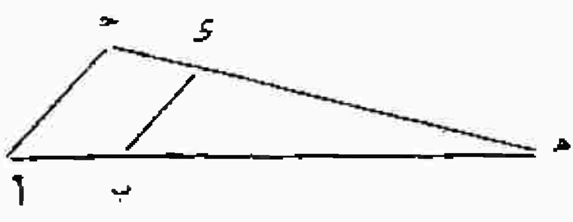
فكرة اللانهاية[1]

للدكتور علي مصطفى مشرّفة
استاذ الرياضة التطبيقية في كلية العلوم بالجامعة المصرية

اللانهاية كلمة تعبر عن معناها تعبيراً حرفياً من دون حاجة من جانبي او جانب اي شخص آخر الى تفسير. فـ «لا» النافية، ونهاية حدٌ او آخر أو طرف، والمعنى إذن ما لا حدّ له او ما لا آخر او طرف له. فيقال للشيء انهُ لانهائي إذا لم يوجد له حدّ او نهاية، وعكسه الشيء المنتهي أو المحدود

وقد يخطر لاول وهلة أن كل شيء يجب أن يكون محدوداً قبل أن نستطيع الكلام عنهُ كلاماً مضبوطاً وإلاّ فنحن نتكلم عن شيء نجهل حدوده فنهرف بما لا نعرف . ولكن هذا الخاطر سرعان ما يفارقنا إذا نحن بحثنا في الامر بشيء من التدقيق . ولأضرب لكم مثلاً على ذلك. فنحن نستطيع ان نعدد الاعداد الصحيحة الموجبة بترتيب تصاعدي فنقول واحد اثنين ثلاثة الخ . ثم إنهُ من الصعب على العقل البشري أن يتصور وجود حد أعلى لهذه الاعداد إذ كلما ذكر عدد أمكن دائماً ذكر عدد أكبر منهُ. فعدد هذه الاعداد إذن نستطيع ان نقول عنهُ إنهُ لانهائي . ونستطيع أن نزيد على ذلك فنبحث في خواص هذا العدد فنحكم مثلاً باننا اذا قسمنا الواحد الصحيح على هذا العدد فإن خارج القسمة يكون اصغر من أي كسر موجب اي يكون الصفر . وكل هذه عبارات مضبوطة لا اعتراض عليها من الناحية المنطقية كما أنها تنطوي على حقائق لها شأنها في المباحث الرياضية البحتة منها والتطبيقية . وربما قيل ان عدد الاعداد الصحيحة الموجبة وإن أمكن الكلام عنهُ الا انهُ لا يمكن اعتباره شيئاً موجوداً في العالم الخارجي او حقيقة واقعة كما يمكن اعتبار العدد ٣ مثلاً رمزاً على حقيقة واقعة كثلاث برتقالات وثلاثة رجال الخ. وقبل ان اخوض في هذه الناحية الفلسفية لموضوعي أريد ان اواصل كلامي اولاً عن الكميات اللانهائية باعتبارها أشياء موجودة في ذهن المتكلم له أن يعرّفها ويحدد معانيها وأن يبحث في النتائج المنطقية لهذه التعاريف وفي الارتباط بينها وبين غيرها من المعاني الذهنية



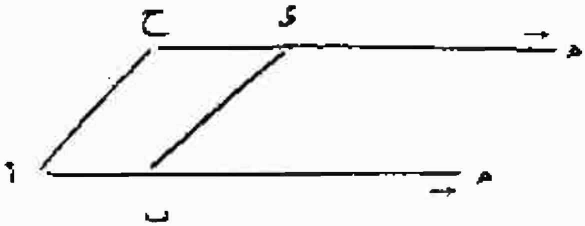
لنفرض اننا رسمنا مستقيمين متوازيين أ حـ ، ب د من نقطتين ثابتتين أ ، ب ثم وصلنا حـ د فقطع امتدادها امتداد أ ب في نقطة هـ

(١) من محاضرات المجمع المصري للثقافة العلمية في مؤتمره الرابع

فاذا علم طول كل من أ ب ، أ حـ وعلم الفرق بين طول أ حـ ، ب ى فان طول أ هـ يتعين بطريقة هندسية بسيطة من العلاقة

$$\text{طول أ هـ} = \frac{\text{طول أ ب} \times \text{طول أ حـ}}{\text{الفرق بين طولي أ حـ ، ب ى}}$$

واذا نحن تأملنا في هذه العلاقة وافترضنا ان أ حـ ، ب ى اقتربا الواحد من الآخر في الطول بحيث صغر الفرق بينهما فان مقام الكسر الذي على اليسار يصغر وبذلك تكبر قيمة الكسر . ثم أريد أن تعتبروا الحالة التي فيها يكون أ حـ ، ب ى متساويين في الطول تماماً . قد يظهر لاول وهلة أن الكسر الى اليسار يصبح عديم المعنى لان معناه يقتضي تحديد معنى قيمة عدد محدود على الصفر وهي عملية لا نتعلمها عند ما نتعلم القسمة ولكن انظروا معي الى المسئلة الهندسية الاصلية في هذه الحالة



ان المسئلة الهندسية لا تزال مسئلة معيَّنة وكل ما هنالك ان حـ ى يوازي أ ب بدلاً من ان كان مائلاً عنه ومعنى هذا ان طول أ هـ يزداد بدون حد

هذا مثال من خاصية معروفة للكميات اللانهائية في الكبر نعبر عنها بما يأتي :— خارج قسمة أي كمية محدودة على الصفر يساوي كمية لا نهاية لكبرها واذا رمزنا للكمية التي لا نهاية لكبرها بالرمز ∞ فاننا نكتب

$$\frac{\text{كمية محدودة}}{\text{صفر}} = \infty \quad (١)$$

والعلاقة السالفة بين اطوال المستقيمات تمكن كتابتها على الصورة الآتية

$$\frac{\text{طول أ ب} \times \text{طول أ حـ}}{\text{طول أ هـ}} = \text{الفرق بين طولي أ حـ ، ب ى}$$

ومن ذلك نرى بنفس الطريقة السابقة

$$\frac{\text{كمية محدودة}}{\infty} = \text{صفر} \quad (٢)$$

ترون مما تقدم أن العلاقتين (١) ، (٢) صحيحتان مهما كان مقدار الكمية المحدودة (ما دامت محدودة) فمثلاً

$$\frac{١}{\text{صفر}} = \infty \text{ ، } \frac{٢}{\text{صفر}} = \infty \text{ ، } \frac{٣}{\text{صفر}} = \infty$$

وكذلك $\frac{١}{\infty} = \text{صفر}$ ، $\frac{٢}{\infty} = \text{صفر}$ ، $\frac{٣}{\infty} = \text{صفر}$

فاللانهاية إذن مرتبطة ارتباطاً متيناً بالصفر وهي في الواقع مقلوب الصفر كما ان الثلث مقلوب الثلاثة والربع مقلوب الاربعة . أريد ان تتذكروا هذه العلاقة البسيطة بين الصفر واللانهاية عند ما يأتي الكلام على الوجود الخارجي للانهاية لان الوجود الخارجي للصفر ليس من الامور الصعب تصورها . فمن الممكن جداً ان يكون ما في جيبي الآن من القروش يساوي الصفر [مع انني لن اطلب منكم ان تستنتجوا من ذلك ان من الممكن أن يكون ما في جيبي من القروش يساوي اللانهاية] ولكن مع ذلك يصعب من الناحية المنطقية تصور الوجود الخارجي للصفر وانكار الوجود الخارجي لمقلوبه . اي تصور وجود ما هو متناهٍ في الصغر وانكار وجود ما هو متناهٍ في الكبر

ولا اريد ان اخوض بكم في العلاقات الرياضية المختلفة بين الاعداد اللانهائية والعلاقات بينها وبين الكميات المحدودة وفي كيفية تطبيق العمليات الجبرية على الاعداد اللانهائية فان ذلك يخرج هذه المحاضرة عن صبغة المحاضرات العامة ويدخلها في صف المحاضرات المدرسية . وانما أكتفي بان اذكر انه من الممكن تعميم العمليات الحسابية والجبرية بحيث يمكن تطبيقها على الكميات اللانهائية بطريقة منطقية مضبوطة . تقولون كل هذه امور قد تهمّ الرياضيين والفلاسفة ولكننا لا نرى بينها وبين حياتنا اليومية ارتباطاً واضحاً ولكن فكروا معي نحن في حياتنا اليومية وفي تفكيرنا العادي ألسنا نقسم زماننا ومسافاتنا الى اقسام ؟ ألسنا نعتبر اننا نعيش في لحظات متتالية

دقات قلب المرء قائلة له ان الحياة دقائق وثواني

ثم اذا نحن انتقلنا او تحركنا ألسنا دائماً نعتبر اننا ننتقل من « نقطة » الى نقطة اخرى . ففكرة اللحظة وفكرة النقطة ، كلاهما أساس في تفكير البشر عامتهم وخاصتهم

ثم اذا سئلنا ما هي اللحظة ؟ ألا يكون جوابنا انها جزء من الزمن متناهٍ في الصغر ! على هذا الاساس ألا تكون أية مدة محدودة في نظرنا عبارة عن عدد لانهائي من اللحظات المتتالية ؟ فاللحظة في التفكير العادي هي جزء من الزمن مدتهُ الصفر وإذن فلا سبيل الى تكوين مدة محدودة من لحظات الاّ بجعل عددها لا نهائيًّا في الكبر او بعبارة اخرى لا ننجح في قسمة المدة المحدودة من الزمن في تفكيرنا الى عدد لا نهائي من الاقسام يسمى كل قسم باللحظة وهذا هو نفس المعنى الذي عبرت عنهُ منذ مدة وجيزة بالعبارة

$$\frac{\text{كمية محدودة}}{\infty} = \text{صفر}$$

وكذلك الحال لدى تفكيرنا في المسافات فهي مجموع عدد لا نهائي من النقط . فالتفكير العلمي والتفكير الرياضي إنما هما في الواقع الاّ متابعة طبيعية للتفكير العادي يتوخّى فيه زيادة الضبط والتدقيق في التعبير . افرضوا معي اننا قسمنا مستقيماً ا ب طوله متران إلى نصفين

بواسطة نقطة أ١ ثم قسمنا الجزء أ١ ب إلى نصفين بواسطة نقطة أ٢ ثم قسمنا الجزء أ٢ ب إلى نصفين بواسطة نقطة أ٣ وهكذا

أ أ١ أ٢ أ٣ ب

ثم فكروا في الاقسام

أ أ١ ، أ١ أ٢ ، أ٢ أ٣ ، أ٣ أ٤ ، أ٤ أ٥ ، وهكذا

ان طول أ أ١ = ١ ، أ١ أ٢ = ١/٢ ، أ٢ أ٣ = ١/٤ ، أ٣ أ٤ = ١/٨ وهكذا

ان العقل البشري يستطيع تصور استمرار هذه العملية بدون نهاية بل هو لا يستطيع تصور نهاية لعملية الحادثة في الذهن وإن كان الحدوث في الخارج يقتضي وجود آلات للتقسيم. ولكن العملية « الذهنية » لا نهاية لها فالاقسام أ أ١ ، أ١ أ٢ ، أ٢ أ٣ الخ لانهاية لعددها ولكن فكروا في مجموعها . ان نظرة بسيطة الى الشكل تدلكم على ان نقط التقسيم قد تقرب من النقطة ب ولكن لا يمكن ان تتعداها

ان مجموع اطوال الاقسام أ أ١ + أ١ أ٢ + أ٢ أ٣ + أ٣ أ٤ + — — — لا يمكن أن يزيد على طول المستقيم أ ب أي على مترين . وإذن فـ

١ + ١/٢ + ١/٤ + ١/٨ + ١/١٦ + الخ لا يزيد على ٢

والعقل البشري يستطيع ان يقرر اكثر من ذلك فهو يستطيع ان يقرر انهُ اذا زاد عدد هذه الاقسام بدون حد فان الفرق بين مجموعها وبين العدد ٢ ينقص بدون حد حتى يساوي الصفر أي أن

٢ — (١ + ١/٢ + ١/٤ + ١/٨ + ١/١٦ + — — — ∞) = صفر

هذا مثال مخصوص لحقيقة الآتية وهي أن مجموع كميات عددُها لا نهائي يكون في بعض الاحوال محدوداً . من هذه الحقيقة على وجه الخصوص نشأ خطر دراسة الاعداد اللانهائية من حيث تطبيقها في المسائل العملية وعدم ادراك هذه الحقيقة ينشأ عنهُ اختلاط في التفكير . ومن المغالطات المشهورة المغالطة الآتية وهي ان سلحفاة سابقت ارنباً فتقدمتهُ بمتر عند البدء في حركتها وكانت تتحرك هي بنصف سرعته فلكي يلحق بها الارنب وجب عليه أن يقطع المتر الذي بينهما ولكن بينما هو يقطعه تقطع هي نصف متر وبينما هو يقطع هذا النصف المتر تقطع هي ربع متر وبينما هو يقطع الربع المتر تقطع هي ثمن متر وهكذا فاذن لن يلحق بها ابداً . والمغالطة منشؤها افتراض ان مجموع المتر والنصف للمتر والربع المتر الخ لانهائي في الكبر مع انهُ كما ترون محدود ويساوي مترين تماماً . واذا عرفت سرعة الارنب وكانت متراً في

الدقيقة مثلاً فاننا نحكم بأنهُ سيلحق بها بعد دقيقتين

والآن انتقل بحضراتكم الى الناحية الفلسفية من الموضوع ومدارها هل الكمية اللانهائية موجودة فعلاً في الخارج . اذا نظرتم الى المثال السابق وجدتم ان مجموع الكميات $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} +$ — — ← ∞ التي عددها لانهائي . حقيقة واقعة في الخارج وتساوي مترين

ولكن هل الكميات ذاتها ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ موجودة على المستقيم أ ب اي هل هناك طول مقداره متر وآخر طوله نصف متر وهكذا على المستقيم ؟

اظنكم ستتفقون معي على ان المستقيم $\frac{أ}{١}$ موجود في الخارج وكذلك $\frac{أ}{٢}$ ، $\frac{أ}{٤}$ وكذلك $\frac{أ}{٨}$ وكل ما يستطيع الرياضي ان يقوله للفيلسوف في هذه الحالة :— « اذا كان بين هذه المستقيمات ما ليس في رأيك موجوداً على المستقيم فقل لي ايها ؟ اما اذا عجزت فانني سأستمر اتكلم عنها كما لو كانت كلها حقائق واقعة في الخارج »

ولكني لا أزعم ان المسئلة بسيطة الى هذا الحد . لنفرض اننا بدلاً من جعل الأطوال $\frac{أ}{١}$ ، $\frac{أ}{٢}$ وهكذا مساوية لمتر ونصف متر الخ ، جعلناها كلها متساوية ويساوي كل منها الوحدة ففي هذه الحالة من البديهي ان مجموعها لايكون محدوداً كما ان عددها ليس بمحدود . سنكون ازاء مستقيم طوله في ازدياد مستمر فهو اطول من اي مستقيم تستطيع تصور مقاسه . والمسئلة اذن مؤداها البحث في خواص الفضاء الذي نعيش فيه . ان الرياضي والفيلسوف يسلمان معاً بأن طول المستقيم لا يمكن تمثيله بأي عدد من الاعداد المحدودة ولكن هل مثل هذا المستقيم شيء موجود ؟ ماذا يحدث عند ما تستمر في مدّ مستقيم ؟ وبعبارة اخرى ما يحدث عند ما تتحرك في الفضاء ؟ هل نستمرُّ نبتعد عن النقطة التي بدأنا منها ونستمرُّ ننظر الى مبدإ رحلتنا كلحظة ماضية ام نعود الى حيث بدأنا ولو بعد حين كما يعود المسافر حول الارض الى النقطة التي بدأ منها . هنا يمتزج التفكير الرياضي بالتفكير الفلسفي . ان خبرتنا في السنين الاخيرة التي نشأت عن دراستنا للعالم الذي نعيش فيه قد أدت بنا الى آراء في خواص الزمان والمكان تختلف اختلافاً بيّناً عمّا كان مألوفاً بيننا من قبل . فلكي نبحث عن الوجود الخارجي لمستقيمنا اللانهائي يجب اولاً ان نتخلص من آرائنا الموروثة عن خواص المكان والزمان والتي نشأت عن افتراضنا تعميم خبرتنا المحدودة بحيث تشمل انحاء الفضاء وتعميم فكرتنا عن الزمان الذي نشعر بمروره بحيث تشمل الماضي والمستقبل جميعاً . ولست أحب ان اخوض بكم الليلة في بحث النظرية النسبية ولكني اكتفي بأن اذكر ان مستقيمنا «اللانهائي» ربما كان بدلاً من توغله في فضاءٍ لا نهائي كما نتصور هو في الواقع ملتوٍ على نفسه كما يلتوي خط الاستواء على نفسه فيعود الى حيث بدأ بحيث ان ابعد مسافة يمكن الوصول اليها هي في الواقع ونفس الامر مسافة محدودة وان كانت كبيرة نسبيًّا بحيث تقارن بابعاد السدم اللولبية عنا