البحث التاسع :

« برنامج تمهيدى مقترح لتطوير مناهج الهندسة بالسنوات الأولى بكليـــات التربيـــة »

١ ـ مقـــــدمة :

تحت نظام التعليم الحالى عندنا نجـد ان الحاصلين على الثانوية العامة مجبرون على التدريب على حل مسائل امتحانات خاصة فى السـنة الأخـيرة ، ولم يكن لديهـم الا فرصـة قليلة جـدا ليتعلموا ما هى الرياضيات • وعنـد التحاقهم بكليات العـلوم أو التربية فانهم يكونون ملتزمين ببرامـج نظـامية فى الرياضـيات ممـلوءة بالبراهـين وعـلى مسـتوى عـالى مـن الرسـمية (formal) والصرامـة (rigorovs)•
وبالنسبة لكليات التربية فقـد حـدث تطور فى مناهج الرياضـيات فى العشر سنوات الأخيرة شمل ادخال موضوعات جـديدة بأسلوب يهدف الى عمل نوع من الترابط والتكامل المعرفى على سنوات الدراسة الأربع (١) • الا انها لم تعالج العيب فى نظام التعليم المشار اليه ، بل بالعكس عملت على زيادته بالتركيز على برهنة اجزاء نظرية وحل تمارين نمطيـة اعتاد ورودها فى الامتحانات النهائية التى من شأنها أن تعـد مدرسا ينقل نفس الاتجاه الى تلاميذه فى التعليم العام •

وقـد اتيحت لى فرصتان اتضحت فيها هـذه الأحوال • الفرصة الأولى عند استضافة قسم الرياضـيات لى فى كليـة التربية والبنـات (ج • عين شمس) لـدة عامين قمت فيها بتدريس مقررات فى التوبولوجى وهندسة المسلمات (هندسات اقليدية ولا اقليدية واسقاطية وهندسـة تحويلات ••) ، •••• الفرصـة الثانية عند اشرافى على رسائل علمية منها ما يختص بتطوير تدريس الهندسـة للمرحلة الثانوية بتقديم نظرية تصنيف السـطوح كمدخل للتوبولوجى الهنـدسى وتقـديم التوبولوجى

(التحليلى أو العام) باسلوب مبسط ، هــذا الى جانب عملى الأساسى الذى يسهم فى تطوير اعــداد مدرس الرياضيات من الناحية الرياضية والفنية التربوية •

وقــد لمست من خـــلال ذلك بعض الاعتبارات حول تعــلم الهندسة والتوبولوجى أناقشها فيما يلى :

١ • محاولة تحــديث الهندسة عن طريق هندســة المسلمات التى تعطى بالاسلوب البديهى الرســمى لهيلبرت (وباش) تعتبر بالنســبة للطلبة الذين يدرسونها فى السنة الثانية ، معقــدة وحمل غير ذى معنى يشوه مفهوم الهندسة بالنسبة لهم • واتفق فى هذا الرأى مع فرويدنتال (٢) الذى يضــيف « انها تصــلح فقط للقراءة أو عمل بحــوث أساســية foundational research ولكن لا نستطيع أن نعمل بها هندسة • وفى أى حال لا يمكن تدريس هندسة بها » • كما لاحظ شيياتا (٣) « قد يكون من الغريب على الطلبة ومن الصــعب جــدا عليهم فهم النظام البديهى لهيلبرت وبخاصــة دور بديهية الاستمرار continuity حتى على المستوى الجامعى » • هــذا لا يعنى انى لا أرى تدريس هــذه الهندسة كما يرى فرويدنتال ، ولكن يستحسن تعــديل مدخلها اما عن طريق النمو التاريخى البديهى كما اقترح شيياتا وذكرناه فى عمــل سابق (٤) أو عن طريق الجبر الخطى كما يقترح شيبجاكى وشوكيه (٥) وفرويدنتال (٢) •

٢ • تأخير تقديم التوبولوجى حتى السنة الثالثة (أو الرابعــة) باسلوب رسمى مجرد يتسم بكثرة اجزائه النظرية وقلة تدريباته وانعدام توضيح دلالته التطبيقية ، يجعل الطالب ينفر من المادة ولا يستسيغها ، وكل ما يفعله هو اجترار لشىء لا معنى ولا دلالة له • وذلك فى الوقت الذى يكون الطالب فى سنواته النهائية على اعتاب مهنتــه ويحتاج الى تكامل معرفى ذى دلالة تطبيقية ووظيفية • ومن بعض المعالجات غــير الرسمية للمادة بمداخل ملموســة وبلقاءات مع الطلبة المتفوقين منهــم

والعاديين والضـــعفاء لاحظت ان الجميع متشوقون فعلا الى معرفة أصل المادة ومعناها ودلالتها ومحتاجون لتمهيد مبســـط ذى طابع هندسى أكثر منـــه تحليلى •

٣ • الطالب محتـــاج أن يتســـع افقه فى الهندســـة : أ) كمـــادة لهندسات مختلفة ، (ب) كمدخل أو أساس لمجالات جديدة فى الرياضيات بنيت على أساسها ثم استقلت عنها — كالهندسة التوبولوجية والهندســـة الديناميكية والهندسة الجبرية والتفاضلية و ••• ، (ج) كوسيلة هندسية ونماذج للتمثيل فى كل الرياضيات •

٤ • لا اغالى اذا قلت ان الطلبـــة المصريين بصفة خاصة عنـــدهم الحس والحماس للهندسة (منذ التفوق الهندسى لقدماء المصريين) • وهم فى حاجة الى أن ننمى ونقوى فيهم هذه المقدرة بدلا من اخمادها • وعلى ذلك فهم فى حاجة الى أن تدرس لهم الهندسة باسلوب مشـــوق بحيث : ١) تكون محتفظة بطابعها المميز كنظـــام بديهى مجـــرد ، ب) كوسيلة لمعرفة خواص الاشكال ولفهم الفراغ وتركيبه المترى metric والاتجـــاهى vector والتوبولوجى • وهم فى حاجـــة ان يؤســـسوا بعقلية هندسية ناضجة ، ويكتسبوا ، خبرة ومهارة فى الحدس intuition الهندسى ، وان يتـــذوقوا الجمـــال الهندسى ويمارسوا المتعـــة العقليـــة المرتبطة بالاكتشاف ويشاركوا فى فرحة اكتشـــاف الآخرين ، وان يدربوا على حل المشكلات والتوصل الى التطبيقـــات الطبيعية natural غير المصطنعة وكل ذلك عن طريق خبرات تعليمية محببة وغير منفرة لهم •

٥ • تبين من التجربة ان تلاميذ المرحلة الثانوية يستطيعون التمكن من ، وتذوق شكل form جـــديد من الهندســـة يتمثل فى نظرية تصنيف السطوح كمدخل للتوبولوجى الهندسى باسلوب يشجع الحدس الهندسى ويتدرج من الملموس الى المعالجة المجـــردة الرسمية • وقـــد اتيحت لى فرصة الالتقاء بتلاميذ التجربة ، وقد سعدت من استجابتهم وفرحتهـــم

وحبهم للمادة الجديدة مع فهمهم لها والتطلع الى معرفة المزيد عنهـا ، أكثر من سعادتى بمعرفة النتائج الكمية للتجربة التى تعكس فاعليتهـا • فالمهم أن نساعد الطالب ان ينجح فى فهم وحب وتذوق المـادة الجـديدة ولا نكتفى بمساعدته على مجرد تحصيله لها •

مما تقدم يمكن أن نستخلص ان طالب كلية التربية (بصفة خاصـة) فى دراسته للهندسة يلزمه ما يأتى :

أ • اعداد واسع فى الهندسة حيث أنه متوقع منه ان يقدم اعدادا واسعا لتلاميذه • وفى مقتبل دراسته بالكلية (سـنواته الاولى فيهـا) يحتاج أن يتعرف على الجديد فى الهندسة : هل هى امتداد لما سـبق أن درسـه بالثانوى أم تعمق فيـه ؟ هل توجـد هندسـات أو أشـكال أو أوجه أخرى للهندسة ؟ ما هى دلالة الهندسة فى نمو مجالات الرياضيات الجـديدة ؟

ب • معرفة شىء عن تاريخ الهندسة المميز • وخاصة تاريخ ما استجد أو تطور فيها ، بما يكفى لتذوق اتجاهاتها الحالية وتقدمها والشـعور بحيـوية المـادة •

جـ • دراسة صور جديدة للهندسـة ، بجـانب دراسة الهندسـات المختلفة الاقليدية واللااقليدية والاسـقاطية بنظمها البديهية ، بشىء من العمـق •

د • ان تدرس الهندسة على سنوات الدراسـة المختلفة بالتعـليم الحلزونى المتدرج من البسيط الى المركب • وان تدرس بعض المجالات التى لها علاقة بالهندسة ليأخذ صـورة متكاملة عن الهندسـة وعلاقاتها بالرياضـيات •

هـ • ان يكون تعليم الهندسـة خبرة محببـة تركز على أن يقوى

حدسه الهندسى ويفهم المادة ويعـرف معناها ودلالتهـا ويتذوق جمالهـا ويحبها ويقدر نظمها البديهية ويتمكن منها •

ومن ثم فاننا نهدف فى هذه الدراسة الى وضـع تصـور لبرنامج تمهيدى فى السنوات الاولى لكلية التربية يراعى فيه الاعتبارات السابقة ، ونوضحه فيما يلى :

٢ ـ برنامج تمهيدى مقترح للهندسة فى السنوات الأولى لكليات التربية

يقدم البرنامج عرضا لشكل جديد من الهندسة متمثلا فى موضوعين : الأول التربولوجى الهندسى والثانى التوبولوجى (التحليلى ـ العـام) بمداخل تعتمد على النماذج الحدسية والانتقـال التدريجى بالمعالجـة المجردة لطلبة كلية التربية فى السنة الاولى أو السنتين الاولى والثانيـة فى تتـابع •

وبصفة خاصة يهدف البرنامج الى :

أ • تقديم تطوير للهندسة لمجـالات جديدة ، مـع توضيح نشأتها (جذورها التاريخية) وابراز النواحى الجمالية الخلاقة فيها ، وتربيـة الحدس الهندسى وتذوق جمالها والتبسـيط مـع الحفاظ على الطبيعـة الاستدلالية المجردة والطريقة البديهية فى معالجة نظرياتها والتعامل مع المادة بشىء من العمق •

ب • ولو ان الموضوعين يمكن اعطاءهما مستقلين (أو اعطاء أحدهما دون الآخر) ، الا انهما يمثـلان تكاملا وترابطا رياضيا • حيث يقـدم الموضوع الثانى تفسيرا (تحليلى) لبعض ما يقدم فى الأول •

جـ • عمل تمهيد وترابط لما يدرس بالفعـل بالكلية • فالموضـوعان يمهدان لدراسة الهندسة (هندسـة المسلمات والتحويلات الهندسـية)

والتوبولوجى من جهة ولدراسة التحليل الرياضى من جهة أخرى فى السنوات الأخيرة •

والملاحظ أن التوبولوجى التجميعى combinatorial كأحد أوجه التوبولوجى الهندسى مدرج بطريقة رسمية فى بعض برامج اعداد مدرسى المرحلة الثانوية الجديدة باليابان (٧) مع الهندسة الاقليدية والاسقاطيه والتفاضلية •

وفيما يلى فقدم مدخل كل موضوع فى جزأ •

٣ — الجزأ الأول : مدخل تمهيدى للتوبولوجى الهندسى لتقديم نظرية تصنيف السطوح •

نقدم باختصار المحتوى وطريقة عرضه التى نحاول بها غرس وتربية نواحى مختلفة من التفكير الرياضى مثل : الحدس ، الابتكار ، التجريد والاستدلال المنطقى الصارم ، تذوق الجمال الرياضى ، فرحة ومتعة الاكتشاف ••••• وقد صمم المدخل ليقع فى أربعة أقسام نقدمها فيما يلى :

١٠٣ — القسم الأول : المقدمة •

من المهم أن نشوق الطالب ليعرف ما سوف يقوم بدراسته ، فيعطى مقدمة تاريخية وفكرة عامة عن موضوع دراسته تهيؤه لاستقبال وجه جديد للهندسة بعقلية متفتحة •

وبالنسبة للمقدمة التاريخية فانها لا تكون مجرد سرد المادة بالاسلوب الذى يتبع عادة فى تدريس تاريخ الرياضيات ويبعث الملل بتركيزه على التاريخ القديم دون الحديث وانفصامه عما هو معاصر • ولكن بالأخذ بتوصيات باركستون (٨) وهى : أ) أن نتصل بالمنبع الحقيقى للمادة ونعرف

تطورها ، بحيث ننظر اليه بعين الحاضر • كأن نحل مشكلات أثارت نمو المادة (منها ما لم يمكن حله فى وقت حدوثه) باستعمال حلول معاصرة ، مع تقديم حلول قديمة أصيلة • (ب) أن نركز على دراسة شخصية رئيسية central لعبت دورا رئيسيا فى نمو ما نقوم بدراسته •

ومن ثم تثار فى هذه المقدمة منشأ كلمة توبولوجى (أصلها اليونانى Tonso تقرأ توبوس ، التى تعنى هندسة الموضع) وأول من استخدمها لهذا المدلول الرياضى الألمانى ليستنج ١٦٤٠ ، ويذكر اكتشاف أويلر وحله لاحدى المشكلات التاريخية الشهيرة المعروفة بمشكلة كبارى كونجسبرج ١٧٣٦ والحل الحديث لها عن طريق الشبكات networks (أحادية وغير أحادية الاتصال) ، كما يذكر أهم ما تأثر به نمو التوبولوجى من أعمال جاوس وريمان وموبيس وكلاين وبوانكاريه • وقد يكون من المهم أن نذكر أن ريمان كان من تلاميذ جاوس ، وموبيس من تلاميذ ريمان وكلاين من تلاميذ موبيس كل منهم أخذ من أستاذه وزاد عليه ، فهذا قد يبين الاستمرارية فى العطاء والمدرسة الرياضية الخلاقة وجذورها • وقد يكون فى معرفة : ان ريمان الذى يعد من أكبر الرياضيين فى التحليل الرياضى والتوبولوجى مات بمرض السل وهو فى السابعة والثلاثين ، ما يبين نوع العطاء الذى يقدمه الرياضى من جهده وعمره • وان الرياضيات المقدمة للطالب هى ثمرة كفاح وحياة أبطال رياضيين • ويمكننا تقديم بوانكريه كشخصية رئيسية لعبت دورا هاما فى وضع أساسيات التوبولوجى الهندسى • فهو بصفة عامة (١٨٥٤ — ١٩١٢) قدم اكتشافات أصيلة كثيرة فى الرياضيات وتطبيقاتها كما قدم أفكارا رائدة عن عملية التفكير الحدسى ودور اللاشعور فى الاكتشاف • وبصفة خاصة قدم نموذجا للمستوى فى الهندسة الزائدية hyperbolic معروف باسمه • وهو الذى وضع وبلور أساسيات ونظريات فى التوبولوجى الهندسى (التجميعى) والتوبولوجى الجبرى وبصفة خاصة نظرية تصنيف السطوح وتوصله الى المجموعة

الأساسية fundamental group والى نظرية النقطـة الثابتة قبل وفاته مباشرة ١٩١٢، التى نمت منها واستحدثت مجالات عديدة فى القرن العشرين مثل الهومولوجى والكهومولوجى ودراسات الطى manifolds ونظريات الأبعـاد .

ويمكن ان يأخذ الطالب أيضا فكرة عن النمو التحليلى للتوبولوجى (من التحليل الرياضى ونظرية الفئات) . وهنا يتعرف الطالب أيضا بصفة عامة على نوعين من التوبولوجى . أحـدهما وهو التحليلى (توبولوجى فئات النقط point set topology) يتعامل مع المـواد الصـغيرة المكـونة microscopic ويسـتخدم النقط والفئـات فى وصـف الفراغ التوبولوجى ، والثـانى وهو الهنـدسى يتعامل مع المكونات الكبـيرة macroscopic لتعميمات الأسطح التى تسمى الطيات . ومن هنـا نثير موضوع الدراسة فى البرنامج (المقترح) وهو المشكلة الخاصة بنظرية تصنيف السطوح ذات بعـدين (طى — ٢) التى اكتشـفت وبرهنت فى القرن الماضى — وقـد قـدم سمال Smale ١٩٦١ وأخرون إثباتها على أساس أفكار بوانكريه بالنسبة للابعاد ن ⩾ ٥ إلا أنهـا لم تثبت بعـد بالنسبة للابعاد ٣ ، ٤ . أما براهانها الذى سوف نقـدمه فى هذه الدراسة فهو مستمد من أعمال الرياضى المعاصر زيمان الذى قدمها ١٩٦٤ (!!) كمثـال جميل للتوبولوجى الهندسى يعكس الروح الحالية للبحث فى الرياضـيات .

يمكن للطالب أن يأخـذ فكرة عن أهمية التوبولوجى فى علم النفس ، حيث استخدمت أفكاره كأدوات لقياس نمو التفكير .. فمثلا اذا قـدم لطفل دون الثالثة شكل وجـه دائرى وطلب منه رسم عينين فانه يرسم العينين خارج الدائرة لأن مفهوم الداخل لم يتكون بعـد عنده ، واذا طلب منه رسم قبعة فيرسمها بعيـدا عن الوجه لأن مفهوم الاتصالية لم يتكون بعـد عنـده ...

٣ • ٢ ـ القسم الثانى : السطح (طى ـ ٢ وخواصه) :

بالنسبة للمبتدىء يستحسن عدم تقديم التعريف الرسمى للسطح طى ـ ٢ 2 -- manifold :

«A surface is a two - dimensional locally Euclidean compact Housdorff space».

لانه يتطلب معرفة واسعة بالتوبولوجى التحليلى • ومن ثم نقدم السطح (طى ـ ٢) بطريقة حدسية (بدون تعريف رسمى) كتجريد لما نعنيه عن السطح الاقليدى وله نفس الخواص المحلية للمستوى الذى نألفه فى الهندسة الاقليدية • ثم نقدم أمثلة لسطوح مألوفة مثل : قرص ، ورقة مربعة ، ورقة مثلثة ، سطوح مجسمات كرة وهرم واسطوانة ومخروط • وأمثلة لسطوح غير مألوفة مثل : تورس torus ، شريط موبيس ، تورس بأكثر من فجوة ، كرة ذات مقبض أو عدة مقابض ، تورس معقود knotted ، •• وتعطى فرصة للطالب أن يشكل نفسه بعضا من هذه السطوح مثل تشكيل اسطوانة وتورس وشريط موبيس من قطعة ورق مستطيلة • هذه الفرصة تجعله ، من جهة نشطا وتحببه فى المادة وتربى فيه روح الكشف والابتكار ، ومن جهة أخرى تمهده بأسلوب حدسى لتكوين فراغات توبولوجية جديدة بواسطة مطابقة بعض النقط فى فراغ توبولوجى معطى وهذه تناظر فكرة لصق أو خياطة سطحين أو أكثر ـ وذلك يقوده فيما بعد الى فكرة الفراغ المطابق quotient or identification space.

كما تعطى فرصة للطالب ليصل بنفسه من الأسئلة الموجهة الى خواص السطح (طى ـ ٢) بأن يكون :

أ ـ متصلا connected

ب ـ مقفلا closed

حـ ـ ممكنا تثليثه triangulable

فيصل الى أن جميع السطوح فى الأمثلة المعطاة هى سطوح متصلة بمعنى أنه يمكن أن نصل بين أى نقطتين بمسار path أو منحنى • ويصل الى أن بعض السطوح لها اطار مثل القرص وشريط موبيس ، ومن ثم فهى سطوح غير مقفلة • أما باقى السطوح كسطح الكرة فليس لها اطار وعلى ذلك تكون مقفلة • كذلك ليصل الى أن كل سطح يمكن تثليثه بمعنى أنه يمكن تقسيمه الى عدد محدود من الرؤوس والأحرف والأوجه المثلثة سواء كانت مستوية أو منحنية • ثم يدرب الطالب على تثليث الأسطح المختلفة ، كل سطح بأكثر من طريقة للتثليث •

ويقدم الهومامورفيزم (التحويل التوبولوجى — التكافؤ التوبولوجى) homeomorphism كفكرة رئيسية تميز التوبولوجى عن أى شكل آخر للهندسة • ويمكن أن نناظره بالتشاكل الذى يحفظ تركيب المجموعة • ثم تقدم السطوح الهومامورفية (المتكافئة) توبولوجيا • ويستعان بفكرة هندسة ورق المطاط وبالاسقاط المركزى والعمودى من سطح الى آخر • ويدرب الطالب على تعيين السطوح المتكافئة توبولوجيا من الأمثلة السابقة وأمثلة أخرى كسطح كرة مثقوب وقرص و ••••

٣ • ٢ — القسم الثالث : التوجيه — عدد أويلر — السطوح المعيارية :

نقدم فى هذا القسم بعض الخواص التوبولوجية مثل التوجيه orientation وعدد أويلر والسطوح المعيارية •

(أ) لتقديم التوجيه نسترجع كيفية تشكيل شريط موبيس من قطعة ورق مستطيلة ولصق طرفيها بعد لويها نصف لوية • فبأخذ المستطيل

س^{٢} = { (س، ص) ∈ ح^{٢} : − ١٠ ≤ س ≤ ، − ١ ≤ ص ≤ ١ }

ومطابقة النقط (١٠ ، ص) مع النقط (− ١٠ ، − ص) لكل − ١ ≤ ص ≤ ١

يتكون شريط موبيس • ثم يقدم السطح الموجه orientable على أنه

سطح لا يحتوى على شريط موبيس (ذى الوجه الواحــد) والسطح غير الموجه على أنه سطح يحتوى على شريط موبيس •

نقــدم أمثلة لسطوح غير موجهة مثل قنينة كلاين **Klein Bottle** والمستوى الاسقاطى **Projective plane** • فبالنسبة لقنينة كلاين يعطى الطالب فرصــة ليعرف أنهــا تتكون من شريطين موبيس أو ككرة مخيط عليها شريطين موبيس • أما بالنسبة للمستوى الاسقاطى فنأخــذه من الوجهة التوبولوجية كقرص مخيط على حرفه شريط موبيس • ونساعد الطالب أن يتعرف عليه حدسيا بالتشــكيل من الثــلاثة أحوال المتكافئة الآتيــة :

١ — خياطة شريط موبيس على سطح كرة •

٢ — ثقب سطح كرة والمطابقة القطرية لحدود الثقب •

٣ — ثقب سطح كرة وخياطة كاب مصلب cross-cap عليها •

(ب) يعطى عدد أويلر x ويعين للسطوح الموجهة وغير الموجهــة ف الأمثلة التى تعرف عليها عن طريق تثليث السطح أو السطح المشكل منه مع مراعاة النقط والأحرف المطابقة ، وليصل الطالب الى أن x (للسطح المقفل المتصــل القابل للتثليث) ف الأحوال التى قابلته $\leq$ ٢ •

(جـ) تعطى السطوح المعيارية الموجهة وغير الموجهة • يعرف السطح المعيارى الموجه ذو ن من الجينات ن $\geqslant$ • بأنه سطح كرة مخيط عليها ن من المقابض • أما الســطح المعيــارى غــير الموجه ذو ن من الجينات ن $\geq$ ١ بأنه سطح كرة مخيط عليها ن من شرائط موبيس •

وتقــدم عمليات القطع والوصل لتبسيط سطح معيارى موجه وغــير موجه • فيبسط بعدد محدود من عمليات القطع الى شكل ســطح كرة ، ويشكل ثانية الى أصــله بعدد محدود من عمليات الوصل • مع توضيح أن عدد عمليات القطع تدل على عدد الجينات ن

٣ • ٤ ــ القسم الرابع : نظرية تصنيف السطوح :

نبين للطالب صعوبة التصنيف فى الهندســـة الاقليدية وامكانيته فى التوبولوجى الهنــدسى • فالســطحان يعتبران متكافئين فى الهندســـة الاقليدية اذا أمكن نقل أحــدهما الى الآخر بتحويل اقليدى ، ومن ثم فان عـــدد السطوح المختلفة يكون كبيرا جــدا لدرجة لا نستطيع وصفها فى قائمـــة • بينمـــا فى التوبولوجى نركز عـــلى خـــواص ذاتيـــة غـــير قياسية metric ، فمثلا لا يهمنا أبعاد التورس بقـــدر ما يهمنا أنه يحتوى على فجوة واحــدة •

وتصنيف السطوح فى التوبولوجى يصير ممكنا بأخــذ الســـطوح المعيارية واثبات أن كل سطح يتكافأ مع أحــد هــذه السطوح المعيارية •

ثم تبسط نظرية تصنيف السطوح التى تقول :

«Any compact surface is either homeomorphic to a sphere or to a connected sum of projective planes».

وذلك باستخدام اللغـــة التى قدمناها للأسطح المعيارية ، وبتجزيىء النظرية الى خمسة نظريات فى نظام بديهى نوضح فيه للطالب عملية تكوين بديهياته من تجريد خـــواص عـــدد أويلر للســـطوح المختلفة والمتكافئة توبولوجيا • ويكون النظام على النحو التالى :

بديهية (١) : اذا كان ط ســـطحا متصـــلا ومقفـــلا وقابلا للتثليث فان x (ط) $\leq$ ٢

بديهية (٢) : اذا كان ط ســـطحا متصـــلا ومقفـــلا وقابلا للتثليث فان ط يكون سطحا مقفلا بسيطا spherelike

x (ط) = ٢ ، ط يتكافا توبولوجيا مع سطح الكرة

نظرية (١) : اذا كان ط ســـطحا متصـــلا ومقفلا وقابلا للتثليث

وكان x (ط) = ٢ فان ط تتكافأ توبولوجيا مع سطح الكرة .

نظرية (٢) : اذا كان ط سطحا متصلا ومقفلا وقابلا للتثليث وموجها وبسط بواسطة عمليات قطع متتالية الى ط$_1$ ، ط$_2$ ، ... ط$_ر$ فان x (ط) $< x$ (ط$_1$) .... $< x$ (ط$_ر$) = ٢

نظرية (٣) : اذا كان ط سطحا متصلا ومقفلا وقابلا للتثليث وغير وبسط بواسطة عمليات قطع متتالية الى ط$_1$، ط$_2$، .... ط$_ر$ فان x (ط) $< x$ (ط$_1$) .... $< x$ (ط$_ر$) = ٢

نظرية (٤) : اذا كان ط سطحا معياريا موجها ذا جينات ن فان ن = ٢ — x (ط)

نظرية (٥) : اذا كان ط سطحا معياريا غير موجه ذا جنيات ن فان ن = ١ — $\frac{1}{2}$ x (ط) . الاثبات والتطبيقات والتمارين ف (٩) ، (١٠) .

ويمكن أن تبسط النظرية أيضا الى إثنى عشر نظرية تعطى بعضها كتمارين (٩) أو يستخدم نظام بديل تكون فيه البديهيتان ١ ، ٢ نظريتين مثبتتين من أربعة نظريات أولية تقوم على فكرة الشكل graph الذى يحوى خية loop أو شكل الشجرة tree (١١) .

٤ — الجزأ الثانى : مدخل تمهيدى للتوبولوجى التحليلى :

تستند المجالات العديدة للتوبولوجى الى أساس يبدأ تقريبا من نفس المعلومات الأساسية للتوبولوجى التحليلى . هذه الأساسيات تعالج بمداخل تمهد للطرق المتميزة لكل مجال . منها ما يمهد للتحليل الحديث (١٢) أو للهندسة التوبولوجية (١٣) أو للتوبولوجى الهندسى (١٤) . مقرر

التوبولوجى فى السنوات الأخيرة يقــدم بمداخل يقترب من أحــد هــذه المداخل ويعالج بأسلوب رســمى يؤدى الى ســلبيات أشرنا اليهــا فى المقدمة ، واقترحنا لتفاديها مدخلا تمهيديا فى الســنوات الأولى • يتميز هــذا المدخل بطابع هندسى بمعنى أنه يستخدم أمثلة فى الهندسة ووسائل ونماذج هندســية من الفراغات الاقليــدية المألوفة وبعض ما قــدم فى الجــزء الأول ، كدوافع لاثارة أفكار التوبولوجى أو كتطبيقات عليهــا • وفيما يلى نعطى فكرة سريعة توضــح تقــديم بعض الأفكار الرئيسية فى هــذا المدخل •

٤ • ١ ــ تقــديم الفراغات التوبولوجية والمفاهيم الأساسية المرتبطة :

عن طريق الفتــرة المفتوحة فى ح^{١} وما يناظرها من قرص مفتــوح فى ح^{٢} وكرة مجسمة مفتوحة فى ح^{٣} نساعد الطالب ليصــل الى مفهــوم الكرة المفتوحة open ball وبتجريده يصــل الى مفهــوم الفئــة المفتوحة open set • ثم تجرد الفئات المفتوحة وخواصها فى هــذه الفراغات الاقليدية بحيث لا تعتمد على القياس أى نحررها من الأعــداد الحقيقية• ثم تعرف على فئــة من النقط ، ليست بالضرورة نقطا هندسية• وبذلك يصل الطالب الى الفراغ التوبولوجى المجرد •

وبطريقة مماثلة تقــدم المفاهيم الأساســية كالجــوار ، وداخلية وخارجيــة وحــدود وانغــلاق closure فئة فى هــــذا الفــراغ والقاعــدة basis ، •••• وذلك بأسلوب حدسى بالاستعانة بأشكال هندسية فى ح^{١} ، ح^{٢} ، ح^{٣} والصورة الملموسة للفئة المفتوحة ككرة مفتوحة أو اتحادات لكرات مفتوحة •

وكذلك بالنســبة لتقــديم الفراغ الجزئى subspace نستخدم أشــكالا وسطوحا هندســية كفئــات جزئية من ح^{١} ، ح^{٢} ، ح^{٣} ، ونكون التوبولوجى النسبى relative من تقاطع الفئات المفتوحة بصــورتها

الملموسة مع هــذه الأشـــكال لتكوين فراغات جزئيـــة وبالتالى فراغات توبولوجية جــديدة •

فمثلا نعتبر سطح الكرة فراغا توبولوجيا على أساس أن التوبولوجى هو فصـــل الطاقيات المفتوحة وهى عبارة عن تقاطع الكرات المجســمة المفتوحة فى ح^{٣} مع سطح الكرة • هنا الطاقية المفتوحة فئـــة مفتوحة على سطح الكرة ولكنها ليست فئـــة مفتوحة فى ح^{٣} •

ويقــــدم التوبولوجى المطابق على أساس تشكيل الأشكال • فمثلا عن طريق لصق طرفى قطعة من السلك يصل الطالب الى التوبولوجى المطابق المعين بالدالة التى حولت القطعة المستقيمة الى دائرة : أى د (β) = (جتا β ، جا β) التى تحول القطعة المســتقيمة [٠ ، ٢ ط] الى الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١ •

أما الهوموامورفيزم فيثار عن طريق الاستمرار continuity بلغـــة الفئات المفتوحة والصـــورة الحدســـية له ، كدالة تناظر أحادى مستمرة ومعكوسها دالة مستمرة • وتعطى أمثلة له توضـــح الفراغات التوبولوجية المتكافئة والصورة الهندسية لهـــا •

مثلا د (س) = $\frac{٢ س - ١}{س (س - ١)}$ توضـــح أن الفتـــرة ــ الفـــراغ التوبولوجى ــ (صفر ، ١) تكافىء توبولوجيا ح^{١} •

، د (س) = ظا $\frac{ط}{٢}$ س توضح أن (ــ ١ ، ١) تكافىء توبولوجيا ح^{١}

د (س) = أ (ا ــ س) + ب س توضـــــح أن (٠ ، ١) تكافىء توبولوجيا (أ ، ب) • وكذلك دالة الاسقاط المركزى التى تنقل نصـــف دائرة بدون نهايتها الى ح^{١} ، وطاقية مفتوحة أو قرص مفتوح الى ح^{٢} •

ومنها نعتبر مثلا ان الطاقية المفتوحة أو القرص المفتوح نماذج توبولوجية للمستوى الاقليدى • ثم تقـدم الخواص التوبولوجية على أنها لا متغيرات تحت الهوموامورفيزم • مع التشويق بفكرة هندسة ورقة المطاط • فمثلا خاصـية أن للدائرة داخل وخارج لا تتغير مع تحوير شكل الدائرة هى خواص توبولوجية • وكذلك اذا أخـذنا نقطة واحـدة من الدائرة فالمتبقى قطعة واحـدة هى خاصية توبولوجية •

ثم نوضح أن الخاصية التوبولوجية هى التى توصـف عن طريق الفئات المفتوحة التى تعتبر العناصر الرئيسية فى الفراغ التوبولوجى • ومن ثم يمكن توضيح هـذه الخواص بالاستعانة بالصورة الملموسة للفئة المفتـوحة فى ح^{1} ، ح^{2} ، ح^{3} ، والنماذج التوبولوجية لهـذه الفراغات ، والفراغات الجزئية منها المثلة فى الأشكال الهندسية والسطوح المختلفة •

قـد تكون هـذه الخواص متعلقة بفئات فى الفراغ التوبولوجى كأن تكون الفئـة مفتوحة أو مقفولة ••• ، أو متعلقة بنقط الفراغ كأن تكون النقطة داخلية أو خارجية ••• ، أو متعلقة بنوع الفراغ نفسه كأن يكون الفراغ ها وسد ورف أو يكون منضغطا compact أو متصلا •••• فمثلا يصل الطالب حدسيا أن ح^{1} فراغ غير منضغط ، وهـذا ينقله الى أن النموذج التوبولوجي له ، وهو فترة مفتوحة مهما صغرت ، هى أيضـا فراغ غير منضغط وكذلك القرص المفتوح أو الطاقية المفتوحة هى فراغات غير منضغطة لأنها نماذج توبولوجية للفراغ ح^{2} غير المنضغط •

وعلى هـذا المنـوال تقـدم المفاهيم الأساسية الأخرى بالاستعانة بأمثلة هندسية ليصل اليها الطالب حدسيا ولتصير ذات معنى قبل معالجتها رسـميا •

المراجـــــــــع :

١ — محمد الغزى : « منهج الرياضيات بكليات التربية » — اعمال وتوصيات مؤتمر تعليم الرياضيات ما قبل الجامعة ، القاهرة ١٩٨١ .

2. H. Freudenthal; «Mathematics as an Educational Task» Dordcecht-Holland, 1973.

3. T. Shibata : «The Role of Axioms in Contemporary Mathematics and in Mathematical Education» In A. Howson : «Developments in Mathematical Education» Cambridge Univ. Press, 1973.

4. N. Khedre : «An Analysis of the Axiomatic Process Developed by Prospective Teachers of Mathematics in Egypt».

مجلة كليـــة التربية ج . عين شمس ١٩٨٣ — البحث السابع هنـــا .

5. W. Shibagaki : «A Course to be Given to College Preparatory Students or to Freshman Students», JSME, Special Isssue, 1971.

6. T. Shibata : «Geometry in the Elementary Shool», JSME Special Issue, 1971.

7. T. Kawagauoni : «Training of Mathematics Teachers in Japan», JSME Special Issue, 1971.

8. C. Parkinson : «How to Take a History Course Without Yauning», IEEE Students Journal, 1968.

٩ — محمود عبد العليم خليل ربيع : « تبسيط نظرية تصنيف السطوح ومبادئها الاساسية لتلميذ المرحلة الثانوية » رسالة ماجستير — كلية التربية ج . عين شمس ١٩٨٢ .

10. W. Massey : «Algebraic Topology - An Introduction», Harcourt, Brace & World Inc., 1967.

11. E. Zeeman : «An Introduction to Topology. The Classification Theorem for surfaces», Mathematics Institute. University of Warwick, Conventry, England.

12. G. Simmons : «Introduction to Topology and Modern Analysis» McGraw - Hill, 1963.

13. I. R. Porteous : «Topological Geometry», Van Nostrand Reinhold Comp., London, 1969.

14. R. Brown : «Elements of Modern Topology» McGraw-Hill, 1968.

A Suggested Preparatory Course in Geometry for First Years of Colleges of Education

Dr. Nazla H. A. Khedre, Faculty of Education
Ain Shams University

. . . .

Abstract

The present paper aims at suggesting a prepatory course of a new form of geometry. It is designed to include two simplified approaches; one of geometric topology and the other of general topology to suit first-years, colleges of education - students. This is done to foster geometric intuition, appreciation and true understanding. The first approch includes : historical introduction - surface (2 - manifold), orientation and standard surfaces - the classification theorem for surfaces. The second approach includes : intr-oducing topological spaces and their fundamentals, with a geometric flavour, using models in A1, R2, R3, to motivate the ideas.