الفصل الخامس

التفكير الرياضى وأسلوب حل المشكلات

* تمهيد.
* المشكلة عند جون ديوى.
* المشكلة فى الرياضيات.
* حل المشكلات وأنظمة التفكير الرياضى.
* أسلوب حل المشكلات فى الرياضيات.
* استراتيجية التدريس باستخدام أسلوب حل المشكلات.
* اكساب التلاميذ مقومات التفكير فى حل المشكلات الرياضية.
* أسلوب التفكير فى حل بعض المسائل الرياضية.

تمهيد:

يصادف الفرد دومًا فى حياته اليومية بعض الأمور التى تحتاج منه وقفة ليفكر فيها، وقد تطول هذه الوقفة إذا كان الأمر صعبًا أو غير واضح؛ فيكون هذا الأمر بالنسبة له بمثابة مشكلة تؤرقه، إلى أن يجد لها الحل المعقول.

ما تقدم، لا يختلف كثيراً بالنسبة للتلميذ أثناء دراسته بالمدرسة، إذ عليه أن يقف أمام بعض المشكلات التى تعترضه أثناء دراسته ليفكر فيها، وبالطبع لن تستريح التلميذ طالما لم يسيطر على الموقف تمامًا. بمعنى، لن يهدأ باله ما لم يجد الحل الصحيح والمناسب للمشكلات التى يقابلها، أو المفروضة عليه كى يدرسها.

وبعامة، فإن أهم ما يميز الإنسان (سواء أكان مواطنًا عاديًا، أم متخصصًا فى أى مجال، أم طالبًا فى أية مرحلة دراسية)، عن سائر الكائنات والمخلوقات، هو قدرته على التفكير الذ ى وهبه الله إياه، وعليه، تكون إحدى واجبات التربية الرئيسة هى تنمية التفكير العقلى للفرد، ليكون أكثر قدرة على حل مشكلاته، ومن ثم يستطيع بسهولة أن يواجه متطلبات حياته على المدى القصير أو البعيد. وبذا، تسهم التربية فى تكوين المواطن الصالح ذى الشخصية المتكاملة الجوانب، المتفاعل مع من حوله.

أولاً: المشكلة عند جون ديوى:

يرى «جون ديوى» أن المشكلات تثير فى نفس الانسان نوعين من عدم الارتياح، وذلك يدفعه إلى التفكير فى حلها، إلا أن التفكير وحده لا يكفى أحيانا للوصول إلى المعرفة، إذ يتم الوصول إلى المعرفة الحقيقية عن طريق التفكير والتجربة معا.

ويرى «ديوى» أيضًا أن هناك خمس خطوات يتبعها العقل فى حل المشكلة، وهى:

الخطوة الأولى:

خلالها يشعر الفرد بوجود مشكلة تثير فى نفسه نوعا من الحيرة والاستغراب

يدفعه إلى التفكير فى حلها، وذلك يعنى وجود عائق للحل المباشر نتيجة للوعى بوجود طرق متشعبة فى طريق حل المشكلة.

الخطوة الثانية:

خلالها يحاول الفرد أن يفهم المشكلة وأن يحللها إلى العناصر التى تتألف منها، وذلك يعنى أن التعامل الذكى مع العائق يقود إلى تحديد المشكلة.

الخطوة الثالثة:

خلالها يحاول الفرد البحث عن حل للمشكلة، وذلك بالملاحظة والتجربة والاستعانة بما فى الخبرات السابقة من مواقف مشابهة أو نظريات أو معلومات تساعد على حل المشكلة، وفى أثناء ذلك تجول فى خاطر الفرد عدة حلول يفترضها، وقد يكون الحل الصحيح بينها، وذلك يعنى أن الفرد فى هذه الخطوة يتعرف على الفروض المختلفة كى ينشأ منها الحل، وفى ضوئها تتم الملاحظة وغيرها من العمليات الخاصة بجمع البيانات.

الخطوة الرابعة:

خلالها يجرى الفرد مختلف الاختبارات ليتوصل إلى الحل الصحيح، وقد يضطر إلى تركيز انتباهه فى أجزاء المشكلة جزءاً جزءاً وإجراء الاختبارات على كل جزء منها، إذا فاته التوصل إلى الحقيقة عن طريق التفكير فى المشكلة ككل، وذلك يعنى، جمع معلومات أكثر عن كل فرض واختبار جميع الفروض.

الخطوة الخامسة:

خلالها يحاول الفرد استنتاج قاعدة، ثم يطبقها على عدة مسائل مماثلة لها، حتى إذا ثبتت صحتها أصبحت قاعدة عامة، وذلك يعنى اتخاذ فرض معين ثم اختباره ليكون الاختيار النهائى.

ثانياً: المشكلة فى الرياضيات:

يمكن القول بأن الفرد يعانى بعامة من مشكلة ما، إذا توافرت العوامل الآتية:

- الفرد لديه دافع قوى لتحقيق هدف واضح أمامه.

- وجود عائق بين الفرد والهدف الذى يسعى لتحقيقه.

- قيام الفرد ببعض المحاولات بغيه وصوله إلى الهدف، ولكن دون جدوى، إلا إنه لم يفقد الأمل بعد فى تحقيق هدفه.

وباختصار، تعنى المشكلة - بعامة - كل موقف طارئ يعترض حاجة أو أكثر من حاجات الفرد ويتطلب حلا.

وبالنسبة للرياضيات، فإن المشكلة هى كل موقف يأخذ الصورة الكمية أو الرمزية، ويقف عائقًا أمام الفرد، فيبذل بعض المحاولات بهدف الوصول إلى الحل المناسب دون جدوى، إلا أنه لم يفقد الأمل بعد فى تحقيق هدفه.

ما سبق يتوافق مع بعض التعريفات التى ذكرت فى هذا الصدد، نذكر منها ما يلى:

- يعرف **كرونباخ** المشكلة (المسألة) بقوله: «كل موقف يكون مسألة للفرد حينما يكون فى حاجة لإعطاء جواب ولا يوجد لديه بحكم العادة جواب جاهز».

- ويقول **ماركس**: «حينما يجابه التلميذ موقفًا عدديًا يتطلب جوابًا، لا يكون التلميذ قد حفظه من قبل، يكون قد واجه مسألة».

- أما رأى **هارتونج**: «أن المسألة هى موقف عددى وصف بالكلمات، وأثير حوله سؤال محدد، دون أن يدل ذلك السؤال على نوع العملية اللازمة للحل».

أن الرياضيات من المجالات الخصبة التى يمكن من خلالها تقديم المشكلات المناسبة إلى التلاميذ ليقوموا بحلها بمستوى علمى مقبول، وذلك لأنها تتميز عن غيرها من بقية العلوم بأن النتائج فيها مؤكدة لا محتملة، نهائية لا مبدئية، فالتلميذ فى أية مرحلة دراسية، وتبعًا لقدراته الخاصة، يستطيع أن يحل مشكلة رياضية، أو أن يكتشف بنفسه برهان بديهية، أو يقوم بتشييد تكوين هندسى.

أن الرغبة فى الاكتشاف هى إحدى السمات التى تميز التلميذ الذى يميل

للرياضيات، وذلك يجعله يستمتع بما يعرفه، ويكون شغوفًا أيضًا بما سيعرفه من المعلومات الجديدة التى يصل إليها بنفسه. أن الرغبة فى الاكتشاف جعلت رياضى العصور القديمة يتساءل: هل يمكننى أن أجد حيلة لحل هذه المسألة؟ فإذا لم يستطع أن يجد حيلة اليوم فإنه يبحث عن واحدة غدًا.

ثالثًا: حل المشكلات وأنظمة التفكير الرياضى

على الرغم من أن عملية حل المشكلات فى تعليم الرياضيات، تعد عملية شديدة الأهمية لارتباطها الوثيق بأساليب التدريس المعاصرة، فإن من يقومون بحل المشكلات لا يفهمون الدلالة التربوية لهذه العملية. ويقترح هذا الحديث تعريفًا للمشكلة وبعض المصطلحات الفنية الخاصة بحل المشكلات، كما يعرض بعض نماذج حل المشكلات، وكخطوة أولى لحل المشكلات. ينبغى أن نعرف نقطة بداية المشكلة، وهذا ما يغفل عنه غالبًا معظم من يقوم بحل المشكلات.

وعلاوة على ذلك، يجب التعرف على المصطلحات الفنية الشائعة، مثل الغاية والهدف، والمشكلة، والسبب والسبب القابل للحل، والقضية والحل. وغالبًا ما نجد المستشارين والخبراء أنفسهم الذين يجب أن يكونوا محترفين فى حل المشكلات مشوشين ذهنيًا بشدة فى مواجهة مثل هذه المصطلحات الفنية. على سبيل المثال، نجد أن بعض الخبراءيعتبرون أن القضية هى المشكلة، والبعض الآخر يعتبر أن المشكلة هى السبب، فالقضية يجب أن تكون سبيلاً لحل المشكلات، والمشكلات ذاتها يجب أن تكون هى التعبيرات السلبية، فى حين أن القضايا هى التعبيرات الإيجابية. وغالبًا لا يضع بعض الخبراء نصب أعينهم هذه المصطلحات الفنية الدقيقة، فى حين أن هذه المصطلحات شديدة الأهمية، وغاية فى التأثير فى عملية حل المشكلات. وفى هذا الشأن، هناك نماذج فكرية كثيرة، مثل: التفكير الاستراتيجى والتفكير العاطفى والتفكير الواقعى والتفكير التجريبى وغيرها. ونعنى بالنماذج الفكرية كيف تتحقق عملية التفكير. ولقد تم بالفعل إدراك نماذج عديدة للتفكير، فإذا ما قمنا باختيار النموذج الفكرى المناسب لكل مرحلة من مراحل حل المشكلات، فإننا بذلك نرفع من كفاءة وتأثير عملية حل المشكلات.

وسوف يقوم هذا الحديث بشرح النقاط الثلاث السابقة، مثل: تعريف المشكلة، ومصطلحات حل المشكلة الفنية، ونماذج التفكير المفيدة، وذلك على النحو التالى:

١- تعريف المشكلة:

ترتبط المشكلة بالغايات من ورائها أو بأهدافها. إذا ما أراد شخص ما جمع قدر كبير من المال فإنه يتعرض لمشكلة إذا ما حصل على مبلغ قليل من المال. وعلى الجانب الآخر، إذا لم يحتاج شخص ما للمال، فإن القليل منه لا يعد مشكلة على الإطلاق بالنسبة له.

على سبيل المثال، غالبًا ما يتم تقدير المديرين الصناعيين من خلال معدلات خطوط الانتاج، والتى تظهر كنسبة مئوية لساعات الانتاج. ومن ثم، فى بعض الأحيان، يقوم بعض مديرى الانتاج باستغلال وتشغيل الخطوط الانتاجية دون الرجوع إلى مديرى المبيعات، وذلك قد يؤدى إلى إنتاج كميات كبيرة أكثر من الانتاج المطلوب، مما يسبب زيادة كبيرة فى الانتاج. هذه المشكلة الانتاجية هى مشكلة عويصة تواجه المدير العام فى حين إنها لا تسبب ثمة مشكلة أمام مديرى الانتاج.

إذا ما كان الغرض أوالهدف مختلفًا بين المديرين فى الموقف الواحد بطرق عديدة مختلفة، كل حسب نظرته وتفكيره، فربما يرى أحدهم أن هناك مشكلة، فى حين يرى البعض الآخر عدم وجود مشاكل. وعلاوة على ذلك يجب على الخبراء فى حل المشكلات أن يوضحوا الاختلافات فى الغايات أو الأهداف، ولكن - وفى كثير من الأحيان - يغفل الخبراء توضيح هذه الاختلافات، فيتعرضون لارتباك شديد أثناء حلهم للمشاكل. ومن ثم، يجب على من يقوم بحل المشكلات أن يبدأ بمشروعه الخاص بحل هذه المشكلة بتعريف الغايات وتعريف المشكلة.

٢- المصطلحات الفنية الخاصة بحل المشكلات:

يجب علينا معرفة المصطلحات الفنية الأساسية المتعلقة بالمشكلات وكيفية حلها. يعرض هذا الحديث سبعة مصطلحات، هى: الغاية، الموقف، المشكلة، السبب، السبب القابل للحل، القضية، الحل.

أ- الغاية:

أن الغاية هى ما نريد أن نفعله أو ما نريد أن نكون، ويعد مصطلح الغاية مصطلحًا سهل الفهم. ولكن غالبًا ما يغفل من يقوم بحل المشكلات عن تعريف الغاية كخطوة أولى من خطوات حل المشكلة، فدون وجود تعريف واضح للغاية، فإننا لا نستطيع أن نفكر فى حل المشكلات.

ب- الموقف:

يتمثل الموقف فى الظروف المحيطة، وعادة ما تكون هذه المواقف جيدة أو سيئة. وينبغى علينا أن ندرك وعلى نحو موضوعى هادف جميع جوانب الموقف، وبأقصى درجة ممكنة. غالبًا، قد لا تمثل المواقف مشكلات، ولكن يعتبر بعض من يقومون بحل المشكلات، أن كل هذه المواقف بمثابة مشكلات. فقبل أن نلاحظ المشكلة، يجب علينا ملاحظة المواقف بصورة واضحة، دون إعتبار لكونها مشاكل فى ذاتها. وكذلك يجب أن لا ننظر إلى المواقف كمسببات للمشكلات. ودون ملاحظة المواقف بصورة موضوعية هادفة، فإن من يقوم بحل المشكلات قد يكون ضيق الأفق، لأنه ينظر إليها بتحامل وإجحاف.

جـ - المشكلة:

المشكلة هى مجموعة أجزاء من المواقف، والتى قد لا تحقق الغاية. وبما أن من يقومون بحل المشكلات يهملون الاختلافات بين «الغايات»، فإنهم لا يستطيعون الانتباه إلى المشاكل الحقيقية. وبعامة إذا ما اختلف الغرض أو الغاية يصبح الموقف مشكلة، أو قد لا يكون مسببًا لأية مشكلات!!

د- السبب:

أن السبب هو ما يرتبط بالمشكلة، وفى كثير من الأحيان قد لا يستطيع من يقوم بحل المشكلات وضع حدود فارقة بين السبب وبين المشكلة ذاتها. ولكن بما أن المشكلة هى مجموعة أجزاء من المواقف، فإنها تكون بذلك أكثر عمومية من السبب.

وبعبارة أخرى، فإن الأسباب هى حقائق أكثر تحديداً وأكثر خصوصية، والتى تتعلق بالمشكلات. ودون التميز بين السبب والمشكلة، لا يمكن حل المشكلات، فإيجاد الحقائق المحددة المسببة للمشكلة، يمثل الخطوة الأساسية التى يمكن بها حل المشكلات.

هـ - السبب القابل للحل:

يعد السبب القابل للحل جزءً من أجزاء السبب. فعندما نقوم بحل مشكلة يجب علينا التركيز على الأسباب القابلة للحل. فإيجاد مثل هذه الأسباب القابلة للحل هو خطوة رئيسة أخرى فى طريقنا لحل المشكلات. ولكن، وللأسف الشديد، قد لا يستطيع من يقوم بحل المشكلات استخلاص هذه الأسباب القابلة للحل من بين الأسباب عمومًا. فإذا ما أردنا أن نحل الأسباب غير القابلة للحل، فإننا بذلك نكون قد أهدرنا وقتنا بلا فائدة ولا طائل. وعن هذا، فإن استخلاص الأسباب القابلة للحل يعد خطوة شديدة الأهمية فى جعل حل المشكلات أكثر تأثيراً.

و- القضية:

تعد القضية هى التعريف المضاد لكلمة مشكلة؛ فإذا ما كانت المشكلة -مثلاً- تتمثل فى أننا لا نملك مالا، فإن القضية حينئذ تكون متمثلة فى حصولنا على المال. ولكن نجد أن بعض من يقومون بحل المشكلات لا يعرف ما هى القضية، فربما يفكرون فى «نحن لا نملك مالا»، على أنها قضية. وفى أسوأ الحالات، فربما يقوم من يحل المشكلات بالمزج بين المشكلات «والتى ينبغى أن تكون تعبيرات سلبية»، والقضايا «والتى ينبغى أن تكون تعبيرات إيجابية».

ز- الحل:

الحل هو توجه محدد لحل المشكلة، ويكون معادلا لعمل محدد لإدراك القضية. ولا يستطيع بعض من يقومون بحل المشكلات تقسيم القضايا إلى عدة أفعال أكثر تحديداً، فالقضايا لا تعد حلولا، ولابد على من يحاول أن يحل المشكلات أن يقوم بتقسيم القضايا إلى أفعال محددة.

٣- نماذج التفكير المفيدة:

يتضمن هذا لائحة تضم أربعة عشر نموذجًا فكريًا، وينبغى على من يقومون بحل المشكلات أن يختاروا النموذج الملائم استجابة لطبيعة الموقف. ويقوم هذا الحديث -كذلك- بتبويب هذه النماذج فى ثلاث مجموعات أكثر عمومية، مثل: نماذج التفكيرالخاصة بالحكم، ونماذج التفكير الخاصة بطرق التفكير، ونماذج التفكير الخاصة بالتفكير الفعال، وفيما يلى توضيح الخطوط العريضة وخلاصة كل نموذج منها.

أ- نماذج التفكير الخاصة بالحكم:

لكى نستطيع تحقيق فائدة من التفكير نحن بحاجة إلى أن نحكم فى ما نفكر فيه، هل هو صحيح أم هو خطأ؟ يعرض هذا النموذج أربعة نماذج للحكم مثل: التفكير الاستراتيجى، والتفكير العاطفى، والتفكير الواقعى، والتفكير التجريبى.

* التفكير الاستراتيجى:

يعد التركيز أو الترجيح هو المعيار للتفكير الاستراتيجى. فإذا ما حكم الفرد على موقف ما إذا كان صحيحًا أم خطأ اعتمادا على ما إذا ما كان مركزًا أو لا، ففى هذه الحالة يكون حكمه استراتيجيا وتاريخيا. فى هذا الشأن، نجد أن العديد من الاستراتيجيين، أمثال: سونفوزيس فى الصين القديمة ونابليون وبورتر يعتمدون على التفكير الاستراتيجى فى تطويرهم لاستراتيجياتهم.

* التفكير العاطفى:

يعد الجانب العاطفى جانبًا أساسيًا فى المنظمات، حيث يحكم القادة الحربيون على الموقف؛ هل هو صحيح أم لا، اعتمادًا على مشاركة الجانب العاطفى. يعتقد المشاركون، إنه إذا ما كانوا يشكلون جانبًا إيجابيًا فى موقف ما، فإن هذا الموقف فى -هذه الحالة- يعد صحيحًا.

* التفكير الواقعى:

فى ضوء المعيارين التاليين شديداً الأهمية والإفادة:

- إبدأ من حيث ما تستطيع أن تفعله.

- إصلح المشكلة الأساسية أولاً.

يمكن الزعم بأن البدء شيء مهم الغاية، حتى ولو كان بطيئًا أو ضعيفًا. ولا ينبغى علينا أن نبدأ بالجانب/ الجزء الأساسى. وحتى لو بدأنا من الجزء السهل، فالبدء فى حد ذاته يعد حكمًا أفضل من الحكم دون بداية فى تحقيق التفكير الواقعى. علاوة على ذلك، عندما نبدأ، ينبغى علينا أن نبحث عن المشاكل الأساسية التى تمكننا من جعل المشكلة أكثر تأثيراً. وعادة نجد أن ٨٠٪ من المشكلات يسببها فقط ٢٠٪ من الأسباب. فإذًا نسبة ٢٠٪ الأساسية من الأسباب، تجعلنا نستطيع أن نجد حلا لـ ٨٠٪ من المشكلات بصورة أكثر فاعلية. وبعد ذلك، عندما نحاول إيجاد الشكلة الرئيسة، فما نقوم بفعله يعد شيئًا صحيحًا كجزء ثانى فى التفكير الواقعى.

* التفكير التجريبى:

عندما نستخدم التفكير التجريبى، فإننا نحكم على الموقف إذا ما كان صحيحًا أم خطأ، إعتماداً على خبراتنا السابقة. أحيانًا، يُصر هذا النموذج الفكرى كثيراً على المعيار السابق حتى مع وضوح المواقف.

ولكن عندما نفكر تجريبيًا فى حياتنا اليومية، فإن طبيعة ومضمون المواقف لا تتغير عادة. علاوة على ذلك، إذا ما كان لدينا الخبرة السابقة لمواقف مشابهة، فإننا لا نستطيع الإنتفاع بهذه الخبرة كأساس للمعلومات، أو كمنطلق للمعارف المدركة.

ب- نماذج التفكير الخاصة بطرق التفكير:

إذا ما استطعنا التفكير بطريقة منظمة، فلا نكون بحاجة إلى الاحباط أو الفشل عندما نفكر. وعلى العكس، إذا ما كان لدينا طريقة منظمة، فإن حل المشكلات سيكون محبطًا لنا ومخيبًا للأمال.

يعـرض هذا الطريق أربعة نماذج لـلتفكيـر خاصـة بطرق التـفكير مـثل: التفكيـر المنطقى والتفكير النظامى والتفكير المبنى على السبب والتأثير والتفكير الطارئ.

* التفكير المنطقى:

إن التفـكير المنطقى هو واحـد من أكثـر طرق حل المشكلات شيـوعًاو وانتـشارًا. وبصورة مـختـصرة فإن هذه الطريقـة فى حل المشكلات تقتـضى تحقـيق الإجراءات التالية:

- ترتيب الموقف الخيالى المثالى.
- عرض الموقف الحالى.
- المقارنة بين الموقف المثالى والموقف الحالى، وعرض الموقف المشكلة.
- تقسيم المشكلة إلى أسبابها.
- التعبير عن الحلول القابلة للأسباب.
- تقييم الموقف والقيام بإختيار الحلول المنطقية المسببة.
- القيام بإنجاز الحلول.

ويمكننا استخدام التفكـير المنطقى كوسيلة لحل المشكلات مع كل المشكلات التى نواجهها تقريبًا.

* التفكير النظامى:

يعد التفكيـر النظامى طريقة علمية أكـثر دقة وموضوعـية لحل المشكلات، وأيضًا أكـثر فـاعليـة من التفكيـر المنطقى. فنحن نـؤسس النظام لما يسـبب المشاكل، ونقـوم بتحليلها بناءًا على نظام الإجـراءات والوظائف. وفيما يلى عرض لكيـفية عمل هذا الأسلوب:

- النظام.
- الغاية.

- المحتوى «المدخلات».
- الانتاج «المخرجات».
- الوظائف.
- السبب الداخلى «السبب قابل للحل».
- السبب الخارجى «السبب غير قابل للحل».
- النتيجة.

من أجل إدراك الغاية، نقوم بتجهيز المحتوى، ومن خلال الوظائف نستطيع إيجاد النتائج. ولكن ليس من المهم أن يتم إدراك الغاية عن طريق الانتاج. فنتيجة الوظائف قد تكون مختلفة عن الغاية. وعادة ما يتسبب «السبب الداخلى القابل للحل»، وكذلك «السبب الخارجى غير القابل للحل»، فى هذا الاختلاف. وفى الوقت الذى لا نستطيع فيه حل السبب الخارجى، فإننا نستطيع حل السبب الداخلى.

على سبيل المثال، إذا ما أردنا أن نلعب الجولف، فإن الغرض هو لعب الجولف. إذا لم نستطع لعب الجولف، فهذا الموقف يعتبر موقفًا خارجيًا. بمعنى، إذا لم نستطع لعب الجولف بسبب الطقس السيء، فإن الطقس السيء فى هذه الحالة يعتبر سببًا خارجيًا، لأننا لا نستطيع تغيير الجو. وعلى العكس، إذا لم نستطع لعب الجولف لأننا تركنا حقائب الجولف فى المنزل فإن السبب يمكن حله، ومن ثم فإن تركنا لحقائب الجولف فى المنزل هو سبب داخلى. إن التفكير النظامى هو طريقة واضحة ومفيدة فى حل المشكلات.

* التفكير المبنى على السبب والتأثير:

عادة ما نفضل أن نحدد علاقات السبب والتأثير، فغالبا ما نفكر فى إيجاد الأسباب كحل للمشكلات، فإيجاد العلاقة بين السبب والتأثير، هو طريقة تقليدية فى حل المشكلات.

* التفكير الطارئ:

نظرية اللعبة هى طريقة للتفكير الطارئ. إذا فكرنا فى عدة طرق ممكنة الحدوث، وقمنا بتحضير حل لكل موقف، فإن هذه العملية تعكس التفكير الطارئ.

عندما يتم تعليم الموظفين التفكير فى «لماذا» بالتسلسل خمس مرات، فهذا الإجراء يعبر عن التفكير المبنى على السبب والتأثير. فإذا ما فكر الموظفون «لماذا» ووصلوا إلى سبب، فإنهم يحاولون ثانية أن يسألوا أنفسهم «لماذا». يستمرون فى هذا الإجراء خمس مرات، ومن خلال هذه التساؤلات الخمسة «لماذا»، يستطيعون تقسيم وتحليل الأسباب إلى مستوى أكثر تحديداً. فعملية التساؤل «لماذا» خمس مرات تعد مفيدة جداً فى حل المشكلات.

جـ - نماذج التفكير الخاصة بالتفكير الفعال:

هناك عدة نماذج فكرية مناسبة وفعالة تحقق التفكير الفعال. ويوضح هذا الحديث خمسة نماذج للتفكير الفعال، مثل: التفكير الافتراضى، والتفكير الإدراكى، والتفكير البنائى، والتفكير القائم على التقارب والاختلاف، والتفكير القائم على الوقت «الزمن».

* التفكير الإفتراضى:

إذا ما كانت لدينا القدرة على جمع المعلومات بسهولة وبسرعة، فإننا بذلك نكون قادرين على حل الشكلات بصورة مؤثرة. ولكن فى الواقع لا نستطيع أن نجمع كل المعلومات. إذا حاولنا أن نجمع كل المعلومات نكون بحاجة إلى وقت طويل جداً. والتفكير الافتراضى لا يتطلب جمع كل المعلومات، فنحن نعمل على تطوير إفتراض معين، يتم بنائه على أساس من المعلومات المتاحة. وبعدما نقوم بتطوير الافتراض. نعمل على جمع حد أدنى من المعلومات، من أجل اثبات هذا الافتراض، فإذا ما كان الإفتراض الأول صحيحًا لا نكون بحاجة إلى جمع أية معلومات أخرى. أما إذا كان الافتراض الأول خاطئًا، فيجب علينا تطوير الافتراض التالى بناءاً على المعلومات المتاحة. ويعد التفكير الإفتراضى طريقة شديدة الفاعلية فى حل المشكلات، لأننا لسنا بحاجة إلى تضييع وقت فى جمع المعلومات غير المهمة.

* التفكير الإدراكى:

لا يعد دوما حل المشكلات منطقيًا أو عـقلانيًا. فالإبداع والمرونة عنصران شديدا الأهميـة فى حل المشكلات. ربما لا نستطيع إدراك هذين العنصرين بوضـوح، لهذا يعرض هذا الحديث -فقط- أنواع التفكير المـفيدة للوعى الإبداعى المرن، وفيما يلى بعض أجزاء من هذه الأفكار:

- أن تكون مرئيًا.
- أن تكتب ما تفكر فيه.
- استخدم الكروت من أجل: رسم أو كتابة أوترتيب الأفكار بطرق متنوعة.
- تغيير الأماكن والتكوينات ووجهات النظر فيزيائيًا «جسديا» وعقلانيا.

نستطيع التخيل دون اللجوء إلى الكلمات أو المنطق، ولكن كى نستطيع التواصل مع الآخرين من حولنا، يجب علينا استـخدام المنطق والكلمات. وعلاوة على ذلك، فبـعدما نقوم بإبداع الأفكار، يجب علينـا عرضها بطريقـة أدبية لغوية. فالمفـهوم الإبداعى يجب أن يترجم إلى تفسيرات مفهـومة، فدون مثل هذه التفسيرات تكون المفاهيم غير ذات معنى.

* التفكير البنائى:

إذا ما قمنا ببناء ما يشبه الشجرة من أجل السيطرة على موقف معقد، فإننا بذلك نستطيع أن نفهم هذا الموقف بمنتهى الوضوح.

ولهذا ينبغى أن يكون المـستوى الأعلى نظريًا ومجردًا، فى حـين يكون المستوى الأقل - الأدنى - أكثـر صلابة. ويعد الفصل بين المواقف النظرية المعـقدة من أهم سمات التـفكير البنائى. ومن ثم، فإن الإدراك الواضح للمواقـف المعقدة يزيد من فاعلية وتأثير حل المشكلات.

* التفكير القائم على التقارب والاختلاف:

فى الوقت الذى ينبغى علينا أن نكون فـيه مبدعين وخـلاقين يجب أن لا نكون

مضطرين إلى وضع التقارب بين الأفكار فى الاعـتبار. وعلى العكس، فعندما نريد أن نلخص بعض الأفكار، علينا حينئذ أن نركز على التقارب فيما بينها. وإذا لم نقم بعمليتى التقارب، والاختلاف معا، فإن حل المشكلات فى هذه الحالة يكون غير ذى تأثير.

* التفكير القائم على الوقت الزمنى:

إن التفكير إعتـماداً على الوقت يعد شيئًا ملائمًا ومـريحًا جداً، إذا ما كان حل المشكلة يعد شيـئًا مربكًا خانقًـا. ففى مثل هذه الحالة، نكون قادرين عـلى التفكير والربط بين التفكـير والزمن الماضى والزمن المستـقبل مما يحول الموقف المعـقد إلى موقف واضح وبسيط.

٤- استراتيجيات حل المشكلات:

إذا ما كـان التلميذ يعـانى من بعض المشكلات فى الطريقـة التى يتبعـها لحل المشكلات، فيـما يتعلق بمادة الرياضيـات، فهنا بعض الأفكار، التى من الممكن أن تساعده فى هذا الشأن:

* كن واثقًا من أنك ستفهم المشكلة:

هذا يبدو شيئًا سهلا،ولكن التلميذ قد يقع فى خطأ البدء فى حل المشكلة دون أن يفهمها أولاً، ولذلك يجب على التلميذ أن يتأكد أولاً أنه قد تعرف على المشكلة من خلال الاحتكاك المباشر بها، ثم بعد ذلك يقوم بقراءتها مرتان أو ثلاث مرات بعناية، فإذا لم يكن التلميذ متأكداً بعد كل هذا، فعليه تجريب التالى:

- الحديث عنها بصوت عالٍ مع شخص آخر.

- كتابة المشكلة مستخدمًـا أسلوبه الخاص، ثم يطلب من شخص آخر أن يقرأ ما كتبه، ويتأكد من أنه يمثل المشكلة الحقيقية.

ومن وسائل حل المشكلة: (صنع بداية)، حيث يجب أن لا يخاف التلميذ من صنع خطوة من أجل حل المشكلة، إذ إن رسم بعض اللوحات، أو استخدام وتجريب بعض الإجابات الممكنة، أو التحدث عن المشكلة مع أحد الأصدقاء من العوامل التى تساعد التلميذ على فهم أبعاد المشكلة:

* صنع الأخطاء:

هذا صحيح، فمعظم من يقوم بحل المشكلات بصورة جيدة، يقعون فى عديد من الأخطاء. وربما قد يكون الفرد قد سمع المثل القائل «تعلم من أخطائك»، فهذه العبارة صحيحة. وعلى هذا ينبغى على التلميذ أن يُجرب الأشياء المختلفة، ويقع فى الأخطاء، ثم يُحاول استخدام طرق ووسائل أخرى مختلفة لتجنب الأخطاء بما يساعده على تحقيق الصواب فى حل الشكلات.

* لا تحبط:

من السهل أن يعلم التلميذ أن حل المشكلة، قد يقوده فى اتجاه يتعلق بأشياء لا دراية له بها، ولا يستطيع فهمها. وهذا لا يعود إلى التلميذ، وإنما يرجع إلى أنه يتعامل مع مشكلة، ولهذا عليه أن يتقبل هذه الحقيقة. والتلميذ يظل قلقًا من هذه المشكلة بدرجة كبيرة. وإذا استمر قلقه، فمن المرجح أن يفقد تركيزه نتيجة لهذا القلق. ولهذا ينبغى على التلميذ أن يظل هادئًا، طالما يستطيع فعل ذلك.

* احتفظ بتسجيلاتك:

إذا لم يحتفظ التلميذ بالأعمال والممارسات التى قام بها «كل هذا العمل الشاق وكل الملاحظات»، فقد يضطر إلى إعادة عمل بعض الأشياء التى قام بها من قبل، دون أن يدرك هذا. فهذا شيء صحيح يحدث أحيانًا، إذا ما ترك التلميذ المشكلة لفترة قصيرة، ثم يُعود إليها ثانية.

على التلميذ أن يتأكد من أنه يُسجل دومًا آخر ما توصل إليه، فهذا يسهل عليه البدء من حيث إنتهى، آخر مرة عندما يعود للمشكلة ثانية. ورغم أن تسجيل مثل

هذه الملاحظات والأفعال فى أحيان كثيرة يُعد شيئًا مزعجًا، فإنه يستحق العناء، حيث يوفر على التلميذ مجهودًا ووقتًا يساعدانه فى الوصول للحل بصورة أسرع.

* إرسم رسمًا بيانيًا أو إصنع صورة تخطيطية:

ويعنى ذلك تحقيق نفس الهدف المذكور، ويعد خطوة أولى جيدة فى البداية.

* إصنع قائمة ثم إبحث عن نموذج:

فى المشاكل الحسابية، غالبًا ما نجد بعض النماذج المرتبطة بالمشاكل. ولهذا فعادة ما ينصح بعمل قائمة للنماذج، ثم البدء فى تجريب إحداها. على التلميذ أن يتأكد من أنه قد أضاف أجزاء المشكلة البسيطة فى قائمته.

* إبدأ بالأجزاء البسيطة السهلة من المشكلات أو إجعل المشكلة أسهل:

إن فهم جزء بسيط من المشكلة يعد الخطوة الأولى نحو فهم جميع جوانب المشكلة، ولذلك يجب على التلميذ أن لا يعتريه الخوف من السعى نحو فهم جزء بسيط من المشكلة، فهذا يؤدى إلى إستيعاب الأجزاء الأكثر تعقيدًا فيها.

* تأكد من إجابتك:

ربما يعتقد التلميذ أنه قد وجد الحل الصحيح، رغم أن ذلك غير صحيح. لذلك يجب على التلميذ التحقق والتأكد من تحقيق الحل الصحيح، فهذا هو الجزء المهم والأخير فى حل المشكلة. فإذا لم يكن ذلك إذن، فهذا ليس هو الحل المنشود، ولهذا على التلميذ أن يتأكد دائمًا من صحة الإجابة التى حققها.

* وفى النهاية:

- على المدرس أن يقدم للتلميذ أفضل أمنياته فى حل المشكلات.

- على التلميذ أن يستمر فى استخدام وسائل حل المشكلات المختلفة، ولا يخاف إذا ما إقتحم أية مشكلة لحلها.

- على التلميذ أن يكون إيجابيًا وفعالاً فى تعامله مع وسائل وأساليب حل المشكلات.

- كم يكون المدرس سعيداً، إذا كانت الإجراءات السابقة ذات فائدة للتلميذ فى تفعيل أسلوب حل المشكلات.

رابعًا: أسلوب حل المشكلات فى الرياضيات:

يرى (فـهر) Fehr أن «المسـألة هى موقف يتطلب الوصـول إلى هدف، إلا أن الطريق إلى هذا الهدف غير مـعروف للتلميذ، فلمعرفة الطريـق ينبغى للتلميذ أن يفكر، فإذا وصل إليه أصبح الوصول إلى الهدف مضمونًا، ولم يعد الأمر يحتاج إلا إلى مران. وهنـا لا يظل الموقف مسـألة، بل يصبح مـهارة، أو معلومـات، يمكن إستخدامها فى حل مسائل جديدة.

وترى « **ويكليجرين** Wickelgren» أن المشكلة الرياضية تشتمل على ثلاثة أنواع من المعلومات:

- معلومات تتعلق بالمعطيات «تعبيرات معطاة».

- معلومات تتعلق بالعمليات التى تحول واحداً أو أكثر من التعبيرات المعطاة إلى تعبير جديد أو أكثر.

- معلوات تتعلق بالأهداف (التعبيرات الخاصة بالمطلوب).

وقد تشتمل بصورة واضحة على تعبـيرات خاصة بأهداف جزئية وسيطة، أو قد يعرف القائم بحل المشكلة هذه التعبيـرات المتعلقة بالأهداف الجزئية لنفسه «وذلك وصولا للتعبير الخاص بالهدف النهائى».

وبالنسبة للرياضيات، فإن حل المشلكلة «المسألة» هو موقف يتطلب الوصول إلى هدف، إلا أن الطريق إلى هذا الهدف مجهولا بالنسبة للتلميذ، ولمعرفة الطريق ينبغى للتلميذ أن يفكر، فإذا وصل إليه أصبح الوصول إلى الهدف مضمونًا، ولم يعد الأمر يحتاج إلا مرانه.

إذن، فحل المشكلة «المسـألة» هو الإدراك الصحيح لعلاقات مـعينة فى الموقف،

سواء أكان هذا الموقف على صورة كمية أم رمزية، ونتيجة لهذا الإدراك يستطيع التلميذ حل المسألة وإيجاد الحل الصحيح. وبذلك لا يظل الموقف مشكلة «مسألة» بل يصبح مهارة، أو معلومات، يمكن استخدامها فى حل مسائل جديدة. وعلى ذلك يمكن اعتبار التعلم فى المدرسة الثانوية «وما فى مستواها»، حلا لمشاكل عن طريق التفكير. وهكذا يتبين أن التعلم هو التفكير، وأن تعلم طريقة التعلم يتم عن طريقة حل المشكلات.

وتحت المفهوم السابق لمعنى حل المشكلة فى الرياضيات، يتبين - كما تشير الأبحاث السيكلوجية- أن جمع ٢أ + ٣أ مسألة كأى مسألة لفظية، طالما لم يتعلم التلميذ كيف يجريها، ولكنه يستطيع أن يكتشف الحل بنفسه بتطبيق المفاهيم الصحيحة التى تعلمها، فهو يطبق ما تعلم عن الضرب، وعن المعامل (٢أ تعنى أ+أ)، وعن الجمع، ليصل إلى استنتاجه الخاص أن (٢أ + ٣أ) هى (٢+٣) أ أى ٥أ. بذلك يكون حل المسألة وتعلم كيف يحلها، وبعد ذلك يأتى التعميم أس+ب س= (أ+ب) س.

ولقد دلت جميع التجارب التى أجريت فى السنوات القليلة الماضية فى الحساب والجبر والهندسة على تأييد قوى لأفضلية طريقة: الكشف - التحليل - التنظيم عن طريقة الخطوات التى تتلخص فى: قراءة المسألة، وتعيين المعطيات، وتعيين المطلوب، وحل المسألة، وتحقيق الجواب، فضلاً عن أن الطلاب الذين تعطى له قاعدة للحل ثم يوجهون إلى حل بعض التطبيقات ينشأ عندهم اتجاه عقلى نحو انتظار شرح المدرس حتى يقلدوه، دون أن يحاولوا تحرير أنفسهم واستخدام عقولهم فى التفكير.

ويمكن النظر إلى حل المشكلة على أنها:

*** هدف تربوى:**

يرى بعض رجال التربية والرياضيات أن تدريس الرياضيات يساعد التلاميذ على

حل كثير من المشكلات المختلفة، لذا ينبغى أن يكون الهدف الرئيس من تعليم الرياضيات هو تنمية قدرة التلاميذ على حل المشكلات. وفى هذه الحالة، يوجه الاهتمام إلى عملية حل المشكلة، دون أى اعتبار للكيفية أو الطريقة أو الاستراتيجية المتبعة فى الحل.

*** طريقة عملية:**

ينظر البعض إلى حل المشكلات باعتباره العملية الديناميكية المستمرة، التى يقوم بها التلميذ كى يتغلب على صعوبات الموقف. وفى هذه الحالة، يكون الاعتبار الأول منصبًا على الخطوات العقلية أو الإجراءات أو القياسات أو الأساليب، أو المسارات التفكيرية التى يمر بها التلميذ للوصول إلى الحل. وباختصار، يتركز الاهتمام على أسلوب الحل، وإجراءاته، واستراتيجياته، وكيفية اكتشافه، بمعرفة التلميذ منفردًا، أو بتوجيه المدرس له.

*** مهارة أساسية:**

وفى هذه الحالة، يكون حل المشكلات بمثابة مهارة ينبغى أن نعلمها للتلميذ، أو بمثابة سلوك يجب أن نعود التلميذ عليه ليتقنه. أن حل المشكلات باعتباره مهارة أساسية ليس من شأنه التركيز فقط على نوعية المشكلات وعناصرها أو محتوياتها، وإنما أيضًا يركز على طرق وأساليب أو استراتيجيات حلها.

وبعامة، يسهم أسلوب حل المشكلات فى تدريب التلاميذ على التفكير العلمى السليم، وفى تنمية قدراتهم على التفكير الثاقب الواعى، لذا، فإن أسلوب حل المشكلات فى مجال الرياضيات بخاصة، حاز قبولاً، ووجد تأييدًا من العديد من الرياضيين، ومن التربويين المتخصصين فى تعليم الرياضيات، على حد سواء، تحمسًا منهم واقتناعًا بأهمية هذا الأسلوب. وفيما يلى بعض الآراء المؤيدة لاستخدام أسلوب حل المشكلات كطريقة وكاستراتيجية لتدريس الرياضيات:

١- يوضح «**فيان** Wain» العلاقة التبادلية بين البرهان وحل المشكلة.

٢- يرى «**وليم عبيد** » أنه يجب أن يكون حل المشكلات هو البؤرة التى تتجمع حولها الموضوعات الرياضية.

٣- يؤكد «**بول تورنس** Paul Torrance » فى طريقته للتدريس على «أهمية مساعدة الطالب ليتعلم كيف يولد حلول المشكلات، وتصور إمكانية وجود عالم ملتزم اجتماعيًا، مع إعطاء الفرصة لأفراده ليكونوا مبدعين متحررين.

٤- يرى «**فهر** Fehr» أن التعلم هو التفكير، وأن تعلم طريقة التعلم يتم عن طريق حل المشكلات، كما يرى أن التعلم فى مراحله الأولى إذا تم عن طريق التكرار فقط، «فإنه يكون لدى التلاميذ معوقات شديدة تحول دون نمو التفكير الابتكارى الذى يحتاجون إليه فى حياتهم المقبلة، فمثلاً إذا أعطيت طالبًا مجموعة الأعداد ٢،٣،٥،٧،١١،١٣،١٧، وطلبت إليه أن يكتشف الطريقة التى تكونت بها المتسلسلة، فإنه يستطيع أن يكمل بالأعداد الأولية ١٩،٢٣،٢٩، ولكنه لن يستطيع ذكر القاعدة. وفى هذه الحالة يكون الطالب قد وصل إلى اكتشاف غير لفظى. ولكنه إذا أعطى وقتًا كافيًا، فإنه يستطيع بمساعدة المدرس أن يعبر بصيغة نمطية سليمة عن قانون أنشأه بنفسه، وبذلك يحتفظ به مدة طويلة جداً. وهكذا، فإن أحسن أنواع التعلم هو ما يكتشفه الطالب بنفسه.

٥- يوصى مؤتمر كامبردج للرياضيات المدرسية الذى عقد عام ١٩٦٣؛ بإتاحة الفرصة ليكتشف التلميذ الموقف الذى يعرض عليه بنفسه، بدلا من أن يطلب منه فقط حل مسائل محددة، وذلك على أساس «أن كلا من عالم الرياضيات التطبيقية ومخترع البحث يقضى كثيرًا من الوقت والجهد فى مقابلة الموقف ومحاولة اكتشافه»، وليس فقط حل المسائل والمشكلات وإثبات النظريات. ولذلك يكون من المفيد أن نذكر ذلك للتلاميذ، وندعهم يدرسون الرياضيات بهذا الأسلوب بأنفسهم.

٦- يطرح **دوجلاس أ.كوادلينج** السؤال التالى فى مقاله:

«تعلم الرياضيات إلى أى حد هو ضرورى؟»، «إذا لم يكن حل المسائل الرياضية، هو الجواب المنشود، فما الذى ينبغى أن يقوم مقامه؟»، وكان رده على السؤال السابق على النحو التالى:

«نرى فى عدة بلاد -من بينها المملكة المتحدة- أن بعض المعلمين كثيراً يلجؤون إلى استخدام المشروعات العلمية كجواب عن هذا السؤال، وهدفهم هو أن يطرحوا مشكلات مما يقع فى نطاق خبرات تلاميذهم، ومما يمكن أن يعالجوه بوعى دون أن يحملهم عبئًا رياضيًا ثقيلا، ومما يعتبر مثالاً للرياضيات حين تستخدام وتطبق».

فى ضوء ما تقدم ، يمكن القول بأن أسلوب حل المشكلات، كطريقة أو كاستراتيجية لتدريس الرياضيات يستحوذ على اهتمام كل الرياضيين والتربويين على حد سواء، وذلك على المستويين: المحلى والعالمى.

تأسيسا على ما تقدم، يكون المقصود بأسلوب حل المشكلات - سواء أكان هدفاً، أم طريقة، أم عملية، أم مهارة أساسية - هو الممارسات والنشاطات العقلية والسلوكية التى يؤدى بها التلميذ منفرداً، أو تحت توجيه المعلم، وذلك بهدف الوصول إلى الحل الصحيح عن طريق الاستقراء أو الاستدلال.

خامسا: استراتيجية التدريس باستخدام أسلوب حل المشكلات:

تقوم استراتيجية التدريس باستخدام أسلوب حل المشكلات على مساعدة المدرس للتلاميذ فى اكتشاف حلول المسائل، عن طريق تحقيق الخطوات التالية:

١ • فهم أبعاد المشكلة:

تحت إشراف المدرس وتوجيهه، وعن طريق الأسئلة المحكمة التى يقدمها المدرس للتلاميذ، يمكن بدقة تحليل عناصر الموقف وشروطه. ويمكن تحقيق ما تقدم عن طريق ما يلى:

(أ) قراءة المشكلة بهدف فهم المدولات الرياضية للألفاظ والرموز الواردة بالمشكلة.

(ب) تحديد المعلومات المعطاة فى المشكلة، أو البيانات التى تتضمنها.

(جـ) تحديد المجهول المطلوب إيجاده فى المشكلة.

(د) تحديد العلاقات والشروط المكونة للمشكلة، ومدى تحقيقها، والالتزام بها، وذلك عن طريق عرض العبارات اللفظية فى صورها الرمزية.

(هـ) رسم الشكل التخطيطى للمشكلة (أن أمكن، أو إذا تطلب الأمر ذلك).

(و) تحليل عناصر الموقف وشروطه، ومحاولة الفصل بين كل هذه العناصر على حدة، وذلك عن طريق ترجمة المعطيات إلى علامات أو رموز.

- وضع خطة الحل:

تساعد التوجيهات التالية على إيجاد الصلة بين المجهول المطلوب إيجاده فى المشكلة، وبين المعلومات والبيانات المعطاة فى المشكلة. وفى حالة عدم وضوح الصلة بين المعطيات والمطلوب، فإن هذه التوجيهات تساعد على التفكير فى العوامل التى من شأنها تحديد هذه الصلة بدرجة كبيرة.

(أ) استدعاء المواقف ذات الصلة بالموقف الحالى، ويتحقق ذلك إذا توافرت مشكلات على نفس نمط المشكلة المثارة المطلوب حلها.

(ب) التفكير فى وضع خطة لحل المشكلة القائمة عندما لاتتوافر مشكلات على نفس نمط المشكلة القائمة، وذلك عن طريق:

- التعرف على بعض المفاهيم أو القواعد أو التعليمات التى تفيد فى الحالى إذا ما تم إستخدامها.

- التفكير بإمعان فى المجهول بالمشكلة، والتفكير فى مشكلة مألوفة بها مجهول مشابه لذلك الذى تضمنته المشكلة الحالية.

- الرجوع إلى مشكلة مماثلة مألوفة سبق حلها؛ ومحاولة الاستفادة من فكرة

الحل السابق فى التوصل لحل المشكلة القائمة، أو فى التوصل إلى إضافة عامل مساعد يمكن الاستفادة منه فى حل المشكلة الحالية.

- قراءة المشكلة مرة أخرى، ومحاولة تحليل عناصر المشكلة مرة أخرى.

- فى حالة عدم التوصل إلى مشكلة شبيهة أو مرتبطة بالمشكلة الحالية، فينبغى الرجوع إلى مشكلة أخرى أبسط من المشكلة القائمة، ومحاولة القيام ببعض خطوات الحل، وإذا لم يتحقق ذلك بفاعلية، فينبغى العودة مرة أخرى للمجهول فى المشكلة للوقوف على:

* هل يختلف المجهول فى المشكلة عن المجهول فى المشكلة الأبسط، وما نواحى الاختلاف؟

* هل يمكن اشتقاق بعض المعلومات المفيدة من المعطيات الموجودة بالمشكلة الحالية؟

* ما فائدة كل عنصر من عناصر هذه المعطيات؟

* ما علاقة كل عنصر فيها بالمجهول فى المشكلة؟

* كيف نصل من هذه المعطيات جميعها إلى المجهول المطلوب حله فى المشكة؟

* هل يمكن تعديل المجهول فى المشكلة ليصبح فى صورة أخرى قريبة من المعطيات؟

* هل يمكن تعديل المعطيات لتصبح قريبة من المجهول فى المشكلة؟

* هل يجب تعديل كل منهما ليصبحا قريبين من بعضهما؟

(جـ) تحديد العلاقات اللازمة لإنجاز الحل، وذلك عن طريق إستخدام كل المعلومات المعطاة فى المشكلة، ومراعاة الشروط والظروف والقيود المتعلقة

بالمشكلة، وأخذ كل الأفكار والعناصر الأساسية المتضمنة فى المشكلة فى الاعتبار.

٣- تنفيذ خطة الحل:

وتتضمن هذه المرحلة مجموعة العمليات التى يجب القيام بها، وذلك بعد استكشاف الحل الذى تم التوصل إليه فى الخطوة السابقة، ومراجعته، والتأكد من صحته. ويتطلب إنجاز الحل، القيام ببعض العمليات الحسابية والجبرية بصورة صحيحة؛ وكتابة الحل فى صورة منطقية.

٤- التحقق من صحة الحل:

بعد تسجيل الحل، ينبغى مراجعته للوقوف على مدى الإفادة الكاملة لجميع معطيات المشكلة، ومدى معقوليته وتحقيقه لشروط المشكلة. وللتأكد من صحة نتيجة كل خطوة من خطواته أيضاً، يجب توظيف عملية التحقق من صحة الحل فى البحث عن طرق حل بديلة، وفى استخدام النتيجة التى تم التوصل إليها فى حل بعض المشكلات الأخرى ذات العلاقة بالمشكلة القائمة .

وجدير بالذكر، أنه بالإضافة إلى ما تقدم، ينبغى على المعلم مراعاة الأمور التالية، لأنها تسهم فى تحديد أبعاد الاستراتيجة التى يقوم عليها أسلوب حل المشكلات:

* يقوم أسلوب المعلم فى التدريس على الفهم، ولايستخدم أسلوب التدريس الآلى الذى يقتل روح الإبداع عند التلميذ.

* ينبه التلاميذ إلى ضرورة وأهمية قراءة المسألة مرات كثيرة حتى يتم تحديد معطيات المسألة، والمطلوب إثباته تحديداً دقيقاً.

* يعود التلاميذ على أن المسألة موقف من المفروض أن يلقوا فيه بعض الصعوبة.

* يعرف التلاميذ أن قراءة الرياضيات بطيئة بطبيعتها، وتقتضى قدراً كبيراً من التركيز.

* يعرف التلاميذ أن بنية الرياضيات تراكمية البناء، وعليه فإن إثبات أى قانون أو نظرية يحتاج إلى توظيف القوانين والنظريات السابقة.

* يطلب من التلاميذ أن يصوغ كل منهم المسألة بلغته الخاصة.

* يقوم بعمل الرسوم والنماذج التوضيحية التى يشرحها داخل الفصل.

* ينمى قدرة التلاميذ على توجيه أسئلة ذات معنى.

* يعطى التلاميذ الوقت الكافى للتفكير فى الأسئلة التى يقوم بطرحها عليهم.

* يساعد التلاميذ على إهمال المحاولات الفاشلة فى حل أى مسألة، ويطلب منهم تجربة غيرها للوصول إلى الحل الصحيح.

* يشجع التلاميذ على استرجاع المواقف المشابهة التى مرت بهم، وذلك بهدف الوصول إلى بعض العناصر التى تساعدهم فى حل المسألة الجديدة.

* يجعل التلاميذ يقدرون جوابًا معقولا للمسألة، ويستخدمونه عكسيًا نحو المعطيات.

* يساعد التلاميذ على جعل حل المسألة الذى يحققونه كقاعدة يمكن تطبيقها فى المسائل الأخرى المشابهة.

سادسا: اكساب التلاميذ مقومات التفكير فى حل المشكلات الرياضية:

بادىء ذى بدء نود أن ننوه بشدة إلى أن اكساب التلاميذ أسلوب حل المشكلات يتوقف على:

- مدى استعداد المدرس لبذل المزيد من الجهد فى عمله، إذ أن استخدام أسلوب حل المشكلات فى التدريس بعامة، وفى تدريس الرياضيات بخاصة، يتطلب وقتا وجهدا كبيرين.

- المدخل أو الطريقة التى يتبعها المدرس فى عمله، فالمدرس الذى ينزع أو يعمل إلى القيام بالعمل كله دون أن يشرك معه التلاميذ فى التفكير وفى الحل، لن يكسب

تلاميذه المهارة فى حل المشكلات. ولكن المدرس الذى يجعل من كل مسألة أو تمرين أو نظرية يعطيها تأخذ صورة المشكلة، ويطلب من التلاميذ مشاركته فى حل هذه المشكلة، يكسب تلاميذه - دون شك - المهارة فى حل المشكلات.

فى ضوء العاملين السابقين، نذكر فيما يلى بعض الاقتراحات المفيدة لتنمية القدرة على حل المسائل كما يبدو من خلال التعليم المنتج:

(١) أهمية الفهم فى تدريس الرياضيات:

ينبغى على المدرس أن يقوم أسلوبه فى التدريس على الفهم، لأن التدريس الآلى يقتل روح الإبداع عند التلميذ فيفشل فى إجراء عمليات التجريد والتعميم، بينما أسلوب التدريس بفهم يمد التلميذ بأساس قوى من فهم المبادىء والمفاهيم المترابطة التى تساعده على فهم العملية أو العمليات اللازم استخدامها فى حل المسائل. والحقيقة أن فهم الفرد لأى مبدأ يعنى معرفته كيف ومتى يستطيع استخدامه.

- ان أسلوب التدريس بفهم مبنى على سيكولوجية الجشتالت، الذى ينظر إلى العلاقات القائمة بين الحقائق ككل مترابط، مما يساعد على فهمها والتصرف بها فى المواقف الجديدة. والحقيقة أن المهارات الآلية لا تفيد إلا فى المواقف المألوفة. أما فى المواقف الجديدة، لايستطيع التلميذ أن يفكر تفكيرا ناجحا مادام لايعرف إلا المهارات النمطية المعتادة، بعكس زميله الذى تتوافر لديه المعانى الواضحة التى تساعده على فهم المواقف المعقدة.

- ان دراسة التلميذ للمهارات بفهم تجعله أقدر وأمهر فيها من قرينه الذى يتعلمها بالتمرين.

- أثر التدريس بفهم يبقى فترة أطول من أثر التدريس المبنى على التمرين.

٢- عود التلاميذ الشعور بالمشكلة:

على المدرس أن يدرك أن مدى فهم التلاميذ للمسألة يتوقف على عوامل، أهمها:

- طبيعة ونوعية ولغة المسألة.

- حالة التلميذ النفسية.

- شخصيـة التلميذ من حيث التخاذل، أو العناد والتـحدى أمام المشكلات التى تصادفه.

- خبرة التلميذ وعلاقتها أو عدمها بالمسألة.

لذا، ينبغى أن ينبه المدرس التلاميذ إلى ضرورة وأهمـية قراءة المسألة مرات كثيرة حتى يتم الفهـم السليم للحل الذى تتطلبه. كما ينبـغى أن ينمى عندهم الاتجاه بأن المسألة موقف من المفروض أن يلقوا فيه بعض الصعوبة، وعليهم اكتشاف أبعاد هذا الموقف بجميع ما سبق لهم أن تعلموه، وبقدر كبير من التفكير.

٣- وسع الخبرة الدراسية والأساس العريض للمواقف الرياضية:

دون خبرة سابقة نسـترجعها، ودون معرفة بطريقة التـعميم، يكون من الصعب تحديد مـفهـوم محدد للعـملية التى يتطلبـها حل المشكلة، ناهـيك عن أن قراءة الرياضيات التى تستدعى اتجاها من الطالب غيـر ما تستدعيه قراءة التاريخ أو الأدب أو الجرائد أو المواد الهزليـة، فقراءة الرياضيات تؤدى إلى تكوين محـصول لغوى خاص يمكن بواسطته ربط جمل المسألة بعضـها ببعض مع المعلومات السابقة، هذا من جهة، ومن جهة أخرى فإن قراءة الرياضيات بطيئـة بطبيعتها وتقتضى قدرا كبيرا من التركيز.

٤- اكسب المسألة حياة داخل الفصل:

ويتم ذلك بعدد من الطرق، منها أن يعيد التلاميـذ صياغة المسألة بلغة أخرى، أو يمثلوها، عن طريق رسم توضيحى على السبورة، أو أن يقـومون بتوضيحها بنماذج ووسائل حسية كالمراكب والسيارات والطيارات والأوانى. ومن ناحية أخرى، ينبغى أن يصاغ الموقف المحسوس فى صورة رمزية، إذ أن الانتقال من الأجسام المحسوسة إلى الصورة الرمزية يعلم التلمـيذ كيف يتعرف فى العـالم المحيط به على ما يمكن وضعه فى صورة رمزية، وعلى معطيات المسائل.

٥- احرص على تنمية القدرة على توجيه أسئلة ذات معنى:

ينبغى للمدرس أن يخلق جوا وديا يوحى بالاستفسار، فلا يهمل سؤالا لتلميذ مهما كان السؤال تافها. أما السؤال الذى يلقيه المدرس فينبغى ان يتبعه وقت كاف للتفكير قبل ذكر الإجابة، فقد لوحظ أن غالبية المدرسين يسألون أسئلة كثيرة ولا يعطون وقتا كافيا للإجابة عنها المبنية على التفكير السليم. إذا استخدم المدرس طريقة الكشف فى تدريسه فلابد أن يترك للطلاب فرصة للتفكير. وأن يراجع المدرس مع الفصل الأسئلة بنفس الترتيب الذى سئلت به، موضحا الغرض من كل سؤال، حتى يتعلم التلاميذ بأنفسهم كيف يسألون أسئلة تتجه نحو الحل.

٥- ساعد التلاميذ على إهمال المحاولات الفاشلة فى الحل وتجربة غيرها:

ان معالجة المسائل بطرق مختلفة يعطى فهما أعمق للحل، لذلك ينبغى أن نشجع التلاميذ على استرجاع الموقف المشابهة التى مرت بهم، واستخدام هذا التشابه والاستقراء فى الوصول إلى بعض العناصر التى توجه إلى أسلوب يمكن تطبيقه فى حل المسألة المعطاة.

٧- دع التلاميذ يقدرون جوابا معقولا ثم يستخدموه عكسيا نحو المعطيات:

ولقد كان هذا هو الطريق الذى استخدمه جميع الرياضيين فى الوصول إلى مادة رياضية جديدة، وبه يستطيع التلاميذ أن يكونوا مسائلهم بأنفسهم، وأن يروا بأنفسهم كيف تصبح المشكلة مسألة.

٨- اخلق من الحل قاعدة ليلائم كل مسألة حتى يمكن تطبيقه على أوسع نطاق فى مسائل أخرى:

ذلك لأن التعميم هو أساس الانتقال إلى موقف جديد أو إلى مسألة مشابهة فى الرياضة وفى العلوم الأخرى. وكلما ازداد التلاميذ تعميما للحلول التى يصلون إليها، زادت قدرتهم على الصياغة السليمة للحل، وعلى التشكيل المنطقى لأية مسألة جديدة، وبذلك يصبحون أقدر على حل المسائل.

أن تعلم الرياضيات لايقوم على نظرية سيكولوجية واحدة كالتعليم الشرطى أو الترابطى أو الجشتالت، بل يتطلب توافق بين جميع هذه النظريات، وفيما يلى العناصر الكافية للتعليم السليم:

أ- لابد من هدف يتجه إليه التلميذ، وأن يكون واعيا بهذا الهدف.

ب- جميع التعلم المعرفى يتضمن ترابطا، ومن أمثلة ذلك:

$أ^{٣} = أ \times أ \times أ$.

جـ المحاولة والخطأ، والتقريب والتوضيح، والتحليل، أساليب مهمة فى الكشف عن الطرق المؤدية إلى الهدف أو حل المسألة، وليست هذه مجرد تخمين يخيب أو يصيب، ولكنها تمثل تفكيرا منظما.

د - يتم التعلم عندما يصل المتعلم إلى فهم لعلاقات وما تنطوى عليه.

هـ ينبغى أن يكون المتعلم نشطا عقليا، فهو يتعلم ما يقوده إليه ذكاؤه.

و - ان ما يشعر به المتعلم عند النجاح واحساسه بالتقدم نحو الهدف جزاء طبيعى يقوى التعلم ويدفع إليه، كما أن العقاب والفشل المتكرر يعوقان التعلم، وهكذا فإن المديح والنجاح وتقدير التلميذ لذاته وادراكه لمدى التقدم الذى يحرزه، عوامل مشجعة فى تعلم الرياضيات.

ز- التجريد والتعميم أساسيان فى التعليم المثمر، ولايمكن تعلم الرياضيات إلا فى مواقف ذات معنى تنطوى على هاتين العمليتين العقليتين.

ح- أن غالبية التعلم فى الرياضيات هو تحول الخبرة السابقة إلى تنظيم جديد فى الموقف الجديد، فالجبر هو تعميم وإعادة لبناء الحساب، والهندسة تعميم واعادة بناء للمفاهيم الميكانيكية، وحساب المثلثات تعميم واعادة بناء للجبر والهندسة معا، وفى جميع هذه المواد ينمو المنطق باعتباره أداة للبناء.

ط- من المهم أن نتعلم حقائق ومهارات ومفاهيم وأفكار رياضية، وكذلك نتعلم

«كيف نتعلم»، وعليه فإن أسمى هدف هو أن نعرض التلميذ لمواقف الحياة ليتعلم بنفسه وبقدراته الخاصة.

ك - كذلك، من المهم أن نتعلم اتجاهات (مشاعر)، فاذا فشلنا تعلمنا كراهية الرياضيات، كذلك كراهية أولئك الذين يقومون بتدريسها أو من يعملون فى بحوثها، فى حين أنه من الممكن جداً أن نتعلم من خبراتنا العابرة أن نحب وأن نحترم هذه المادة.

خلاصة القول ، يجب على المدرس أن يعمل جاهداً ليتعلم التلاميذ الذين يدرسون الرياضيات تحت مسئوليته وإشرافه، ما يلى:

- التعليم تفكير، والتعليم الجيد هو التفكير الصحيح.
- التفكير الناجح ممكن لجميع التلاميذ فى مستوى معين.
- يعتمد التفكير الناجح على مفاهيم وعلاقات يحصلها المتعلم.
- الإحساس بالرضا الذى يصحب التفكير الناجح هو أعلى وأكبر حالات المتعة التى يمر بها المتعلم .

سابعًا: أسلوب التفكير فى حل بعض المسائل الرياضية:

يقوم أسلوب التفكير فى حل المسائل الرياضية على إدراك التلميذ العلاقة بين المتغيرات فى أية مسألة، وعلى وعيه فى الربط بين المعطيات والمطلوب إثباته أو برهانه، ، إذ على أساس هذا الوعى وذلك الإدراك يستطيع التلميذ أن يرسم خريطة واضحة المعالم للخطوات التى يجب أن يقوم بها لتحقيق المطلوب. وبمعنى آخر، يستطيع التلميذ تحقيق مجموعة من الإجراءات التى تربط بين المدخلات والمخرجات.

ويتجلى الدور المهم للمدرس فى قدرته على جعل التلميذ أن يتجاوز الحل الخاطىء، ويبدأ محاولات جديدة، دون أن يصاب بالتوتر أو القلق أو الخوف أو الاضطراب.

وحتى يستطيع التلميذ تنظيم تفكيره ليصل إلى الحل الصحيح، أو ليتجاوز الحل الخاطىء، يجب على المدرس تشجيعه على التعبير عن رأيه بالنسبة لما يجب أن يقوم به، دون خوف أو رهبة، مع تقديم المدرس بعض الإرشادات للتلميذ ليواصل تحقيق الخطوات الصحيحة، أو ليدرك الخطأ الذى وقع فيه، فيستطيع بسهولة أن يحذفه من تفكيره.

ومن ناحية أخرى، يجب أن يشجع المدرس التلميذ على ممارسة التفكير المنظومى، ويبتعد تماما عن التفكير فى مسار واحد، فمسارات التفكير فى اتجاه واحد، يمكن - أحيانا - أن تقود التلميذ إلى الحل الصحيح. ولكن إذا لم يتخطى التلميذ مسارات التفكير الأحادى، وظل مقيداً بها ويتحرك فى نطاقها فقط، فإنه يدور فى حلقة مفرغة، لايستطيع الخروج منها، ويكون من الصعب عليه تحقيق الحل المنشود.

ومن ناحية ثالثة، يجب أن يبرز المدرس للتلميذ أهمية العمل الجمعى التعاونى فى حل المسائل، لأنه من خلال هذا العمل، يتم تقديم أفكار عديدة متنوعة، قد يكون بعضها متعارضا، بينما يكون البعض الآخر متوافقا. وأيا كانت طبيعة تلك الأفكار (متوافقة أو متعارضة)، فإن تقود إلى الحل الصحيح، وأحيانا تقود إلى حلول متعددة للمسألة الواحدة، لأن التفكير الجمعى يكون بلاشك أفضل من التفكير الفردى. ففى التفكير الفردى، قد يقيد التلميذ نفسه بفكرة واحدة، لايستطيع أن يتخطاها، رغم إنها لاتقود إلى الحل الصحيح، فيحس بالملل والحيرة والربكة، وذلك قد يقوده إلى عدم الثقة فى نفسه. وفى المقابل، فإن التفكير الجمعى، يثير طاقات التلاميذ، ودوافعهم الكامنة، فيحاول كل منهم أن يفكر مليا وبعمق وبتأمل. حتى التلميذ الذى يفشل فى تفكيره الذى يقوده إلى الحل الصحيح، يجد ضالته فى تفكير الآخرين، عندما يحاورهم أو يحاورونه فى الخطوات التى يجب الأخذ بها وتحقيقها.

ومن ناحية رابعة، فى بداية العمل، لإكساب التلاميذ أسلوب التفكير فى حل بعض المسائل (المشكلات) الرياضية، يجب عدم تقديم حلول لبعض المسائل كنماذج يحتذى بها التلاميذ، لأنه فى هذا الحالة، قد يفشل التلاميذ فى المسائل إذا اختلفت

طبيعتها، أو اختلف تركيبها عن المسائل التى قدمها المدرس كنماذج. من المهم جداً، يجب ألا يقوم المدرس بنفسه بحل أية مسألة، إنما يشاركه فى هذا العمل - من بدايته حتى نهاية - التلاميذ، على أن يقدم لهم التلميحات التى تساعدهم فى تحقيق الحل. فى هذه الحالة، يشعر التلاميذ بالرضا عن أنفسهم، ويتقبلون فكرة: الرياضيات مادة سهلة ومشوقة، ويستطيعون دراستها بسهولة ودون إحباط، وأنها مادة تثير تفكيرهم نحو الأفضل والأقوى، وأنها تقدم لهم خدمات جليلة فى حياتهم، لأنها ترتبط إيجابا بمقاصدهم ومصالحهم الحالية والمستقبلية على السواء.

وكنماذج لأسلوب (أو لأساليب) التفكير التى يجب اتباعها والعمل بها فى دراسة بعض الموضوعات الرياضية، نقدم الآتى:

١ - النسبة:

* ضع فى أبسط صورة: ٦٠: ١٢٠

التفكير فى المسألة السابقة يتطلب أن ننسب كل من العددين للعدد ١٠.

٦٠ : ١٢٠ = ٦ × ١٠ : ١٢ × ١٠ = ٦: ١٢.

بتحليل العدد ٦، ١٢ إلى عوامله الأولية نحصل على:

٦ : ١٢ = ٣ × ٢ : ٣ × ٢ × ٢ = ١ : ٢.

* أوجد النسبة بين $\frac{١}{٢}$ ٢ متر، ٧٥٠سم.

يجب أن يفكر التلميذ فى صعوبة إيجاد النسبة المطلوبة لأن العددين غير متحدين فى التمييز، ويكون المطلوب تحويل $\frac{١}{٢}$ ٢ متر إلى سنتيمترات، أو تحويل ٧٥٠ سم إلى مترات. والأسهل تحويل $\frac{١}{٢}$ ٢ متر إلى سنتيمترات، وذلك على النحو التالى:

١ متر + ١ متر + $\frac{١}{٢}$ متر = ١٠٠ + ١٠٠ + ٥٠ = ٢٥٠ سم أو يمكن تحقيق التحويل مباشرة بالضرب × ١٠٠.

٢,٥ × ١٠٠ = ٢٥٠ سم.

وعليه يتم وضع النسبة بين $\frac{١}{٢}$٢ متر، ٧٥٠ سم على النحو التالى:

$\frac{١}{٢}$ ٢ متر: ٧٥٠سم = ٢٥٠ : ٧٥٠

= ٥ × ٥ × ١٠ : ٥ × ٥ × ٣ × ١٠

= ١ : ٣

* ضع فى أبسط صورة $\frac{١}{٢}$٣ : $\frac{١}{٣}$٢

يجب أن يفكر التلميذ فى وضع العددين فى صورة عددين كسرين:

$\frac{١}{٢}$٣ : $\frac{١}{٣}$٢ = $\frac{٣}{٦}$٣ : $\frac{٢}{٦}$٢ = $\frac{٢١}{٦}$: $\frac{١٤}{٦}$ = ٢١ : ١٤

= ٣ × ٧ : ٢ × ٧ = ٣ : ٢

أيضا يمكن للتلميذ التفكير فى حل المسألة، كما يلى:

$\frac{١}{٢}$٣ : $\frac{١}{٣}$٢ = $\frac{٧}{٢}$: $\frac{٧}{٣}$ = $\frac{٢١}{٦}$: $\frac{١٤}{٦}$ = ٢١ : ١٤ = ٣×٧ : ٢ × ٧ =
٣ : ٢

* النسبة بين عددين ٥ : ٤، فإذا كان العدد الثانى ١٦٠، أوجد العدد الأول.

يضع التلميذ معطيات المسألة فى صورة المصفوفة التالية:

٥ : ٤

؟ : ١٦٠

ويمكن إيجـاد العدد الأول، من خلال أن حـاصل ضرب الطرفـين = حاصل ضرب الوسطين

٥ × ١٦٠ = ٤ × العدد الأول

العدد الأول = $\frac{٥ \times ١٦٠}{٤}$ = ٢٠٠

* المطلوب توزيع مبلغ ٢٥٠ جنيها بين عمر وأحمد بنسبة ٢ : ٣.

يمكن التفكير فى حل هذه المسألة على أساس حساب الجزء، فيكون نصيب عمر جزأين، ونصيب أحمد ثلاثة أجزاء.

مجموع الأجزاء = ٢ + ٣ = ٥

قيمة الجزء = ٢٥٠ ÷ ٥ = ٥٠

نصيب عمر = ٥٠ × ٢ = ١٠٠

نصيب أحمد = ٥٠ × ٣ = ١٥٠

أيضا يمكن التفكير فى حل المسألة السابقة على أساس تكوين المصفوفة التالية:

عمر	:	أحمد	:	المجموع
٢	:	٣	:	٥
$\square$	:	$\square$	:	٢٥٠

وبضرب الطرفين فى الوسطين فى حالة كل من عمر وأحمد، يكون:

نصيب عمر = $\frac{٢٥٠ \times ٢}{٥}$ = ١٠٠

نصيب أحمد = $\frac{٢٥٠ \times ٣}{٥}$ = ١٥٠

* النسبة بين أبعاد مستطيل هى ٢ : ٣، فإذا كان محيطه ٣٠ سم، المطلوب إيجاد مساحته.

النقطة التى تمثل صعوبة فى هذه المسألة هى محيط المستطيل، والنسبة المعلومة هى النسبة بين طول المستطيل وعرضه.

الطول + العرض = ٣٠ ÷ ٢ = ١٥

ويمكن تكوين المصفوفة التالية:

٢	:	٣	:	٥
$\square$	:	$\square$	:	١٥

طول المستطيل $= \frac{3 \times 15}{5} = 9$ سم

عرض المستطيل $= \frac{2 \times 15}{5} = 6$ سم

مساحة المستطيل = الطول × العرض = $9 \times 6 = 54$ سم^2

(٢) الجبر: الجذر التربيعى والجذر التكعيبى لعدد نسبى موجب:

* أوجد الجذرين التربيعين للعدد $2\frac{1}{4}$

نضع العدد $2\frac{1}{4}$ فى صورة عدد كسرى.

$2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

فيكون المطلوب إيجاد $\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$

* إوجد حل المعادلة : ٤ س^2 − ٦٤ = صفر

التفكير فى حل المعادلة السابقة يعتمد على وضع الرموز فى طرف ووضع الأعداد فى طرف آخر. يمكن تحقيق الفكرة السابقة بإضافة المعكوس الجمعى للطرفين، ثم باستخدام المعكوس الضربى.

٤ س^2 − ٦٤ + ٦٤ = ٦٤

٤ س^2 = ٦٤

$\frac{1}{4}$ (٤س^2) = $\frac{1}{4}$ (٦٤)

س^2 = ١٦

س = $\sqrt{16} = \pm 4$

* إوجد حل المعادلة: (س − ٣)^2 = ٢٥

فكرة الحل تقوم على أخذ الجذر التربيعى للطرفين، على أساس أن ٢٥ = (٥)$^{(2)}$

(س − ٣)$^{(2)}$ = (٥)$^{(2)}$

س − ٣ = $\pm$ ٥

س - ٣ = ٥ ← س - ٣ + ٣ = ٥ + ٣ ← س = ٨

، س - ٣ = -٥ ← س - ٣ + ٣ = -٥ + ٣ ← س = -٢

وتكون مجموعة الحل هى (٨، -٢)

* إوجد حل المعادلة: $(٣س - ٢)^{(٢)} - ٧ = ٩$

يمكن التفكير فى حل المعادلة السابقة على أساس تكوين معادلة من طرفين، طرفها الأيمن يحتوى الرموز، وطرفها الأيسر يحتوى الأعداد.

باستخدام المعكوس الجمعى:

$(٣س - ٢)^{(٢)} - ٧ + ٧ = ٩ + ٧ = ١٦$

بوضع ١٦ فى صورة مربع كامل $(٤)^{(٢)}$، نحصل على:

$(٣ س - ٢)^{(٢)} = (٤)^{(٢)}$

فى المعادلة السابقة يكون كل من الطرفين فى صورة مربع كامل، فيمكن أخذ الجذر التربيعى للطرفين، فنحصل على:

$(٣ س - ٢) = \pm ٤$

٣ س - ٢ = ٤ ← ٣ س - ٢ + ٢ = ٤ + ٢

← ٣ س = ٦

← $\frac{١}{٣} \times ٣$ س = $\frac{١}{٣} \times ٦$

← س = ٢

، ٣ س - ٢ = -٤ ← ٣س - ٢ + ٢ = -٤ +٢

← ٣ س = -٢

← $\frac{١}{٣}$ ٣ س = $\frac{١}{٣} \times -٢$

← س = $-\frac{٢}{٣}$

وتكون مجموعة الحل هى (٢، $-\frac{٢}{٣}$)

* اختصر $\sqrt[٣]{٨س^{٦}\,ص^{٣}} \div \sqrt[٣]{س^{٩}}$

يمكن التفكير فى المسألة السابقة على أساس أنها عملية قسمة عادية لتساوى قوة الجذور فى البسط والمقام:

$$\text{المقدار} = \sqrt[٣]{\frac{٨س^{٦}ص^{٣}}{س^{٩}}} = \sqrt[٣]{\frac{٨ص^{٣}}{س^{٣}}} = \frac{٢ص}{س}$$

أيضا يمكن التفكير فى المسألة السابقة على أساس وضع كل من البسط والمقام فى أبسط صورة، ثم الاختصار

$$\text{المقدار} = \frac{٢س^{٢}ص}{س^{٣}} = \frac{٢ص}{س}$$

* إوجد مجموعة الحل للمعادلة $٢\,س^{٣} + ٤ = ٥٨$

يمكن أن يكون التفكير على أساس حذف العدد ٤ من الطرف الأيمن:

$$٢\,س^{٣} + ٤ - ٤ = ٥٨ - ٤ = ٥٤$$

$$٢س^{٣} = ٥٤ \longrightarrow \frac{١}{٢} \times ٢س^{٣} = \frac{١}{٢} \times ٥٤ = ٢٧$$

$$\longrightarrow س^{٣} = (٣)^{(٣)} \longrightarrow س = ٣$$

مجموعة الحل هى $\{\,٣\,\}$.

* إوجد مجموعة حل المعادلة $\frac{١}{٥}\,س^{٣} + ١٦٠٠ =$.

يمكن التفكير فى حل المعادلة السابقة على أساس حذف ١٦٠٠ من الطرف الأيمن.

$$\frac{١}{٥}\,س^{٣} + ١٦٠٠ - ١٦٠٠ = - ١٦٠٠$$

$\frac{١}{٥}$ س^{٣} = $-$ ١٦٠٠

٥ × $\frac{١}{٥}$ س^{٣} = ٥ × $-$ ١٦٠٠ = $-$ ٨٠٠٠

س^{٣} = $(-$ ٢٠$)^{٣}$

س = $-$ ٢٠

وتكون مجموعة الحل هى {$-$٢٠}.

(٣) الجبر (التباديل):

* إوجد قيمة $\underline{٨\rvert}$ ÷ $\underline{٦\rvert}$

حيث أن $\underline{٨\rvert}$ أكبر $\underline{٦\rvert}$ ، فيمكن فك $\underline{٨\rvert}$ منسوبًا إلى $\underline{٦\rvert}$

$$\frac{\underline{٨\rvert}}{\underline{٦\rvert}} = \frac{٨ \times ٧ \, \underline{٦\rvert}}{\underline{٦\rvert}} = ٥٦$$

* إثبت أن $\frac{\underline{١٣\rvert}}{\underline{١١\rvert}} + \frac{\underline{١٢\rvert}}{\underline{١٠\rvert}} = ٢٨٨$

نفك $\underline{١٣\rvert}$ منسوبا إلى $\underline{١١\rvert}$، ونفك $\underline{١٢\rvert}$ منسوبا إلى $\underline{١٠\rvert}$

الطرف الأيمن = $\frac{١٣ \times ١٢ \, \underline{١١\rvert}}{\underline{١١\rvert}} + \frac{١٢ \times ١١ \, \underline{١٠\rvert}}{\underline{١٠\rvert}}$

= ١٥٦ + ١٣٢ = ٢٨٨ = الطرف الأيسر

* اثبت أن $\frac{١}{\underline{ن\rvert}} + \frac{١}{\underline{ن+١\rvert}} = \frac{ن+٢}{\underline{ن+١\rvert}}$

التفكيـر فى هذه المسألة يتطلب الربط بين مـعطيات الطرف الأيمن ومـعطيات الطرف الأيسر، وبذلك يكون مفتاح الحل لـهذه المسألة هو $\lfloor \text{ن+١}$. ويمكن توحيد مقامات الطرف الأيمن بضرب حدى الكسر فى الطرف الأيمن فى (ن + ١):

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{(\text{ن+١})}{(\text{ن+١})\lfloor \text{ن}} + \frac{١}{\lfloor \text{ن+١}} = \frac{\text{ن+١}}{\lfloor \text{ن+١}} + \frac{١}{\lfloor \text{ن+١}}$$

$$= \frac{(\text{ن+١}) + ١}{\lfloor \text{ن+١}}$$

$$= \frac{(\text{ن+٢})}{\lfloor \text{ن+١}} = \text{الطرف الأيسر}$$

* إذا كان $\lfloor \text{ن} = ١٢٠$ فما قيمة $^{\text{٢ن}}\text{ل}_{٣}$

التفكير فى حل هذه المسألة يقـوم على أساس بوضع ١٢٠ فى صورة مضروب، وذلك يتطلب تحليل ١٢٠ إلى مجموعة من الأعداد المتتالية لتكوين المضروب

$$\lfloor \text{ن} = ١٢٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = \lfloor ٥$$

$$\text{ن} = ٥$$

$$^{\text{٢ن}}\text{ل}_{٣} = {}^{١٠}\text{ل}_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨ = ٧٢٠$$

إذا كان $\frac{\lfloor \text{س+٤}}{\lfloor \text{س+٢}} = ١٤$ س، فما قيمة س ؟

لأن $\lfloor \text{س+٤} > \lfloor \text{س+٢}$ ، فذلك يتطلب فك $\lfloor \text{س+٤}$ بدلالة $\lfloor \text{س+٢}$

(س+٤) (س+٣) |س+٢ ÷ |س+٢ = ١٤

(س +٤) (س +٣) = ١٤ س

س^{٢} + ٧ س + ١٢ = ١٤ س

(س^{٢} + ٧ س + ١٢) - ١٤ س = ١٤ س - ١٤ س

س^{٢} - ٧ س + ١٢ = .

(س - ٣) (س - ٤) = .

س - ٣ = . ⟵ س = ٣ ، س - ٤ = . ⟵ س = ٤

فتكون س = ٣ أو س = ٤

* إذا كان $^{س+ص}$ل$_{٣}$ = ٣٣٦، |س-ص = ٧٢٠

فما قيمتى س، ص ؟

فى هذه المسألة، يجب أن يقوم التفكير على أساس تكوين معادلتين من المعطيات السابقة.

$^{س+ص}$ل$_{٣}$ = ٣٣٦ = ٨ × ٧ × ٦ = ^{٨}ل$_{٣}$ ⟵ س + ص = ٨ (١)

|س-ص = ٧٢٠ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = |٦ ⟵ س - ص = ٦(٢)

بحل المعادلتين (١)، (٢):

بالجمع: ٢ س = ١٤ ⟵ س = ٧

بالطرح: ٢ص = ٢ ⟵ ص = ١

* ما عدد الكلـمات التى تتكون من أربعة أحرف ويمكن تكوينـها من أحرف كلمة (الانتصار)؟

مفتاح الحل فى المسألة السابقة هو كلمة (الانتصار)، وهى تتكون من ستة حروف.

عدد الكلمات المطلوبة $^{٦}ل_{٤}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣

= ٣٦٠ كلمة