خطأ قانون كبلر الثاني

هل هو خطأ ؟

قضية فلكية رياضية معروضة للتمحيص

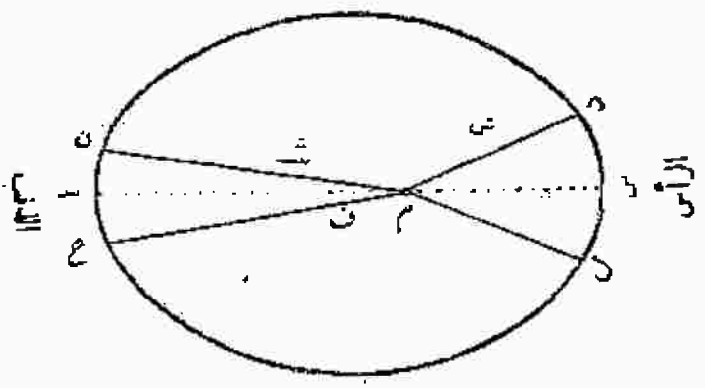
كان كبلر أحد الثلاثة الأولين الذين شرعوا يشتغلون بالفلك على هدى .

١ً — كوبرنيكس ، قال وبرهن أن الشمس مركز الكواكب السيارة وهذا ما يسمى النظام الشمسي .

٢ً — طيخو براهي الراصد ، ضبط مواقع الكواكب السيارة وسرعتها .

٣ً — كبلر ، استنتج من أرصاد طيخو براهي ثلاثة قوانين للنظام الشمسي ، وهي : —

القانون الأول : إن الكواكب السيارة تسير في دوائر اهليلجية أي متطاولة بيضية الشكل ، والشمس في أحد محترقيها Focus كما ترى في هذا الشكل . والسيار عطارد أكثر اهليلجية من سائر السيارات .



والقانون الثاني : إن خط يُصْدِر السيار عن مركز الشمس المسمى « الشعاع المتّجه » Radius Vector يمسح في اثناء سير السيار في أوقات متساوية مساحات متساوية أي أن مساحة م د ل في الشكل تساوي مساحة م ن ح . لأن أفلاك السيارات غير تامة الاستدارة كما تقدم القول ، ولأن السيار متى كان أقرب الى المركز كان أسرع منه متى كان أبعد بحسب قانون السرعة الآتي بيانه :

مسيره من د الى ل أسرع منه من ح الى ن

(القانون الثالث لا يهمنا هنا . وهو أن مربع المدة التي يقضيها أي سيار لاتمام دورته من حول الشمس مناسبة لمكعب بُعْدِه عن الشمس) .

فلنمتحن هذا القانون الثاني في السيار عطارد لأنه أكثر إهليلجية من سائر السيارات ، فإن خط اتجاهه عند « نقطة الرأس » أقصر من خط اتجاهه عند « نقطة الذنب » أي أن الشعاع ش أقصر من الشعاع ش كنسبة ٢ الى ٣ تقريباً لأن مقدار الشذوذ عن المركز Eccentricity من ف = م ٢٠٦ ، بحسب الاصطلاح الفلكي .

نمتحن هذا القانون في عطارد بناء على المعلومات الرقمية الموجودة في كتاب الفلك الموثوق به لثلاثة أساتذة فلكيين أميركيين ، رسل ودوجان وستيوورت . وسائر كتب الفلك الحديثة مقررة هذه الأرقام كما يلي : —

	طرف خط البعد عن المحرق	السرعة بالثانية
	٢٨٫٥٥٥ مليون ميل	٣٦ ميلا
عند نقطة الرأس س		
عند نقطة الذنب ذ	٤٣٫٣٥	٢٤
في نقطة الوسط (المعدل الأوسط)	٣٥٫٩٥	٣٠

وهو معلوم أن مساحة أي قطاع في الدائرة Sector هي نصف حاصل القوس مضروبة بالشعاع (أي بُعْدِ القوس عن المركز م أي المُحْتَرَق) وإذا كانت القوس د ل هي مسافة ما يقطعه السيار في ثانية (أو في يوم أو ما شاء) فلنعبّر عنها بحرف س (أي سرعة السيار في الثانية عند الرأس) .

وكذلك ن ح نعبّر عنها بحرف ع أي سرعة السيار في الثانية عند الذنب .

فالمساحتان إذن .

$$\text{د م ل} = \frac{\text{س ش}}{٢} = \frac{٣٦ \times ٢٨٫٥٥٥}{٢} = ٥١٣ \text{ مليون ميل مربع}$$

$$\text{ن م ح} = \frac{\text{ع ذ}}{٢} = \frac{٢٤ \times ٤٣٫٣٥}{٢} = ٥٢٠ \text{ » » »}$$

نرى مما تقدم أن المساحتين اللتين يمسحهما « الشعاع المتجه » في ثانية غير متساويتين خلافاً لقانون كبلر .

زد على هذا أن المعلومات الرقمية التي نقلناها آنفاً عن السرعة ليست صحيحة أيضاً . وإذا تفحصناها حسب قانون « السرعة الخطية » Linear Velocity (الذي سنشرحه فيما بعد) وجدنا الفرق بين المساحتين أعظم .

هكذا : —

الارقام الصحيحة { السرعة عند نقطة الرأس ٣٣٫٤ ميل الثانية
« « « الذنب ٢٧ « «

وبناء على هذه الأرقام

د ل م = $\frac{٣٣٫٤ \times ٢٨٫٥٥}{٢}$ = ٤٧٦ مليون ميل مربع

ذ م ح = $\frac{٢٧ \times ٤٣٫٣٥}{٢}$ = ٥٨٤ « « «

فانظر ما أعظم الفرق بين هذين الرقمين وبينهما وبين ذينك في العملية السابقة. وبناء عليه لا يكون قانون كبلر سوياً .

قانون السرعة الخطية

بقي للقارىء انْ يسأل : كيف علمنا « السرعة الخطية » Linear Velocity أو القوسية الحقيقية التي ادعيناها آنفاً . فعلينا ان نفرد هذه النبذة التالية لاستخراج قانون هذه « السرعة الخطية » .

لا يخفى ان سرعة السيار في فلكه أيّاً كان تتوقف على فعل الجاذبية فيه . وهذا الفعل يختلف باختلاف بُعد السيار عن مركز الشمس بحسب صنة «مربع البعد» . ولمقدار السرعة قانون محتوم يتوقف على قانون الجاذبية نفسه . وقد استخرجناه كما يلي :—

ناموس التسارع Acceleration

معلوم في كتب الطبيعة ان ناموس التسارع (ناموس الانحناء حول المركز) بقوة الجذب هو $\frac{س^٢}{ش}$ باعتبار ان س رمز السرعة و ش الشعاع Radius نصف القطر وهو البُعد عن المركز . ولا محل هنا لشرح عملية هذا القانون (تجدها في الملحق الرياضي من كتابنا فلسفة التفاحة أو جاذبية نيوتن الذي صدر ملحقاً المقتطف في شهر يوليو سنة ١٩٤٦) وتجدها في جميع كتب الطبيعة . ومن هذا الناموس مع ناموس الجاذبية نستخرج ناموس سرعة الكواكب السيارة الذي نحن بصدده هكذا : —

اذا رمزنا عن فعل جاذبية الشمس للارض بحرف ف وعن فعلها لأي سيار آخر بحرف ف ف . وعن بُعد الأرض عن الشمس بحرف ش وعن بعد أي سيار آخر بحرف ش أمكننا أن نستخرج قانون سرعة السيارات هكذا (بناء على قانون التسارع Acceleration المشار اليه آنفاً) :

$$\text{اولاً : } \frac{ف}{ف_{ء}} = \frac{\frac{س^{٢}}{ش}}{\frac{س_{ء}^{٢}}{ش}} \qquad \text{معادلة (١)}$$

ثانياً مفهوم ان قانون الجاذبية هو $\frac{ف}{ف_{ء}} = \frac{ش_{ء}^{٢}}{ش^{٢}}$ أي مربع البُعد بالنقاب — معادلة (٢)

عادل بين المعادلتين (١) و (٢) هكذا ،

$$\frac{ش_{ء}^{٢}}{ش^{٢}} = \frac{\frac{س}{ش}}{\frac{س_{ء}^{٢}}{ش}} \quad \text{.. وإذا بسطت هذه المعادلة كان لك : —}$$

$س^{٣} \times ش = س_{ء}^{٢} \times هـ$ معادلة (٣) حاصل ثابت

(او $س^{٣} : هـ = س_{ء}^{٢} : ش$)

يعني اذا ضربت مربع سرعة كل سيار بخط بُعده عن الشمس (شعاعه) كان لك عدد واحد لا يتغير في الجميع وهو ٣٤٤،٥ ميل

اذن فقانون « السرعة الخطية » كما يستخرج من معادلة (٣) هو

$$س^{٢} = \frac{س_{ء}^{٢} \times ش}{ش} \qquad \text{معادلة (٤)} \qquad \text{وكذلك منه}$$

$$س_{ء}^{٢} = \frac{س^{٢} \times ش}{ش} \qquad \text{معادلة (٤ ب)}$$

السرعات في مختلف النقط

بناءً على هذا القانون نستخرج السرعات في النقط المختلفة من الفلك الاهليلجي. في عطارد (مثلاً) نستخرج سرعة عطارد الوسطى أولاً ، أي المعدل الأوسط بناءً على أن متوسط البعد (أي البعد الأوسط عن الشمس) ٣٥،٩٥ ميل . فيكون بعد عطارد الاوسط عن الشمس ٠،٣٨٧ بالمقياس الفلكي

المقياس الفلكي هو مسافة بُعد الأرض عن الشمس وهو المقياس الذي تقاس به أبعاد جميع السيارات ويعبر عنه برقم ١ (واحد اي وَحدة) ولما كان بُعد الأرض عن الشمس بالأميال ٩٢،٩ مليون ميل فيكون بُعد عطارد بالمقياس الفلكي

$$\frac{٣٥،٩٥}{٩٢،٩} = ٠،٣٨٧ \text{ كما ذكرنا آنفاً}$$

وبناء على المعادلة (٤ ب) تكون سرعة عطارد الوسطى بالثانية (بحساب المقياس الفلكي) وبالنسبة الى سرعة الأرض التي هي ١٨ر٥ ميل بالثانية

$$ع = \sqrt{\frac{(١٨٫٥)^{٢} \times ١}{٠٫٣٨٧}} = ٢٩٫٧٤ \text{ ميل بالثانية}$$

ثانياً — اما وقد استخرجنا نسبته الوسطى فصار علينا ان نستخرج سرعته عند نقطتي الرأس والذنب هكذا : —

$$\text{سرعته عند نقطة الرأس} = \frac{٣٠٫٩٥ \text{ (شعاعه الاوسط)} \times (٢٩٫٧٤)^{٢} \text{ متوسط سرعته}}{٢٨٫٥٥ \text{ (شعاعه الاقرب)}}$$

أي سرعته = ٣٣٫٤ ميل بالثانية عند نقطة الرأس

$$\text{سرعته عند نقطة الذنب} = \frac{٣٠٫٩٥ \times (٢٩٫٧٤)^{٢}}{٤٣٫٣٥ \text{ شعاعه الاطول}} = ٢٧ \text{ ميلاً بالثانية}$$

هذه هي السرعات الصحيحة وعليها نعتمد في استخراج المساحتين كما تقدم (لاحظ ان السرعات الحقيقية تختلف عما هي في الكتب)

السرعة المساحية

— مما تقدم صار يمكننا ان نستخرج قانون السرعة المساحية Areal Velocity بالنسبة بين المساحتين أي ما يمسحه كل شعاع في ثانية (أو في أي مدة نشاء) هكذا

نرمز عن مساحة القطاع sector د م ل عند الرأس بحرف م وعن الثانية (أو أية مدة) بحرف ث

$$م = \frac{س \, ث \, ش}{٢}$$ على اعتبار أن طول القوس يساوي السرعة مضروبة بالوقت

وكذلك نرمز عن مساحة القطاع ن م ح عند الذنب بحرف ح اذن $ح = \frac{ـ \, ث \, ش}{٢}$

ناسب بين هاتين المعادلتين فتسقط منهما $\frac{ث}{٢}$ المشتركة بينهما يبقى لك

$$م = \frac{س \, ش}{ـ \, ش}$$ معادلة (٥) ومنها لك

$$ح = \frac{ـ \, ش}{س \, ش} \times م$$ معادلة (٥ ب)

ترى بكل وضوح أن المعادلتين غير متساويتين. أي أن مساحة قطاع الذنب (ذ م ح) أكبر من مساحة قطاع الرأس (د م ل) بقيمة $\frac{ث}{س ض}$

وبالتحقيق بالأرقام بحسب المعادلة نفسها

$$ح = \frac{٢٨٤٥٥ \times ٣٣٤٤}{٤٣٤٣٥ \times ٢٧} \times م = \frac{٤٧٦}{٥٨٤} \times م = ١\frac{٤}{٥}$$

أي ان المساحة عند الذنب تساوي المساحة عند الرأس مرة واربعة اخماس المرة تقريباً وإذن فقانون كبلر غير صحيح.

السرعة الماسية العامة

مساحة افلاك السيارات

يمكننا ان نستفيد من هذا البحث شيئاً آخر غير تخطئة قانون كبلر

كل من السيارات تمسح فلكها في مدة معينة. فهل ترى مساحاتها متساوية في مدات متساوية؟

مثلاً هل يمسح شعاع فلك زحل في سنة واحدة مساحة تساوي مساحة فلك الأرض (التي تمسحها الأرض بسنة)؟ فلنر

لنسترعي ذهن القارىء قليلاً للملاحظة التالية: —

كلما انتقل السيار في فلكه الاهليليجي خطوة كان كأنه ينتقل من دائرة تامة وهمية الى دائرة وهمية أخرى. فإن كان يبتعد عن نقطة الرأس كأن ينتقل الى دائرة أوسع فأوسع الى أن يبلغ الى نقطة الذنب. فكأنه يرسم دوائر (أو أقواس دوائر) متعددة تضمها ضمن بعض. وهذا هو السر في أن سرعته تختلف باختلاف بعده عن مركز القمص حسب قانون السرعة الذي مر ذكره في معادلة (٤). وهذا هو سر اختلاف السيارات بالسرعة.

بناء على ما تقدم يطبق قانون السرعة الماسية على جميع السيارات بنسبة بعضها الى بعض أو بالأحرى بنسبتها الى مساحة فلك الأرض التي تعد المقياس المساحي العام لجميع، كما أن (شعاع فلكها) يعد مقياساً فلكياً واحداً لجميع ابعاد السيارات كما تقدم القول.

مثال ذلك: — نأخذ زحل ونناسب مساحة فلكه بمساحة فلك الأرض لكي نرى ماذا يكون بحسب المعادلة (٥)

سرعة زحل = ٦ أميال بالثانية .

شعاعه (بعده عن الشمس) . = ٩،٥٣ (بالمقياس الفلكي . أي كذا مرات كبُعد الأرض عن الشمس) .

المساحة التي يمسحها في عام = مح (رمز للمساحة) !

سرعة الأرض = ١٨،٥ ميل في ثانية

شعاعها (خط بعدها عن الشمس) = ١ (المقياس الفلكي)

مساحة فلكها = مض (وحدة) واحدة هي المقياس المساحي بحسب المعادلة (٥)

$$\text{مح} = \frac{\text{ع} \times \text{ش}}{\text{س} \times \text{ش}} \times \text{مض} = \frac{٩،٥٣ \times ٦}{١٠ \times ١٨،٥} \text{ مض} = ٣،٠٨ \text{ مض}$$

يعني أن شعاع فلك زحل يمسح في سنة ٣ مرات وكسوراً كمساحة فلك الأرض .

لامتحان ذلك بطريقة أخرى هندسية حسابية : —

يتم زحل مسيره في مداره (دائرة فلكه) في ٢٩،٤٦ سنة

أي أنه يسير في سنة واحدة $\frac{١}{٢٩،٤٦}$ من دائرة فلكه

بحسب قانون كبلر يجب ان تكون مساحة فلك زحل ٢٩ مرة مساحة فلك الأرض . ومما تقدم رأيت أنها ٣،٠٨ × ٢٩،٤٦ = ٩٠،٣٦ مرة

مساحة أية دائرة بحسب هندسة السطوح هي $\frac{\text{د} \times \text{ش}}{٢}$ باعتبار ان د هي طول محيط الدائرة

وش (الشعاع) نصف قطرها . ولكن د = ب ش . و (ببجاي n) في اصطلاح الرياضيين هي الناتج من قسمة محيط الدائرة على شعاعها

أي أن ب = $\frac{\text{د}}{\text{ش}}$ اذن د = ب ش : واذن

$$\text{مساحة الدائرة} = \frac{\text{ش} \times \text{ب ش}}{٢} = \frac{\text{ب ش}^{٢}}{٢}$$

واذن مساحة فلك الأرض في سنة : = مض = $\frac{\text{ش}^{٢} \text{ ب}}{٢}$

$$\text{مساحة فلك زحل} : = \text{مح} \times ٢٩،٤٦ \text{ سنة} = \frac{\text{ش}^{٢} \text{ ب}}{٢}$$

فناسب بين المعادلتين ونبسطهما بإسقاط $\frac{ب}{٢}$ من الجانبين فلنا

$$\frac{ع^٢}{ن^٢} = \frac{٢٩٫٤٤٦ \times ع}{١ \times ض} \quad \text{أو}$$

$$ع = \frac{ع^٢}{ن^٢ \times ٢٩٫٤٤٦} \times ض$$

بالأرقام: ـ $ع = \frac{(٩٫٥٣)^٢}{٢١ \times ٢٩٫٤٤٦} \times ض = ٣٫٠٨$ ض في سنة

أي ان مساحة فلك زحل تساوي ٣ مرات و٨ بالمئة من مساحة فلك الأرض في سنة. نفس النتيجة السابقة

معادلة مختصرة

ضع في معادلة (٥) قيمة ـ ب التي في معادلة (٤ ب)

$$ع = \frac{ب}{س \times ن} \times ض = \frac{ع}{س \times ن} \times \sqrt{س^٢ \times ن^٢} \times ض$$

رتّب المعادلة ثم أبسط وجرّر فيكون لك

$ع = \sqrt{\frac{ع}{ن}} \times ض$. وحيث أن ن تساوي واحداً لأنها وحدة المقياس فيكفي أن تكون المعادلة هكذا

$$ع = \sqrt{ع} \times ض \quad \text{معادلة (٦)}$$

بالأرقام: ع في سنة $= \sqrt{٩٫٥٤}$ × ض $= ٣٫٠٨$ ض

معادلة أخرى أبسط

أبدل في معادلة (٥) الواردة أعلاه قيمة هـ التي في معادلة (٤ ج)

$$\text{ع في سنة} = \frac{\frac{١}{٢} \times س^٢ \times ن}{س \times ن} \times ض \text{ ـ اذن } ع = \frac{س}{٢} \quad \text{معادلة (٧)}$$

بالأرقام ـ ع في سنة $= \frac{١٨٫٥}{٦} = ٣٫٠٩$ ض نفس النتيجة

يمكنك أن تمتحن المعادلات ٥ و٦ و٧ في جميع السيارات بالقياس الى الأرض فتجدها جميعها صادقة

وأخيراً لا يبقى عندك شك بأن قانون كبلر خطأ ، ولعلّ فاضلاً من القراء يكتشف في هذا البيان خطأ فيؤيد قانون كبلر . وأكون له من الشاكرين

جميع الأرقام المذكورة أعلاه وفي الجدول أدناه تقريبية . وقد أخذنا الأبعاد الوسطى للسيارات وغضضنا النظر عن العوامل الفلكية التي تحدث اختلالاً زهيداً aberration بالقانون الرياضي

جدول أبعاد السيارات عن الشمس

وسرعاتها وسني مداراتها في أفلاكها ومساحات أفلاكها

على اعتبار أن بعد الأرض عن سطح الشمس هو القياس الفلكي وبعدها الحقيقي عن سطح الشمس نحو ٩٢ مليون ميل ومن مركزها نحو ٩٢٫٨٧٠٫٠٠٠ ومساحة فلك الأرض مقياس مساحي فلكي واحد

اسم السيار	البعد عن الشمس بالقياس الفلكي	السرعة بالأميال	مدة الدورة بالسنين	ما يمسحه خط البعد في سنة
عطارد	٠٫٣٨٧	٢٩٫٧٣	٠٫٢٤	٠٫٦١٥ من مساحة فلك الأرض
الزهرة	٠٫٧٢٣	٢١٫٧	٠٫٦٢	٠٫٨٥٣ » » »
الأرض	١ وحدة	١٨٫٥	١ سنة	١ وحدة مساحية
المريخ	١٫٥٢٣٦	١٥	١٫٨٨	١٫٢٣ وحدة مساحية
المشتري	٥٫٢٠٢٨	٨٫١	١١٫٨٦	٢٫٢٨٤ » »
زحل	٩٫٥٣٨٨	٦	٢٩٫٤٦	٣٫٠٨ » »
اورانوس	١٩٫١٩١	٤٫٢	٨٤٫٧٨	٤٫٤ » »
نبتون	٣٠٫٠٧	٣٫٤	١٦٤٫٧٨	٥٫٤٤ » »
بلوتو	٣٩٫٨	٢٫٩	٢٤٢ تقريباً	٦٫٣٨ » »

نمرة الحرر

[المقتطف] اطلع أحد أصدقائنا الفلكيين ذوي العلم الثابت على تجربة من هذا المقال فتفضل بالآتي :

« تبين لي أن ليست هناك أخطاء اتماكل الذي حدث هو ان السرعة الخطية المأخوذة من مجلد دوجان ليست هي السرعة التي يجب استعمالها ، لان السرعة الخطية تتألف من سرعتين :

احداهما متجهة على نصف قطر ، والأخرى عمودية عليه . وهذه السرعة تساوي

$$س_{ه}^{٢} = ج\,(م + ك_{ق})\left(\frac{٢}{س_{ه}} - \frac{١}{ا}\right)$$

ج = ثابتة جوس

م = كتلة الشمس

$ك_{ق}$ = كتلة الكوكب

$س_{ه}$ = نصف القطر الموجه

ا = نصف المحور الأكبر في قطاع المدار

والسرعة التي تدخل في المساحة النصف قطرية هي السرعة العمودية على نصف قطر وليست السرعة الخطية .

أضف الى ذلك . ان هذه السرعة الخطية ليست السرعة الناتجة من دوران جسم في شكل دائرة ، وإنما هي السرعة الناتجة من دوران جسم في شكل اهليلجي تحتل الشمس إحدى بؤرتيه . وقيمتها هي كما تبين آنفاً للقطع الناقص .

* * *

وما قول حضرة الفلكي في نسبة مساحات أفلاك السيارات الى مساحة فلك الأرض .

ن . ح