الفصل الخامس

الدالة كمفهوم رياضى ، وبعض جوانب تطبيقاتها العملية

★ تمهيـــد

★ الدالة كمفهوم رياضى .

★ الدالة كقيمة تربوية.

★ تطبيقات الدالة فى بعض ميادين المعرفة .

★ دور الدالة فى تطويـــر بعـض المفاهيـــم النظرية والعملية .

★ المراجـــع .

تمهيـــد :

لقد أطلق على الرياضيات لقب « ملكة العلوم » ، وذلك على أساس أن :

* الرياضيات هى أكـثر العلوم دقة ، ويقينا، وعمـومية، واكتفاء ذاتيـاً، وإتصافاً بالعقلية الخالصة.

* تمثل الشكل المثالـى الذى يجب أن تتجه إليـه كل المعرفة العلمـية، أو على أقل تقـدير، تكـون المـفاهـيم التى تشكلهـا ضـرورية للنمـو الكـامل لفـروع العلم الأخرى.

* حيث إن كمال الـنظرية العلمية فى التعبيـر عنها بصيغة رياضيـة، فبذلك تكون الرياضيات هى « لغة العلم» فى ذاتها . [١]

للأسباب السابقة ، كانت الرياضيات ـ وما تزال ـ مناط الثقة واليقين عند معظم المفكرين. كما، أنها تحتل مكاناً متميزاً بين العلوم الخاصة.

ولقد أيد « راسل » ما تقدم بقوله : « الرياضيات تحـوى جمالاً رفيعاً ، جمالاً بـارداً لا يضـحـك ـ كـجـمـال النحت ـ ولا يلجـأ إلـى أى جـانب من جـوانب طبيـعتنـا الضعـيفـة، ولا إلـى الزخـارف الزاهيـة للـتصويـر والموسـيقـى ، ومع ذلك فـهـو جمـال خـالص رفيـــع قـــادر علـى الإتقان الدقـيق ، مثل مـا يمكن لأعظم فن أن يكـون، فالـروح الحقيقيـة للنشوة، والإطـراء ومعنـى الوجـود . . . كـل ذلك يكـون موجــودا فـى الرياضيـات بدقـة وبيقـين لا يقل عن وجوده فى الشعر » [٢].

ولكن، لسوء الحظ، لم يستطع كثير من الناس أن يتعلموا تقدير الجمال الحقيقى، والقوة فى الرياضيات، إذ اعتبروها أثناء تعلمهم مجرد نظام فنى، أقل قدر منه لازم للحساب أو التعامل اليومى بين الأفراد . ومن ناحية أخرى، يحتاج المهندسون والعلماء، والمتخصصون إلى قدر أعظم من ذلك النظام. حقيقةً، يفشل غالبية الناس فى أن يروا فى الرياضيات أكثر من أداة، تتمثل فى عملية استخدام للأرقام والحروف والرسوم والقوانين للوصول إلى إجابات للمشكلات.
«ومثل هذه الاتجاهات هى نتيجة التعليم الخاطئ للرياضيات، ونتيجة النظرة السطحية لوظيفتها وعدم الاهتمام بالقيم الإنسانية الأساسية التى تتيحها دراسة الرياضيات.

فكل فرد متعلم يجب أن يكون على علم بالرياضيات على أنها أعظم ما حققته الروح الإنسانية، ويجب ألا يفقد الاستمتاع بمباهج فهم العمل الرياضى فى حقيقته بطريقة أساسية صحيحة» [٣].

وحيث إن الدالة هو أخد موضوعات مادة الرياضيات، فإن ما سبق ذكره يندرج بالضرورة عليها أيضا. ومن هنا تظهر أهمية دراسة معنى الدالة كمفهوم رياضى ، وكقيمة تربوى، وبذا يمكن إدراك القيم الأساسية التى تتيحها دراسة الدالة . أيضا، من المهم دراسة بعض تطبيقات الدالة فى بعض ميادين المعرفة المختلفة، ودراسة دور الدالة فى تطوير بعض المفاهيم فى علم الرياضيات نفسه، وفى العلوم الأخرى سواء أكانت طبيعية، أم انسانية ، أم اجتماعية ، أم نفسية، وبذلك يستطيع الفرد أن يدرك بسهولة أن الدالة من أعظم ما حققته الروح الإنسانية، كما يجد متعة وسروراً بسبب استمتاعه بمباهج فهم الدالة بطريقة سليمة، على أساس أن الدالة كعمل رياضى ليست مجرد تعريفاً، أو قاعدة تستخدم فى حل بعض المسائل، وإنما الأمر يتعدى ذلك بكثير ، إذ إن دراسة الدالة بمثابة مصدر تربوى أساسى .

بنـــد (١):

الدالة كمفهوم رياضى:

فيما يلى تعريف الدالة كمفـهوم رياضى من وجهة نظر كل من المنهج التقليدى والمنهج الحـديث فى الرياضيـات. أيضـا ، فيـما يلى إشـارة سريعـة إلى الدوال الصريحـة، والدوال الضمنيـة، والدوال : الجبـرية وغير الجـبرية، لمعـرفة التطور التدريجى الذى حدث فى المفهوم العام للدالة.

بنـد (١. ١):

الدالة كمفهوم رياضى من وجهة نظر المنهج التقليدى فى الرياضيات[٤] :

يقال لكمية متـغيرة إنها دالة لكمية متغيرة أخـرى ، إذا أمكن إيجاد قيمة الدالة عندما تأخذ الكمـية الثانية قيـمة معينة ثابتة. وتمييـزا لهذين المتغيرين، يقـال لهما المتغير التابع والمتغير المستقل على الترتيب .

فإذا رمزنا للمتغير المستقل س ، وللمتغير التابع ص، فيقال إن ص دالة للمتغير س ، وتكتب في الصورة : ص= د (س).

فمثلا : حجم الكرة (ح) الـتى نصف قطرها (نـق)، يعبر عنه فى الصورة: ح $= \frac{٤}{٣}$ طـ نـق^{٣} (حيث طـ النسبة التقريبية) .

والمعادلة السابقة، تكتب فى صورة دالة على النحو : ح = د (نـق).

ولا يقتصر الأمر فى الـدالة على وجود متغير مستقـل واحد فقط، إذ قد يوجد متغيران أو ثلاثة متغيرات، أو أكثر من ذلك.

فمـثلا : حجم الأسطـوانة (ح) التى نصف قطر قاعدتهـا (نـق) ، وارتفاعـها (ع)، يعبر عنه فى الصورة:

ح = طـ نق ٢ .ع (حيث طـ النسـبة التقريبية) .

والمعادلة السابقة ، تكتب فى صورة دالة على النحو : ح = د (نق ، ع).

كذلك : حـجم متـوازى المستطيلات (ح) الـذى أبعاده ، س ، ص ، ع على الترتيب ، يعبر عنه فى الصورة.

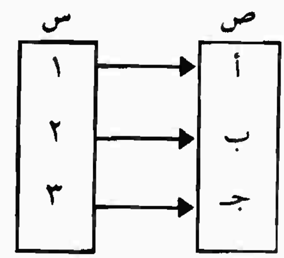
ح = س × ص × ع.

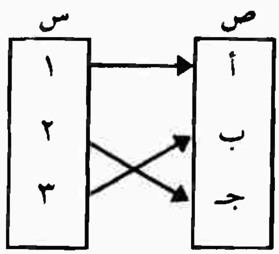
والمعادلة السابقة . تكتب فى صورة دالة على النحو : ح = د (س ،ص ، ع)

بنـد (د ٢):

الدالة كمفهوم رياضى من وجهة نظر المنهج الحديث فى الرياضيات[٥]:

الدالة عبارة عن عـلاقة يشترط فيـها أن يكون لكل قيمـة من قيم س (عناصر النطاق) قيـمة واحدة، وواحـدة فقط من قيم ص (عناصـر المدى) مناظرة لها ، كما فى الشكلين التاليين:





وعلى ذلك يمكن تعريف الدالة على أنها فئة من الثنائيات المرتبة التى يكون فيها لكل عنصـر من فئـة النطاق يوجد عنصـر واحد ـ وواحد فـقط ـ مناظر من فـئة المدى.

وفى حدود التعريف السابق تتكون الدالة من :

* قاعدة : وهى التى تعبر عن العلاقة بين المتغيرين اللذين تتضمنهما الدالة.

* نطاق : وهو فئة المـركبات السينية لعنـاصر الدالة (القيم التى نعوض بهـا عما يسمى بالمتغير المستقل) .

* مــدى : وهو فئة المركـبات الصادية لعناصر الدالة (القـيم التى نعوض بها عما يسمى بالمتغير التابع) .

بنـــد (١. ٣):

الدوال الصريحة ، والدوال الضمنية[٦] :

يقال للدالة أنها صريحة للمـتغير س إذا وقعت فى طرف، ودالة س فى الطرف الآخر .

مثال ذلك :

ص = س^{٢} + ٢ س − ١ .

ص = س^{٢} + لو س .

ص = حا س + ظا$^{-١}$ س

أما إذا كانــت س ، ص داخلتين معا فى معـادلة بحيث لا تقع ص فى طرف، ودالة س فى الطرف الآخر، سميت الدالة فى هذه الحالة دالة ضمنية (*) .

مثال ذلك :

س ص + ٤ س + ٥ ص + ٦ = ٠ .

ويمكن أيضا تحـويل الدالة الضمنية إلى دالة صـريحة(**) . فإذا كـتبنا المعـادلة السابقة على الصورة :

$$ص = \frac{٤ \text{ س} + ٦}{\text{س} + ٥}$$

أصبحت ص دالة صريحة فى س .

بند (١. ٤):

الدوال الجبرية وغير الجبريـة [٧]:

الدالة الجبـرية الصريحة هى مـا تكونت من إجراء عـدد محدود من عـمليات

(*) احيـانًا ، قد تكون العلاقـة بين س،ص لا تمثل دالة حسب المفهـوم السابق؛ إذ لا توجد قـيمة وحـيدة لـ «ص» لكل قيمة لـ «س» ، كما هو الحال فى المثالين: س^{٢}ص^{٢}=١ ، س^{٢}+ص^{٢}=١

(**) ليس فى جميع الأحوال، كما فى المثال : ص حاص = س+١

الجمع والضرب والطرح والقسمة ، واستخدام الجذور الصحيحة على المتغير س مع مجموعة من الكميات الثابتة .

وتتضمن الأنواع التالية :

دوال جذرية صحيحة أو كثيرات حدود :

وهى التى تكون العمليات الداخلة فيها هى عمليات الجمع والطرح والضرب مثال ذلك :

$$س^{٤} - ٨س^{٣} + ٣\,س^{٢} - ٢\,س + ٥$$

ونلاحظ أن الأسس جميعها أعداد صحيحة موجبة :

والصورة العامة لكثيرات الحدود ، هى :

$$أ_{.}\,س^{ن} + أ_{١}\,س^{ن-١} + أ_{٢}\,س^{ن-٢} + \cdots + أ_{ن-١}\,س + أ_{ن}$$

حيث ن عدد صحيح موجب ، والمعاملات ثوابت، $أ_{.} \neq$ الصفر

دوال جذريـة :

وهى ما كانت العمليات الداخلة فيها هى عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة واستخدام الجذور الصحيحة. مثال ذلك :

$$\sqrt{س^{٢} + ٦\,س - ٤} \quad ، \quad \frac{\sqrt{س^{٢} + ٢} - \sqrt{٢س^{٣} + ٣}}{\sqrt{س^{٢} - ٤}}$$

أما الدوال الجبرية الضمنية ، فهى ما كانت تحقق معادلة على الصورة :

$$د\,(س)\,.\,ص^{ن} + د_{١}\,(س)\,.\,ص^{ن-١} + د_{٢}\,(س)\,.\,ص^{ن-٢} + \cdots + د_{ن}\,(س) = صفر$$

حيث :

ن عدد صحيح موجب ، $د_{.}\,(س)$ ، $د_{١}\,(س)$ ، $د_{٢}\,(س)$ ، .... $د_{ن}(س)$ هى كثيرات حدود فى س.

وجميع الدوال الأخرى التى لا يسرى عليها تعريف الدوال الجبرية تسمى دوال غير جبرية .

ومثال ذلك :

الدوال الأسيـــــة : $هـ^{س}$.

الدوال اللوغارتمية : لــو س .

الدوال المثلثيـــــة : حا س ، $حا^{-1}$ س .

بنـــد (١ ـ ٥):

التطـور فـى مفهـوم الدالــة [٨]:

لقد حدث تطور تدريجى فى المفهوم العام للدالة ، وذلك على النحو التالى :

- الدالة الجبرية هى الدالة التى استخدمت أولا .
- أدت دراسة حساب المثلثات إلى ظهور الدوال اللوغارتمية .
- كان التفاضل والتكامل من العوامل التى ألقت الضوء على الدالة اللوغاريتمية ، ومعكوستها الدالة الأسية .
- أدت دراسة بعض المشاكل الفيزيائية إلى دراسة : الدوال، والتكاملات الناقصة، ودوال أخرى مرتبطة بمتسلسلات فورير **(Fourier Series)**.

ولقـد أدت الخبرة بـالدوال إلى معـرفة أنه ليس من الضـرورى أن يكون للدالة مشتقة، ولا يجب حتى أن تكون متصلة . فعلى سبيل المثال، الدالة ص $=\frac{١}{س}$ دالة غير متصلة عند س = صفر (أى أن للدالة نقطة انفصال عند س = .)

كذلك الدالة $\frac{٥}{س-٢}$ غير متصلة عند س = ٢ . أيضا : الدالة ١٠ $س^{٦}$ - ١٢ $س^{٥}$ + ١٥$س^{٤}$ - ٢٠ $س^{٣}$ + ٢٠ لها نهاية صغرى فقط عند س = ١ ، ولا يوجد لها نهايات عظمى أو صغرى أخرى .

ولقد ظهرت حالات خـاصة من الدالة تعرف بالداليات **Functionals**، وهـى

الحالات التى يكون فيها المتغير المستقل (النطاق) عبارة عن فئات جزئية من الفراغ (وليست أعدادا)، ويكون المتغير التابع (المدى) أعدادا . وأمثلة ذلك المقاييس التى تعبر عن الطول والمساحة والحجم، حيث إننا نعين فى كل حالة عددا لفئة من النقاط . وهناك فى الفيزياء أمثلة أخرى للداليات مثل الكتلة، والشحنة الكهربائية وغيرها .

بند (٢):

الدالة كقيمة تربوية [٩]:

من بين إسهامات الرياضيات أن نتناول بطريقة منظمة الأشكال الممكنة للاعتماد المتبادل فالعلاقة تحدد بقاعدة، حيث يرتبط شىء أو أكثر بمجموعة مقابلة من الأشياء الأخرى، فالرياضيات تتناول البناء الشكلى لمثل هذه القواعد التي يقوم عليها الارتباط. والدالة، من الطرق الجيدة لإظهار الاعتماد الشكلى المتبادل فى الرياضيات. فالمعادلة ص = د (س) نقول بأن كمية مختارة من (س) تناظر قيمة من (ص)، وأن (ص) تعتمد على س بالطريقة التى تحددها الدالة (د). مثال ذلك أنه إذا كانت د (س) هى (س^{٢})، فالمعادلة تصبح ص = س^{٢}. وهذا معناه أن كل عدد من (ص) يمكن الحصول عليه من عدد من (س) بأن نضرب الأخير فى نفسه. فمجموعة الأعداد (ص) ترتبط بمجموعة الأعداد (س) عن طريق قاعدة من العلاقة توضحها هذه المعادلة، التى توضح بدورها شكل الاعتماد المتبادل بين هاتين المجموعتين. ورغم أن المثال آنف الذكر يطبق على مجموعات الأرقام، إلا أن الأمر لا يقف عند ذلك الحد، وذلك لأن مبدأ الدلالة مبدأ عام. فالعقل الإنسانى فى بحثه عن معنى الأشياء، يكتشف أن الأحداث لا تتم بطريقة عفوية، أو أنها تحدث بطريقة عشوائية فى أغلب الأحيان، ولكن الأحداث تحدث طبقا لقاعدة ما، وترتبط بعضها بالبعض الآخر تبعا لعلاقة ما . وعليه، فإن الأحداث تتم من خلال تنظيمات وعلاقات معينة . إن « رياضيات الدالة » هى نظرية عن

الطرق الممكنة للارتباطات بين الأشياء . ودراسة هذه المادة تجعل الطبيعة الأساسية للمعنى العقلى طبيعة حية .

ولكى نوضح بعداً أكثر فاعلية من البعد السابق، يجدر بنا الحديث عن قوة المفهوم الوظيفى للدالة. فالاعتماد الشكلى المتبادل قد ينتمى إلى العلاقات بين مجموعات موجودة من الأشياء. وقد ينتمى إلى جانب ذلك إلى التغيرات التى تحدث عندما تتعرض الأشياء للتحويل طبقا لقاعدة معينة من العمل . وهكذا تتحول (س) إلى (ص) بإخضاع الأولى للعملية التى تعبر عنها بالدالة (د) . وعلى أساس هذا التفسير ص = د (س) = س^{2}، معناها أن الأعداد (ص) هى نتيجة إيجاد عملية تربيع الأعداد (س) . ويهتم جزء هام من الرياضيات بدراسة مثل هذه التحويلات. والهدف هو تحليل النتيجة التى تحدثها التغيرات التى تكون نتيجة تطبيق قاعدة وظيفية معينة . فالسلوك الذكى فى الحياة يتطلب فهماً لكيفية حدوث التغيرات، والنتائج المترتبة على أعمال معينة. وحيث إن الدالة فى الرياضيات تمدنا بأكثر المعالجات وضوحا وتنظيما للخصائص الشكلية للتحويلات الممكنة، فإن دراسة الدالة تقدم إسهاما فى فهم الذكاء للأمور الإنسانية فهما عميقا.

وهناك بعد ثالث هام، يتمثل فى لغة الرياضيات، إذ إن أهم ما يميز الرياضيات تميزا واضحا استخدامها للغة خاصة، من خلالها يمكن أن تحل الرمرز المجردة محل الكلمات العادية. ويظهر ذلك بصورة واضحة جلية عند الحديث عن الدالة. فالمعادلة ص = د (س) تعنى بالعلاقات الشكلية بين (س) ، (ص) وهى ليست أشياء فردية معينة، بل أشياء مهما تكن فإنها تنطبق عليها هذه العلاقة الوظيفية، واستخدام مثل هذه اللغة الخاصة يحرر الفرد من تحديدات الأشياء الخاصة، ويسمح بحرية العمل فى عالم من التجريدات.

بنـد (٣):

تطبيقات الدالة فى بعض ميادين المعرفة :

نتعرض فيما يلى لبعض تطبيقات الدالة فى بعض ميادين المعرفة المتمثلة فى العلوم الإنسانية، وفى العلوم البحتة :

بنـد (٣. ١):

تطبيقات الدالة فى العلوم الإنسانية :

فيما يلى ، بعض النماذج لتطبيقات الدالة فى العلوم الإنسانية :

فى علم النفس : (١٠)

كتب « تولمان » :

السلوك س هو دالة ما للمثيرات البيئية (أ)، الدافع النفسى (ب) ، مجموع الصفات الموروثة (جـ)، الخبرة السابقة (هـ) ، العمر (و) . ويمكن التعبير عما تقدم فى صورة الدالة :

س = د (أ، ب، جـ، هـ، و) .

ونلاحظ هنا أن المتغير التابع (س)، يعتمد على خمسة متغيرات مستقلة، هى : (أ) ، (ب) ، (جـ)، (هـ)، (و) .

وبالنسبة لموضوع **الأفكار كقوى :**

تصبح الأفكار قوى عندما تقاوم إحداها الأخرى. وهذه المقاومة تحدث عندما تتقابل فكرة أو أكثر متعارضة .

وأبسط القوانين الخاصة بهذا الموضوع هو القانون التالى :

« بينما الجزء الموقوف للفكرة أو للمفهوم، يهمد، فإن الجزء الهامد فى كل لحظة يكون متناسبا مع الجزء غير الهامد » .

وهذا القانون يمكن التعبير عنه رياضيا فى الصورة التالية :

ل = م (١ ـ هـ $^{-ن}$)

حيث :

م = المقدار الكلى الخامد .

ن = الوقت المنقضى أثناء المواجهة (التصادم) .

ل = الجزء الخامد فى كل المفاهيم فى الوقت الذى تشير إليه (ن).

ويمكن التعبير عما تقدم فى صورة الدالة :

ل = د (م ، هـ $^{-ن}$) .

ونلاحظ هنا أن المتغير التابع (ل) ، يعتمد على متغيرين مستقلين، هما (م) ، (هـ $^{-ن}$) .

*** فى علم الاجتماع :** [11]

يمكن كتابة الفرض : « الفقر يؤدى إلى الجريمة » فى صورة الدالة :

جـ = د (ف)، حيث (جـ) تعنى الجريمة ، (ف) تعنى الفقر . وواضح أن المتغير المستقل هو (ف) والمتغير التابع هو (جـ) .

كذلك ، تستخدم الدوال فى نظريات التحليل السلوكى ، والرفاهية الاقتصادية. فمثلا، دالة الرفاهية الاجتماعية تحدد بأنها دالة كبرى بالنسبة لدوال النفع المتعلقة لجميع الأشخاص فى المجتمع . وهذه يعبر عنها فى الصورة :

هـ = هـ (ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ ، . . . . . . ك$_{ن}$).

وفوق ذلك ،فإن كل دالة من دوال النفع هذه هى نفسها دالة ممثلة لمستوى كفاية الفرد متمثلا فى خليط من السلع المعينة ، والخدمات، والنواحى الأخرى الموجودة فى بيئة كل شخص .

ك$_{ج}$ = ك (س$_{١}$، س$_{٢}$، . . .س$_{م}$) ، جـ = ١ ، ٢ . . . . . ن .

*** فى علم الجغرافيا :** [12]

نظرية فون تونن :

وهو أول من حاول ابتكار نظرية علمية تفسر موقع النشاط الاقتصادى . وقد

تمكن من صياغة نظرية تبين الأنماط الزراعية التى تزدهر وتنمو حول المدن والسوق الحضرى، وقد بين (تونن) فى نظريته أن ربح المزارع يعتمد على العلاقة بين المتغيرات الثلاثة التى تعبر عنها المعادلة الآتية :

ر = ق - (ت + ن) .

علماً بأن :

ر هى الربح .

ق هى قيمة السلع المباعة .

ت هى تكاليف الإنتاج مثل العمالة والمعدات والمستلزمات الأخرى .

ن هى تكاليف النقل من المزرعة إلى السوق .

ويمكن التعبير عن القانون السابق فى صورة الدالة :

ر = د (ق ، ت، ن).

ونلاحظ هنا أن المتغير التابع هو (ر) ، يعتمد على ثلاثة متغيرات مستقلة ، هى (ق)، (ت) ، (ن) .

نظرية التفاعل:

وتعبر هذه النظرية عن قوة الارتباطات الاقتصادية بين مكانين يختلفان إختلافاً موجباً طبقا لحجميهما ، وسالباً بالنسبة للمسافة المتداخلة، فكلما كان عدد سكان هذين المكانين كبيراً ، زاد تفاعلهما الاقتصادى معا ، لكن كلما زادت المسافة بينهما قل هذا التفاعل، ويعبر عن هذه النظرية على شكل معادلة على النحو التالى:

$$ت = \frac{ح_{س} \times ح_{ص}}{م}$$

علما بأن :

ت هى التفاعل بين المدينتين .

$ح_{س}$ حجم المدينة س (مقاسة بعدد السكان).

$ح_{ص}$ حجم المدينة ص (مقاسة بعدد السكان).

م طول المسافة بينهما .

ويمكن التعبير عن القانون السابق فى صورة الدالة :

ت = د ($ح_{س}$ ، $ح_{ص}$ ، م)

ونلاحظ أن المتغير (ت) ، هو يعتمد على ثلاثة متغيرات مستقلة ، هى ($ح_{س}$)، ($ح_{ص}$) ، (م) .

فى علم الاقتصاد : [١٣]

من المعروف فى علم الاقتصاد ، أنه توجد علاقة بين الكمية المنتجة من سلعة ما وبين الكميات المستخدمة من عناصر الانتاج ، لإنتاج هذه الكمية من السلعة .

إذا فرضنا أن إنتاج كمية معينة من سلعة ما يحتاج إلى كميات معينة من عنصرين من عناصر الإنتاج، هما : عصر العمل، وعنصر رأس المال، **فإن دالة الإنتاج** فى هذه الحالة تكون على الصورة : ج = د (ع ، ر) حيث تعبر (ج) عن الإنتاج ، وتعبر (ع) عن العمل، وتعبر (ر) عن رأس المال .

إذا كانت كمية رأس المال ثابتة فى الفترة القصيرة ، بينما كمية العمل متغيرة ، فمعنى ذلك أن الكمية المنتجة تكون دالة لكمية العمل فقط . ويمكن وضع الدالة السابقة ، فى هذه الحالة على الصورة ج = ح (ع) .

وإذا كانت (م) تعبر عن متوسط إنتاج وحدة العمل ، فإن :

$$م = \frac{ج}{ع} = \frac{ح\,(ع)}{ع} = ف\,(ع) .$$

أيضاً ، تبعا للنظرية العامة للتوظف والفائدة والنقود لـ « كينز»، يتوقف مقدار الاستهلاك الكلى على حجم الدخل القومى ، فكلما زاد الدخل القومى زاد الاستهلاك الكلى ، وكلما قل الدخل القومى قل الاستهلاك الكلى ، وعلى ذلك يمكن التعبير عن **دالة الاستهلاك** فى الصورة : ك = د (ل) .

حيث :

ك الاستهلاك الكلى .

ل الدخل القومى .

بند (٣. ٢):

تطبيقات الدالة فى العلوم البحتة :

فيما يلى ، بعض النماذج لتطبيقات الدالة فى العلوم البحتة :

(١) إذا وقع غاز تام تحت ضغط فى إناء مع ثبوت درجة حرارته ، فإن الضغط (ض) ، والحجم (ح) يرتبطان بالعلاقة :

ح × ض = ثابت .

فاذا أخذت (ض) قيمة ما ، فإنه يمكن إيجاد (ح) من العلاقة :

$$ح = \frac{ثابت}{ض}$$

وفى هذه الحالة يقال إن المتغير (ح) يعتمد على المتغير (ض) ، ويقال إن (ض) هو المتغير المستقل، (ح) هو المتغير التابع، ويمكن كتابة العلاقة السابقة فى صورة الدالة :

$$ح = د \left(\frac{١}{ض}\right) .$$

أما إذا أخذت (ح) قيمة ما، فإنه يمكن إيجاد (ض) من العلاقة :

$$ض = \frac{ثابت}{ح} .$$

وفى هذه الحالة (ح) هو المتغير المستقل ، (ض) هـو المتغير التابع، ويمكن كتابة العلاقة الأخيرة فى صورة الدالة : ض = د$\left(\frac{١}{ح}\right)$.

(٢) إذا سقط جسم تحـت تأثير الجاذبية الأرضيـة (د) فإن المسافة التى يقـطعها (ف) فى زمن (ن) ، تعطى بالعلاقة الآتية :

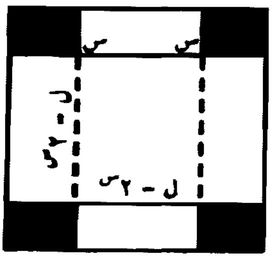
ف = $\frac{١}{٢}$ د ن^{٢} .

المعادلة السابقة تكتب فى صورة دالة على النحو : ف = د (ن) .

(٣) إذا كان لدينا صفيحة مربعة ضلعها ل سم ، أزيل من كل ركن من أركانها مربع صــغير طول ضلعه س سم ، ثم ثنـيت الأطراف لتكون صندوقا مفتـوحا ، فيمكن التعبير عن حجم هذا الصندوق كدالة فى س، وذلك على النحو التالى :

قاعدة الصندوق مربعة ، وطول كل ضلع فيها = ل − ٢س

، إرتفاع الصندوق = س .



إذًا حجم الصندوق (ح) يعطى بالعلاقة :

ح = س (ل ـ ٢ س)^{٢}

∴ د (س) = س (ل ـ ٢ س) ٢ .

بنـد (٤):

دور الدالة فى تطوير بعض المفاهيم النظرية والعملية:

بند ٤ ـ ١:

دور الدالة فى بعض مجالات الرياضيات :

ساعدت الدالة فى إعادة صياغة المسائل والمشكلات الرياضية في صورة بسيطة، يمكن إدراكها بســهولة. وهى بذلك تعنى بطرق تحليل الخبرة وتنظيمـها طبقا لأنماط شكلية معينة . فعلى سبيل المثال، إذا كانت المسألة أو المشكلة الرياضية على النمط التالى :

إذا كان هناك مصنع لإنتاج الملابس الجاهزة بسعر عشرة جنيهات للقطعة الواحدة . فإذا كان المصنع يبيع إنتاجه بالجملة، حيث يعطى ١٠٪ خصما عن الألف قطعة الأولى ، ويزيد الخصم بمعدل ثابت = ٥٪ عن كل ألف تالية ، بشرط ألا يزيد الخصم عن ٥٠٪ من السعر الأساسى مهما كانت جملة المبيعات.[(١٤)]

فى المسألة السابقة ، يكون لكل قطعة ثمن يختلف عن مثيلتها ، وذلك حسب انتمائها لأى ألف من المبيعات . وبالطبع ، قد تكون المسألة السابقة بصياغتها اللفظية غامضة بدرجة ما على أذهان البعض، ولكن يمكن تحليل وتنظيم تلك المسألة بصورة أسهل باستخدام الدالة ، وذلك على النحو التالى

سعر (ن) من القطع بالجنيه = ١٠ن حيث ن < ١٠٠٠

٩ن حيث ن = ١٠٠٠

٨,٥ ن حيث ن = ٢٠٠٠

٨ ن حيث ن = ٣٠٠٠

.

.

.

٥,٥ ن حيث ن = ٨٠٠٠

٥ن حيث ن ≤ ٩٠٠٠

أيضاً ، لعبت الدالة دوراً رئيسيًا فى الانتقال من مرحلة الأعداد إلى مرحلة تجريد هذه الأعداد، وبذلك تتضمن الدالة مظاهر شكلية معينة من الأشياء .

ولقد ساعد ذلك على كتابة كثير من المسائل التى ربما كانت قديما تعرف أو تسمى بالألغاز ، فى صورة رياضية سهلة ، يمكن التعامل معها ، وإيجاد حلها ، تحت شروط معينة فى أغلب الأحوال (وأحيانا قد لا يوجد حل للمعادلة تحت شروط معينة)[(١٥)].

فعلى سبيل المثال، الدالة د (س) = ٢ س^{٢} + س ـ ٦ = صفر هى تعبير عن

المسألة : عدد وضعف مربعه يساوى ٦ ، والدالة السابقة يمكن حلها وإيجاد قيمة العدد المطلوب .

أيضا ، الدالة د (س) = س + $\frac{١}{س}$ − ٢ = صفر هى تعبير عن المسألة : **أوجد** العدد الذى أذا أضيف إليه مقلوبه كان الناتج مساويا «٢».

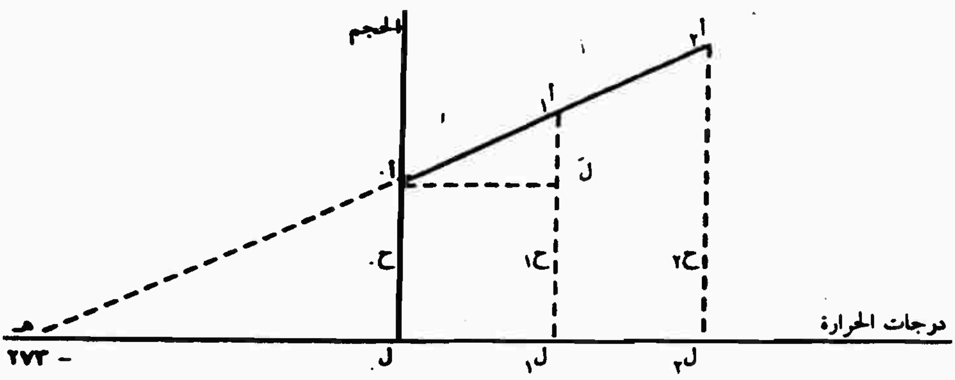
والدالة السابقة ، وإن كان بناؤها وتكوينها أصعب من مثيلتها فى المثال السابق، فإنه يمكن حلها وإيجاد قيمة العدد (فى هذه الحالة العدد = ١) .

كذلك ، الدالة د (س) = س + س^{٢} = صفر هى تعبير عن المسألة : **ما العدد** الموجب الذى إذا أضيف إلى مربعه يكون الناتج = صفر . والدالة السابقة لا يمكن حلها حسب شروط المسألة .

بنـد (٤ ـ ٢):

دور الدالة بعض مجالات العلوم الطبيعية : (١٦)

عند دراسة العلاقة بين حجم كمية كعينة من غاز ودرجة الحرارة عند ثبوت الضغط ، من خلال التجربة . يمكن رسم علاقة بيانية بين درجات الحرارة (المتغيرات المستقلة) ممثلة على المحور الأفقى ، وحجم الهواء المحبوس (المتغيرات التابعة) ممثلا على المحور الرأسى. ويمثل هذه العلاقة خط مستقيم كما فى الشكل التالى:



وعلى الرغم من أن الهدف هنا هو إيجاد العلاقة بين حجم كمية معينة من غاز ودرجة الحرارة عند ثبوت الضغط ، إلا أنه يمكن أيضا من العلاقة البيانية السابقة التى تعبر عن قيم المتغيرات المستقلة (درجات الحرارة) وقيم المتغيرات التابعة المناظرة (الحجم) ، استخلاص المقصود بكل من الصفر المطلق ، ومعامل التمدد الحجمى للغاز عند ضغط ثابت ، على النحو التالى :

(أ) بمد الخط المستقيم الذى يصف علاقة حجم كمية معينة من غاز ودرجة حرارتها على استقامته ليقابل محور الدرجات فى نقطة تقابل ـ ٢٧٣ْم، ويكون حجم الغاز عند هذه الدرجة كما يبدو من الشكل يساوى صفرا. ويطلق على هذه الدرجة اسم (الصفر المطلق) .

(ب) من تشابه المثلثين $\text{أ}_٢\,\text{ل}_٢\,\text{هـ}$ ، $\text{أ}_١\,\text{ل}_١\,\text{هـ}$ ، يكون

$$\frac{\text{أ}_٢\,\text{ل}_٢}{\text{أ}_١\,\text{ل}_١} = \frac{\text{ل}_٢\,\text{هـ}}{\text{ل}_١\,\text{هـ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_٢}{\text{ح}_١} = \frac{٢٧٣ + \text{د}_٢}{٢٧٣ + \text{د}_١} = \frac{\text{ر}_٢}{\text{ر}_١}$$ عند ثبوت الضغط .

$$\therefore \frac{\text{ح}}{\text{ر}} = \text{مقدار ثابت}$$ عند ثبوت الضغط .

$$\therefore \text{ح} \propto \text{ر}$$ عند ثبوت الضغط (قانون شارل) .

(جـ) ومن تشابه المثلثين $\text{أ}_١\,\text{لَ}\,\text{أ}_.$ ، $\text{أ}_.\,\text{ل}_.\,\text{هـ}$ يكون :

$$\frac{\text{أ}_١\,\text{لَ}}{\text{أ}_.\,\text{ل}_.} = \frac{\text{لَ}\,\text{أ}_.}{\text{ل}_.\,\text{هـ}}$$

$$\frac{\text{ح}_١ - \text{ح}_.}{\text{ح}_.} = \frac{\text{د}_١}{٢٧٣}$$ عند ثبوت الضغط.

ولكن $$\frac{\text{ح}_١ - \text{ح}_.}{\text{ح}_. \times \text{د}_١} = \text{جـ}$$

حيث جـ معامل التمدد الحجمى للغاز تحت ضغط ثابت

$$\therefore \quad جـ = \frac{١}{٢٧٣}$$

بنـد (٤. ٣):

دور الدالة فى بعض المجالات الطبيـــة :[١٧]

من المعروف أن العلماء والأطباء حتى الآن لم يستطيـعوا عزل الفيروس المسبب لمرض السرطان. وبالتالى ، لم يتم بعد إخضاع الفيروس للتجريب المعملى لإيجاد العلاج المناسـب له. لذلك قام العلماء والأطـباء بدراسة العـوامل التى يعتـقد أن تكون مسببة له (مثل : التـدخين، الاضطراب العصبى ، تلوث البيئة . . . إلخ) كمتـغيرات مسـتقلة ، ومدى تأثيرها فى الإصـابة بمرض السرطان كمتـغير تابع . وحاليا ، توجـد عدة نماذج رياضية للعلاقة بين تـلك المتغيرات المستقلة ، والمتـغير التابع (مرض السرطان)، لدرجة أننا كثيرا ما نسمع هذه الأيام أن التدخين (مثلا) مسئـول بنسبة معينة عن الإصـابة بالسرطان، وأن الاضطراب العصبى مـسئول هو أيضا بنسبة أخرى عن الإصابة بالسرطان .

بنـد (٤. ٤):

دور الدالة فى بعض مجالات العلوم الإنسانية :

لا تعتمد العلوم الإنسانية عند دراستها لأى ظاهرة من الظواهر الإنسانية ، على الإحصـاءات التقليدية ، وإنما تقـوم دراسة تلك الظواهر الآن على تعـيين العوامل المسببـة للظاهرة (المتغيرات المستقلة)، ومـدى تأثيرها فى الظاهرة نفسها (المتـغير التابع). وعليه ، تسعى العلوم الإنسانية حاليا إلى إيجاد علاقة دالية بين مجموعة المتغيرات المسببة للظاهرة، والظاهرة نفسها .

وكمثال على ما تقدم، إذا تصورنا أن العـوامل التى يمكن أن تكون سببا مباشراً فى ارتكاب الجريمة (ج)، هى: المستوى الاقتصادى (ق)، البيئة الاجتماعية (ب)، التعليم (ت)، النظم واللوائح المعمول بها (ن)، عوامل أخرى (ع)، فيمكن صياغة ذلك باستخدام الدالة على النحو التالى :

ج = د (ق، ب، ت، ن، ع).

ويكون السؤال الذى يتعين على الباحث الإجابة عنه، هو :

ما مدى تأثير كل من ق، ب، ت، ن، ع على ج ؟ .

كذلك ، يمكن تقديم مثال آخر من مجال علم النفس ، فنقول :

يمكن ترجمة المشكلة الإنسانية من صياغتها اللفظية أو الإحصائية المعقدة إلى معادلة، أو مجموعة من المعادلات الرياضية التى تعبر عن مجموعة من المتغيرات المستقلة والتابعة . ففى دراسة موضوعها: « دراسة التنبؤ بمستوى التحصيل المدرسى من خلال علاقته ببعض العوامل لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية»[١٨]، قام أحد الباحثين باشتقاق عديد من المعادلات الخاصة بالتنبؤ بمستوى التحصيل المدرسى، من تلك المعادلات نذكر المعادلتين التاليتين ، كتعضيد وتوضيح للفكرة السابقة :

* استطاع الباحث فى المعادلة التالية أن يتنبأ بالتحصيل المدرسى (ص) لدى أفراد العينة عن طريق استخدام مستوى تعليم الأب (س$_{٢}$)، والدافع إلى الإنجاز (س$_{٣}$) ، والقدرة العقلية العامة (س$_{١٨}$) .

ص = ١٠٦,٩٣٦٥٥ ـ ٠,١١٤٦٣ س$_{٢}$ + ١,٦٨٣٦٧ س$_{٣}$ + ٠,٦٤٠٧٢ س$_{١٨}$

* أضاف الباحث عامل القدرة على التفكير (س$_{٢١}$) إلى العوامل السابقة:

(س$_{٢}$ ، س$_{٣}$، س$_{١٨}$)، فتوصل إلى المعادلة التالية :

ص = ١٠٧,٠٦٢٣١ - ٠,١٤٠٤٢ س$_{٢}$ + ١,٦٨٧٣٠ س$_{٣}$ + ٠,٦٦٤٤٣ س$_{١٨}$ - ٠,١٣٨٢٥ س$_{٢١}$.

(بند (٤. ٥):

دور الدالة فى حل بعض المشكلات العملية :

لا تقتصر إسهامات الدالة على المجالات التى سبق ذكرها ، وإنما يمكن أن يكون

لها توظيف فعـال فى حل بعض المشكلات العملية ، وذلك ما سيـوضحه المثالان التاليان :

المثال الأول :

مخبـز لإنتاج الكعك ، ينتج نوعين من الكعك، يبيع الصنـف الأول بخمسين جنيهـا للدستة ، ويبيع الصنف الثـانى بسبعين جنيهـاً للدستة ، فإذا كـانت تكلفة الدستة من الصنف الأول ثلاثين جنيهاً ، وتكـلفة الدستة من الصنف الثانى أربعين جنيهاً، وإذا كـان المخبز ليست لديه مشاكل فى بـيع كل الإنتاج ، فتكون المشكلة التى تواجه إدارة المخبز على النحو التالى :

نظرا لنقص العمالة ، فإن المخبز يعمل عشر ساعات فقط ، كذلك ، فإن سعة الفرن ٨٠ دستـة فقط ، ويستغـرق تجهيز الدسـتة من الصنف الأول زمنا = ٠,١ ساعة ، ومن الصنف الثانى زمنا = ٠,٢ ساعة .

ويلـزم الصنفـــان وقتـا واحـدا فـى التـسوية داخـل الفرن. ويكون السـؤال المطـروح علـى الإدارة فـى حـدود سـاعـات العـمـل المتـاحـة ، وسـعـة الفـرن المحدودة ، هو : ما الأعداد التى يمكن إنتاجهـا من كل صنف لتحقيق أقصى ربح ممكن؟

ف$_2$ = ٠,٢ س$_1$ + ٠,٣ س$_2$

مـع مراعـاة ما يلـى :

س$_1$ + ٢ س$_2$ ≥ ١٠٠

، س$_1$ + س$_2$ ≥ ٨٠

، س$_1$ ≤ صفر

، س$_2$ ≤ صفر

حيث :

$س_1$ العدد المنتج من الصنف الأول.

، $س_2$ العدد المنتج من الصنف الثانى .

، ف هو العائد .

، $ف_2$ هو أقصى عائد يمكن تحقيقه .

إن الإجابة عن المشكلة السابقة هى :

$س_1$ = ٦٠ ، $س_2$ = ٢٠

وبذا يحقق المخبز أكبر ربح ممكن (١٨ جنيهًا) .

المثال الثانى : مصنع يقوم بإنتاج نوعين من السلع ، النوع الأول يحتاج إلى ٤ وحدات من المادة الأولية، ثلاثة وحدات عمل، وساعتين على آلة معينة .

والنوع الثانى يحتاج إلى ثلاث وحدات من المادة الأولية ، ٦ وحدات عمل، وساعة واحدة على الآلة. فاذا كان ربح المشروع من إنتاج الوحدة من النوع الأول = ٢ جنيه ، ومن النوع الثانى = ٣ جنيهات ، فالمطلوب تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل من السلعتين لتحقيق أكبر ربح ممكن ، وذلك بالقيود التالية:

كمية المادة الأولية = ٧١ وحدة.

وحدات العمل = ١١٧ وحدة .

ساعات العمل المتاحة على الآلة = ٣٠ ساعة عمل . [١٩]

تتعلق هذه المشكلة بمضاعفة الأرباح، ودالة الربح المطلوب تحقيق حدها الأقصى:

٢ س +٣ ص = د

وذلك بفرض أن عدد الوحدات المنتجة من السلع الأولى الأولى س ، ومن السلعة الثانية ص ، وذلك طبقا للقيود التالية :

المادة الأولية : ٤ س + ٣ ص ≥ ٧١.

وحدات العمل : ٣ س + ٦ ص ≥ ١١٧.

ساعات العمل على الآلة : ٢س + ص ≥ ٣٠ .

وبذا يحقق المشروع أقصى ربح وقدره ٦١ جنيـها ، عندما ينتج خمس وحدات من النوع الأول ، ١٧ وحدة من النوع الثانى .

ويبرز المثـالان السـابقان إسـهام الدالة فى حل بعض المشكلات العـملية إذ دون الدالة يكون من الصعب ، وأحيانا يكون من المسـتحيل ، حل مثل هذه المشكلات العملية ، سواء أكانت هذه المشكلات على المستـوى الفردى أم المستوى الجمعى ، إذ دون الدالة سيكون البديل هو افتـراضات عشوائية غير منطقيـة ، غالباً لا تقود إلى الحل الصحيح .

المراجـــع

(١) فيليب هـ . فـينكس ، ترجمة مـحمد لبيب النجـيحى، **فلسـفـة التـربيـة**، القاهرة: دار النهضة العربية، ١٩٦٥ ص ص ٥٤٩ ـ ٥٥٢ .

(٢) مجدى عزيز إبراهيم، **الرياضيات واستخداماتها فى العلوم الإنسانية والنفسية والاجتماعية**، القاهرة : مكتبة الأنجلو المصرية ، ١٩٨٧ .

(٣) فيليب هـ . فينكس ، مرجع سابق .

(٤) ماهر نـصيف ، **مبادئ الرياضة البحتة (الجزء الأول)** ، جامعـة أسيوط : سلسلة الكتب الدراسية (رقم ٥٥) ، ١٩٦٧، ص ص ١٠٠ ـ ١٠١ .

(٥) معصومة كاظم، وآخرون ، **أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة** ، الطبعة الثانية ، القاهرة : دار المعارف ، ١٩٧٠ ، ص ص ٧٩ ـ ٨٠ .

(٦) ماهر نصيف ، مرجع سابق .

(٧) محمود على محمد ، مدحت عبدالله حميدة ، **أساسيات الرياضة**، جامعة المنصورة : كلية الزراعة ، ١٩٨٤ ، ص ص ٦ ـ ١٠ .

(٨) معصومة كاظم، وآخرون ، مرجع سابق ، ص ٢٢ .

(٩) فيليب هـ . فينكس ، مرجع سابق .

(10) Miller, George A., **Mathematics and Psychology**, N. Y: Willy, 1964.

(11) Holland. J. and Dteuer, M. D., **Mathematical Sociology**, U.S.A 1970, PP 1 - 5.

(١٢) محمـد على الفرا، **مناهج البحث فى الجغرافيا بالوسائل الكمية**، الطبـعة الثانية ، الكويت : وكالة المطبوعات ، ١٩٧٥ .

(١٣) عبدالله عويس ، **رياضيات الاقتصاد**، القاهرة: مكتبة جامعة عين شمس، ١٩٧٥ .

(14) Theodore, Chris A., Applied Mathematics: An Introduction, Homewood, Illinois: Richard. Irwin, Inc, 1965, PP 300 - 304.

(١٥) ناثان أ. كورت ، ترجمة عبد الحميد لطفى ، **الرياضيات فى اللهو والجد** ، القاهرة : دار نهضة مصر ، ١٩٦٥ ، ص ٢٨٠ .

(١٦) جامعة عين شـمس (مركز تطوير العلوم)، وحدة الخواص الحرارية للمادة (كتاب الطالب) ، ١٩٧٦ ، ص ص ٢٦ ـ ٢٧ .

(١٧) سمير صلاح الدين شعبـان ، « الحاسب الإلكترونى وتشخيص السرطان» ، **مجلة العربى** ، أكتوبر ١٩٨٦ ، ص ص ١٢٩ ـ ١٣٤ .

(١٨) محمد عبد القادر عبد الغفار ، « دراسة التنبؤ بمستوى التحصيل المدرسى من خلال علاقته ببعض العوامل لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية » ، رسالة دكتوراه غير منشورة ، كلية التربية (قسم علم النفس): جامعة المنصورة ، ١٩٧٩ ، ص ١٣٤ .

(19) Theodore, Chris A., Op. Cit.