افترض أن $z$ هو آخر رأس في $R$ قبل $v$ بحيث إن $z \in P \cup Q$ ، ومن التماثل، يمكننا أن نفترض أن $z \in P$. اربط المسار الجزئي $u$،$z$ من $P$ مع المسار الجزئي $z$،$v$ من $R$ لتحصل على مسار من $u$ إلى $v$ منفصل داخليًّا عن $Q \cup wv$. ■



**3.2.4. تمهيدية.** (تمهيدية توسيع (تمدّد)).

إذا كان $G$ بيانًا مترابطًا من الدرجة $k$، وتمّ الحصول على $G'$ من $G$ بإضافة رأس جديد $y$ له على الأقل $k$ جارًا في $G$، فإن $G'$ يكون مترابطًا من الدرجة $k$.

**الإثبات:** سنثبت أنه إذا كانت $S$ مجموعة فاصلة لـ $G'$، فإن حجم $S$ يساوي $k$ على الأقل. وإذا كانت $y \in S$، فإن $S - \{y\}$ تفصل $G$. لذا، فإن $|S| \geq k + 1$. إذا كان $y \notin S$، وكان $N(y) \subseteq S$ فإن $|S| \geq k$. وبعكس ذلك، فإن كلًّا من $y$ و $N(y) - S$ تقع في مركبة واحدة لـ $G' - S$. لذا، فإن $S$ يجب أن تفصل $G$، وأن $|S| \geq k$. ■




**4.2.4. نظرية:** إذا كان $G$ بيانًا له ثلاثة رؤوس على الأقل، فإن الشروط الآتية متكافئة: (وتعطي وصفًا تمييزيًّا للبيانات المترابطة من الدرجة 2)

A) $G$ مترابط ولا يحوي رأسًا قاطعًا.

B) لكل $x, y \in V(G)$ توجد مسارات منفصلة داخليًا تربط بين $x$،$y$.

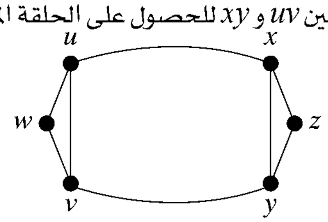
C) لكل $x, y \in V(G)$، توجد حلقة تمر بـ $x$ و $y$.

D) $\delta(G) \geq 1$، وكل زوج من أضلاع $G$ يقع في حلقة واحدة.

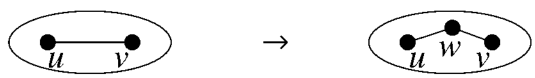
**الإثبات:** تعطي النظرية 4.2.2 التكافؤ $A \longleftrightarrow B$ ، $B \longleftrightarrow C$. لاحظ أن الحلقات التي تحوي $x$ و $y$ ترتبط بأزواج منفصلة داخليًّا من المسارات بين $x$،$y$.

$C \Rightarrow D$: الشرط $\delta(G) \geq 1$ يضمن أن الرأسين $x$ و $y$ غير معزولين. وبهذا، نطبق الجزء الأخير من $D$ على الأضلاع التي تقع على الرأسين $x$ و $y$. إذا وُجد ضلع واحد فقط من هذا النوع، فسنستخدمه بالإضافة إلى أي ضلع آخر يرتبط برأس ثالث.

لإتمام الإثبات؛ نفترض أن $G$ يحقق الشرطين المتكافئين $A$ و $C$، ثم نحصل على $D$. وبما أن $G$ مترابط، فإن $\delta(G) \geq 1$. الآن، خذ في الحسبان الضلعين $uv$ و $xy$. أضف إلى $G$ الرأسين $w$ و $z$ حيث $\{u,v\}$ جوار لـ $w$، و $\{x,y\}$ جوار لـ $z$. وبما أن $G$ مترابط من الدرجة 2، فإن تمهيدية التوسيع (3.2.4) تضمن أن البيان الناتج عن الإضافة $G'$ مترابط من الدرجة 2. لذا، فإن الشرط $C$ يتحقق في $G'$. وبناءً عليه، فإن $z$ و $w$ يقعان في حلقة $C$ في $G'$. وبما أن درجة كل من $z$ و $w$ تساوي 2، فإن $C$ تحوي المسارات $u,w,v$ و $x,z,y$ ولا يحوي الضلعين $uv$ أو $xy$. استبدل بالمسارات $u,w,v$ و $x, z,y$ في $C$ الضلعين $uv$ و $xy$ للحصول على الحلقة المطلوبة التي تمر بـ $uv$ و $xy$ في $G$. ■




**5.2.4. تعريف:** إذا كان $uv$ ضلعًا في بيان $G$، فإن عملية استبدال الضلع $uv$ تسمى المسار $u,w,v$ ($w$ رأس جديد) بقسمة (تقسيم) الضلع $uv$.



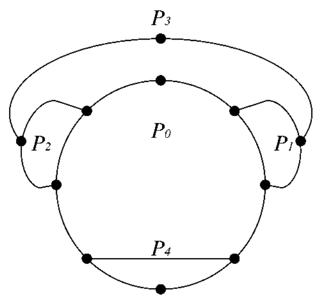
**6.2.4. النتيجة:** إذا كان $G$ مترابطًا من الدرجة 2، فإن البيان $G'$ الناتج عن قسمة أحد أضلاع $G$ يكون مترابطًا من الدرجة 2.

**الإثبات:** افترض أننا حصلنا على $G'$ من $G$ بإضافة الرأس $w$ لقسمة الضلع $uv$. لإثبات أن $G'$ مترابط من الدرجة 2؛ يكفي أن نجد حلقة تمر بضلعين اختياريين $e,f$ من $G'$ (النظرية 4D.2.4).

بما أن $G$ مترابط من الدرجة 2، فإن أي ضلعين من $G$ يقعان في حلقة مشتركة (النظرية 4D.2.4). عندما يقع الضلعان $e,f$ من أضلاع $G'$ في $G$، فإن الحلقة التي يقعان فيها تكون حلقة في $G'$ أيضًا، إلا إذا كان الضلع $uv$ ضلعًا في هذه الحلقة؛ ففي هذه الحالة، نعدّل الحلقة بأن يحل محل الضلع $uv$ مسار من $u$ إلى $v$ طوله 2 يمرّ من خلال $w$. عندما $e \in E(G)$ و $f \in \{uw,wv\}$، فإننا نعدل الحلقة التي تمرُّ خلال $e$ و $uv$ في $G$، وعندما $\{e,f\} = \{uw,wv\}$، فإننا نعدل حلقة تمرُّ خلال $uv$. ■

تتمتع البيانات المترابطة من الدرجة 2 بصفة مميزة تعبِّر عن بناء كلٍّ من هذه البيانات من حلقة ومسارات.

**7.2.4. تعريف:** نعرِّف أُذن (أو مقبض) (ear) البيان $G$ على أنه مسار في $G$ محتوى في حلقة، بحيث يكون أكبر ما يمكن من حيث عدد الرؤوس الداخلية التي درجتها 2 في $G$. ونقصد بالتفكيك المقبضي للبيان $G$، على أنه تفكيك على الشكل $P_0, \ldots, P_k$، حيث $P_0$ حلقة، و$P_i$ $(i \geq 1)$ مقبض أو أُذن لـ $P_0 \cup \ldots \cup P_i$.




**8.2.4. نظرية (Whitney [1932a])**

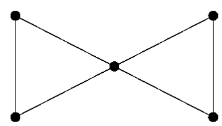
يكون البيان مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وُجدَ له تفكيك مقبضي. بالإضافة إلى ذلك، فإن كلَّ حلقة في بيان مترابط من الدرجة 2 تمثِّل أول حلقة (حلقة البدء) لتحليل (تفكيك) مقبضي.

**الإثبات:** الكفاية: بما أنّ أيّ حلقة هي بيان مترابط من الدرجة 2، فيكفي أثبت أن إضافة مقبض تحافظ على الترابط من الدرجة 2. افترض أنَّ $u,v$ النقطتان الطرفيتان للمقبض $P$ الذي سيضاف إلى بيان $G$ مترابط من الدرجة 2. لاحظ أن إضافة ضلع لا تنقص مقدار الترابط. لذا، فإن $G+uv$ يبقى مترابطًا من الدرجة 2. إن إجراء عمليات قسمة ضلع يحول $G + uv$ إلى البيان $G \cup P$ حيث $P$ مقبض (أذن). لذا، وباستخدام النتيجة 6.2.4، فإن كلّ قسمة ضلع تحافظ على الترابط من الدرجة 2.

الضرورة: إذا أُعطينا بيان $G$ مترابطًا من الدرجة 2، فإننا نبني (نجد) له تحليلاً مقبضيًّا من حلقة $C$ في $G$. افترض أن $G_0=C$، اجعل $G_i$ يمثّل البيان الجزئي الذي تحصل عليه بإضافة $i$ من المقابض بالتتابع. إذا كان $G_i \neq G$، فنختار ضلع $uv \in G\text{-}E(G_i)$ وضلع $xy$ في $E(G_i)$ وبما أن $G$ مترابط من الدرجة 2، إذن توجد حلقة $C'$ تحوي كلًّا من $uv$ و $xy$.

افترض أنَّ $P$ المسارُ في $C'$ الذي يحوي $uv$، ويحوي رأسين فقط من $G_i$؛ واحد عند كل طرف من طرف في $P$. الآن، نستطيع إضافة $P$ إلى $G_i$ للحصول على بيان جزئي أكبر $G_{i+1}$ والذي يمثل $P$ فيه مقبضًا، وتنتهي هذه العملية فقط عندما نحصل على $G$ كله. ■

نعلم أن كل بيان مترابط من الدرجة 2 يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2، ونعلم كذلك أن عكس هذه العبارة غير صحيح. تذكر أن شكل الفراشة (فراشي الشكل) (bowtie) هو البيان الذي يتألف من مثلثين مشتركين في رأس واحد فقط. إن هذا البيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، ولكنه غير مترابط من الدرجة 2. وبما أن الكثير من البيانات تكون مترابطة ضلعيًّا من الدرجة 2، فإن تحليل هذا النوع من البيانات يحتاج إلى عملية أعمّ من السابق. إن إثبات هذا يشبه إثبات النظرية 8.2.4



**9.2.4. تعريف:** نُعرِّف المقبض (الأذن المغلقة) المغلق في بيان $G$ على أنه حلقة $C$، بحيث إن الرؤوس في $C$ جميعها ما عدا واحدًا تكون ثنائية الدرجة. ويعرِّف تحليل المقابض المغلقة لبيان $G$ على أنه تحليل على الشكل $P_0,...,P_k$، حيث $P_o$ حلقة، و $P_i$ $(i > 1)$ إما مقبض (مفتوح) أو مقبض مغلق في $P_o \cup \ldots \cup P_i$

**10.2.4. نظرية**: يكون البيان مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وُجِدَ له تحليل مقبضي مغلق. وكل حلقة في البيان المترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 تكون أول حلقة (حلقة البدايَة) لتحليل من هذا النوع.

**الإثبات:** الكفاية: تذكر (النظرية 1.2.14) أنَّ الأضلاعَ الفاصلة أضلاعٌ غير موجودة في حلقات. لذا، فإن البيان المترابط يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا كان كل ضلع من أضلاعه يقع في حلقة. وأن حلقة البداية مترابطة ضلعيًّا من الدرجة 2. عندما نضيف مقبضًا مغلقًا، فإن أضلاعه تشكل حلقة. وعندما نضيف مقبضًا مفتوحًا $P$ لبيان مترابط $G$، فإن مسارًا في $G$ يربط بين أطراف $P$ يكمل (يتم) حلقة تحوي أضلاع $P$ كلّها. وفي الحالات جميعها فإن البيان الناتج يكون مترابطًا. لذا، فإن إضافة مقبض مفتوح أو مغلق تحافظ على الترابط الضلعي من الدرجة 2.

الضرورة: إذا أُعطينا بيان $G$ مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2. افترض أن $P_o$ حلقة في $G$، اجعل $P_o, \ldots, P_i$ تحليلًا مقبضيًّا مغلقًا لبيان جزئي $G_i$ من $G$. إذا كانت $G_i \neq G$، فباستطاعتنا إضافة مقبض لـ $G_i$. وبما أن $G$ مترابط، إذن يوجد ضلع $uv \in E(G) - E(G_i)$ حيث $u \in V(G_i)$. وبما أن $G$ مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، فإن $uv$ يقع في حلقة $C$. تتبع $C$ حتى تعود إلى $V(G_i)$. وبهذا نكون قد شكّلنا لغاية الآن إما مسارًا أو حلقة $P$. وبإضافة $P$ إلى $G_i$، فإننا نحصل على بيان جزئي $G_{i+1}$ أكبر من $G_i$ يشكِّل فيه $P$ مقبضًا مفتوحًا أو مغلقًا. ولا بدّ لهذه العملية أن تنتهي بحصولنا على $G$ كله. ■

## ترابط البيانات الموجهة (Connectivity of Digraphs)

تنطبق النتائج التي حصلنا عليها والمتعلقة بالبيانات المترابطة والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة $k$ على البيانات الموجهة المترابطة والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة $k$، حيث نستخدم مصطلحات مشابهة أو مماثلة للتي استُخدمت في حال البيانات.

**11.2.4. تعريف:** تعرّف المجموعة الفاصلة أو قاطعة الرؤوس لبيان موجه $D$ على أنها مجموعة جزئية $S$ من $V(D)$، بحيث إن $D$-$S$ غير مترابط بقوة. ويعرّف مقدار الترابط $\kappa(D)$ على أنه أصغر حجم لمجموعة رؤوس $S$، بحيث إن $D$-$S$ غير قوي أو له رأس واحد فقط. ونقول: إن البيان الموجه $D$ مترابط من الدرجة $k$ إذا كان مقدار ترابطه يساوي $k$ على الأقل.

إذا كانت كلٌّ من $S$ و $T$ مجموعتي رؤوس في بيان موجه $D$، فاجعل $[S,T]$ تمثل مجموعة الأضلاع التي ذيل كلّ منها في $S$، ورأس كلّ منها في $T$. نقصد بالقاطعة الضلعية المجموعة $[S,\overline{S}]$، حيث $S \neq \phi$ و $S \subset V(D)$.
ونقول: إن البيان الموجه $D$ مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$ إذا وُجد $k$ من الأضلاع في كل قاطعة ضلعية على الأقل. يُسمّى أقلّ حجم لقاطعة ضلعية مقدارَ الترابط الضلعي ويُرمز إليه بالرمز $\kappa'(D)$.

**12.2.4. ملاحظة:** بما أن $|[S,\overline{S}]|$، عددُ الأضلاع الخارجة (المغادرة) من $S$، فإنا نستطيع إعادة تعريف الترابط الضلعي على الصورة الآتية:

نقول: إن البيان أو البيان الموجه $G$ مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$ إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: لكل مجموعة جزئية فعلاً $S$ من $V(G)$ يوجد على الأقل $k$ من أضلاع $G$ المغادرة لـ $S$ (الخارجة من $S$).

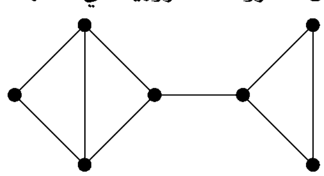
لاحظ أن $[S,T]$ هي مجموعة الأضلاع من $S$ إلى $T$. يعتمد معنى هذا الرمز على $G$ من حيث إنّه بيان أو بيان موجّه؛ ففي حالة البيان، يكون الحديث عن الأضلاع التي نقاطها الطرفية في كلتا المجموعتين. أما في حال البيان الموجه فيكون الحديث عن الأضلاع التي رؤوسها في $S$ وذيولها في $T$. ■

تنويه: تشبه البياناتُ الموجهةُ القويةُ البياناتِ المترابطةَ ضلعيًّا من الدرجة 2.

**13.2.4. قضية:** إن إضافة مقبض (موجه) إلى بيان موجّه قوي (مترابط بقوة) تعطي بيانًا موجهًا أكبر.

**الإثبات:** نعلم من الملاحظة 12.2.4 أن البيان الموجّه يكون قويًّا إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: يوجد ضلع مغادر لكل مجموعة جزئية فعلاً من الرؤوس. إذا أضفنا مقبضًا مفتوحًا (مغلقًا) $P$ إلى بيان موجّه قوي $D$، فإنه يوجد لكل مجموعة $S$ حيث $\phi \subset S \subset V(D)$ ضلعًا من $S$ إلى $V(D)$-$S$. لذا، يجب علينا فقط معالجة المجموعات التي لا تتقاطع مع $V(D)$ والمجموعات التي تحوي $V(D)$ كلها، ولكنها لا تحوي $V(P)$ كلها. يوجد ضلع لكلّ مجموعة من هذه المجموعات يغادرها من خلال $P$. ■

السؤال المطروح الآن: متى نستطيع عمل شبكةٍ من الطرق بحيث تكون جميعها في اتجاه واحد، وبحيث يمكن الوصول من أي مكان إلى أي مكان آخر؟ وبكلمات أخرى: متى يكون للبيان الموجه توجيهٌ قويٌّ؟ لاحظ أنه لا يوجد توجيه قوي للبيان أدناه. ولاحظ أيضًا أن الشروط الضرورية هي نفسها كافية للإجابة عن سؤالنا.



**14.2.4. نظرية:** (Robbins [1939]).

يوجد للبيان توجيه قوي إذا وفقط إذا كان مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2.

**الإثبات:** الضرورة: إذا كان البيان $G$ غير مترابط، فهناك بعض الرؤوس التي لا يمكن الوصول إليها من رؤوس أخرى مهما كان التوجيه المستخدم.

إذا وُجد للبيان $G$ ضلع فاصل (قاطع) $xy$ موجه من $x$ إلى $y$ ضمن توجيه $D$، فإنه لا يمكن الوصول إلى $x$ من $y$ ضمن $D$. لذا، يجب أن يكون $G$ مترابطًا، وليس له ضلع قاطع.

الكفاية: عندما يكون $G$ مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2، فيوجد له تفكيك مقبضي مغلق. لذا، نعطي توجيهًا متناسقًا لأول حلقة للحصول على بيان موجه قوي. وكلما أضفنا مقبضًا جديدًا، فإننا نوجهه بتناسق. لذا، فإن القضية 13.2.4 تضمن استمرارية حصولنا على بيان موجه قوي. ■

يمكن تعميم نظرية روبن Robbin لأيٍّ $k$. عندما يكون لـ $G$ توجيه مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$، فإن الملاحظة 12.2.4 تضمن أن $G$ يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $2k$. لقد أثبت العالمان ناش ووليامز في العام 1960م أن الشرط الضروري كاف أيضًا. يكون للبيان توجيه مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$ إذا وفقط إذا كان البيان مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $2k$. ويعدّ هذا سهلاً عندما يكون $G$ بيانًا أويلريًّا (التمرين 21)، ولكن الحالة العامة صعبة (التمارين 36–38). توجد مناقشة شاملة لهذه المسألة بالإضافة إلى بعض مسائل التوجيهات الأخرى في كتاب (Frank [1993]).

## البيانات المترابطة من الدرجة $k$ والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة $k$ (K-connected and k-edge-Connected Graphs)

لقد قدمنا مقياسين للربط الجيد، هما: المناعة ضد الحذف، وتكرار المسارات البديلة. وبتعميم (تمديد) نظرية وتني (whitney›s)؛ سنثبت أن هاتين الميزتين هما الشيء نفسه بالنسبة إلى حذف كلٍّ من الرؤوس والأضلاع، ويشترك في ذلك البيانات والبيانات الموجهة أيضًا.

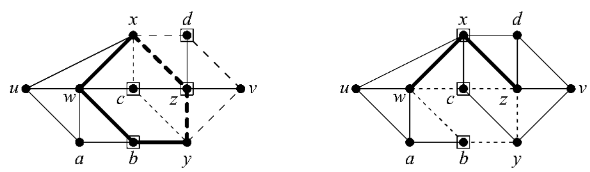
أولاً، سنناقش (موضعيًّا) مسألة المسارات من $x$ إلى $y$ لزوج ثابت $x$ و $y$ في $V(G)$. إن هذه التعريفات صحيحة لكلٍّ من البيانات والبيانات الموجهة.

**15.2.4. تعريف:** لتكن $x،y \in V(G)$ نقول: إن المجموعة $S$ المحتواة في $V(G) - \{x,y\}$ فاصل للمسار $x،y$، أو قاطع للمسار $x،y$ إذا كان $G\text{-}S$ يخلو من المسارات من $x$ إلى $y$. اجعل $\kappa(x,y)$ تمثل أصغر حجم لقواطع المسار $x،y$. واجعل $\lambda(x,y)$ تمثل أكبر حجم لمجموعة منفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا من المسارات من $x$ إلى $y$. لتكن $X.Y \subseteq V(G)$. نقصد بالمسار $X،Y$ المسار الذي رأسه الأول في $X$، ورأسه الأخير في $Y$، وليس له أيّ رؤوس أخرى في $X \cup Y$.

بما أن أي قاطع للمسار $x,y$ يحوي رأسًا داخليًّا لكل مسار من $x$ إلى $y$، ولا يوجد أي رأس يستطيع فصل أي مسارين منفصلين داخليًّا من $x$ إلى $y$، فإن $\kappa(x,y) \geq \lambda(x,y)$ دائمًا.

لذا، فإن مسألة إيجاد أصغر قاطع، ومسألة إيجاد أكبر مجموعة مسارات هي مسائل ثنوية (ازدواجية) (dual problems). مثل الثنوية (الازدواجية) بين المواءمة (matching) والتغطية (*Covering*) في الفصل الثالث.

**16.2.4. مثال:** في البيان $G$ المرسوم أدناه، لاحظ أن المجموعة $S=\{b,c,z,d\}$ عبارة عن قاطع للمسار $x,y$ حجمه 4. لذا، فإن $\kappa(x,y) \leq 4$. وكما يظهر من الشكل على اليسار، يوجد للبيان $G$ أربعة مسارات منفصلة داخليًّا من $x$ إلى $y$. لذا، فإن $\lambda(x,y) \geq 4$. وبما أن $\kappa(x,y) \geq \lambda(x,y)$ دائمًا، فإن $\kappa(x,y) = \lambda(x,y) = 4$.




افترض الزوج $w،z$، كما يظهر عن اليمين، $k(w,z) = \lambda(w,z) = 3$، لاحظ أن $\{b,c,x\}$ تمثل قاطعًا أصغر للمسار $w، z$. إن البيان $G$ مترابط من الدرجة 3. لذا، فلكل زوج $u,v \in V(G)$، نستطيع إيجاد ثلاثة مسارات منفصلة داخليًّا من $u$ إلى $v$.

ومن المساواة للمسارات المنفصلة داخليًّا، نستطيع الحصول على مساواة للمسارات المنفصلة ضلعيًّا. لاحظ أنه على الرغم من أن $\kappa(w,z)=3$ أعلاه، إلا أنه يلزمنا أربعة أضلاع لفصل المسارات من $w$ جميعها إلى $z$، وكذلك يوجد 4 مسارات من $w$ إلى $z$ منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. ■

تفيد نظرية منجر (Menger's Theorem) أن المساواة $\kappa(x,y) = \lambda(x,y)$ تتحقق موضعيًّا دائمًا. إن المسألة الكلية المتعلقة بمقدار الترابط والنتائج المماثلة المتعلقة بمقدار الترابط الضلعي والمتعلقة بالبيانات الموجهة قد نوقشت من قبل آخرين، ولكن هذه النقاشات والنظريات جميعها كانت دائمًا صورة من صور نظرية منجر؛ حيث ظهر أكثر من خمسة عشر إثباتًا لهذه النظرية؛ بعضها أعطى نتائج أقوى، في حين كان بعضها الآخر غير صحيح. (لقد عالج (كونج) könig الفجوة الموجودة في النظرية الأصلية لمنجر).

**4.2.17. نظرية منجر.** (Menger [1927]) إذا كان $x$, $y$ رأسين من رؤوس البيان $G$، بحيث إن $xy \notin E(G)$ فإن أصغر حجم لقاطع من قواطع المسار $x, y$ يساوي أكبر عدد من المسارات من $x$ إلى $y$ بحيث تكون هذه المسارات منفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا.

**الإثبات:** يجب أن يحوي أي قاطع للمسارات $x, y$ رأسًا داخليًّا من كل مسار من مجموعة المسارات $x, y$ المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا، ويجب أن تكون هذه الرؤوس مختلفة. لذا، فإن $\kappa(x,y) \geq \lambda(x,y)$.

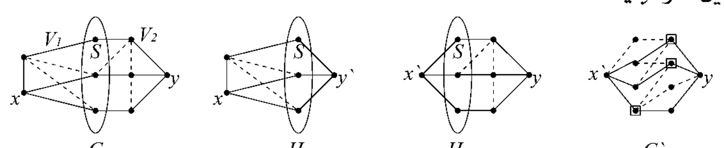
لإثبات المساواة؛ نستخدم الاستقراء على $n(G)$. الخطوة الأساس: $n(G)=2$ هنا $xy \notin E(G)$ تعطي $\kappa(x,y)=\lambda(x,y)=0$.

خطوة الاستقراء: $n(G) > 2$. افترض أن $k = \kappa_G(x,y)$. سنبني $k$ مسارًا من $x$ إلى $y$ بحيث تكون هذه المسارات منفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا. وبما أن $N(x)$ و $N(y)$ تمثل قواطع للمسارات $x,y$، فلا يوجد قاطع أصغر يحوي $N(x)$, $N(y)$ بوصفها مجموعات جزئية فعلية.

**الحالة الأولى:** يوجد للمسارات $x,y$ في $G$ قاطع أصغر $S$ مختلف عن $N(x)$ و $N(y)$. وللحصول على $k$ مسارًا المطلوبة؛ نضم المسارات $x,S$ إلى المسارات $S,y$ التي نحصل عليهما من فرضية الاستقراء (الخطوط المتصلة في الشكل أدناه). افترض أنَّ $V_1$ الرؤوسُ الموجودةُ على المسارات $x,S$، و $V_2$ هي الرؤوس الموجودة على المسارات $S,y$. الآن، ندعي أن $S=V_1 \cap V_2$. وبما أن $S$ قاطع أصغر للمسارات $x,y$، فإن كل رأس في $S$ يقع على مسار من $x$ إلى $y$. لذا، فإن $S \subseteq V_1 \cap V_2$. إذا كانت $v \in (V_1 \cap V_2) - S$، فتتبع الجزء $x,v$ من أحد المسارين $x,S$، ومن ثم تتبع الجزء $v,y$ لأحد المسارين $S,y$ لتحصل على مسار من $x,y$ لا يتقاطع مع القاطع $S$ للمسارين $x,y$. إن هذا مستحيل. لذا، فإن $S=V_1 \cap V_2$. وبطريقة التعليل نفسها، نجد أن $V_1$ تحذف $N(y)$-$S$، أما $V_2$ فتحذف $N(x)$-$S$.

كوِّنْ $H_1$ بإضافة رأس $y'$ للبيان $G[V_1]$ وأضلاعًا تنطلق من $S$، ثم كوِّنْ $H_2$ بإضافة رأس $x'$ للبيان $G[V_2]$ وأضلاعًا تنطلق من $x'$ إلى $S$. لاحظ أن كل مسار $x,y$ في $G$ يبدأ بمسار $x,S$ (محتوى في $H_1$). لذا، فإن كل قاطع $x,y'$ في $H_1$ يكون قاطعًا لـ $x,y$ في $G$. ولذلك، نجد أن $\kappa_{H_1}=(x,y')$. وبالمثل نجد أن $\kappa_{H_2}=(x',y)$.

وبما أن $V_1$ تحذف $N(y)$-$S$، و $V_2$ تحذف $N(x)$-$S$، فإن كلًّا من $H_1$ و $H_2$ أصغر من $G$. ومن هنا، فإن فرضية الاستقراء تعطي أن $\lambda_{H_1}(x,y')=k=\lambda_{H_2}(x',y)$. وبما أن $V_1 \cap V_2=S$، فإن حذف $y'$ من $k$ مسارًا في $H_1$ و $x'$ من الـ $k$ مسارًا في $H_2$ يعطي المسارات $x,S$ و $S,y$ في $G$ اللازمين لتشكيل $k$ من المسارات المنفصلة داخليًّا، والتي تربط بين $x$ و $y$ في $G$.




G    حالة 1 $H_1$    $H_2$    حالة 2 G

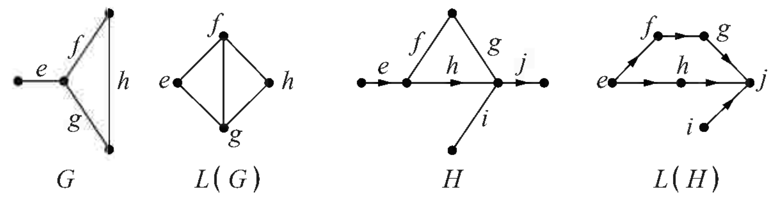
**الحالة الثانية:** كل قاطع أصغر للمسارات $x,y$ إما أن يكون $N(x)$ أو $N(y)$. ثانية سنقوم ببناء $k$ مسارًا

المطلوبة. في هذه الحالة، كل رأس خارج $\{x \cup N(x) \cup N(y) \cup y\}$ لا يقع في قاطع أصغر للمسارات $x$،$y$. إذا وُجد لـ $G$ رأس $v$ مثل هذا الرأس، فإن $k_{G-v}(x,y)=k$، وبتطبيق فرضية الاستقراء على $G-v$، نحصل على المسار $x$،$y$ المطلوب في $G$. وكذلك إذا وُجد $u$ في $N(x)\cap N(y)$، فإن $u$ يظهر في كل قاطع للمسارات $x$،$y$، ويكون $k_{G-u}(x,y)=k-1$. الآن، وبعد تطبيق فرضية الاستقراء على $G-v$، فإننا سنحصل على $k-1$ مسارًا نضمها للمسارات $x$،$u$،$y$. لذا، يمكن افتراض أنَّ كلًّا من $N(x)$ و $N(y)$ تجزئة للمجموعة $V(G)-\{x,y\}$. افترض أنَّ $G'$ البيانُ الثنائيُّ الفرع الذي مجموعتا رؤوسه $N(x)$ و $N(y)$ ومجموعة أضلاعه $[N(x),N(y)]$. لاحظ أن كل مسار $x$،$y$ في $G$ يستخدم ضلعًا من $N(x)$ إلى $N(y)$. لذا، فإن قواطع المسارات $x,y$ في $G$ هي رؤوس تغطية $G'$، إذن، $\beta(G')=k$. وباستخدام نظرية Köning – Egervāry، فإنه يوجد للبيان $G'$ مواءمة (matching) حجمها $k$. إن هذه الـ $k$ ضلعًا تعطي $k$ من المسارات $x$،$y$ المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا طول كل منهما يساوي 3. ■

لاحظ أننا نحتاج إلى الحالة الثانية في الإثبات؛ لأنه في الحالة التي يكون فيها $S=N(x)$ لا نستطيع استخدام فرضية الاستقراء للحصول على المسارات $S$،$y$. إن منطوق النظرية 17.2.4 يبقى صحيحًا للبيانات الموجهة، والإثبات نفسه يعطي النتيجة نفسها بعد أن تحل $N^+(x)$ و $N^-(y)$ محل $N(x)$ و $N(y)$ أينما وجدتا.

سنطوّر فيما يأتي نظرية مماثلة للنظرية 17.2.4 لتطبيقها على المسارات المنفصلة ضلعيًّا (لا يوجد بينها أضلاع مشتركة) والتي سنثبتها باستخدام النظرية 17.2.4 مطبقة على بيان محول لبيان آخر (transformed graph) من خلال عملية تحويل معينة، علمًا بأننا سنستخدم هذه العملية مرة ثانية في الفصل السابع.

**18.2.4. تعريف:** نعرف البيان الخطاني للبيان $G$.$L(G)$ (line graph) على أنه البيان الذي رؤوسه هي أضلاع $G$؛ حيث $f \in E(L(G))$، عندما $e = uv$ و $f = vw$ في $G$. وبوضع كلمة بيان موجه بدلاً من بيان في العبارة السابقة، فإننا نحصل على تعريف البيان الموجه الخطاني. وفي حالة البيانات، لاحظ أن $e$ و $f$ يشتركان في رأس، وفي البيانات الموجهة، يكون رأس $e$ ذيلاً لـ $f$.




عند فصل $x$ عن $y$ بحذف الأضلاع، نستخدم رموزًا مشابهة للرموز التي استخدمت في التعريف 15.2.4. فمثلاً، الرمز $\lambda'(x,y)$ يشير إلى حجم أكبر مجموعة من المسارات $x$،$y$ المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. في حين يشير الرمز $\kappa'(x,y)$ إلى أقل عدد من الأضلاع يلزم حذفه بحيث لا يمكن الوصول إلى $y$ من $x$. في العام 1956م، أثبت كلٌّ من Elias-Feinstein-shanon وFord – Fulkerson أن $\lambda'(x,y)=\kappa'(x,y)$ دائمًا (باستخدام طرق موجودة في الجزء 3.4).

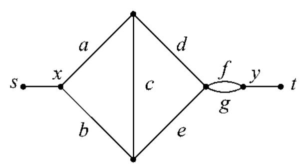
تنويه: لاحظ هنا أننا نسمح بوجود الأضلاع المكررة، كما نسمح بأن يكون $xy \in E(G)$.

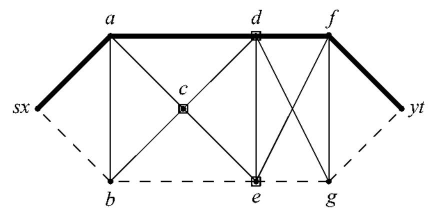
**19.2.4. نظرية:** إذا كان كلٌّ من $x$ و $y$ رأسين مختلفين لبيان أو لبيان موجه $G$، فإن أصغر حجم لمجموعة أضلاع تفصل $x$ عن $y$ يساوي أكبر عدد من المسارات من $x$ إلى $y$ المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا.

**الإثبات:** عدِّل $G$ إلى $G'$ بإضافة رأسين جديدين، هما: $s$،$t$، وضلعين جديدين هما: $sx$،$yt$. إن هذا

لا يغير $\kappa'(x,y)$ ولا يغير $\lambda'(x,y)$ أيضًا. وكذلك يمكننا أن نفكر أن كل مسار يبدأ من الضلع $sx$ وينتهي بالضلع $yt$. إن مجموعة من الأضلاع في $G$ تفصل $y$ عن $x$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة الرؤوس في $L(G')$ المرتبطة بهذه الأضلاع تشكل قاطعة $sx,yt$. وبالمثل، فإن المسارات $x,y$ المنفصلة ضلعيًّا في $G$ تصبح مسارات $sx,yt$ منفصلة داخليًّا في $L(G')$ والعكس صحيح. وبما أن $x\neq y$، فلا يوجد ضلع من $sx$ إلى $ty$ في $L(G')$. وبتطبيق النظرية 17.2.4 على $L(G')$ يكون:

$$\kappa'_G(x,y) = \kappa_{L(G')}(sx,yt) = \lambda_{L(G')}(sx,yt) = \lambda'_G(x,y). \quad ■$$




لوحظت النسخة الشاملة للبيانات المترابطة من الدرجة $k$ من قِبَل whitney عام [1932م]، والتي من الشائع تسميتها نظرية منجر. أما النسخة الشاملة للأضلاع والبيانات الموجهة فقد ظَهرت في العام 1956م في مقالة Ford-Fullkerson.

**20.2.4. تمهيدية**. إن حذف ضلع من بيان معين ينقص مقدار الترابط بمقدار واحد على الأكثر.

**الإثبات:** سنثبت هذه التمهيدية في حال البيانات تاركين حالة البيانات الموجهة إلى التمرين 7. بما أن كل مجموعة فاصلة لـ $G$ هي مجموعة فاصلة لـ $G$-$xy$، فإن $\kappa(G\text{-}xy) \le \kappa(G)$، لاحظ أن المساواة تتحقق إلا إذا وُجد لـ $G$-$xy$ مجموعة فاصلة حجمها أقل من $\kappa(G)$، وعليه لا تكون مجموعة فاصلة لـ $G$. وبما أن $G$-$s$ مترابط، فإن هناك مركبتين للبيان $G$-$xy$-$s$ هما: $G[X]$ و $G[Y]$، حيث $x \in X$ و $y \in Y$ في $G$-$S$، لاحظ أن الضلع الفريد الذي يربط $X$ و $Y$ هو $xy$.

إذا كان $|X| \ge 2$، فإن $\{x\} \cup S$ مجموعة فاصلة لـ $G$، وأن $\kappa(G) \le \kappa(G - xy) + 1$، وإذا كان $|Y| \ge 2$، فإن المتباينة تكون متحققة. أما في الحالة المتبقية $|S| = n(G) - 2$، وبما أننا افترضنا أن $|S| < \kappa(G)$ و $|S| = n(G) - 2$، سنجد أن $\kappa(G) \ge n(G) - 1$، والتي تتحقق فقط للبيانات التامة.

إذن، $\kappa(G - xy) = n(G) - 2 = \kappa(G) - 1$ وهو المطلوب. ■

**21.2.4. نظرية:** إن مقدار ترابط $G$ يساوي أكبر عدد $k$ حيث $\lambda(x,y) \ge k$ لكل $x,y \in V(G)$، في حين يساوي مقدارُ الترابط الضلعي للبيان $G$ أكبرَ عدد $k$ حيث $\lambda'(x,y) \ge k$ لكل $x,y \in V(G)$. لاحظ أن النتائج صحيحة لكلٍّ من البيانات والبيانات الموجهة.

**الإثبات:** بما أن $\kappa'(G) = \min_{x,y \in V(G)} \kappa'(x,y)$، فإن النظرية 19.2.4 تعطي النتيجة في حالة الترابط الضلعي. لحالة الترابط، نعلم أن $\kappa(x,y) = \lambda(x,y)$ حيث $xy \notin E(G)$، ونعلم أيضًا أن $\kappa(G)$ هي أصغر قيمة من هذه القيم. لذا، نحتاج فقط إلى إثبات أن $\lambda(x,y)$ لا يمكن أن تكون أقل من $\kappa(G)$ عندما $xy \in E(G)$. وبالتأكيد، إن حذف $xy$ ينقص $\lambda(x,y)$ بمقدار 1. وبما أن $xy$ نفسه يمثل مسارًا من $x$ إلى $y$، ولا يمكن أن يقع في أي مسار آخر من $x$ إلى $y$. وباستخدام النظرية 17.2.4 والتمهيدية 20.2.4 فإن:

$$\lambda_G(x,y) = 1 + \lambda_{G-xy}(x,y) = 1 + \kappa_{G-xy}(x,y) \ge 1 + \kappa(G - xy) \ge \kappa(G). \quad ■$$

## تطبيقات على نظرية منجر (Applications of Menger's Theorem)

لقد عمَّمَ Dirac نظرية منجر لعائلات أخرى من المسارات.

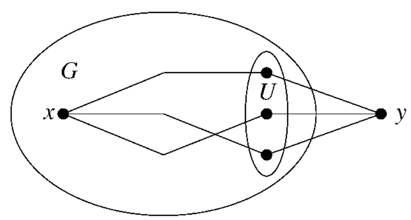
**تعريف 22.2.4.** ليكن $x$ رأسًا، و $U$ مجموعة من الرؤوس، نعرف المروحة $x, U$ على أنها مجموعة المسارات من $x$ إلى $U$ حيث لا يشترك أي مساريين من هذه المسارات في الرأس فقط.

**نظرية 23.2.4.** (Fan lemma, Dirac [1960]).

يكون البيان مترابطًا من الدرجة $k$ إذا وفقط إذا كان له $k + 1$ رأسًا، ولكل خيار لـ $x$ و $U$ حيث $|U| \geq k$، يوجد للبيان مروحة $x, U$ من الحجم $k$.

**الإثبات:** الضرورة: ليكن $G$ بيانًا مترابطًا من الدرجة $k$، جد $G'$ من $G$ بإضافة رأس جديد $y$ يجاور كل رأس في $U$، وباستخدام تمهيدية التمديد أو التوسيع (التمهيدية 3.2.4) نجد أن $G'$ أيضًا مترابط من الدرجة $k$. الآن، وبتطبيق نظرية منجر، يمكن الحصول على $k$ من المسارات $x, y$ في $G'$ بحيث تكون هذه المسارات منفصلة داخليًّا، وبحذف $y$ من هذه المسارات نحصل على مروحة $x, U$ حجمها $k$ في $G$.

الكفاية: افترض أن $G$ يحقق شرط المروحة، لكل $v \in V(G)$، ولكل $\{vI\} - U = V(G)$ توجد مروحة $v, U$ حجمها $k$. لذا، فإن $\delta(G) \geq k$. الآن، افترض أن $w, z \in V(G)$، وأن $U = N(z)$. بما أن $|U| \geq k$، فسيصبح لدينا مروحة $w, U$ حجمها $k$. وسِّع (مدِّد) كل مسار بإضافة ضلع إلى $z$، وبهذا نحصل على $k$ من المسارات $w, z$ المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا. لذا، فإن $\lambda(w, z) \geq k$، وهذا يتحقق لكل $w, z \in V(G)$. لذلك، فإن $G$ مترابط من الدرجة $k$. ■




يمكن تعميم تمهيدية المراوح كالآتي: عندما تكون $X$ و $Y$ مجموعتين منفصلتين من رؤوس بيان $G$، حيث إن هذا البيان مترابط من الدرجة $k$، وعندما نحدّد أعدادًا صحيحةً عند الرؤوس في كل من $X$ و $Y$ بحيث يكون مجموع هذه الأعداد مساويًا $k$ لكل مجموعة، فإن هناك $k$ من المسارات $X, Y$ المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا. حيث ينتهي العدد المحدد عند كل نقطة (التمرين 28). وكذلك، فإن تمهيدية المروحة تعطي النتيجة الآتية:

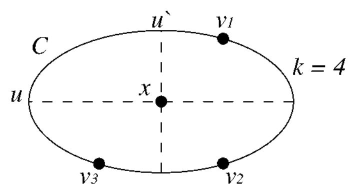
**نظرية 24.2.4.** * (Dirac [1960]). إذا كان $G$ بيانًا مترابطًا من الدرجة k $(k \geq 2)$، وكانت $S$ مجموعة تحوي $k$ رأسًا من رؤوس $G$، فإن هذا يُوجَدُ حلقة في $G$ تحوي $S$ ضمن مجموعة رؤوسها.

**الإثبات:** بالاستقراء على $k$. الخطوة الأساس $(k = 2)$: تضمن النظرية 2.2.4 (أو النظرية 21.2.4) أن كل رأسين يرتبطان بمسارين منفصلين داخليًّا. وهذا يضمن وجود حلقة تحويهما.

خطوة الاستقراء $(k > 2)$: اختر $x \in S$. بما أن $G$ مترابط أيضًا من الدرجة $k - 1$، فإن فرضية الاستقراء تضمن أن $S - \{x\}$ جميعها تقع على حلقة $C$. افترض أن $n(C) = k - 1$. بما أن $G$ مترابط من الدرجة $k - 1$، فلدينا مروحة $x, V(C)$ حجمها $k - 1$، ومسارات المروحة إلى رأسين متتابعين في $C$ يوسِّع الحلقة لتشمل $x$. لذا،

نستطيع افتراض أن $n(C) \geq k$. وبما أن $G$ مترابط من الدرجة $k$، فيوجد في $G$ مروحة $V(C)$ ,$x$ حجمها $k$. الآن ندعي ثانيةً وجود مسارين في المروحة يشكلان التفافًا (انعطافًا) عن $C$ يشمل $x$، في حين يبقى $S - \{x\}$. افترض أن $v_1, \ldots, v_{k-1}$ هي ترتيب الرؤوس $S - \{x\}$ على $C$. واجعل $V_i$ تمثل الجزء من $V(C)$ من $v_i$ إلى $v_{i+1}$، ولكن لا تشمل $v_{i+1}$ (هنا $v_k = v_1$).

تعمل المجموعات $V_1, \ldots, V_{k-1}$ تجزئة لـ $V(C)$ إلى $k - 1$ مجموعة منفصلة. وبما أن المروحة $V(C)$ ,$x$ تحتوي $k$ مسارًا، فإن مسارين من هذه المسارات يدخلان $V(C)$ في واحدة من هذه المجموعات باستخدام مبدأ صناديق الحمام. افترض أن $u$ و $u'$ الرأسان اللذان تصل عندهما هذه المسارات إلى $C$. استبدل بالجزء $u, u'$ من $C$ مسار $x, u$ ومسار $x, u'$ في المروحة لتحصل على حلقة جديدة تحتوي $x$ و $\{x\}$ - $S$ كلها. ■




يعتمد العديد من تطبيقات نظرية منجر على إيجاد نموذج للمسألة بحيث ترتبط الأشياء المراد إيجادها بالمسارات في بيان أو بيان موجه، وغالبًا ما نستند إلى تعليل يعتمد على تحويل لبيان معين. فعلى سبيل المثال، إذا أعطينا المجموعات $\mathbf{A} = A_1, \ldots, A_m$ التي اتحادها $X$، فإن مجموعة العناصر المختلفة $x_1, \ldots, x_m$ حيث $x_i \in A_i$ تسمى **نظام تمثيل بواسطة العناصر المختلفة (System of distinct representatives)** ويرمز إليه بالرمز **(SDR)**. إن الشروط الضرورية واللازمة لوجود SDR هو أن $|\cup_{i \in J} A_i| \geq |I|$ لكل $I \quad [m]$. ولإثبات ذلك؛ نستخدم نظرية هال(Hall) بإيجاد نموذج يمثل $\mathbf{A}$ بوصفه بيانًا ثنائي الفرع (التمرين 19.1.3). في الحقيقة، أثبتت نظرية هال(Hall) باستخدام لغة SDRs ، وهي تكافئ نظرية منجر (التمرين 23).

لقد قامَ كلٌّ من Ford و Fulkerson بحل مسألة أصعب. خذ عائلتين $\mathbf{A} = A_1, \ldots, A_m$، و $\mathbf{B} = B_1, \ldots, B_m$ من المجموعات. والسؤال: هل يوجد لهاتين العائلتين **نظام تمثيل مشترك بواسطة العناصر المختلفة (CSDR)**؟ ونعني بذلك: هل يوجد $m$ من العناصر تشكل SDR للعائلة $\mathbf{A}$ و SDR للعائلة $\mathbf{B}$؟ لقد وجد الشروط الضرورية والكافية لذلك.

### 25.2.4. نظرية* (Ford – Fulkerson [1958])

يوجد للعائلتين $\boldsymbol{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ و $\boldsymbol{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ نظام تمثيل مشترك بواسطة العناصر المختلفة (CSDR) إذا وفقط إذا تحقق أن $\left|\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in i} B_j\right)\right| \geq |I| + |J| - m$ لكل زوج $I, J \subseteq [m]$ .

**الإثبات:** سنجد بيانًا موجهًا $G$ رؤوسه هي: $a_1, \ldots, a_m$ و $b_1, \ldots, b_m$ بالإضافة إلى رأس لكل عنصر في المجموعات، ورأسين خاصين هما: $s, t$. إن الأضلاع هي:

$$\{sa_i : A_i \in \mathbf{A}\} \ \{a_i x : x \in A_i\}$$

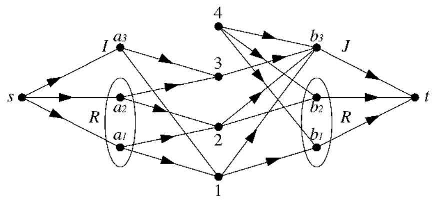
$$\{b_j t : B_j \in \mathbf{B}\} \ \{x b_j : x \in B_j\}$$

يختار كلُّ مسار $s, t$ عنصرًا من تقاطع $A_i$ مع $B_j$. ويوجد CSDR إذا وفقط إذا وُجِدَت مجموعة مؤلفة

من $m$ من المسارات $s،t$ المنفصلة داخليًّا. وباستخدام نظرية منجر، يكفي إثبات أن هذا الشرط يكافئ وجود قاطع للمسارات $s،t$ حجمه أقل من $m$. إذا أعطيت المجموعة $R$ بحيث إن $R \subseteq V(G) - \{s, t\}$، افترض أن $I=\{a_i\} - R: a_i \notin R$ و $J=\{b_j\} - R: b_j \notin R$. لاحظ أن $R$ قاطع $s, t$ إذا وفقط إذا كان $R \subseteq (\bigcup_{i\in I} Ai) \cap (\bigcup_{j\in J} Ej)$، لذا، فالقاطع $R$ للمسارات $s, t$

نجد أن: $|R| \geq |(\bigcup Ai) \cap (\bigcup Ej) + (m - |I|) + (m - |J|)$.

إن هذا الحد الأدنى يساوي $m$ على الأقل لكل قاطع للمسارات $s, t$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط المنصوص عليه. (يشمل هذا التكافؤ ملاحظة وجود قاطع لـ $J$ و $I$ جميعهما؛ حيث يتكون من خلف (توابع) $s$ التي دليلها ليس $I$، ومن سلف (سوابق) $t$ التي دليلها ليس $J$، وعناصر في المجموعة $(\bigcup_{i\in I} Ai) \cap (\bigcup_{j\in J} Ej)$ في الوسط. ■




**26.2.4. مثال** : بيان موجه لـ CSDR.

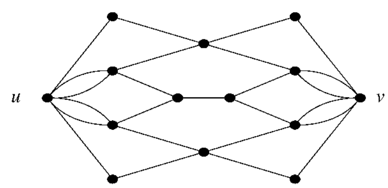
في المثال أعلاه، العناصر هي: $\{1.2.3.4\}$ ، $A= \{12.23.31\}$

و $B= \{14.24.1334\}$. افترض أن $R \cap \{a_i\} = \{a_1, a_2\}$، وأن $R \cap \{b_j\} = \{b_1, b_2\}$. في التعليل، اجعل $I = \{a_3\}$ و $J = \{b_3\}$، ولاحظ أن $R$ يمثل قاطع $s, t$ إذا وفقط إذا احتوى على $\{1.3\}$ التي تساوي

$(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)$ ■

## تمارين (Exercises)

**1.2.4.** (−): جد $\kappa(u, v)$ و $\kappa'(u, v)$ للبيان الموجود في الشكل أدناه (مساعدة: استخدم المسائل الثنوية أو الازدواجية (dual problems) لإعطاء براهين قصيرة للأمثلية).




**2.2.4.** (−): أثبت أنه إذا كان $G$ مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2، وإذا حصلنا على $G'$ من $G$ بقسمة أحد أضلاع $G$، فإن $G'$ مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2. استخدم هذا لإثبات أنه إذا كان للبيان تحليل مقبض مغلق، فإن البيان يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2 (تعليق: هذا إثبات بديل للكفاية في النظرية 10.2.4).

**3.2.4.** (−) افترض أن $G$ بيان موجه حيث $[12]$ تمثل مجموعة رؤوسه، وحيث إن $i \to j$ إذا وفقط إذا كانت $i$ تقسم $j$. جد $\kappa$ (1 و 12) و $\kappa'$ (1 ، 12).

**4.2.4.** (−) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كان $P$ مسارًا من $u$ إلى $v$ في بيان $G$ مترابط من الدرجة 2. فإنه يوجد مسار $Q$ من $u$ إلى $v$ بحيث إن $Q$ منفصل داخليًّا عن $P$.

**5.2.4.** (−) افترض أن $G$ بيان بسيط، واجعل $H(G)$ تمثل البيان الذي رؤوسه $V(G)$ بحيث إن $uv \in E(H)$

إذا وفقط إذا ظهر كل من $u$ و $v$ في الحلقة نفسها التي في $G$. أعطِ توصيفًا للبيانات $G$ بحيث يكون $H$ بيانًا تامًّا.

**6.2.4** (-) استخدم النتائج الموجودة في هذا الدرس لإثبات أن البيان البسيط $G$ يكون مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا أمكن الحصول على $G$ من $C_3$ بعمل مجموعة من عمليات إضافة الأضلاع وقسمتها.

• • • • •

**7.2.4** إذا كان $xy$ ضلعًا في البيان الموجه $G$، فأثبت أن $\kappa(G - xy) \ge \kappa(G) - 1$.

**8.2.4** أثبت أن البيان البسيط $G$ يكون مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: لكل ثلاثية مرتبة $(x, y, z)$ من الرؤوس المختلفة، يوجد مسار من $x$ إلى $z$ يمر من خلال $y$ (chein [1968]).

**9.2.4** افترض أن $G$ بيان له أربعة رؤوس على الأقل. أثبت أن $G$ يكون مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: لكل زوج $X$ و $Y$ حيث $X$ و $Y$ مجموعتان جزئيتان من رؤوس $G$ وبحيث إن $|X|,|Y| \ge 2$، يوجد مساران منفصلان تمامًا هما: $P_1$ و $P_2$ في $G$ بحيث يوجد لكل منهما نقطة طرفية في $X$، ونقطة طرفية أخرى في $Y$، دون وجود رؤوس داخلية لأي منهما لا في $X$ ولا في $Y$.

**10.2.4** (+) نعرِّف **التحليل المقبضي الجشع** لبيان مترابط من الدرجة 2 على أنه تحليل مقبضي يبدأ بأطول حلقة، ثم يكرر إضافة أطول مقبض ممكن. استخدم تحليلاً مقبضيًّا جشعًا لإثبات أن كل بيان $G$ مترابط من الدرجة 2 خالٍ من المخالب يحوي $\lfloor n(G)/3 \rfloor$ نسخة من $P_3$، بحيث إن هذه النسخ منفصلة زوجًا زوجًا. (kaneko –kelmans-Nishímura [2000]).

**11.2.4** (!) افترض أن $G$ بيان مترابط له ثلاثة رؤوس على الأقل. أثبت أن العبارات الآتية متكافئة (يمكن استخدام نظرية منجر):

a) $G$ مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2.

b) كل ضلع في $G$ يظهر في حلقة.

c) يوجد في $G$ مسرب مغلق لا يكرر أضلاعًا (closed trail)، ويحوي أي ضلعين محددين.

d) يوجد في $G$ مسرب مغلق لا يكرر أضلاعًا، ويحوي أي رأسين محددين.

**12.2.4** (!) استخدم نظرية منجر لإثبات أنه إذا كان $G$ بيانًا منتظمًا من الدرجة 3، فإن $\kappa(G) = \kappa'(G)$ (النظرية 11.1.4).

**13.2.4** افترض أن $G$ بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، عرف علاقة $R$ على $E(G)$ على الصورة الآتية: $(e, f) \in R$ إذا كان $e = f$، أو إذا كان $G - e - f$ غير مترابط (Lovász [1979, p277]):

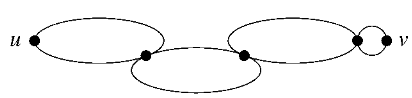
a) أثبت أن $(e, f) \in R$ إذا وفقط إذا انتمى كلٌّ من $e$ و $f$ إلى الحلقة نفسها.

b) أثبت أن $R$ علاقة تكافؤ على $E(G)$.

c) لكل صف تكافؤ $F$، أثبت أن $F$ محتوى في حلقة.

d) لكل صف تكافؤ $F$، أثبت عدم وجود قاطعة ضلعية لـ $G - F$.

**14.2.4** (!) نعرف القلادة من $u$ إلى $v$ على أنها مجموعة حلقات $C_1, \dots, C_k$ حيث $u \in C_1$ و $v \in C_k$، بحيث تشترك الحلقات المتتابعة في رأس واحد فقط، في حين تكون الحلقاتُ غير المتتابعة منفصلةً. استخدم الاستقراء على $d(u, v)$ لإثبات أن البيان $G$ يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وُجِدَت قلادة في $G$ لكل زوج $u, v$ من $V(G)$.




**15.2.4** (+) افترض أن $v$ رأس في بيان $G$ المترابط من الدرجة 2، أثبت أنه يوجد لـ $u$ جوار $v$، بحيث إن $G - u - v$ مترابط (chartrand –Lesniak [1986,p51]).

**16.2.4** (+) افترض أن $G$ بيان مترابط من الدرجة 2. أثبت أنه إذا كانت كلٌّ من $T_1$ و $T_2$ شجرتين مولدتين للبيان $G$ فيمكن تحويل $T_1$ إلى $T_2$ بإجراء عدة عمليات يتم من خلالها إزالة ورقة (leaf) وإعادة تثبيتها باستخدام ضلع آخر للبيان $G$.

**17.2.4.** جد أصغر بيان مقدار ترابطه 3، بحيث يكون له رأسان غير متجاورين ومنفصلان معًا بواسطة أربعة مسارات منفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا.

**18.2.4.** افترض عدم وجود رؤوس معزولة للبيان $G$. أثبت أنه إذا خلا هذا البيان من الحلقات الزوجية، فإن كل قالب فيه يكون إما ضلعًا أو حلقة فردية.

**19.2.4.** (!) العضوية في الحلقات المشتركة:

a) أثبت أن ضلعين مختلفين ينتميان إلى القالب نفسه في بيان $G$ إذا وفقط إذا كانا ينتميان إلى الحلقة نفسها.

b) افترض أن $e, f, g \in E(G)$، وافترض أيضًا وجود حلقة في $G$ تمر خلال $e$ و $g$، وحلقة أخرى تمر خلال $f$ و $g$. أثبت أنه توجد حلقة في $G$ تمر في $e$ و $g$. (تعليق: لاحظ أن هذه المسألة تضمن أن علاقة "المساواة أو الانتماء إلى الحلقة" نفسها هي علاقة تكافؤ على أضلاع البيانات التي ليس لها أضلاع فاصلة أو قاطعة، وأن صفوف التكافؤ لهذه العلاقة هي مجموعات أضلاع قوالب البيان).

**20.2.4.** أثبت أن المكعب الزائدي $Q_k$ مترابط من الدرجة $k$ بإيجاد $k$ من المسارات $x, y$ المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا وذلك لكل زوج رؤوس $x, y \in V(Q_k)$.

**21.2.4.** (!) افترض أن $G$ بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة $2k$ بحيث إن له على الأكثر رأسين درجتهما فردية، أثبت أنه يوجد لهذا البيان توجيه مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$. ([Nash - Williams [1960]).

**22.2.4.** (!) افترض أن $\kappa(G) = k$، وأن (قطر $G$) $diam\ G = d$. أثبت أن $n(G) \ge k(d - 1) + 2$ وأن $a(G) \ge [(1 + d)/2]$. لكل $k \ge 1$ ولكل $d \ge 2$. جد بيانًا مقدار ترابطه $k$، وقطره $d$، بحيث تتحقق في هذا البيان المساواة في الحدين أعلاه.

**23.2.4.** (!) إذا كان $G$ بيانًا ثنائي الفرع، فاستخدم نظرية منجر ($\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$) عندما $xy \notin E(G)$ لإثبات نظرية König –Egerváry ($\alpha'(G) = \beta(G)$).

**24.2.4.** (!) افترض أن $G$ بيان مترابط من الدرجة $k$، وافترض أيضًا أن $S$ و $T$ مجموعتان جزئيتان غير متقاطعتين من $V(G)$ حجم كل منهما يساوي $k$ على الأقل، أثبت أنه يوجد للبيان $G$، $k$ من المسارات $S$، $T$ المنفصلة (غير المتقاطعة) زوجًا زوجًا.

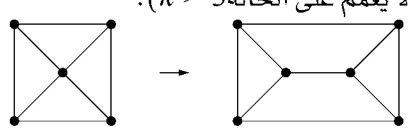
**25.2.4.** (*) أثبت أن النظرية 24.2.4 هي أفضل ما يمكن، وذلك بإيجاد بيان مترابط من الدرجة $k$ لكل $k$ بحيث يوجد لهذا البيان $k + 1$ رأسًا غير واقعة على حلقة.

**26.2.4.** إذا كانت $k \ge 2$، فأثبت أن البيان $G$ الذي له $k + 1$ رأسًا على الأقل يكون مترابطًا من الدرجة $k$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي: عندما $T \subseteq S \subseteq V(G)$ حيث $|S| = k$ و $|T| = 2$، فإنه توجد حلقة في $G$ تحوي $T$، ولا تحوي أيًّا من عناصر $S - T$ (Lick [1973]).

**27.2.4.** يعرف شطر الرأس من الدرجة $k$ (vertex k-split) لبيان $G$ على أنه بيان $H$ نحصل عليه من $G$ بأن يحل محل رأس $x \in V(G)$ رأسان متجاوران $x_1$ و $x_2$، حيث $d_H(x_i) \ge k$ و: $N_H(x_1) \cup N_H(x_2) = N_G(x) \cup \{x_1, x_2\}$.

a) أثبت أن كل شطر رأس من الدرجة $k$ لبيان مترابط من الدرجة $k$ يكون مترابطًا من الدرجة $k$.

b) استنتج أن أي بيان $G$ يمكن الحصول عليه من العجلة $W_n = K_1 \vee C_{n-1}$ (التعريف 6.3.3) بإجراء عدة عمليات من إضافة الأضلاع وعمليات شطر الرؤوس من الدرجة 3 على الرؤوس التي درجتها 4 على الأقل يكون مترابطًا من الدرجة 3. (تعليق: لقد أثبت Tutte [1961] أن كل بيان مترابط من الدرجة 3 يظهر بهذه الطريقة. إن هذا التوصيف المميز لا يُعمَّم على الحالة $k > 3$).



**28.2.4.** (!) افترض أن $X$ و $Y$ مجموعتان منفصلتان (غير متقاطعتين) من الرؤوس لبيان $G$، حيث $G$ مترابط من الدرجة $k$، افترض أن $u(x)$ $(x \in X)$ و $w(y)$ $(y \in Y)$ عبارة عن أعداد صحيحة غير سالبة بحيث إن

منها تبدأ عند $x$ و $w(y)$ منها تنتهي عند $y$، علمًا بأن $x \in X$ و $u \in Y$. $\sum_{x\in X} u(x) = \sum_{y\in Y} w(y) = k$، أثبت أنه يوجد في $G$ $k$ من المسارات $x, y$ المنفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا، بحيث إن $u(x)$

**29.2.4.** افترض أن $G$ بيان، إجعل $D$ هي البيان الموجه الذي نحصل عليه من $G$ باستبدال كل ضلع في $G$ بضلعين متضادين في الاتجاه يبدآن بالنقاط الطرفية نفسها وينتهيان بها (لذا فإن $D$ هي البيان الموجه المتماثل الذي بيانه $G$).

افترض أن $\kappa'_D(x, y) = \lambda'_D(x, y)$، وأن $\kappa_D(x, y) = \lambda_D(x, y)$ لكل $x, y \in V(D)$ علمًا بأن الشرط الثاني يتحقق فقط عندما $x \nleftrightarrow y$. استخدم الافتراض لإثبات أن $\kappa'_G(x, y) = \lambda'_G(x, y)$، وأن $\kappa_G(x, y) = \lambda_G(x, y)$ علمًا بأن الثانية تخص $x \nleftrightarrow y$.

**30.2.4.** (أ) أثبت بتطبيق عملية التمديد الموجود في المثال 1.3.26 على أن البيان المترابط من الدرجة 3 يعطينا بيانًا مترابطًا من الدرجة 3. ثم احصل على بيان بيترسون بإجراء تمديد (توسيع) على $K_4$. (تعليق: لقد أثبت Tutte [1966] أن البيان المنتظم من الدرجة 3 يكون مترابطًا من الدرجة 3 إذا وفقط إذا أمكن الحصول عليه من $K_4$ بإجراء عدد من عمليات التوسع (التمدد)).

**31.2.4.** افترض أن $G$ بيان بسيط مترابط من الدرجة $k$:

a) افترض أن $C$ و $D$ حلقتان في $G$ طولهما أكبر ما يمكن، إذا كانت $k = 2$ أو $k = 3$، فأثبت أن $C$ و $D$ تشتركان في $k$ من الرؤوس على الأقل، (مساعدة: إذا لم تشتركا فاحصل على حلقة أطول).

b) لكل $k \geq 2$، جد بيانًا مترابطًا من الدرجة $k$ له حلقات مختلفة، طولها أكبر ما يمكن وتشترك في $k$ من الرؤوس فقط (مساعدة: اعتبر $k_{2.4}$ عندما $k = 2$).

**32.2.4.** وصل البيانات (Graph Splices)

افترض أن $G_1$ و $G_2$ بيانان منفصلان ومترابطان من الدرجة $k$ حيث $k \geq 2$ . إختر $v_1 \in V(G_1)$ و $v_2 \in V(G_x)$ . افترض أن $B$ هو البيان الثنائي الفرع الذي مجموعتا رؤوسه هما: $N_{G1}(v_1)$ و $N_{G2}(v_2)$ حيث لا يوجد لـ $B$ رأس معزول، وله مواءمة حجمها $k$ على الأقل. أثبت أن $B \cup (G_2 - v_2) \cup (G_1 - v_1)$ مترابط من الدرجة $k$.

**33.2.4.** (*) أثبت نظرية Hall بالاعتماد على النظرية 25.2.4.

**34.2.4.** افترض أن $G$ بيان مترابط من الدرجة $k$. نقول: إن $G$ مترابط من الدرجة $k$ بحده الأدنى (minimally - k- connected) إذا كان $G - e$ غير مترابط من الدرجة $k$ لكل $e \in E(G)$. لقد أثبت Hallin في العام 1969م أن $\delta(G) = k$ عندما يكون $G$ بيانًا مترابطًا بحده الأدنى. استخدم التحليل المقبضي لإثبات هذه النتيجة عندما $k = 2$. استنتج أنه إذا كان $G$ بيانًا مترابطًا من الدرجة 2 بحده الأدنى، وكان له أربعة رؤوس على الأقل، فإن له $2n(G) - 4$ ضلعًا على الأكثر، وأن المساواة تتحقق فقط للبيان $K_{2,n-2}$ (Dirac [1967])

**35.2.4.** أثبت أنه إذا كان $G$ مترابطًا من الدرجة 2، فإن $G - xy$ يكون مترابطًا من الدرجة 2 إذا وفقط إذا وقع كل من $x$ و $y$ على حلقة في $G - xy$. ثم استنتج أن البيان المترابط من الدرجة 2 يكون مترابطًا من الدرجة 2 بحده الأدنى إذا وفقط إذا كانت كل حلقة بيانًا جزئيًّا مستحدثا (induced subgraph) . (Dirac [1967], Plummer [1968])

**36.2.4** (أ) لتكن $S \in V(G)$، إجعل $d(S) = |[S, \overline{S}]|$ ، افترض أن $X$ و $Y$ مجموعتان جزئيتان فعلاً وغير خاليتين من رؤوس $G$، أثبت أن $d(X \cap Y) + d(X \cup Y) \leq d(X)\ d(Y)$، (مساعدة: ارسم رسمة، وخذ في الحسبان المساهمات من أنواع الأضلاع جميعها).

**37.2.4** (+) افترض أن $G$ بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$. نقول: إن $G$ مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$ بحده الأدنى إذا كان البيان $G - e$ غير مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$ لكل $e \in E(G)$. أثبت أن $\delta(G) = k$ عندما يكون $G$ مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $K$ بحده الأدنى، (مساعدة: خذ في الحسبان مجموعة صغرى $S$، بحيث إن $|[S,\overline{S}]| = k$، إذا كانت $|S| \neq 1$ ، فاستخدم $G - e$ لبعض $e$ الموجود في $E(G[S])$ وذلك للحصول على مجموعة ثانية $T$ تحقق أن $|[\overline{T},T]|=k$ بحيث إن $T$ ،$S$ تعارض التمرين 36.2.4

(انظر: Mader [1971] و Lovász [1979,p285]).

**38.2.4.** لقد أثبت Mader [1978] ما يأتي:

«إذا كان $z$ رأسًا لبيان $G$، بحيث إن $d_G(z) \notin \{0,1,3\}$ ، وكان $z$ غير واقع على ضلع قاطع (cut- edge)، فإن له جارين هما: $x$ و $y$، بحيث إن $\kappa_G(u,v) = \kappa_{G-xz-yz+xy}(u,v)$ لكل $u,v$ الموجودة في $V(G)-\{z\}$» . استخدم نظرية Mader والتمرين 37.2.4 لإثبات نظرية التوجيه لـ Nash – Williams التي تنص على وجود توجيه مترابط ضلعيًّا من الدرجة $k$ لكل بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة $2k$، (تعليق: توجد صيغة (نسخة) أضعف من نظرية Mader في مقالة Lovász العام [1979، ص 286 - 288]، والتي تعطي بدورها أيضًا وبالطريقة نفسها نظرية Nash-Williams).

## 3.4 مسائل تدفق الشبكات (Network Flow Problems)

افترض أن لدينا شبكة من الأنابيب حيث تسمح الصمامات بالجريان في إتجاه واحد فقط. وافترض أن لكل أنبوب سعة لكل وحدة زمن. نعمل نموذجًا بيانيًّا لذلك من خلال تمثيل كل نقطة اتصال (مربط) برأس، وكل أنبوب بضلع (موجه) موزون بالسعة. وكذلك نفترض أن التدفق لا يتراكم عند مربط. الآن، نطرح السؤال الآتي: إذا أعطينا الموقعين $s$ و $t$ في الشبكة، فما مقدار أكبر تدفق (لكل وحدة زمن) من $s$ إلى $t$؟

لاحظ أن هذا السؤال يظهر من خلال عدة سياقات. فمثلاً، يمكن أن تمثِّل الشبكةُ شبكةَ طرق، وكذلك مدى قدرتها على استيعاب حركة السير. أو يمكن أن تمثل شبكة حواسيب قادرة على بث المعلومات أو نقلها، أو شبكة كهرباء وقدرتها على تحمل تمرير التيار الكهربائي. هناك الكثير من التطبيقات في الصناعة، وفي حل مسائل القيم القصوى (الصغرى والعظمى). وهنا لا بدّ لنا من الإشارة إلى كتاب أساسي في الموضوع وهو كتاب Ford – Fulkerson الذي ظهر في العام 1962م، هذا بالإضافة إلى كتاب أحدث ظهر في العام 1993م وهو الكتاب الذي ألَّفه كلٌّ من Ahuja – Management – Orlin حيث يغطي هذا الكتاب بصورة شاملة مسائل التدفق عبر الشبكات.

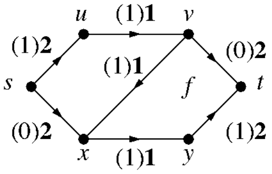
**1.3.4. تعريف:** نعرِّف الشبكةَ على أنها بيان موجه، بحيث توجد لكل ضلع $e$ في هذا البيان سعة معينة هي $c(e)$، حيث إن $c(e) \geq 0$ ، وله رأس مصدر (منبع) (source $S$ vertex) ورأس مصب $t$ (sink vertex)، وكذلك تسمى الرؤوس نقاط التقاء (Nodes) . إن التدفق (الجريان) $f$ يحدد قيمة $f(e)$ لكل ضلع $e$. وسنستخدم الرمز $f^+(v)$ للتدليل على التدفق الكلي على الأضلاع المغادرة إلى الرأس $v$ و $f^-(v)$ للإشارة إلى التدفق الكلي على الأضلاع الداخلة إلى الرأس $v$ (الموجه في اتجاه $v$) . ونقول إن التدفق عملي أو (ملائم) إذا حقق القيود على السعة وهي: $0 \leq f(e) \leq c(e)$ وذلك لكل ضلع $e$، وكذلك إذا حقق قيود المحافظة على التدفق وهي: $f^+(v) = f^-(v)$ لكل نقطة التقاء $v$، حيث $v \notin \{s, t\}$.

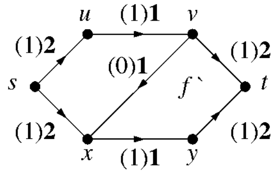
### أكبر تدفق للشبكة (Maximum Network flow)

أولاً: سنأخذ في الحسبان مسألة إيجاد أكبر قيمة للتدفق إلى مصب.

**2.3.4. تعريف:** تعرَّف القيمة $val(f)$ للتدفق على أنها محصلة التدفق من خلال المصبِّ التي تساوي $f^-(t) - f^+(t)$. ونعرِّف أكبر تدفق على أنه تدفق ملائم (عملي) له أكبر قيمة.

**3.3.4. مثال:** التدفق الصفري (**zero flow**) يحدد تدفقَ صفر لكل ضلع، وهو تدفق ملائم. وفي الشبكة أدناه، نوضح تدفقًا ملائمًا غير صفري، حيث تمثِّل السعةُ بالخط الغامق، وتظهر قيم التدفق بين



الأقواس لاحظ أن التدفق $f$ الموجود لدينا يعيِّن القيم: $f(sx) = f(vt) = 0$ و $f(e) = 1$ لكل ضلع $e$ من الأضلاع المتبقية، وهذا تدفق ملائم قيمته تساوي 1.

إن المسار من المنبع إلى المصبِّ الذي له سعة زائدة يسمح لنا بزيادة التدفق. في هذا المثال، لا يوجد مسار تبقى له سعة زائدة، ولكن التدفق $f'$ حيث $f'(vx) = 0$ و $f'(e) = 1$ لكل $e \neq vx$ له قيمة 2. لاحظ أن التدفق $f$ له قيمة عظمى حيث لا يوجد تدفق آخر ملائم من خلال زيادة التدفق على بعض الأضلاع، ولكن $f$ لا يمثل أكبر تدفق. لذا، نحتاج إلى طريقة أعمّ لزيادة التدفق؛ حيث سنسير رجوعًا إلى الخلف (بعكس الأسهم) على الأضلاع التي يكون التدفق عليها مختلفًا عن الصفر، هذا بالإضافة إلى السير نحو الأمام على الأضلاع التي تتمتع بسعة زائدة. ففي مثالنا هذا، نستطيع السير من $s$ إلى $x$ إلى $v$ إلى $t$.

إن زيادة التدفق بمقدار 1 على كل من $sx$ و $vt$ وإنقاصه بمقدار 1 على $vx$ يحوِّل $f$ إلى $f'$. ■

**4.3.4. تعريف:** افترض أن $f$ تدفق ملائم (مناسب)، في شبكة $N$. إن المسار (المزيد) الموسّع الخاص بـ $f$ هو مسار $p$ من المنبع إلى المصبّ في البيان $G$ المتضمن بالشبكة؛ بحيث إنه لكل $e \in E(p)$ يتحقق ما يأتي:

a) إذا سار المسار $p$ مع الضلع $e$ في اتجاه الأمام، فإن $f(e) < c(e)$.

b) إذا سار المسار $P$ مع الضلع $e$ في عكس اتجاه السهم (في اتجاه الخلف)، فإن $f(e) > 0$.

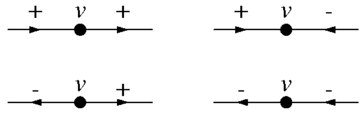
افترض أن $\epsilon(e) = c(e) - f(e)$ عندما يسير $P$ إلى الأمام على $e$، وافترض أن $\epsilon(e) = f(e)$ عندما يسير $P$ إلى الخلف على $e$. نعرّف مقدار تحمل $P$ (tolerance of $P$) على أنه $\min_{e \in E(p)} \epsilon(e)$.

كما في المثال 3.3.4، يؤدي المسار الموسع لـ $f$ إلى تدفق قيمته أكبر. ويضمن لنا الموسع الخاص بـ $f$ أن مقدار التحمل يكون موجبًا، وهذه الكمية تساوي الزيادة في قيمة التدفق.

**5.3.4. تمهيدية.** افترض أن $P$ مسار موسع خاص بـ $f$ له تحمل يساوي $z$، إن تغيير $z$ بـ $+z$ على الأضلاع التي يسير عليها $p$ إلى الأمام وبـ $-z$ على الأضلاع التي يسير عليها $P$ إلى الخلف يُنْتِجُ تدفقًا ملائمًا $f'$ يحقق أن $val(f') = val(f) + z$.

**الإثبات:** إن تعريف مقدار التحمل يضمن لنا أن $0 \le f'(e) \le c(e)$ وذلك لكل ضلع $e$، لذا، فإن القيد على السعة يتحقق. أما بالنسبة إلى قيود المحافظة (الإبقاء) على التدفق، فإننا نحتاج إلى اختبار رؤوس $P$؛ لأن التدفق لا يتغير في الأماكن الأخرى.

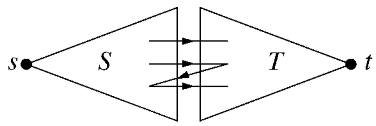
إن أضلاع $P$ التي تقع على رأس داخلي $v$ للمسار $P$ تحدثُ في إحدى الحالات الأربع الموضحة في الشكل أدناه. وفي كل حالة، فإن التغير في التدفق الخارج من $v$ يساوي التغير في التدفق الداخل إلى $v$. لذا، فإن محصلة التدفق الخارج من $v$ تبقى صفرًا في $f'$. وأخيرًا، لاحظ أن محصلة التدفق عبر المصب $t$ تزداد بمقدار $z$. ■



إن التدفق من خلال الأضلاع التي يتم السير عليها في اتجاه الخلف لا يختفي، وإنما أُعيد توجيهه. وأن التوسعة في المثال 3.3.4 تقطع مسار التدفق، وتمدد كل جزء ليصبح مسارَ تدفقٍ جديدًا. وسنقوم بعد قليل بعرض خوارزمية لإيجاد المسارات الموسعة.

في هذه الأثناء، نرغب أن نجد طريقًا سريعة لمعرفة ما إذا كان التدفق الموجود لدينا أكبر ما يمكن. وفي المثال 3.3.4، ظهر لنا أن الأضلاع المركزية (central edges) تمثل عنق الزجاجة "bottleneck"، حيث إننا حصلنا على سعة 2 فقط عندما سرنا من نصف الشبكة عن اليسار إلى نصفها عن اليمين. وستعطينا هذه الملاحظة إثباتًا على أن قيمة التدفق لا يمكن أن تكون أكبر.

**6.3.4. تعريف:** نعرف القاطع للمنبع/ المصبّ على أنه المجموعة $[S, T]$ التي تتألف من الأضلاع الصادرة من مجموعة المنبع $S$ إلى مجموعة المصبّ $T$ حيث تقوم كل من $S$ و $T$ على تجزئة مجموعة نقاط الاتصال (الرؤوس) حيث $s \in S$، و $t \in T$. تُعرَّف سعة القاطع $[S, T]$ على أنها المجموع الكلي للسعات على أضلاع $[S, T]$ ويرمز إليها بالرمز $\mathrm{Cap}\ (S, T)$ .



تذكر أن $[S, T]$ في البيان الموجه تمثل مجموعة الأضلاع التي رؤوسها في $T$ وذيولها في $S$. لذا، فإن $Cap\ [S, T]$ لا تتأثر إطلاقًا بالأضلاع من $T$ إلى $S$.

إذا كان $[S, T]$ قاطعًا معطًى، فإن كل مسار من $s$ إلى $t$ يستخدم ضلعًا من $[S, T]$ على الأقل. لذا، فإن الحدس يقتضي أن يكون التدفق محصورًا بـ $Cap\ (S, T)$، ولجعل هذا الكلام دقيقًا، فإننا نعمِّم (نمدِّد أو نوسِّع) مفهوم محصلة التدفق (net flow) لمجموعات من نقاط الاتصال (الرؤوس). اجعل $f^{+}(U)$ ترمز إلى التدفق الكلي على الأضلاع المغادرة إلى $U$، في حين ترمز $f^{-}(U)$ إلى التدفق الكلي على الأضلاع التي تدخل $U$، واستنادًا إلى ذلك، فإن محصلة التدفق الخارج من $U$ هي: $f^{+}(U) - f^{-}(U)$.

**7.3.4. تمهيدية**. إذا كانت $U$ مجموعة نقاط اتصال في شبكة، فإن محصلة التدفق الخارج منها تساوي مجموع محصلة التدفق الخارج من الرؤوس الموجودة فيها، وعلى وجه الخصوص إذا كان $f$ تدفقًا ملائمًا، وكان $[S, T]$ قاطع منبع / مصبّ، فإن محصلة التدفق الخارج من $S$، ومحصلة التدفق الداخل إلى $T$ تساوي $val\ (f)$ .

**الإثبات:** لاحظ أننا نريد إثبات أن:

$$f^{+}(U) - f^{-}(U) = \sum_{v \in U}[f^{+}(v) - f^{-}(v)]$$

خذ بالحسبان مساهمة التدفق $f(x\,y)$ على الضلع $x\,y$ في كل طرف من طرفي المعادلة (1) أعلاه. إذا كان كلّ من $x, y$ في $U$، فإن $f(x\,y)$ لا تسهم بأي شيء في الطرف الأيسر، ولكنها تسهم بمقدار موجب (بواسطة $f^{+}(x)$) وبمقدار سالب (بواسطة $f^{-}(y)$) على الطرف الأيمن. إذا كان $x, y \notin U$، فإن $f(x\,y)$ لا تسهم بأي من الطرفين، أما إذا كان $x\,y \in [U, \overline{U}]$ فإنها تسهم بمقدار موجب لكل مجموع. ولكن إذا كان $xy \in [\overline{U}, U]$ فإنها تسهم بمقدار سالب لكل مجموع. وبالجمع على الأضلاع جميعها نحصل على المساواة.

لاحظ أنه عندما يكون $[S, T]$ قاطع منبع/ مصبّ، و $f$ تدفقًا ملائمًا، فإن محصلة التدفق من الرؤوس في $S$ تعطي المجموع $f^{+}(s) - f^{-}(s)$، في حين تعطي محصلة التدفق من الرؤوس في $T$ المجموع $f^{+}(t) - f^{-}(t)$ التي تساوي $-val\ (f)$ . لذا، فإن محصلة التدفق عبر أي قاطع منبع/ مصبّ تساوي كلًّا من محصلة التدفقين الخارج من $S$ والداخل إلى $t$. ■

**8.3.4. النتيجة:** (ازدواجية ضعيفة): (weak duality)

إذا كان $f$ تدفقًا ملائمًا، وكان $[S, T]$ قاطع منبع / مصبّ، فإن $val\ (f) \geq Cap\ (S, T)$.

**الإثبات:** من التمهيدية، نعلم أن قيمة $f$ تساوي محصلة التدفق الخارج من $S$. لذا فإن:

$val\ (f)= f^{+}(S) - f^{-}(S)\ \leq f^{+}(S)$؛ لأن التدفق إلى $s$ لا يقل عن صفر. وبما أن قيد السعة يتطلب أن يكون $f^{+}(S) \leq cap\ (S, T)$ ، فإننا نحصل على $val\ (f) \leq cap\ (S, T)$.

إن قاطعًا من بين القواطع منبع/ مصبّ ذا سعة صغرى يعطي أفضل حدٍّ على قيمة التّدفّق. وهذا يعرف مسألة أصغر قاطع ( القاطع الذي يعطي قيمة صغرى للتدفق). وتعدّ المسائل المتعلقة بأكبر تدفق وأقل قاطع في شبكة معينة مسائل أفضلية (أمثلية) ازدواجية (ثنوية).

لاحظ [1] أنه إذا كان لدينا تدفق قيمته $\alpha$، وقاطع قيمته $\alpha$، فإن متباينة الازدواجية في النتيجة 8.3.4 تثبت أن القاطع هو قاطع أصغر، وأن التدفق هو تدفق أكبر.

إذا وُجد حلول لكل مرحلة من المراحل لها القيم نفسها لكل من مسائل القيم العظمى والقيم الصغرى (ازدواجية قوية) فيوجد دائمًا إثبات قصير لمسائل الأمثلية، علمًا بأن هذا لا ينطبق على المسائل ذات الصبغة الازدواجية جميعها (تذكر مسائل المواءمة والتغطية للبيانات)، إلا أنها تتحقق للمسائل المتعلقة بأكبر تدفق وأصغر قاطع.

إن خوارزمية Ford – Fulkerson تبحث عن مسار موسع من أجل زيادة قيمة التدفق، وإذا لم تجد مثل هذا المسار، فإنها تجد قاطعًا له القيمة نفسها (السعة) كهذا التدفق، ومن النتيجة 8.3.4 نعلم أن كلًا منهما هو الأمثل. إذا لم توجد متتالية توسيعات ممكنة، فإن إعادة العمليات وتكرارها تحقق المساواة بين قيمة أكبر تدفق وسعة أصغر قاطع.

**9.3.4. خوارزمية** (Ford – Fulkerson) لوضع العلامات (التسميات). المدخلات (input) : تدفق ملائم في شبكة.

المخرجات (النتائج) (output): مسار موسع لـ $f$ ، أو قاطع سعته $val\ (f)$.

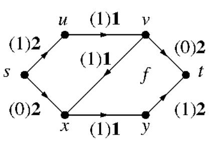
الفكرة :($idea$) أوجد نقاط الاتصال (الرؤوس أو العقد) التي يمكن الوصول إليها من $s$ بمسارات لها قدرة احتمال (استيعاب) موجبة. إن الوصول إلى $t$ يكمل المسار الموسع لـ $f$. خلال البحث، اجعل $R$ تمثل مجموعة الرؤوس التي أعطيت علامة الوصول ($Reached$) أو وصلت، في حين تمثل $s$ مجموعة جزئية من $R$ أعطيت علامة ($searched$) بُحثت. البداية : (initiliazation) $R =\{s\}$ ، $S =\emptyset$

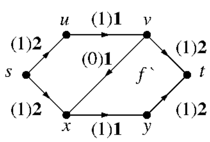
خطوات العمل (interaction): اختر $v$ في $R - S$

لكل ضلع $v\ w$ حيث إن $(f(vw) < c(v\ w))$ ، و أن $w \notin R$، أضف $w$ إلى $R$ لكل ضلع داخل $uv$ حيث $f(uv) > 0$ و $u \notin R$، أضف $u$ إلى $R$. أعط العلامة وصل (reached) لكل رأس أضيف إلى $R$، وسجِّل $v$ على أنه الرأس الذي تم الوصول من خلاله، وبعد اختبار الأضلاع جميعها عند $v$، أضف $v$ إلى $S$.

في هذه المرحلة، إذا تمّ الوصول إلى المصبّ $t$ (ضعها في $R$)، ثم تتبع المسار الذي يصل إلى $t$، فإنّ هذا يعطي المسار الموسع المنشود لـ $f$ . وقف عند هذا الحد. إذا كانت $R = S$، فعُدّ إلى القاطع $[S,\bar{S}]$ ثم توقف، وبعكس ذلك، أعد الخطوات السابقة نفسها.

**10.3.4. مثال:** في الشكل أدناه عن اليسار، تجد الشبكة الموجودة في المثال 3.3.4 التي تدفقها $f$ استعن بالخوارزمية السابقة (9.3.4) أولًا، نبحث من $s$ حيث نجد سعة زائدة لكل من $u$ و $x$. لذا، سنعطيهما العلامة وصلت. الآن، لدينا $r, x$ في $R - S$. لاحظ وجود سعة زائدة على كل من $uv$ و $xy$. لذا، فإن البحث من $u$ لا يوصل إلى شيء، إذن، فالبحث من $x$ لا يصل إلى $y$. على أي حال، يوجد تدفق غير صفري على $yx$. وهنا، نضع علامة $v$ من $x$. الآن، $v$ هو العنصر الفريد في $R - S$، وبالبحث من $v$ نصل إلى $t$ . لاحظ أننا علّمنا $t$ من $v$ في حين علّمنا $v$ من $x$، أما $x$، فعلّمناه من $s$. لذا، فإننا وجدنا المسار $s، x، v، t$ .




---

(1) تأتي مسائل الازدواجية من البرمجة الخطية. ولأغراضنا، فإن هذه المسائل تتعلق بمسائل كل من القيم العظمى والصغرى، حيث إن $b \geq a$ عندما تكون $a$ و $b$ حلولًا ملائمة (مناسبة) لمسائل كل من القيم العظمى والصغرى على الترتيب. ولمزيد من المعلومات؛ انظر الجزء 1.8.

إن قدرة التحمل على هذا المسار هي 1. إذن، فهذه التوسعة تزيد التدفق بمقدار 1. في التدفق الجديد $f'$ الموجود عن يمين الشكل، لاحظ أن كل ضلع له تدفق يساوي 1 (unit flow) ما عدا. $f'(vx) = 0$ لذا، وعند استخدام خوارزمية العلامات مرة ثانية، فإننا نحصل على سعة زائدة على كل من $su$ و $sx$. إذن، نستطيع تعليم (وضع علامة) $\{u, x\}$، ولكننا لا نستطيع وضع علامات على أي رؤوس أخرى من هذه الرؤوس. لذلك، نقف مع $R= S = \{s, u, x\}$. إن سعة القاطع الناتج $[S,\overline{S}]$ هي 2، وهي تساوي $\mathrm{val}(f')$، وتثبت أن $f'$ تدفق أكبر (ذو قيمة عظمى). ■

لاحظ أن الاستخدام المتكرر لخوارزمية وضع العلامات يسمح لنا بحل مسائل القيم العظمى للتدفق، كما أنها تثبت العلاقة الازدواجية القوية.

**11.3.4. نظرية:** (نظرية أكبر تدفق – أصغر قاطع – Ford وFulkerson [1956]) في كل شبكة، إن أكبر قيمة لتدفق ملائم تساوي أصغر سعة لقاطع منبع/ مصبّ.

**الإثبات:** في مسألة القيم العظمى للتدفق، يكون التدفق الصفري ( $f(e) = 0$ لكل $e$) تدفقًا ملائمًا دائمًا، ويعطينا مكانًا نبدأ منه. إذا كان لدينا تدفق ملائم، فإننا نطبق خوارزمية وضع العلامات التي تقوم بإضافة رؤوس إلى $S$. (كل رأس مرة واحدة على الأكثر) وتقف عند $t \in R$ (يعدّ هذا تقدمًا) "breakthrough". أو تقف عندما $S = R$ . في حالة إحراز التقدم، نحصل على مسار موسع لـ $f$، وزيادة في قيمة التدفق. بعد ذلك، نعيد خوارزمية وضع العلامات. عندما تكون السعات أعدادًا نسبية، نجد أن كل توسعة تزيد التدفق بمقدار من مضاعفات $1/a$ حيث $a$ هي المضاعف المشترك الأصغر للمقامات. لذا، وبعد إجراء عدد محدود من عمليات التوسعة، فإنه يتم الوصول إلى سعة أحد القواطع. وعندها تقف خوارزمية وضع العلامات، وتكون $S = R$ .

عندما تنتهي الخوارزمية بهذه الطريقة، ندعي أن $[S, T]$ هو قاطع منبع / مصبّ سعته $val(f)$، حيث $T = \overline{S}$، و $f$ التدفقُ الحالي. وهو يعدّ قاطعًا؛ لأن $s \in S$ و $t \notin R = S$ .

بما أن تطبيق خوارزمية وضع العلامات على التدفق $f$ لا يدخل أيًّا من نقاط الاتصال الموجودة في $T$ إلى $R$، فهذا يعني عدم وجود أي ضلع من $S$ إلى $T$ له سعة زائدة، ولا يوجد أي ضلع من $T$ إلى $S$ تدفقه غير صفري. لذا، فإن $f^+(S) = cap(S, T)$ و $f^-(S) = 0$ . وبما أن محصلة التدفق الخارج من أي مجموعة تحوي المنبع ولا تحوي المصبّ تساوي $val(f)$، فإننا نكون قد أثبتنا أن:

$$val(f) = f^+(S) - f^-(S) = f^+(S) = cap(S, T).$$ ■

يتطلب هذا الإثبات للنظرية 11.3.4 أن تكون السمات أعدادًا نسبية، وبعكس ذلك، فإن الخوارزمية 9.3.4 تعطي عددًا لا نهائي من المسارات الموسعة؛ لقد أعطى كلّ من Ford و Fulkerson مثالاً على هذه الحالة على عشرة رؤوس فقط. (انظر [Papadimitriou – Steigletz, [1982, P126 – 128)

في حين عدّل كلّ من Edmonds و Karp في العام [1972] خوارزمية وضع العلامات لاستعمال $(n^3 - n)/4$ توسعة على الأكثر، وذلك لشبكة لها $n$ من الرؤوس بحيث تعمل هذه الخوارزمية للسعات الحقيقية جميعها (السعة عدد حقيقي). كما في مسألة المواءمة في البيانات الثنائية الفرع (النظرية 3. 2. 22) فإنه يمكن دائمًا عمل هذا من خلال البحث عن أقصر المسارات الموسعة. الآن، توجد خوارزميات أسرع. ومن أجل الاطلاع على معالجة هذا الموضوع بصورة أشمل يمكن الرجوع إلى ([Ahuja – Mananti – orlin [1993).

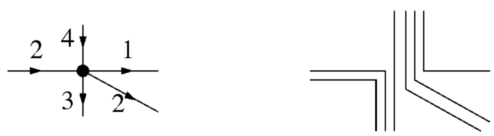
## التدفقات الصحيحة (المتامة) (Integral flows)

نقصد بالتدفقات الصحيحة (المتامة) التدفقات التي يكون فيها التدفق على كل ضلع عددًا صحيحًا. في التطبيقات التوافقية (التركيبية) (combinatorial)، تكون السعات أعدادًا صحيحة عادة. ونرغب في إيجاد حلٍّ يكون فيه التدفق على كل ضلع عددًا صحيحًا.

**12.3.4. النتيجة:** (نظرية التتام) (**Integrality Theorem**).

إذا كانت السعاتُ في شبكة معينة أعدادًا صحيحةً جميعَها، فإن تدفقًا ذا قيمة عظمى (أكبر) يحدِّد تدفقًا صحيحًا (متتامًّا) لكل ضلع. وبالإضافة إلى ذلك، يوجد تدفق أعظم (أكبر) يمكن تجزئته إلى تدفقات قيمة كلّ منها واحد على مسارات من المنبع إلى المصبّ.

**الإثبات:** في خوارزمية وضع العلامات لكلٍّ من Ford وFulkerson، إن التغيُّر في قيمة التدفق – عندما نجد مسارًا موسّعًا – يكون مساويًا لقيمة التدفق دائمًا، أو مساويًا للفرق بين قيمة التدفق والسعة، وعندما تكون هذه القيم أعدادًا صحيحة، فإن الفرق يبقى عددًا صحيحًا. وبالبدء من تدفق صفري، نلاحظ عدم وجود مرة أولى لظهور تدفق غير صحيح. لذا، فإن الخوارزمية تنتج تدفقًا أكبر (ذا قيمة عظمى) له تدفق صحيح على كل ضلع. وعند كل رأس داخلي، نعمل مواءمة بين وحدات التدفق الداخل من جهة مع وحدات التدفق الخارج من جهة أخرى، حيث يشكل هذا مسارات من $s$ إلى $t$، وربّما يشكل حلقات. إذا ظهرت حلقة، فإننا ننقص التدفق على أضلاعها بمقدار 1. وبهذا نحذفها دون أن تؤثر في قيمة التدفق. وهذا يُبقي $val\ (f)$ من المسارات من $s$ إلى $t$، كل منها يرتبط بوحدة من التدفق. ■



إن نظرية التتام تعطي مسارات تدفقها فقط. وعند التطبيق، نبني شبكات بحيث يكون هناك معنى لوحدات التدفق هذه.

إن الملاحظتين التاليتين تظهران أن نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع للشبكات ذات السعات الصحيحة (سعتها عدد صحيح) هي تقريبيًا نظرية منجر نفسها المتعلقة بالمسارات المنفصلة ضلعيًّا في البيانات الموجهة.

**13.3.4. ملاحظة:** نظرية منجر من أكبر تدفق وأصغر قاطع.

افترض أن $x$ و $y$ رأسان في بيان موجّه $D$، اعتبر أن $D$ شبكة منبعها $x$ ومصبها $y$، وبسعة 1 لكل ضلع، لاحظ أن السعة 1 تؤكد أن وحدات التدفق من $x$ إلى $y$ ترتبط بمسارات من $x$ إلى $y$ في $D$ منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. لذا، فإن التدفق الذي قيمته $k$ يعطي مجموعة مؤلفة من $k$ من هذه المسارات.

وبالمثل، فإن كل تجزئة $S$، $T$ لمنبع / مصب تعطي مجموعة من الأضلاع، بحيث إن حذف هذه الأضلاع يجعل $y$ غير قابل للوصول من $x$. هذه المجموعة هي $[S, T]$. وبما أن كل سعة تساوي 1، فإن حجم هذه المجموعة يساوي $cap\ (S, T)$.

من المحتمل ألا تكون المسارات والقاطعة الضلعية التي حصلنا عليها هي الأمثل، إلا أن نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع تعطينا:

$$\lambda'_D\,(x, y) \geq max\ val\ (f) = min\ cap\ (S, T) \geq \kappa'_D\,(x, y)$$

وبما أن $\kappa'(x, y) \geq \lambda'(x\ , y)$ دائمًا، فإن المساواة تتحقق. ■

**14.3.4. ملاحظة:** أكبر تدفق وأصغر قاطع من نظرية منجر. لتبيان أن نظرية منجر تعطينا نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع حيث تكون السعات أعدادًا نسبية؛ خذ أي شبكة وحولها إلى بيان موجه من أجل تطبيق نظرية منجر. لاحظ أننا نستطيع افتراض أن السعات أعداد صحيحة من خلال ضرب مقامات السعات في المضاعف المشترك الأصغر لهذه المقامات.

افترض أن $N$ شبكة بسعات صحيحة، شكل البيان الموجه $D$ من خلال شطر الضلع الذي سعته $j$ إلى $j$ من الأضلاع لكل منها النقاط الطرفية نفسها، لاحظ أن مبدأ الازدواجية (للشبكة $N$) يعطي: $max\ val(f) \leq min\ cap(S,\ T)$. والآن، نستخدم نظرية منجر على $D$ للحصول على معكوس المتباينة. لذا، وبالمقارنة بالملاحظة 13.3.4 فإن ما نرغب في الوصول إليه هو:

$$max\ val(f) \geq \lambda'_D\,(s,\ t) = \kappa'_D\,(s,\ t) \geq min\ cap\ (S\ ,\ T)$$

إن مجموعة $\lambda'\ (s,\ t)$ من المسارات من $s$ إلى $t$ المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا والموجودة في $D$ تنهار إلى تدفق قيمته $\lambda'\ (s,\ t)$ في $N$، وبما أن عدد النسخ من كل ضلع في $D$ يساوي سعة كل ضلع في $N$، فإن $max\ val(f) \geq \lambda'\ (s,\ t)$

الآن، اجعل $F$ مجموعة فيها $\kappa'(s,\ t)$ ضلعًا تفصل $t$ عن $s$ في $D$. إذا كان $e \in F$، فإن صغَر $F$ (mimimality of F) يعطينا وجود مسار $P$ من s إلى $t$ في $(F - e)$–D وذلك من خلال $e$. وإذا وُجدت نسخة ثانية $e'$ من الضلع $e = uv$ بحيث إن $e' \notin F$ ، فيمكن إعادة السير على $P$ من خلال $e'$ للحصول على مسار من $s$ إلى $t$ في $D - F$. لذا، فإن $F$ تحوي النسخ جميعها، أو أنها لا تحوي أيًّا من النسخ لأي ضلع مكرر في $D$: وبناءً عليه، فإن $\kappa'(s,\ t)$ تساوي مجموع السعات على مجموعة من الأضلاع تفصل $t$ عن $s$ في $N$. وبافتراض أنَّ $S$ مجموعةُ الرؤوس التي يمكن الوصول إليها من s في $D - F$، فإننا نحصل على: $cap\ (S,\ T) = \kappa'(s,\ t)$.

إن أصغر قاطع له هذه السعة على الأكثر. إذن، $min\ cap\ (S,\ T) \leq \kappa'(s,\ t)$. وبذلك نكون قد أثبتنا المتباينات المطلوبة أعلاه جميعها. ■

لاحظ أنه في حالة التطبيقات التركيبية (الحسابية) (Combinatorial) نجد أن نظرية منجر تعطي براهين أبسط من نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع (مثال ذلك النظرية 25.2.4). وعلى الرغم من ذلك، فإن الإثبات الذي قدمناه في الجزء 2.4 لنظرية منجر يُعَدُّ غير ملائم (خطيرًا) لتنفيذه خوارزميًّا. لذا، من الأنسب استخدام تدفق الشبكات وخوارزمية وضع العلامات لـ ford و Fulkerson عند إجراء الحسابات الكبيرة والكثيرة. وفي الحقيقة، إن معظم الخوارزميات التي تحسب مقدار الترابط في البيانات والبيانات الموجهة تستخدم طرقَ تدفق الشبكات. إن ([1994] stoer – wager) يعالج المسألة بشكل مختلف.

سنعرض نماذج أخرى من الشبكات لحلِّ المسائل التركيبية. فعلى سبيل المثال، يمكن الحصول على النسخ الموضعية الأخرى لنظرية منجر مباشرة.

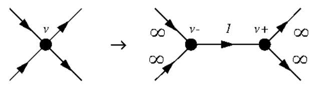
**15.3.4. ملاحظة :** تحويلات أُخرى.

لكل نسخة من نظرية منجر، نحوّل مسألة المسار من خلال استعمال تدفق الشبكات التي سعة أضلاعها أعداد صحيحة؛ للحصول على نموذج شبكي لمسألة المسارات المنفصلة داخليًّا في بيان موجه $D$، ويجب أن نمنع وحدتين من التدفق من خلال أحد الرؤوس. يمكن عمل ذلك من خلال استبدال كل رأس $v$ برأسين $v^+$، $v^-$ يرثان من $v$ الأضلاع الداخلة إلى $v$ والخارجة منها. وبإضافة ضلع سعته وحدة من $v^-$ إلىً $v^+$ نستطيع حصر التدفق من خلال $v$ بوحدة واحدة. لاحظ أنه بوَضْع سعات كبيرة (جوهريًّا ما لا نهاية) على الأضلاع التي كانت في $D$، نستطيع التأكيد على أن أصغر قاطع سيحسبَ الأضلاع من الشكل $v^+\,v^-$ فقط.

وللحصول على نموذج شبكي لمسألة المسارات المنفصلة ضلعيًّا في بيان $G$، يجب أن نسمح للتدفق بالمرور بأي من الطريقين على كل ضلع، ويمكن ذلك من خلال استبدال كل ضلع $uv$ بضلعين موجهين $uv$ و $vu$. وعندما

ترسل الشبكةُ وحدةَ تدفق في الاتجاهين على ضلع معين، فإن تأثير ذلك يعني عدم استخدام هذا الضلع إطلاقًا.

في كل حالة، يزودنا التدفق في الشبكة بمجموعة من المسارات، وأن أصغر قاطع يعطينا مجموعة فاصلة من الرؤوس أو الأضلاع. وكما في الملاحظة 13.3.4، فإن مبدأ الازدواجية يعطينا المساواة المنشودة في نظرية منجر. لاحظ أنه لإيجاد نموذج لمسألة المسارات المنفصلة داخليًّا في بيان معين، فإننا نحتاج إلى التحويلين. في التمارين 5 - 7 نطلب تفصيلات لهذه البراهين. ■



## 16.3.4. تطبيق: مسألة حذف فرق كرة القاعدة (Schwartz [1996])

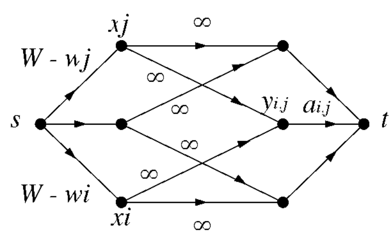
أحيانًا، وخلال موسم المباريات، ربما نتساءل حول إمكانية أن يبقى فريق معين $X$ قادرًا على إحراز البطولة أم لا. وبكلمات أخرى، هل يمكن تحديد الرابحين للمباريات المتبقية بحيث لا يكون هناك فريق عدد مرات فوزه أكثر من عدد مرات فوز الفريق $X$؟ إذا كان الأمر كذلك، فإن مثل هذا التحديد يكون موجودًا بحيث يربح $X$ المباريات المتبقية جميعها، حاصلاً على $W$ فوزًا.

وهنا نرغب في معرفة ما إذا كان بإمكاننا اختيار الرابحين للمباريات الأُخرى، بحيث لا يوجد أيُّ فريق عدد مرات فوزه أكثر من $W$. ولاختبار هذا الأمر، نجد شبكة ترتبط فيها وحدات التدفق بالمباريات المتبقية.

افترض أن الفرق الأخرى هي: $X_1, \dots X_n$، واجعل $x_1, \dots, x_n$ تمثل الرؤوس (نقاط الاتصال) التي تمثل الفرق. و $y_{ij}$ تمثل $\binom{n}{2}$ زوجًا من الفرق، واجعل $s$ تمثل المنبعَ، و $t$ تمثل المصبَّ ارسم ضلعًا من $s$ إلى كل رأس $x_i$ يمثل فريقًا، وضلعًا من كل رأس يمثل زوجًا إلى $t$، لاحظ أنه يمكن الدخول إلى كل رأس (نقطة اتصال) $y_{i,j}$ بواسطة أضلاع من $xi$ إلى $x_j$.

إن السعات تعطي نموذجًا للقيود. افترض أن سعة الضلع $y_{i,j}\,t$ هي $a_{i,j}$ التي تمثل عدد المباريات الحقيقية المتبقية بين الفريقين $X_i$ و $X_j$. إذا علمت أن الفريق $X_i$ قد ربح $w_i$ مباراة لغاية الآن، فإن السعة على الضلع $s\,x_i$ هي $W - wi$ من أجل إبقاء $x$ ضمن المنافسة.

وكذلك، فإن السعة على الأضلاع $xi\,y_{i,j}$ و $xj\,y_{i,j}$ هي $\infty$ (لاحظ أنَّ عددَ المباريات التي يربحها $x_i$ من $x_j$ مقيدٌ بالسعة على الضلع $y_{ij}\,t$).




من نظرية التتام، نجد أن التدفق الأكبر ينقسم إلى وحدات تدفق ترتبط كل وحدة فيها بمباراة واحدة فقط، حيث يحددُ الضلعُ الأول الفريقَ الرابح، أما الضلعُ الأخير فيحددُ زوجَ الفرق المتبارية. إن قيمة التدفق للشبكة تكون مساوية للمجموع $\sum_{ij} a_{ij}$ إذا وفقط إذا أمكن لعب المباريات المتبقية جميعها على ألا يتجاوز عدد مرات فوز أي فريق $W$؛ وهذا هو الشرط اللازم لإبقاء $X$ في المنافسة.

من نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع، هناك تدفق قيمته $\sum a_{ij}$ على الأقل. افترض أن $S,T$ قاطع له سعة منتهية، وافترض أن $Z = \{i : x_i \in T\}$. بما أن $c(x_i, y_{i,j}) = \infty$، فلا يمكن أن تكون $x_i \in S$ و $y_{ij} \in T$. لذا،

فإن $y_{ij} \in S$S عندما $i, j \notin Z$ . ولتصغير السعة؛ نضع $y_{ij} \in T$ عندما $\{i, j\} \subseteq Z$ . الآن:

$$\operatorname{cap}(S,T) = \sum_{i\in Z}(W - wi) + \sum_{\{i,j\}\not\subseteq Z} a_{i,j}$$

إن الشرط اللازم لتكون سعة كل قطع $\sum a_{ij}$ على الأقل يصبح ما يأتي:

$$\sum_{i\in Z}(W - wi) \geq \sum_{\{i,j\}\subseteq Z} a_{i,j} \quad \text{لكل } Z \subseteq [n]$$

لاحظ أن هذا الشرط ضروري؛ لأنه يشير إلى أننا نحتاج إلى تفاوت كاف في عدد مرات الفوز الكلي بين الفرق التي دليلها $Z$، وذلك من أجل تجهيز (تثبيت) الفرق الفائزة في المباريات جميعها من بين هذه الفرق. وبذا، نكون قد أثبتنا TONCAS. ■

إن التطبيقات التركيبية لتدفق الشبكات عادة ما تتضمن وجود شكل معين (هـ) إذا وفقط إذا وُجِدَ للشبكة المرتبطة بذلك تدفقٌ كبيرٌ كاف. وكما في التطبيق 16.3.4، فإن نظرية أكبر تدفق وأصغر قاطع تعطي شروطًا ضرورية وكافية لوجود هذه الشبكة. وهناك أمثلة أخرى موجودة في التمارين 5 – 7، وتمرين 13، والنظريتين 17.3.4 و 18.3.4.

### العرض والطلب (اختياري) (Supplies and Demand (Optional))

نعتمد فيما يأتي نموذجًا أعمّ للشبكات، حيث نسمح بوجود مصادر (ينابيع) متعددة وكذلك وجود مَصابّ متعددة، وسنربط بكل منبع $x_i$ عرض $\sigma(x_i)$، وبكلّ مصبّ $y_j$ دالة طلب $\partial(y_j)$. بالإضافة إلى قيود السعة على الأضلاع وقيود المحافظة على الرؤوس (نقاط الالتقاء) الداخلية نضيف قيود الانتقال إلى المنابع والمصاب.

$$f^{+}(x_i) - f^{-}(x_i) \geq \sigma(x_i) \qquad \text{لكل منبع } x_i$$

$$f^{-}(y_j) - f^{+}(y_j) \geq \partial(y_j) \qquad \text{لكل مصب } y_i$$

إن الشكل الناتج هو شبكة تنقل. لاحظ أنه إذا كانت قيمُ دالة الطلب موجبةً فإن التدفقَ الصفري غير ملائم. نحن نبحث عن تدفق ملائم يحقق هذه القيود الإضافية، وهذا ما نجده في مصطلح العرض والطلب الذي يقترح هذه القيود، حيث يجب أن نحقق الطلبات عند المصابّ دون أن نتخطى العرض المتوافر عند أي منبع. ويناسب هذا النموذج الشركات التي لها مراكز توزيع متعددة (منابع) ومخارج جزئية (مَصابّ).

افترض أن $X$ و $Y$ ترمزان إلى مجموعتي المنابع والمصابّ على الترتيب. وافترض أن $\sigma(A) = \sum_{v\in A}\sigma(v)$ و $\partial(B) = \sum_{v\in B}\partial(v)$ ترمزان إلى المعروض الكلي أو الطلب الكلي على مجموعة $A \subseteq X$ أو مجموعة $B \subseteq Y$. إذا كانت $F$ مجموعة من الأضلاع، فاجعل $c(F) = \sum_{e\in F} c(e)$ . إذا أعطينا مجموعة $T$ من الرؤوس، فإن محصلة الطلب $\partial(Y \cap T) - \sigma(X \cap T)$ يجب أن تتحقق من التدفق من الرؤوس المتبقية. لذا، يجب أن تكون $[\overline{T}, T]$ $c$ على الأقل بهذا المقدار، وتحقيق ذلك لكل مجموعة $T$ يكون كافيًا للحصول على تدفق ملائم (TONCAS) .

### 17.3.4. نظرية: (Gale [1957]).

إذا كانت $N$ شبكة تنقل منابعها $X$ ومَصابُّها $Y$، فإن تدفقًا ملائمًا يتمّ إذا وفقط إذا تحقق أن $c([S, T]) \geq \partial(Y \cap T) - \sigma(X \cap T)$ لكل تجزئة لرؤوس $N$ إلى المجموعتين $S$ و $T$.

**الإثبات:** لقد سبق لنا أن لاحظنا ضرورة الشرط الموجود، ولإثبات كفاية هذا الشرط؛ سنبني شبكة جديدة $N'$ بإضافة منبع كبير $s$ (*super source*) ومصبٍّ كبير $t$، وبسعة $\sigma(x_i)$ لكل ضلع من $s$ إلى كل $x_i$ في $X$ وبسعة $\partial(y_j)$ من كل ضلع $y_j \in Y$ إلى $t$. في هذه الحالة، يكون لشبكة النقل $N$ تدفق ملائم إذا وفقط إذا وُجِدَ لـ $N'$ تدفقٌ يشبع كل ضلع إلى $t$ (تدفق قيمته $\partial(Y)$).

ومن نظرية فورد و فولكرسون نعلم أن لـ $N'$ تدفقًا يساوي $\partial(Y)$ إذا وفقط إذا كان $\{(S \cup s, T \cup t) \geq \partial(Y)$ CAP لكل تجزئة $S$ و $T$ لرؤوس $\acute{N}\ (V(N))$. إن القطع $[S \cup s, T \cup t]$ في $N'$ يتألف من $[S, T]$ من $N$ إضافة إلى الأضلاع من s إلى $T$، ومن $S$ إلى $t$ في $N'$. لذا، فإن:

$$cap(S \cap s,\ T \cup t) = c(S,T) + \sigma(T \cap X) + \partial(S \cap Y).$$

وبناء عليه فإن $\mathrm{cap}(S \cup s,\ T \cup t) \geq \partial(Y)$ إذا وفقط إذا كان

$$c(S,\ T) + \sigma(X \cap T) \geq \partial(Y) - \partial(Y \cap S) = \partial(Y \cap T),$$

وهذا هو الشرط المفروض. ■

للأمثلة والشواهد المحددة، يعدّ بناءُ $N$ ‹ النقطةَ المفتاحية (الأساسية)؛ لأنه يمكن إنتاج تدفق ملائم في $N$ (عندما يكون موجودًا) من خلال تطبيق خوارزمية فورد وفولكرسون على الشبكة $N'$.

عندما نربط التكلفة (لكل وحدة تدفق) بالأضلاع، نحصل على مسألة تدفق لأقل تكلفة، والتي تعمم مسألة النقل في التطبيق 3. 2. 14. لقد ظهرت الخوارزميات التي تعطي حلولاً لمسائل التدفق لأقل تكلفة في المرجعين Ford –Fulkerson [1962]، و Ahuja- Managent- Orlin [1993] .

وسنناقش عدة تطبيقات لشرط Gale. لتكن $p= (p_1, \ldots, p_m)$ و $q = (q_1, \ldots, q_n)$ قائمتين من الأعداد الصحيحة، ويكون الزوجُ $(p, q)$ بيانًا ثنائيًّا (التمرين 1. 4. 31 ) إذا وُجد بيانٌ ثنائي بسيط $X, Y$ بحيث إن درجات رؤوس $X$ هي: $P_1, \ldots, P_m$، ودرجات رؤوس $Y$ هي: $q_1, \ldots, q_n$ ، من الواضح أن $\sum p_i = \sum q_j$ شرط ضروري، ولكنه غير كاف. لاختبار ما إذا كان الزوج $(p, q)$ يمثل بيانًا ثنائيًا؛ جِدْ شبكةً ترتبط فيها وحدات التدفق بأضلاع البيان المنشود، حيث يكون الناتج نظيرًا للبيان ثنائي الفرع الذي نحصل عليه من خلال شرط إيردوز وجالاي (Erdos – Gallai) المتعلق بمتتالية البيان (التمرين 28. 3. 3).

**18.3.4. نظرية:** (Gale [1957], Ryser [1957]) إذا كانت كلّ من $p$ و $q$ قائمتين من الأعداد الصحيحة غير السالبة، ولنقل إن:

$P = (p_1, \ldots, p_m)$ و $q = (q_1, \ldots, q_n)$ حيث $p_1 \geq \ldots \geq p_m$ و $q_1 \geq \ldots \geq q_n$ وإذا تحقق أن $\sum p_i = \sum q_j$، فإن الزوج $(p, q)$ يُمَثِّلُ بيانًا ثنائيًّا إذا وفقط إذا تحقق أن $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^{k} q_j$ ، حيث $1 \leq k \leq n$.

**الإثبات:** الضرورة: افترض أن $G$ بيان بسيط ثنائي، رأساه $X$ و $Y$ يحقق الزوج $(p, q)$ . خذ في الحسبان الأضلاعَ الواقعة على $k$ من الرؤوس الموجودة في $Y$. بما أن $G$ بيان بسيط، فإن $xi \in X$ جميعها تقع على $k$ من هذه الأضلاع على الأكثر. وكذلك، فإن $x_i$ يقع على $p_i$ من هذه الأضلاع على الأكثر. لذا، فإن $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\}$ يمثل حدًّا أعلى على الأضلاع الواقعة على أي $k$ من رؤوس $Y$، وذلك مثل الرؤوس التي درجاتها $q_1, \ldots, q_k$

الكفاية: لديك الزوج $(p, q)$، جد الشبكة $N$، حيث أن سعة كل ضلع من $x_i$ إلى $y_j$ تساوي 1 لكل $i, j$. وافترض أن $\sigma\ (x_i) = p_i$ وإن $\partial\ (y_i) = q_j$. تمنح وحدة السعة الاضلاع المتعددة ، ويصبح الزوج $(p, q)$ إذا وفقط إذا كان تدفق $N$ ممكنًا.

الآن، يكفي أن نثبت أن الشرط المنصوص عليه في $p$ و $q$ يتضمن الشرط الموجود في النظرية 17.3.4. إذا كانت $S \subseteq V\ (N)$. اجعل $I(S) = \{i : x_i \in S\}$ و $J(S) = \{j : y_j \in S\}$.

الآن، لكل تجزئة $S$، $T$ للمجموعة $V(N)$ نعلم أن $\sigma\ (X \cap T) = \sum_{i \in I(T)} pi$ و $\partial\ (Y \cap T) = \sum_{j \in J(T)} qj$.

لذا، نحصل على أن: $c([S,\ T]) = |I(S)| \cdot |J(T)|$، وبجعل $K = |J(T)|$ ، فإن الكمية الأخيرة تصبح

$$c([S,T]) = |I(S)|k = \sum_{i\in I(s)} k \ge \sum_{i\in I(s)} \min\{p_i, k\}$$

وكذلك $\sum_{i\in I(T)} P_i \ge \sum_{i\in I(T)} \min\{p_i, k\}$ و $\sum_{j\in J(T)} q_j \le \sum_{j=1}^{k} q_j$ وبربط هذه المتباينات، فإن الشرط يعطي أن $c([S,T]) \ge \partial(Y\cap T) - \sigma(X\cap T)$ . وبما أن هذا يتحقق لكل تجزئة $S$ و $T$، إذن، يوجد تدفق ملائم للشبكة يعطي بدوره البيانَ ثنائي الفرع المنشود. ■

يمكن تعميم مسألة أكبر تدفق بافتراض حد أدنى غير سالب للتدفق المسموح في كل ضلع. إن قيود السعة تبقى حدًّا أعلى. لذا، نطلب أن يحقق التدفق $f(e)$ المتباينة: $L(e) \le f(e) \le u(e)$ . علمًا بأننا ما زلنا نفترض شروط المحافظة على الرؤوس (نقاط الالتقاء) الداخلية. إذا وُجدَ لدينا تدفقٌ ملائم، فإن تعديلاً بسيطًا لخوارزمية Ford و Fulkerson الخاصة بوضع العلامات يسمح لنا بإيجاد أكبر (أو أصغر) تدفق ملائم (تمرين 4). إن الصعوبة تكمن في إيجاد تدفق ابتدائي ملائم. وسنعرض التطبيق الآتي:

### 19.3.4. تطبيق: تدوير المصفوفات (Bacharach[1996])

في بعض الأحيان، نرغب في تدوير مدخلات مصفوفة معينة لأقرب عدد صحيح أكبر من المدخلة أو أصغر منها. وكذلك نرغب في أن يكون مجموع عناصر الصّفِّ أو العمود عددًا صحيحًا. إن مجموع كل صفّ أو عمود مدور يجب أن يكون تدويرًا لحاصل الجمع الأصلي لمدخلات هذا الصّفّ أو العمود. وتُسمى مصفوفةُ الأعداد الصحيحة الناتجة (إن وجدت) تدويرًا منسجمًا.

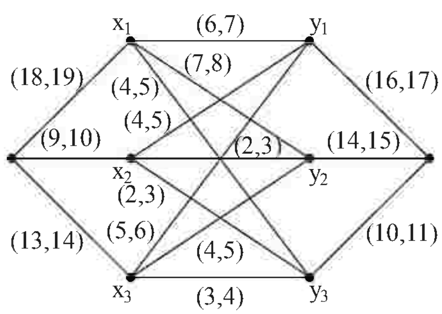
يمكن تمثيل مسألة التدوير المنسجم بوصفها مسألة تدفق ملائم. اجعل الرؤوس $x_1, \ldots, x_n$ تمثّل الصفوفَ، في حين تمثل الرؤوسُ $y_1, \ldots, y_n$ أعمدةَ المصفوفة، أضف منبعًا $s$، ومصبًّا $t$، أضف الأضلاع $sx_i$ و $x_iy_i$ و $y_it$ لقيم $i$ و $j$ جميعها. إذا كانت $a_{ij}$ هي مدخلات المصفوفة، و $r_1, \ldots, r_n$ هي حاصل جمع مدخلات الصفوف، و $s_1, \ldots, s_n$ تمثل حاصل جمع مدخلات الأعمدة، اجعل:

$$l(sx_i) = \lfloor r_i \rfloor, l(x_i, y_i) = \lfloor a_{i,j} \rfloor, l(y_it) = \lfloor c_j \rfloor$$

$$u(sx_i) = \lceil r_i \rceil, u(x_iy_i) = \lceil a_{i,j} \rceil, u(y_it) = \lceil c_j \rceil$$

نجري اختبار التدفق الملائم من خلال تحويل المسألة إلى مسألة عادية عن أكبر تدفق . ومن خلال هذا التحويل، يمكننا استخدام شبكة تدفق لاختبار وجود تدوير منسجم. ■

$$\begin{pmatrix} 6.3 & 7.6 & 4.6 \\ 4.7 & 2.3 & 2.8 \\ 5.5 & 4.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$



**20.3.4.** الحل. الدوران والتدفق اللذان لهما حدود دنيا (سفلى).

في مسألة أكبر تدفق ذات الحدود العليا والحدود الدنيا على السعة على الأضلاع، يكون التدفق الصفري غير ملائم. لذا، فإن خوارزمية فورد وفولكرسون لوضع العلامات لا تجد مكاناً للبدء. حيث يجب الحصول على تدفق ملائم أولاً. وبعد ذلك، نستطيع تطبيق خوارزمية وضع العلامات من خلال إجراء تعديل بسيط على هذه الخوارزمية (التمرين 4).

في الخطوة الأولى، نضيف ضلعًا (سعته ما لانهاية) من المصبِّ إلى المنبع. يكون للشبكة الناتجة تدفقٌ ملائم يتّسِمُ بالمحافظة عند كل (نقطة التقاء) رأس (تسمى دورانًا) إذا وفقط إذا كان للشبكة الأصلية تدفقٌ ملائم. في مسألة الدوران، لا يوجد منبعٌ ولا مصبٌّ. بعد ذلك، نحوِّل مسألة الدوران الملائم $C$ إلى مسألة أكبر تدفقًا $N$ من خلال استحداث عروض وطلبات عند الرؤوس (نقاط الالتقاء) ومن خلال إضافة منبع ومصبّ من أجل تحقيق فرضيات مسألة العرض والطلب. تحت قيد التدفق: $l(e) \le f(e) \le u(e)$ افترض أن $c(e) = u(e) - l(e)$ لكل ضلع $e$، وأن $l^-(v) = \sum_{e\in[V(C)-v,v]} l(e)$ و $l^+(v) = \sum_{e\in[v,V(C)-v]} l(e)$ و $b(v) = l^-(v) - l^+(v)$ لكل رأس $v$.

بما أن $l(uv)$ تسهم في $l^+(u)$ وفي $l^-(v)$، فإن $\sum b(v) = 0$. لاحظ أن الدوران الملائم $f$ يجب أن يحقق قيود التدفق على كل ضلع، وكذلك يحقق أن: $f^+(v) - f^-(v) = 0$ عند كل رأس (نقطة التقاء). وبجعل $f'(e) = f(e) - l(e)$، نجد أن $f$ تمثل دورانًا ملائمًا $C$ إذا وفقط إذا كانت $f'$ تحقق $0 \le f'(e) \le c(e)$ على كل ضلع، وأن $f'^+(v) - f'^-(v) = b(v)$ عند كل رأس.

لاحظ أن هذا ينقل مسألة الدوران الملائم إلى مسألة تدفق بعروض وطلبات. إذا كانت $b(v) \ge 0$، فإن $v$ يزود الشبكة بتدفق مقداره $|b(v)|$، وبغير ذلك، فإن $v$ يطلب تدفقًا بمقدار $|b(v)|$. لتجديد قيود المحافظة، نضيف منبعًا $s$ تكون فيه سعة الضلع مساوية $b(v)$ لكل رأس $v$ حيث $b(v)>0$، وكذلك نضيف مصبًّا $t$ تكون فيها سعة الضلع مساوية $-b(v)$ من كل رأس $v$ حيث $b(v) < 0$، وهذا يكمل بناء الشبكة $N$.

افترض أن $\alpha$ تمثل السعة الكلية على الأضلاع المغادرة للمنبع s، بما أن $\sum b(v) = 0$، فإن السعة الكلية للأضلاع الداخلة إلى المصبِّ $t$ تساوي $\alpha$. الآن، يوجد لـ $C$ دوران ملائم $f$ إذا وفقط إذا كان لـ $N$ تدفقٌ قيمته $\alpha$ (مشبع بالأضلاع جميعها الخارجة من $s$ أو الداخلة إلى $t$). ■

**21.3.4. النتيجة:** افترض أن $D$ شبكة لها قيود محافظة عند كل رأس (نقطة التقاء). يكون لهذه الشبكة دوران ملائم إذا وفقط إذا تحقق أن: $\sum_{e\in[\bar{S},S]} u(e) \ge \sum_{e\in[S,\bar{S}]} l(e)$ لكل $S \subseteq V(D)$.

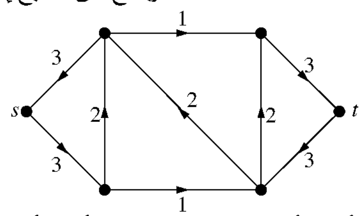
**الإثبات:** يمكننا الوقوف قبل الخطوة الأخيرة في نقاشنا للحل 20.3.4. وتوضيح مسألتنا بوصفها مسألة عرض وطلب في نموذج النظرية 17.3.4. بما أن $\sum b(v) = 0$، فإن الطريقة الفريدة لتلبية الطلبات جميعها هي استخدام المعروض كله. لذا، يوجد دوران إذا وفقط إذا وجد حل لمسألة العرض والطلب التي عروضها $\sigma(v) = b(v)$ لكل $\{v \in V(D) : b(v) \ge 0\}$ وطلباتها $\partial(v) = -b(v)$ لكل $\{v \in V(D) : b(v) < 0\}$.

لاحظ أن النظرية 17.3.4 تعطي توصيفًا للحالة التي يوجد فيها حلٌّ لهذه المسألة. وبإرجاع المسألة إلى الحدود العليا والدنيا على التدفق في المسألة الأصلية (التمرين 22)، فإن المعيار الموجود في النظرية 17.3.4 يصبح:

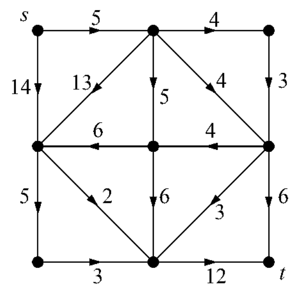
$\sum_{e\in[\bar{S},S]} u(e) \ge \sum_{e\in[S,\bar{S}]} l(e)$ لكل $S \subseteq V(D)$. ■

## تمارين (Exercises)

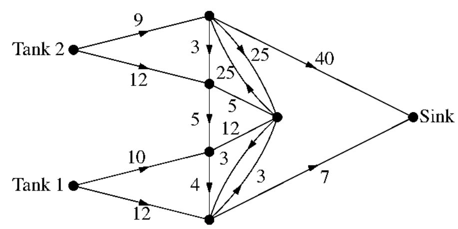
**1.3.4.** (−) في الشبكة المبينة أدناه. جد قائمة بالتدفقات الملائمة التي قيمها أعداد صحيحة، واختر تدفقًا ذا قيمة قصوى (عظمى). (يوضح هذا فائدة مبدأ الثنوية على البحث الشامل). أثبت أن هذا التدفق هو أكبر تدفق عن طريق إيجاد قطع له القيمة نفسها. حدد عدد القواطع من المنبع إلى المصبِّ (تعليق: يوجد تدفق غير صفري قيمته صفر).




**2.3.4.** (−) في الشبكة الموضحة أدناه، أوجد أكبر تدفق من $s$ إلى $t$. أثبت أن جوابك هو الأمثل عن طريق استخدام المسألة المرافقة التي تحصل عليها من مبدأ الثنوية (الازدواجية)، ووضح لما ذا يعطينا هذا إثباتًا للأمثلية؟




**3.3.4.** (−) افترض أن مجلي مطبخ يسحب الماء من خزانين بحسب شبكة الأنابيب ذات السعات (لكل وحدة زمن) الموضحة في الرسم أدناه. جد أكبر تدفق. أثبت أن جوابك هو الأمثل عن طريق استخدام المسألة المرافقة التي تحصل عليها من مبدأ الثنوية (الازدواجية)، ووضِّح لما ذا يعطينا هذا إثباتًا للأمثلية.؟




**4.3.4.** افترض أن $N$ شبكة لأضلاعها سعات معينة، ولنقاط الاتصال قيود محافظة بالإضافة إلى حدود دنيا $L(e)$ على التدفق عبر الأضلاع، بمعنى أننا نشترط أن $f(e) \geq L(e)$. إذا كان التدفق الملائم الابتدائي معطى، فبين كيف يمكن تعديل خوارزمية فورد وفولكرسون لوضع العلامات من أجل البحث عن أكبر تدفق ملائم عبر هذه الشبكة.

**5.3.4.** (!) استخدم تدفق الشبكات لإثبات نظرية منجر المتعلقة بالمسارات المنفصلة داخليًّا للبيانات الموجهة: $\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$ عندما لا يكون $xy$ ضلعًا. (مساعدة: استخدم التحويل الأول المقترح في الملاحظة 15.3.4).

**6.3.4.**(!) استخدم تدفق الشبكات لإثبات نظرية منجر المتعلقة بالمسارات المنفصلة ضلعيًّا للبيانات:

$k'(x,y)=\lambda'(x,y)$ (مساعدة: استخدم التحويل الثاني المقترح في الملاحظة 15.3.4).

**7.3.4.** (!) استخدم تدفق الشبكات لإثبات نظرية منجر المتعلقة بالرؤوس غير المتجاورة في البيانات: $k(x,y)=\lambda(x,y)$. (مساعدة: استخدم التحويلين المقترحين في الملاحظة 15.3.4).

**8.3.4.** افترض أن $G$ بيان موجّه فيه $x,y\in V(G)$. وافترض أيضًا أن السعات قد حُدِّدَتْ على الرؤوس المختلفة عن $x$ و $y$ بدلاً من تحديدها على الأضلاع، وافترض وجود حدٍّ ثابت للتدفق الكلي عبر كل رأس، ولا يوجد أيُّ حصر على التدفق عبر الأضلاع، وضِّح كيف يمكن استخدام نظرية تدفق الشبكات العادية لتحديد أكبر قيمة لتدفق ملائم من $x$ إلى $y$ في البيان $G$ الذي حُدِّدَتْ سعات رؤوسه.

**9.3.4.** استخدم تدفق الشبكات لإثبات أن البيان $G$ يكون مترابطًا إذا وفقط إذا وُجِدَ لكل تجزئة لـ $V(G)$ لمجموعتين غير خاليتين $S$ و $T$ ضلعٌ له نقطة طرفية في $S$، وأخرى في $T$. (تعليق: يوجد إثبات مباشر لهذه المسألة في الفصل الأول. لذا، فهذا مثال على استخدام مطرقة ضخمة لقتل بعوضة أو ذبابة).

**10.3.4.** (!) استخدم تدفق الشبكات لإثبات نظرية كونج وإيجرفاري (König-Egervary) ( $\alpha'(G)=\beta(G)$ إذا كان البيان $G$ ثنائي الفرع).

**11.3.4.** أثبت أن خوارزمية المسار الموسّع للبيانات الثنائية الفرع (الخوارزمية 1.2.3) تمثل حالة خاصة من خوارزمية فورد وفولكرسون لوضع العلامات.

**12.3.4** . افترض أن $[S,\overline{S}]$ و $[T,\overline{T}]$ قطعان من المنبع إلى المصبِّ في شبكة $N$:

a) أثبت أن $\text{cap}(S\cup T,\overline{S\cup T})+\text{cap}(S\cap T,\overline{S\cap T})\le\text{cap}[S,\overline{S}]+\text{cap}[T,\overline{T}]$ (مساعدة: ارسم رسمة، وخذ في الحسبان المساهمات من مختلف أنواع الأضلاع).

b) افترض أن $[S,\overline{S}]$ و $[T,\overline{T}]$ قطعان أصغران، استنتج من فرع $a$ أن $[S\cup T,\overline{S\cup T}]$ و $[S\cap T,\overline{S\cap T}]$ هما أيضًا قطعان أصغران، واستنتج كذلك عدم وجود ضلع بين $S-T$ و $T-S$ له سعة موجبة.

**13.3.4.** (!) افترض أن عدة شركات أرسلت ممثلين عنها إلى أحد المؤتمرات؛ حيث تقوم الشركة $i$ بإرسال $m_i$ ممثلاً لها. يعقد منظمو المؤتمر عدة ورش عمل في الوقت نفسه عن طريق تقسيم المشاركين إلى عدة مجموعات، فالمجموعة رقم $j$ تستطيع أن تستوعب $n_j$ مشاركًا. وافترض أن منظمي المؤتمر يرغبون في توزيع المشاركين جميعهم على مجموعات العمل بحيث لا تضم المجموعة أكثر من ممثل واحد لكل شركة مشاركة، وافترض كذلك أن اكتمال المجموعات ليس ضروريًّا:

a) وضِّحْ كيف يمكن استخدام تدفق الشبكات لاختبار ما إذا أمكن تحقيق الشروط المفروضة أعلاه أم لا.

b) إذا كان عدد الشركات يساوي $p$، وعدد مجموعات العمل يساوي $q$، وافترض أنه وُضِعَ دليل على هذه المجموعات بحيث يحقق:

$m_1\ge\cdots\ge m_p$ و $n_1\le\cdots\le n_q$. أثبت أنه يمكن توزيع المشاركين على مجموعات العمل على أن تتحقق الشروط المفروضة جميعها إذا وفقط إذا تحقق أن $\sum_{i=1}^{k}m_i\le\sum_{j=1}^{l}n_j+k(q\text{-}l)$ لكل $0\le k\le p$ و $0\le l\le q$ .

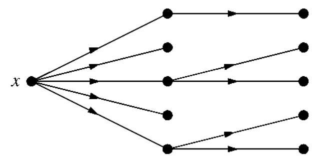
**14.3.4.** افترض أنه يوجد $k$ من الأقسام الأكاديمية في إحدى الجامعات الكبيرة. وافترض أيضًا أننا نرغب في تعيين لجنة مهمة تختار أستاذًا من كل قسم، علمًا بأن بعض الأساتذة معينين تعيينًا مشتركًا بين قسمين أو أكثر، وافترض كذلك أنه لا يمكن تعيين أي شخص ليكون ممثلاً لأكثر من قسم، وافترض أيضًا أن عدد الأساتذة المساعدين يساوي عدد الأساتذة المشاركين ويساوي عدد الأساتذة في هذه اللجنة (افرض أن $k$ تقبل القسمة على 3). بَيِّنْ كيف يمكن إيجاد مثل هذه اللجنة. (مساعدة: جد شبكة بحيث ترتبط وحدات التدفق بالأساتذة الذين تم اختيارهم لهذه اللجنة، وأن السعات تمثل القيود المختلفة، ثمّ وضّح كيفية استخدام هذه الشبكة لاختبار ما إذا

وُجدت مثل هذه اللجنة، وأوجدها إن وُجدت) . (Hall [1956]).

**15.3.4** افترض أن $G$ بيان موزون. وافترض أيضًا أن قيمة الشجرة المولودة هي أصغر وزن على أضلاعها، وأن $cap$ (السعة) من قطع أضلاع $[S, \overline{S}]$ هي أكبر وزن على أضلاع هذا القطع. أثبت أن أكبر قيمة لشجرة مولدة للبيان $G$ تساوي أصغر $cap$ (سعة) لقطع أضلاع في $G$. (Ahuja – Magnanti- orlin [1993,p538]).

**16.3.4** (+) افترض أنَّ $x$ رأسٌ، درجته الخارجية أكبر ما يمكن في دوري $T$. أثبت أنه يوجد لـ $T$ شجرة مولدة موجهة جذرها $x$ بحيث يكون بُعْدُ كل رأس عن $x$ يساوي 2 على الأكثر، وبحيث تساوي الدرجة الخارجة لأي رأسٍ مختلف عن $x$ 2 على الأكثر.

(مساعدة: جد شبكة بوصفها نموذجًا للمسارات المنشودة للرؤوس التي لا تكون خَلَفًا لـ $x$، وأثبت أن لكل قطع سعة كافية. تعليق: هذا يقوي القضية 30.4.1 عن الملوك في دوريات الألعاب: لا يوجد أي رأس بحاجة إلى أن يكون رأسًا متوسطًا لأكثر من رأسين آخرين [Lu [1996]).




**17.3.4** (∗ -) استخدم نظرية Gale و Ryser (نظرية 18.3.4) لتحديد ما إذا وُجِدَ بيانٌ بسيط ثنائي الفرع تكون درجات رؤوس إحدى مجموعتي رؤوسه هي: (5،4،4،2،1) وكذلك درجات رؤوس المجموعة الثانية من رؤوسه هي: (5،4،4،2،1) أيضًا.

**18.3.4** (∗ -) افترض أن $r=(r_1, \ldots, r_n)$ و $s=(s_1, \ldots, s_n)$. جد الشروط الضرورية والكافية للحصول على بيان موجه $D$ رؤوسه $v_1, \ldots v_n$ بحيث يظهر كلُّ زوج مرتب مرة واحدة على الأكثر بوصفه ضلعًا، وبحيث إن $d^+(v_i) = r_i$ و $d^-(v_i) = s_i$ لكل $i$ أيضًا.

**19.3.4** (∗ -) جد تدويرًا منسجمًا للمعطيات الموجودة في المصفوفة أدناه. هل هذا التدوير فريد؟ (يجب أن تكون كلُّ مدخلةٍ صفرًا أو واحدًا).

$$\begin{pmatrix} .55 & .6 & .6 \\ .55 & .65 & .7 \\ .6 & .65 & .7 \end{pmatrix}$$

**20.3.4** (∗) أثبت أن كل مصفوفة حجمها $2 \times 2$ يمكن تدويرها تدويرًا منسجمًا.

**21.3.4** (∗) افترض أن كل مدخلة من مدخلات المصفوفة التي حجمها $n \times n$ تقع بين $\frac{1}{n}$ و $(\frac{1}{n-1})$. صف التدويرات المنسجمة لهذا المصفوفة جميعها.

**22.3.4** (∗) أكمل تفاصيل إثبات النتيجة 21.3.4، وذلك بإثبات الشروط الضرورية والكافية لوجود دوران في شبكة لها حدود دنيا وعليا.

**23.3.4** (!∗) يقال للبيان المنتظم من الدرجة $k + l$ بأنه قابل للتوجيه $(k, l)$ إذا أمكن توجيهه بحيث تكون الدرجة الداخلة لكل رأس إما $k$ أو $l$:

(a أثبت أن البيان $G$ قابل للتوجيه $(k, l)$ إذا وفقط إذا وُجدت تجزئة $X, Y$ لرؤوسه $V(G)$ بحيث يتحقق لكل $S \subseteq V(G)$ ما يلي: $(k - l)(|X \cap S| - |Y \cap S|) \le |[S,\overline{S}]|$ (مساعدة: استخدم النظرية 17.3.4).

(b استنتج: إذا كان $G$ قابلاً للتوجيه $(k, l)$، وكانت $k > l$، فإن $G$ يكون أيضًا قابلاً للتوجيه $(k-1, l+1)$ (Bondy – Murty [1976, p.210- 211].