2

مبرهنات بناخ - ستاينهاوس
و البيان المغلق.
علاقات التعامد.
مؤثرات غير محدودة.
فكرة القرين.
تمييز المؤثرات الغامرة

1.2. تذكير بتوطئة بير

تعتبر التوطئة التالية نتيجة كلاسيكية تلعب دورا أساسيا في إثباتات الفصل 2.

توطئة 1.2. **(** بير، Baire **)**. ـ **ليكن** X **فضاء متريا تاما** (Complete metric space) .
لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ **متتالية من مجموعات مغلقة** (Closed sets) . **نفرض أن**

$$Int\, X_n = \emptyset \qquad \text{لكل} \qquad n \geqslant 1 \, .$$

إذن

$$Int\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\Big) = \emptyset.$$

ملاحظة 1. ـ تستعمل توطئة بير عادة على الشكل الآتي. ليكن X فضاء متريا تاما غير خال. لتكن $(X_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية من مجموعات مغلقة بحيث أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$. إذن يوجد n_0 بحيث $Int\, X_{n_0} \neq \emptyset$.

<u>إثبات</u>. ـ نضع $O_n = C^{X_n}$ بحيث تكون المجموعة O_n مفتوحة و كثيفة. المقصود هو إثبات أن $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ مجموعة كثيفة في X .

لتكن ω مجموعة مفتوحة غير خالية من X ؛ سوف نبرهن بأن $\omega \frown G \neq \emptyset$. نضع

$$B(x,r) = \{\, y \in X; \quad d(y,x) < r \,\}.$$

نختار كيفيا $x_0 \in \omega$ و $r_0 > 0$ بحيث

$$\overline{B}(x_0,r_0) \subset \omega.$$

نختار بعد ذلك $x_1 \in B(x_0,r_0) \frown O_1$ و $r_1 > 0$ بحيث

$$\begin{cases} \overline{B}(x_1,r_1) \subset B(x_0,r_0) \frown O_1 \\[2ex] 0 < r_1 < \dfrac{r_0}{2} \end{cases}$$

و هذا ممكن بما أن O_1 مفتوحة و كثيفة. و هكذا تتابعا، ننشئ بالاستقراء induction متتاليتين (x_n) و (r_n) بحيث

$$\begin{cases} \overline{B}(x_{n+1},r_{n+1}) \subset B(x_n,r_n) \frown O_{n+1} \qquad \forall n \geqslant 0 \\[2ex] 0 < r_{n+1} < \dfrac{r_n}{2}. \end{cases}$$

يستنتج بأن (x_n) متتالية كوشي Cauchy ؛ ليكن $x_n \longrightarrow l$. بما أن $x_{n+p} \in B(x_n,r_n)$ لكل $n \geqslant 0$ و لكل $p \geqslant 0$ ، نحصل عند النهاية (عندما $p \longrightarrow \infty$):

$$l \in \overline{B}(x_n,r_n) \qquad \forall n \geqslant 0.$$

و بالخصوص $l \in \omega \frown G$. □

2.2. مبرهنة بناخ - ستاينهاوس

ترميز. ـ ليكن E و F فضاءين متجهين نظيميين. نرمز بـ $\mathcal{L}(E,F)$ لفضاء المؤثرات الخطية المستمرة من E إلى F المزود بالنظيم

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}} \|Tx\|.$$

نضع $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.

• **مبرهنة** 1.2. **(بناخ - ستاينهاوس** (Banach – Steinhaus **) ـ ليكن** E **و** F **فضاءين لبناخ. لتكن** $(T_i)_{i\in I}$ **عائلة (ليست بالضرورة قابلة للعد) من المؤثرات الخطية المستمرة من** E **إلى** F **. نفرض أن**

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \qquad \forall x \in E. \tag{1}$$

إذن

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty. \tag{2}$$

بعبارة أخرى، يوجد ثابت c **بحيث**

$$\|T_i x\| \leqslant c\|x\| \qquad \forall x\in E, \quad \forall i \in I.$$

ملاحظة 2. ـ في المؤلفات الأمريكية يشار عادة للمبرهنة 1.2 تحت إسم : مبدأ الحد المنتظم (Principle of Uniform Boundedness) ـ و هذا يفسر جيدا محتوى النتيجة: نحصل على تقدير منتظم عن طريق تقديرات نقطية (Point – estimates) .

<u>إثبات.</u> ـ لكل عدد طبيعي $n \geqslant 1$ ، نضع

$$X_n = \{\, x\in E; \quad \forall i\in I \quad \|T_i x\| \leqslant n\,\}$$

بحيث تكون X_n مغلقة و بفضل (1) لدينا

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E.$$

نستنتج من توطئة بير بأن $Int\, X_{n_0} \neq \emptyset$ لأحد الأعداد الطبيعية $n_0 \geqslant 0$ ، ليكن $x_0 \in E$ و $r > 0$ بحيث $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$ ، لدينا

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leqslant n_0 \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0,1).$$

بالتالي يكون

$$r\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant n_0 + \|T_i x_0\|;$$

مما يحقق (2) ، □

لنشر إلى بعض النتائج المباشرة لمبرهنة بناخ - ستاينهاوس.

لازمة 2.2. **ـ ليكن** E **و** F **فضاءين لبناخ. لتكن** (T_n) **متتالية من مؤثرات خطية و مستمرة من** E **إلى** F **بحيث لكل** $x \in E$ ، **يتقارب** $T_n x$ ، **عندما** $n \to \infty$ ، **إلى نهاية يرمز لها بـ** Tx ، **إذن لدينا**

(ا) $$\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

(ب) $$T \in \mathcal{L}(E,F)$$

(جـ) $$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

إثبات. ـ (ا) هي نتيجة مباشرة للمبرهنة 1.2 ، يوجد إذن ثابت c بحيث

$$\|T_n x\| \leqslant c\|x\| \qquad \forall n, \quad \forall x \in E.$$

عند النهاية نحصل على

$$\|Tx\| \leqslant c\|x\| \qquad \forall x \in E.$$

من جهة أخرى، من الواضح أن T خطي؛ و بالتالي نستنتج (ب).

في الأخير لدينا

$$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\| \qquad \forall x \in E$$

مما ينتج عنه (جـ). □

• **لازمة** 3.2. ـ **ليكن** G **فضاء بناخ و لتكن** B **مجموعة جزئية من** G . **نفرض بأن:**

لكل $f \in G'$ **المجموعة** $f(B) = \bigcup_{x \in B} < f, x >$ **محدودة (في** $\mathbb{R}$ **).** (3)

إذن

B **محدودة.** (4)

إثبات. ـ نطبق المبرهنة 1.2 مع $E = G'$ ، $F = \mathbb{R}$ و $I = B$. لكل $b \in B$ نضع

$$T_b(f) = < f, b >, \qquad f \in E = G'$$

بحيث إن

$$\sup_{b \in B} |T_b(f)| < \infty \qquad \forall f \in E.$$

بفضل المبرهنة 1.2 ، يوجد ثابت c بحيث

$$| < f, b > | \leqslant c\|f\| \qquad \forall f \in G', \quad \forall b \in B.$$

و عليه لدينا

$$\|b\| \leqslant c \qquad \forall b \in B$$

(انظر اللازمة 4.1). □

ملاحظة 3. ـ للتحقق من أن مجموعة محدودة يكفي " النظر " إليها من خلال كل الداليات الخطية المستمرة: هذا ما نفعله بوجه عام عندما يكون البعد منتهيا باستعمال الإحداثيات على قاعدة. تعوض اللازمة 3.2 في حالة بعد غير منته اللجوء إلى قاعدة. نعبر أيضا عن نتيجة اللازمة 3.2 بالقول إن ≪ محدودة بضعف ≫ $\Longrightarrow$ ≪ محدودة بقوة ≫ (weakly bounded $\Longrightarrow$ strongly bounded) (انظر فصل 3).

لدينا نص " ثنوي " للازمة 3.2 :

لازمة 4.2. ـ **ليكن** G **فضاء لبناخ و لتكن** B' **مجموعة جزئية من** G' ، **نفرض بأن**

لكل $x \in G$ **المجموعة** $< B', x >= \bigcup_{f \in B'} < f, x >$ **محدودة (في** $\mathbb{R}$ **)**، (5)

إذن

B' **محدودة.** (6)

إثبات. ـ نطبق المبرهنة 1.2 مع $E = G$ ، $F = \mathbb{R}$ و $I = B'$ ، لكل $b \in B'$ نضع

$$T_b(x) \; =< b, x >, \qquad (x \in G = E)$$

و نستنتج بأنه يوجد ثابت c بحيث

$$| < b, x > | \leqslant c\|x\| \qquad \forall b \in B', \quad \forall x \in G.$$

إذن (حسب تعريف النظيم الثنوي)

$$\|b\| \leqslant c \qquad \forall b \in B'.$$

□

3.2. مبرهنة التطبيق المفتوح و مبرهنة البيان المغلق

تعود النتائج الأساسية التالية إلى بناخ.

• **مبرهنة** 5.2. **(مبرهنة التطبيق المفتوح،** Open mapping theorem **) ـ ليكن** E **و** F **فضاءي بناخ و ليكن** T **مؤثرا خطيا مستمرا و غامرا من** E **إلى** F ، **إذن يوجد ثابت** c **بحيث**

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c). \tag{7}$$

ملاحظة 4. ـ تستلزم الخاصية (7) بأن T تحول كل مجموعة مفتوحة من E إلى مجموعة مفتوحة من F (حيث اسم هذه المبرهنة!)· بالفعل، لتكن U مجموعة مفتوحة من E ؛ لنثبت بأن $T(U)$ مجموعة مفتوحة· ليكن $y_0 \in T(U)$ ، بحيث إن $y_0 = Tx_0$ مع $x_0 \in U$ · ليكن $r > 0$ بحيث $B(x_0, r) \subset U$ أي $x_0 + B(0,r) \subset U$ · لدينا إذن

$$y_0 + T(B(0,r)) \subset T(U).$$

لكن، بناء على (7) ، لدينا

$$T(B(0,r)) \supset B(0,rc)$$

و بالتالي

$$B(y_0, rc) \subset T(U).$$

نستنتج مباشرة من المبرهنة 5.2 الآتي:

• **لازمة** 6.2. ـ **ليكن E و F فضاءي بناخ و ليكن T مؤثرا خطيا مستمرا و تقابليا من E إلى F · إذن T^{-1} مستمر من F إلى E ·**

إثبات اللازمة 6.2. ـ تعبر العلاقة (7) عن أن لكل $x \in E$ بحيث $\|Tx\| < c$ ، فإن $\|x\| < 1$ · بالتجانس نحصل على

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{c}\|Tx\| \qquad \forall x \in E$$

و بالتالي فإن T^{-1} مستمر· □

• **ملاحظة** 5. ـ ليكن E فضاء متجهيا مزودا بنظيمين $\| \ \|_1$ و $\| \ \|_2$ · نفرض بأن E فضاء بناخ لكل من النظيمين $\| \ \|_1$ و $\| \ \|_2$ · كذلك نفترض بأنه يوجد ثابت $C \geqslant 0$ بحيث

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E.$$

إذن يوجد ثابت $c > 0$ بحيث

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \qquad \forall x \in E.$$

بعبارة أخرى، النظيمان متكافآن. يكفي تطبيق اللازمة 6.2 مع

$E = (E, \| \|_1)$ ، $F = (E, \| \|_2)$ و $T = Id$.

إثبات المبرهنة 5.2. ــ يتم الإثبات على مرحلتين:

المرحلة الأولى. ــ ليكن T مؤثرا خطيا و غامرا من E إلى F . إذن يوجد ثابت $c > 0$ بحيث

$$\overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c). \tag{8}$$

إثبات. ــ نضع $X_n = n\overline{T(B(0,1))}$ ؛ بما أن T غامر فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = F$ و بفضل توطئة بير نعلم أنه يوجد n_0 بحيث $Int\, X_{n_0} \neq \emptyset$. يستنتج بأن

$$Int[\overline{T(B(0,1))}] \neq \emptyset.$$

ليكن $c > 0$ و $y_0 \in F$ بحيث

$$B(y_0, 4c) \subset \overline{T(B(0,1))}. \tag{9}$$

بالخصوص $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$ ، و بالتناظر لدينا

$$-y_0 \in \overline{T(B(0,1))}. \tag{10}$$

بجمع (9) و (10) نحصل على

$$B(0,4c) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))}.$$

أخيرا، بما أن $\overline{T(B(0,1))}$ مجموعة محدبة فإن

$$\overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} = 2\overline{T(B(0,1))}.$$

بالتالي نحصل على (8) . □

<u>**المرحلة الثانية**</u>. ـ ليكن T مؤثرا خطيا مستمرا من E إلى F و محققا لـ (8) . إذن لدينا

$$T(B(0,1)) \supset B(0,c). \tag{11}$$

<u>إثبات</u>. ـ لنثبت $y \in F$ مع $\|y\| < c$. نبحث عن $x \in E$ بحيث

$$\|x\| < 1 \quad \text{و} \quad Tx = y \, .$$

بموجب (8) نعلم بأنه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists z \in E \quad \text{مع} \quad \|z\| < \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \|y - Tz\| < \epsilon \, . \tag{12}$$

نختار $\epsilon = \frac{c}{2}$ و نحصل على $z_1 \in E$ مع

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \|y - Tz_1\| < \frac{c}{2} \, .$$

بتطبيقنا لنفس الطريقة مع $y - Tz_1$ (عوضا عن y) و $\epsilon = \frac{c}{4}$ ، فإننا نحصل على $z_2 \in E$ بحيث

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \|(y - Tz_1) - Tz_2\| < \frac{c}{4} \, .$$

و هكذا، ننشئ بالاستقراء متتالية (z_n) بحيث

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{و} \quad \|y - T(z_1 + z_2 + ... + z_n)\| < \frac{c}{2^n} \quad \forall n \, .$$

إذن $x_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$ هي متتالية كوشي. لتكن $x_n \to x$ ؛ لدينا $\|x\| < 1$ و $y = Tx$ بما أن T مستمر. $\square$

• **مبرهنة** 7.2. (**مبرهنة البيان المغلق**، Closed graph theorem). ـ **ليكن** E **و** F **فضاءي بناخ. ليكن** T **مؤثرا خطيا من** E **إلى** F . **نفترض بأن بيان** T ، **الذي يرمز له بـ** $G(T)$ ، **مغلق في** $E \times F$. **إذن**

$$T \text{ مستمر.}$$

ملاحظة 6. ـ من الواضح أن العكس صحيح بما أن لكل تطبيق (خطي أو غير خطي) مستمر، بيانا مغلقا.

إثبات المبرهنة 7.2. ـ نطبق الملاحظة 5 ؛ نعتبر على E النظيمين

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad \text{و} \quad \|x\|_2 = \|x\|_E \cdot$$

بما أن $G(T)$ مغلق، فإن E مزودا بالنظيم $\|.\|_1$[1] هو فضاء لباناخ. من جهة أخرى $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$ ؛ و عليه فالنظيمان متكافآن: يوجد ثابت $c > 0$ بحيث $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ ؛ إذن $\|Tx\|_F \leqslant c\|x\|_E$. $\square$

* 4.2. مكمل طوبولوجي. مؤثرات قابلة للقلب من اليمين (على التوالي من اليسار)

لنبدأ بوصف بعض الخصائص الهندسية للفضاءات الجزئية المغلقة في فضاء بناخ و التي تستنتج من مبرهنة التطبيق المفتوح.

*** مبرهنة 8.2. ـ ليكن E فضاء بناخ. ليكن G و L فضاءين جزئيين مغلقين بحيث $G+L$ مغلق.**

إذن يوجد ثابت $C \geqslant 0$ بحيث

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{كل } z \in G+L \text{ يقبل تحليلا على الشكل} \\ z = x + y \quad \text{مع} \quad x \in G \text{ ، } y \in L \text{ ، } \|x\| \leqslant C\|z\| \quad \text{و} \quad \|y\| \leqslant C\|z\| \cdot \end{array} \right. \tag{13}$$

إثبات. ـ نعتبر فضاء الجداء $G \times L$ مزودا بالنظيم

$$\|[x,y]\| = \|x\| + \|y\|$$

[1] يسمى هذا النظيم بنظيم البيان (graph norm) .

و الفضاء $G+L$ مزودا بنظيم E · إن التطبيق $T:G\times L\to G+L$ المعرف بـ $T[x,y]=x+y$ خطي، مستمر و غامر. يوجد، بموجب مبرهنة التطبيق المفتوح، ثابت $c>0$ بحيث أن كل $z\in G+L$ مع $\|z\|<c$ ، يكتب على الشكل $z=x+y$ مع $x\in G$ ، $y\in L$ و $\|x\|+\|y\|<1$ · بالتجانس، كل عنصر $z\in G+L$ يكتب

$z=x+y$ مع $x\in G$ ، $y\in L$ و $\|x\|+\|y\|\leqslant \frac{1}{c}\|z\|$ ·

□

---

* **لازمة** 9.2. ـ **نتبنى نفس افتراضات المبرهنة** 8.2 · **إذن يوجد ثابت** C **بحيث**

$$dist(x,G\frown L)\leqslant C[dist(x,G)+dist(x,L)] \qquad \forall x\in E. \tag{14}$$

<u>إثبات</u>. ـ ليكن $x\in E$ و $\epsilon>0$ · يوجد $a\in G$ و $b\in L$ بحيث

$$\|x-a\|\leqslant dist(x,G)+\epsilon, \qquad \|x-b\|\leqslant dist(x,L)+\epsilon.$$

يبين تطبيق الخاصية (13) على $z=a-b$ بأنه يوجد $a'\in G$ و $b'\in L$ بحيث

$$a-b=a'+b', \qquad \|a'\|\leqslant C\|a-b\|, \qquad \|b'\|\leqslant C\|a-b\|.$$

بالتالي $a-a'\in G\frown L$ و

$$\begin{aligned} dist(x,G\frown L) &\leqslant \|x-(a-a')\|\leqslant\|x-a\|+\|a'\| \\ &\leqslant \|x-a\|+C\|a-b\|\leqslant\|x-a\|+C(\|x-a\|+\|x-b\|) \\ &\leqslant (1+C)[dist(x,G)+dist(x,L)]+(1+2C)\epsilon. \end{aligned}$$

نستنتج (14) بتوجيه ϵ نحو 0 · □

ملاحظة 7. ـ عكس اللازمة 9.2 صحيح: إذا كان G و L فضاءين جزئيين مغلقين محققين لـ (14) فإن $G+L$ يكون مغلقا (انظر [EX]).

تعريف. ـ ليكن $G\subset E$ فضاء جزئيا مغلقا من فضاء بناخ E · نقول بأن فضاء جزئيا L من E ، هو مكمل طوبولوجي لـ G إذا:

(أ) كان L مغلقا

(ب) $G \frown L = \{0\}$ و $G + L = E$ ·

في هذه الحالة، يكتب كل $z \in E$ بشكل وحيد $z = x + y$ مع $x \in G$ ، $y \in L$ · يستنتج من المبرهنة 8.2 بأن الإسقاطين $z \longmapsto x$ و $z \longmapsto y$ مؤثران خطيان مستمران. (يمكن أن تفيد هذه الخاصية في تعريف المكملين الطوبولوجيين).

أمثلة.

1) لكل فضاء جزئي G منته البعد، مكمل طوبولوجي. بالفعل، لتكن $e_1, e_2, \ldots, e_n$ قاعدة لـ G · لكل $x \in G$ ، نكتب $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ و نعرف $\varphi_i(x) = x_i$ · نقوم بتمديد كل φ_i إلى دالي خطي مستمر $\tilde{\varphi}_i$ على E (بفضل مبرهنة هان - بناخ، شكل تحليلي ـ أو بالتحديد بفضل اللازمة 2.1). نتحقق بسهولة بأن $L = \bigcap_{i=1}^{n} (\tilde{\varphi}_i)^{-1}(0)$ هو مكمل طوبولوجي لـ G ·

2) لكل فضاء جزئي مغلق، ببعد مصاحب codimension منته، مكمل طوبولوجي. بالفعل، يكفي اختيار أي مكمل طوبولوجي جبري (هو مغلق تلقائيا بما أنه منته البعد).

فيما يلي مثال نموذجي لهذه الحالة. ليكن $N \subset E'$ فضاء جزئيا، بعده p · إذن

$$G = \{\, x \in E; \quad < f, x >= 0 \quad \forall f \in N \}$$

مغلق و بعده المصاحب p ·

بالفعل، لتكن $f_1, f_2, \ldots, f_p$ قاعدة لـ N · إذن يوجد $e_1, e_2, \ldots, e_p \in E$ بحيث

$$< f_i, e_j >= \delta_{ij} \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots, p.$$

[اعتبر التطبيق $\vec{\phi} : E \to \mathbb{R}^p$ المعرف بـ

$$x \in E \longmapsto \vec{\phi}(x) = \big(< f_1, x >, < f_2, x >, \ldots, < f_p, x > \big).$$

التطبيق $\vec{\phi}$ غامر ـ و إلا استطعنا إيجاد $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq 0$ ، بواسطة مبرهنة هان - بناخ (الشكل الهندسي الثاني)، بحيث

$$\vec{\alpha}.\vec{\phi}(x) =< \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i, x >= 0 \qquad \forall x \in E,$$

و هذا غير معقول].

نتحقق بسهولة بأن $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ مجموعة مستقلة خطيا linearly independent و بأن الفضاء الذي تولده، هو مكمل طوبولوجي لـ G .

3) لكل فضاء جزئي مغلق G في فضاء هلبرت، مكمل طوبولوجي (انظر الفصل 2.5).

ملاحظة 8. ـ حتى في الفضاءات الانعكاسية، يمكننا بناء فضاءات جزئية مغلقة لا تمتلك أي مكمل طوبولوجي. هناك نتيجة جديرة بالملاحظة لـ Lindenstrauss Tzafriri [1] تؤكد بأن كل فضاء بناخ غير متشاكل تقابليا isomorphic مع فضاء هلبرت، لديه فضاءات جزئية مغلقة بدون أي مكمل طوبولوجي.

ليكن T مؤثرا خطيا مستمرا و غامرا من E إلى F . تبين مبرهنة التطبيق المفتوح بأن:

$$\forall f\in F \text{ ، } \quad \exists x\in E \quad \text{بحيث} \quad Tx=f \quad \text{و} \quad \|x\|\leqslant C\|f\| .$$

من الطبيعي أن نتساءل عما إذا كان ممكنا أن نكون مؤثرا خطيا مستمرا S من F إلى E بحيث $ToS=Id_F$. نقول إذن بأن S معكوس على اليمين لـ T .

---

* **مبرهنة** 10.2. **ـ ليكن T مؤثرا خطيا مستمرا و غامرا من E إلى F . الخاصيتان التاليتان متكافئتان:**

(ا) T معكوس على اليمين.

(ب) لـ $N(T)=T^{-1}(0)$ مكمل طوبولوجي في E .

إثبات.

(ا) $\Longrightarrow$ **(ب)**: ليكن S معكوسا على اليمين لـ T . يمكن التحقق بسهولة بأن $R(S)=S(F)$ مكمل طوبولوجي لـ $N(T)$.

(ب) $\Longrightarrow$ **(ا)**: ليكن L مكملا طوبولوجيا لـ $N(T)$. نرمز لإسقاط E على L بـ P (P مؤثر خطي مستمر). بإعطاء $f\in F$ ، نرمز بـ x لأحد حلول المعادلة $Tx=f$ و نضع $Sf=Px$ ؛ نلاحظ بأن S مستقل عن اختيار x . نتحقق بسهولة بأن S مؤثر خطي مستمر بحيث $ToS=Id_F$. $\square$

ملاحظة 9. ــ يمكننا بناء أمثلة لفضاءات E و F انعكاسية و مؤثرات غامرة لا تملك معكوسا على اليمين. اعتبر مثلا $G \subset E$ فضاء جزئيا مغلقا بدون مكمل طوبولوجي (ملاحظة 8)، $F = E/G$ و T الإسقاط القانوني من E على F . (لتعريف فضاء القسمة quotient space E/G و خصائصه، انظر مثلا [EX]).

بطريقة مماثلة، نقول بأن S معكوس على اليسار لـ T إذا كان S مؤثرا خطيا مستمرا من F إلى E بحيث $SoT = Id_E$.

---

* **مبرهنة** 11.2. ــ **ليكن T مؤثرا خطيا مستمرا و متباينا من E إلى F . الخاصيتان التاليتان متكافئتان:**

(ا) T معكوس على اليسار.

(ب) $R(T) = T(E)$ مغلق و له مكمل طوبولوجي في F .

<u>إثبات.</u>

(ا) $\Longrightarrow$ (ب): من السهل التحقق بأن $R(T)$ مغلق و بأن $N(S)$ مكمل طوبولوجي له.

(ب) $\Longrightarrow$ (ا): ليكن P إسقاطا مستمرا من F على $R(T)$. ليكن $f \in F$ ؛ بما أن $Pf \in R(T)$ ، فإنه يوجد $x \in E$ وحيدا بحيث $Pf = Tx$. نعرف $Sf = x$. من الواضح أن $SoT = Id_E$ ؛ من ناحية أخرى فإن S مستمر بفضل اللازمة 6.2 . $\square$

5.2. علاقات التعامد

ترميز. ــ ليكن X فضاء بناخ.
إذا كان $M \subset X$ فضاء جزئيا متجهيا، نضع

$$\boxed{M^{\perp} = \{ f \in X'; \quad < f, x >= 0 \quad \forall x \in M \}.}$$

إذا كان $N \subset X'$ فضاء جزئيا متجهيا، نضع

$$\boxed{N^{\perp} = \{x \in X; \quad < f, x >= 0 \quad \forall f \in N\}.}$$

نقول بأن $M^{\perp}$ (على التوالي $N^{\perp}$) هو متعامد orthogonal M (على التوالي N).
لنلاحظ أن $M^{\perp}$ (على التوالي $N^{\perp}$) فضاء جزئي مغلق من X' (على التوالي X).

لنبدأ بنتيجة بسيطة:

• **قضية** 12.2. **ـ ليكن** $M \subset X$ **فضاء جزئيا متجهيا. إذن لدينا**

$$\boxed{(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}.}$$

ليكن $N \subset X'$ **فضاء جزئيا متجهيا. إذن لدينا**

$$\boxed{(N^{\perp})^{\perp} \supset \overline{N}.}$$

ملاحظة 10. ـ من الممكن أن يحدث أن $(N^{\perp})^{\perp} \neq \overline{N}$ ؛ انظر إلى مثال في [EX] . سوف نرى في الفصل 3 بأنه إذا كان X انعكاسيا فإن $(N^{\perp})^{\perp} = \overline{N}$. عموما سوف نرى بأنه إذا كان X فضاء بناخ كيفيا فإن $(N^{\perp})^{\perp}$ يتطابق مع إغلاقة closure N بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(X', X)$.

<u>إثبات القضية 12.2</u> . ـ من الواضح أن $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$ و بما أن $(M^{\perp})^{\perp}$ مغلق، فإن $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

بالعكس، لنثبت أن $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$. لنبرهن بالتناقض و لنفرض بأنه يوجد $x_0 \in (M^{\perp})^{\perp}$ بحيث $x_0 \notin \overline{M}$. نفصل إذن $\{x_0\}$ و $\overline{M}$ فصلا فعليا بفوق مستو مغلق. إذن يوجد $f \in X'$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث

$$< f, x > < \alpha < < f, x_0 > \qquad \forall x \in M. \tag{15}$$

بما أن M فضاء جزئي، نستنتج بأن $< f, x >= 0$ $\forall x \in M$. إذن $f \in M^{\perp}$ و بالتالي $< f, x_0 >= 0$ ـ و هذا يناقض (15) .

كذلك من الواضح أن $N \subset (N^{\perp})^{\perp}$ و بالتالي $\overline{N} \subset (N^{\perp})^{\perp}$. □

ملاحظة 11. ــ من المفيد محاولة مواصلة الإثبات سعيا للبرهنة على أن $(N^\perp)^\perp = \overline{N}$ ·
لنفرض، بالتناقض، أنه يوجد $f_0 \in (N^\perp)^\perp$ بحيث $f_0 \notin \overline{N}$ · نفصل إذن $\{f_0\}$ و $\overline{N}$ فصلا فعليا بفوق مستو في X' · إذن يوجد $\varphi \in X''$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\varphi(f) \ < \alpha < \ \varphi(f_0) \qquad \forall f \in N.$$

لدينا كذلك $\varphi(f) = 0$ $\forall f \in N$ · و لكن لا يمكننا المواصلة ــ إلا إذا وجد " صدفة " $x_0 \in X$ بحيث

$$\varphi(f) \ = < f, x_0 > \qquad \forall f \in X'$$

(هذا ما يحدث بالضبط عندما يكون X انعكاسيا!)·

قضية 13.2. ــ **ليكن G و L فضاءين جزئيين مغلقين من X · لدينا**

$$\boxed{G \frown L \ = \ (G^\perp + L^\perp)^\perp} \tag{16}$$

$$\boxed{G^\perp \frown L^\perp \ = \ (G + L)^\perp.} \tag{17}$$

إثبات· ــ **البرهنة على** (16) · من الواضح أن $G \frown L \subset (G^\perp + L^\perp)^\perp$ ؛ بالفعل إذا كان $x \in G \frown L$ و $f \in G^\perp + L^\perp$ ، فإن $< f, x >= 0$ · بالعكس، لدينا $G^\perp \subset G^\perp + L^\perp$ و بالتالي $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subset G^{\perp\perp} = G$ (لاحظ أنه إذا كان $N_1 \subset N_2$ فإن $N_2^\perp \subset N_1^\perp$)؛ على النحو ذاته $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subset L$ · إذن $(G^\perp + L^\perp)^\perp \subset G \frown L$ ·
البرهنة على (17) · بديهية· □

لازمة 14.2. ــ **ليكن G و L فضاءين جزئيين مغلقين من X · لدينا**

$$(G \frown L)^\perp \ \supset \ \overline{(G^\perp + L^\perp)} \tag{18}$$

$$(G^\perp \frown L^\perp)^\perp \ = \ \overline{G + L}. \tag{19}$$

إثبات. ــ طبق القضيتين 12.2 و 13.2 . □

لدينا الآن نتيجة أكثر عمقا:

---

* **مبرهنة** 15.2. ــ **ليكن** G **و** L **فضاءين جزئيين مغلقين من** X . **الخصائص الآتية متكافئة:**

(ا) $G+L$ **مغلق في** X

(ب) $G^{\perp}+L^{\perp}$ **مغلق في** X'

(جـ) $G+L=(G^{\perp}\frown L^{\perp})^{\perp}$

(د) $G^{\perp}+L^{\perp}=(G\frown L)^{\perp}$.

إثبات.
(ا) $\Longleftrightarrow$ (جـ): نتيجة لـ (17) .
(د) $\Longrightarrow$ (ب): سهل.
يبقى إذن البرهنة على (ا) $\Longrightarrow$ (د) و (ب) $\Longrightarrow$ (ا).

(ا) $\Longrightarrow$ **(د):** يكفي بفضل (16) أن نبرهن بأن $(G\frown L)^{\perp}\subset G^{\perp}+L^{\perp}$. ليكن إذن $f\in(G\frown L)^{\perp}$. نعرف التطبيق $\varphi: G+L\to\mathbb{R}$ بالطريقة التالية. ليكن $x\in G+L$ ، بحيث أن $x=a+b$ مع $a\in G$ و $b\in L$. نضع

$$\varphi(x)=<f,a>.$$

نلاحظ بأن φ مستقل عن تحليل x و بأن φ خطي. من جانب آخر (مبرهنة 8.2)، يمكننا اختيار تحليل لـ x بحيث $\|a\|\leqslant C\|x\|$ و بناء عليه

$$|\varphi(x)|\leqslant C\|x\| \qquad \forall x\in G+L.$$

نمدد φ إلى دالي خطي $\widetilde{\varphi}$ معرف على X . نحصل هكذا على

$$f=(f-\widetilde{\varphi})+\widetilde{\varphi} \quad \text{مع} \quad f-\widetilde{\varphi}\in G^{\perp} \quad \text{و} \quad \widetilde{\varphi}\in L^{\perp}.$$

(ب) $\Leftarrow$ **(ا):** نعلم ، بفضل اللازمة 9.2 ، بأنه يوجد ثابت C بحيث

$$(20) \qquad dist(f, G^{\perp} \frown L^{\perp}) \leqslant C[\, dist(f, G^{\perp}) + dist(f, L^{\perp})] \qquad \forall f \in X'.$$

من ناحية أخرى لدينا

$$(21) \qquad dist(f, G^{\perp}) = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leqslant 1}} < f, x > \qquad \forall f \in X'.$$

[طبق المبرهنة 11.1 على $\varphi(x) = I_{\overline{B}_{X(0,1)}}(x) - < f, x >$ و $(x) = I_G(x)$].
كذلك لدينا

$$(22) \qquad dist(f, L^{\perp}) = \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \leqslant 1}} < f, x > \qquad \forall f \in X'$$

و

$$(23) \qquad dist(f, G^{\perp} \frown L^{\perp}) = dist(f, (G+L)^{\perp}) = \sup_{\substack{x \in \overline{G+L} \\ \|x\| \leqslant 1}} < f, x > \qquad \forall f \in X'$$

(بفضل (17)).
بالتنسيق بين (20) (21) (22) و (23) نحصل على

$$(24) \qquad \sup_{\substack{x \in \overline{G+L} \\ \|x\| \leqslant 1}} < f, x > \leqslant C\big[\sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leqslant 1}} < f, x > + \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \leqslant 1}} < f, x >\big] \qquad \forall f \in X'.$$

يستنتج من (24) بأن

$$(25) \qquad \overline{B_G(0,1) + B_L(0,1)} \supset \frac{1}{C} B_{\overline{G+L}}(0,1).$$

بالفعل، لنفرض - بالتناقض - أنه يوجد $x_0 \in \overline{G+L}$ مع

$$\|x_0\| < \frac{1}{C} \qquad \text{و} \qquad x_0 \notin \overline{B_G(0,1) + B_L(0,1)} \cdot$$

بإمكاننا إذن فصل $\{x_0\}$ و $\overline{B_G(0,1) + B_L(0,1)}$ فعليا بفوق مستو مغلق في X ؛ فيوجد $f \in X'$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث

$$< f, x > < \alpha < < f, x_0 > \qquad \forall x \in B_G(0,1) + B_L(0,1).$$

بناء عليه، نحصل على

$$\sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\leqslant 1}} < f,x > + \sup_{\substack{x\in L\\ \|x\|\leqslant 1}} < f,x > \leqslant \alpha < < f,x_0 >$$

و هذا يتناقض مع (24) · إذن نكون قد برهنا على (25) ·
أخيرا، نعتبر الفضاء $E = G \times L$ مزودا بالنظيم

$$\|[x,y]\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

و الفضاء $F = \overline{G+L}$ مزودا بنظيم X ·
التطبيق $T : E \to F$ المعرف بـ $T([x,y]) = x+y$ خطي، مستمر و بمقتضى (25) نعلم بأن $\overline{T(B_E(0,1))} \supset B_F(0, \frac{1}{C})$ · نستنتج [انظر إلى إثبات المبرهنة 5.2 (مبرهنة التطبيق المفتوح)، المرحلة الثانية] بأن

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0, \frac{1}{2C}).$$

على الخصوص، T شامل من E على F أي $G+L = \overline{G+L}$ · $\square$

6.2. مقدمة للمؤثرات الخطية غير المحدودة· تعريف القرين

تعاريف· ـ ليكن E و F فضاءي بناخ· نسمي مؤثرا خطيا غير محدود من E إلى F كل تطبيق خطي $A : D(A) \subset E \to F$ معرف على فضاء جزئي متجهي $D(A) \subset E$ ، قيمه في F · $D(A)$ هو نطاق A · نقول بأن A محدود إذا وجد ثابت $c \geqslant 0$ بحيث

$$\boxed{\|Au\| \leqslant c\|u\| \qquad \forall u \in D(A).}$$

ملاحظة 12. ـ إذن من الممكن أن يحصل بأن يكون مؤثر غير محدود محدودا· المصطلح غير موفق كثيرا، و لكنه، على العموم، شائع و لا يؤدي إلى أي غموض!

لنوضح بعض التداوين و التعاريف المهمة

بيان $A \ = \ G(A) \ = \ \bigcup_{u\in D(A)} [u, Au] \ \subset \ E\times F$
مدى $A \ = \ R(A) \ = \ \bigcup_{u\in D(A)} Au \ \subset \ F$
نواة $A \ = \ N(A) \ = \ \{ \ u\in D(A) \ ؛ \ Au=0 \ \} \subset E$.

تعريف. ـ نقول بأن مؤثرا A مغلق (closed operator) إذا كان $G(A)$ مغلقا في $E\times F$.

• **ملاحظة** 13. ـ للبرهنة على أن مؤثرا A مغلق، نسلك عموما الطريقة التالية. نأخذ متتالية (u_n) من $D(A)$ بحيث $u_n\to u$ في E و $Au_n\to f$ في F . يتعلق الأمر بعد ذلك بالتحقق بأن

(ا) $u\in D(A)$

(ب) $f=Au$.

ملاحظة 14. ـ إذا كان A مغلقا، فإن $N(A)$ مغلق.

ملاحظة 15. ـ في التطبيق، معظم المؤثرات غير المحدودة التي سنصادفها مغلقة و نطاقها $D(A)$ كثيف في E .

تعريف القرين A^* . ـ ليكن $A: D(A)\subset E\to F$ مؤثرا غير محدود، نطاقه كثيف. سوف نعرف مؤثرا غير محدود $A^* : D(A^*)\subset F'\to E'$ كما يلي. نضع

$$D(A^*) \ = \ \{ \ v\in F' \ ؛ \ \exists c\geqslant 0 \quad \text{بحيث} \quad |<v, Au>| \leqslant c\|u\| \qquad \forall u\in D(A) \ \} .$$

من الواضح أن $D(A^*)$ فضاء جزئي متجهي من F' . سنعرف الآن A^*v لـ $v\in D(A^*)$. بإعطاء $v\in D(A^*)$ ، نعتبر التطبيق $g: D(A)\to\mathbb{R}$ المعرف بـ

$$g(u) = <v, Au>, \qquad u\in D(A).$$

لدينا

$$|g(u)| \leqslant c\|u\| \qquad \forall u\in D(A).$$

نعلم ، بفضل المبرهنة 1.1 (هان بناخ - الشكل التحليلي)، بأنه يمكن تمديد g إلى دالي خطي $f: E\to\mathbb{R}$ بحيث

$$|f(u)| \leqslant c\|u\| \qquad \forall u \in E.$$

بالتالي $f \in E'$. نلاحظ بأن تمديد g وحيد بما أن f مستمر على E و $D(A)$ كثيف.
نضع

$$A^* v = f.$$

من الواضح أن A^* خطي. يسمى المؤثر $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ بقرين (adjoint) A .
و بناء عليه، لدينا العلاقة الأساسية التالية التي تربط A و A^* :

$$\boxed{< v, Au >_{F',F} = < A^* v, u >_{E',E} \qquad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in D(A^*).}$$

ملاحظة 16. ـ ليس من الضروري استدعاء مبرهنة هان - بناخ لتمديد g . يكفي استعمال التمديد " بالاستمرارية " لـ g (بما أن g معرف على $D(A)$ الكثيف، g مستمر بانتظام و $\mathbb{R}$ تام)؛ انظر مثلا المبرهنة $20 - 14$ من الفصل 5 في [1] Choquet .

$*$ **ملاحظة** 17. ـ من الممكن أن يحصل أن $D(A^*)$ غير كثيف في F' و لو كان A مغلقا؛ انظر مثالا في [EX] . إلا أنه يبرهن أنه إذا كان A مغلقا، فإن $D(A^*)$ يكون كثيفا في F' بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(F', F)$ المعرفة في الفصل 3 ، انظر [EX] . و بالخصوص إذا كان F انعكاسيا، فإن $D(A^*)$ يكون كثيفا في F' للطوبولوجيا العادية المرتبطة بالنظيم؛ انظر المقطع 5.3 .

• **قضية** 16.2. **ـ ليكن** $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ **مؤثرا غير محدود، نطاقه كثيف. إذن** A^* **مغلق، أي أن** $G(A^*)$ **مغلق في** $F' \times E'$.

<u>إثبات</u>. ـ لتكن $v_n \in D(A^*)$ بحيث $v_n \longrightarrow v$ في F' و $A^* v_n \longrightarrow f$ في E' . يتعلق الأمر بالبرهنة على (ا) $v \in D(A^*)$ و (ب) $A^* v = f$. غير أنه لدينا

$$< v_n, Au > = < A^* v_n, u > \qquad \forall u \in D(A).$$

بناء عليه ينجم عند النهاية

$$< v, Au > = < f, u > \qquad \forall u \in D(A).$$

بالتالي فإن $v \in D(A^*)$ (بمقتضى تعريف $D(A^*)$) و $A^* v = f$ · $\square$

بيانا A و A^* مرتبطان بعلاقة تعامد جد بسيطة· بالفعل، لنعتبر التطبيق $J : F' \times E' \to E' \times F'$ المعرف بـ

$$J([v,f]) = [-f,v].$$

ليكن A مؤثرا غير محدود، $A : D(A) \subset E \to F$ مع $\overline{D(A)} = E$ · إذن لدينا

$$\boxed{J\big[G(A^*)\big] = G(A)^{\perp}.}$$

بالفعل، ليكن $[v,f] \in F' \times E'$ ؛ إذن

$$\begin{aligned} [v,f] \in G(A^*) &\iff \; < f,u > = < v, Au > \qquad \forall u \in D(A) \\ &\iff \; - < f,u > + < v, Au > = 0 \qquad \forall u \in D(A) \\ &\iff \; [-f,v] \in G(A)^{\perp}. \end{aligned}$$

من الملائم إدخال الفضاء $X = E \times F$ بحيث $X' = E' \times F'$ و اعتبار الفضاءين الجزئيين $G = G(A)$ و $L = E \times \{0\}$ في X · يمكننا وصف $N(A)$ ، $N(A^*)$ ، $R(A)$ و $R(A^*)$ بواسطة G و L ·

نتحقق بسهولة بأن

$$N(A) \times \{0\} = G \frown L \tag{26}$$

$$E \times R(A) = G + L \tag{27}$$

$$\{0\} \times N(A^*) = G^{\perp} \frown L^{\perp} \tag{28}$$

$$R(A^*) \times F' = G^{\perp} + L^{\perp}. \tag{29}$$

• **لازمة** 17.2. **ـ ليكن** $A : D(A) \subset E \to F$ **مؤثرا غير محدود، مغلقا، مع** $\overline{D(A)} = E$ · **إذن لدينا**

(ا) $N(A) = R(A^*)^{\perp}$

(ب) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$

(جـ) $N(A)^{\perp} \supset \overline{R(A^*)}$

(د) $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$ ·

<u>إثبات</u>· ـ **التحقق من (ا)**· ـ بناء على (29) لدينا

$$G \frown L = (G^\perp + L^\perp)^\perp = R(A^*)^\perp \times \{0\} \quad \text{((بفضل (16))}$$
$$= N(A) \times \{0\} \quad \text{(بفضل (26)).}$$

التحقق من (ب). ـ بناء على (27) لدينا

$$G^\perp \frown L^\perp = (G + L)^\perp = \{0\} \times R(A)^\perp \quad \text{((بفضل (17))}$$
$$= \{0\} \times N(A^*) \quad \text{(بفضل (28)).}$$

التحقق من (جـ) و (د). ـ استعمل (ا) (على التوالي (ب))، استعمل التعامد ثم طبق القضية 12.2 . □

ملاحظة 18. ـ سوف نبحث، كتمرين، عن إثبات مباشر لـ (ا) و (ب) بدون إدخال G و L ؛ انظر [EX] .

* **ملاحظة** 19. ـ من الممكن أن يحدث أن $N(A)^\perp \neq \overline{R(A^*)}$ و لو كان A مؤثرا خطيا و مستمرا من E في F ، انظر مثالا في [EX] . إلا أنه (راجع الملاحظة 10) يمكننا إثبات أن $N(A)^\perp$ يتطابق دائما مع إغلاقة $R(A^*)$ للطوبولوجيا $\sigma(E', E)$ ؛ وبالخصوص إذا كان E انعكاسيا، لدينا دائما $N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$.

7.2. تمييز المؤثرات ذات الصورة المغلقة. مؤثرات غامرة. مؤثرات محدودة

---

* **مبرهنة** 18.2. ـ **ليكن** $A : D(A) \subset E \to F$ **مؤثرا غير محدود، مغلقا، مع** $\overline{D(A)} = E$.
الخصائص الآتية متكافئة :
(ا) $R(A)$ **مغلق**
(ب) $R(A^*)$ **مغلق**
(جـ) $R(A) = N(A^*)^\perp$

(د) $R(A^*) = N(A)^\perp$ ·

<u>إثبات</u>. ـ نستعيد الترميز الذي أدخلناها في المقطع 6.2 · و هكذا يكون

(ا) $\iff$ $G+L$ مغلق في X (راجع (27))

(ب) $\iff$ $G^\perp + L^\perp$ مغلق في X' (راجع (29))

(جـ) $\iff$ $G+L = (G^\perp \frown L^\perp)^\perp$ (راجع (27) و (28))

(د) $\iff$ $(G \frown L)^\perp = G^\perp + L^\perp$ (راجع (26) و (29))·

نستخلص إلى المطلوب بفضل المبرهنة 15.2 · $\square$

ملاحظة 20. ـ ليكن $A : D(A) \subset E \to F$ مؤثرا غير محدود، مغلقا. إذن $R(A)$ مغلق إذا و فقط إذا وجد ثابت C بحيث

$$dist(u, N(A)) \leqslant C\|Au\| \qquad \forall u \in D(A);$$

انظر [EX] ·

النتيجة التالية تمييز مفيد للمؤثرات الغامرة.

---

* **مبرهنة** 19.2. **ـ ليكن** $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ **مؤثرا غير محدود، مغلقا، مع** $\overline{D(A)} = E$.
الخصائص الآتية متكافئة:

(ا) A **غامر أي أن** $R(A) = F$ ،

(ب) **يوجد ثابت** $C \geqslant 0$ **بحيث أن**

$$\|\nu\| \leqslant C\|A^*\nu\| \qquad \forall \nu \in D(A^*)$$

(جـ) $N(A^*) = \{0\}$ **و** $R(A^*)$ **مغلق.**

ملاحظة 21. ـ عمليا، إذا كنا بصدد إثبات أن مؤثرا A غامر، نستعمل الاستلزام (ب) $\Leftarrow$ (ا) على النحو الآتي. نعتبر المعادلة $A^*v = f$ مع $f \in E'$ و نثبت بأن $\|v\| \leqslant C\|f\|$ مع C

مستقلة عن f ٠ تسمى هذه التقنية بطريقة التقدير الأولي (a priori estimate) : لا نهتم بمعرفة ما إذا كانت المعادلة $A^*v = f$ تقبل حلا أم لا؛ نأخذ بداية حلا لهذه المعادلة، و نبحث على تقدير نظيمها٠

إثبات٠

(ا) $\Longleftrightarrow$ **(جـ)**: هو نتيجة مباشرة للازمة 17.2 و للمبرهنة 18.2 ٠

(ب) $\Longleftarrow$ **(جـ)**: بديهي (استدل بمتتاليات كوشي)٠

(جـ) $\Longleftarrow$ **(ب)**: نعلم بفضل (28) و (29) بأن $G^\perp \cap L^\perp = \{0\}$ و بأن $G^\perp + L^\perp$ مغلق٠ يمكننا تطبيق المبرهنة 8.2 ؛ يوجد ثابت C بحيث يكتب كل $z \in G^\perp + L^\perp$ بشكل وحيد (بما أن $G^\perp \cap L^\perp = \{0\}$) على النحو الآتي

$$z = a + b \quad \text{مع} \quad a \in G^\perp \text{ ، } b \in L^\perp \text{ ، } \|a\| \leqslant C\|z\| \quad \text{و} \quad \|b\| \leqslant C\|z\| \text{ ٠}$$

ليكن $v \in D(A^*)$ ، إذن $z = [A^*v, 0]$ يكتب $z = a + b$ مع

$$a = [A^*v, -v] \in G^\perp \qquad \text{و} \qquad b = [0, v] \in L^\perp \text{ ٠}$$

لدينا إذن

$$\|b\| = \|v\| \leqslant C\|z\| = C\|A^*v\|.$$

□

ملاحظة 22. ــ نثبت، كتمرين، الاستلزام (ا) $\Longleftarrow$ (ب) بطريقة أخرى٠ نبين - تحت الافتراض (ا) - بأن المجموعة $\{v \in D(A^*);\ \|A^*v\| \leqslant 1\}$ محدودة في F' بواسطة مبرهنة بناخ - ستاينهاوس٠

بالتناظر لدينا:

---

* **مبرهنة** 20.2. ــ **ليكن** $A : D(A) \subset E \to F$ **مؤثرا غير محدود، مغلقا، مع** $\overline{D(A)} = E$ ٠
الخصائص الآتية متكافئة:

(ا) A^* **غامر أي أن** $R(A^*) = E'$ ،

(ب) **يوجد ثابت** C **بحيث أن**

$$\|u\| \leqslant C\|Au\| \qquad \forall u \in D(A)$$

(جـ) $N(A) = \{0\}$ و $R(A)$ **مغلق.**

إثبات. ـ إنه متشابه تماما مع إثبات المبرهنة 19.2 . يمكن للقارئ كتابة التفاصيل كتمرين. □

ملاحظة 23. ـ إذا افترضنا بأن $dimE < \infty$ أو أن $dimF < \infty$ فإنه يكون لدينا التكافؤان:

A غامر $\iff$ A^* متباين

A^* غامر $\iff$ A متباين.

بالفعل، في هذه الحالة، يكون $R(A)$ و $R(A^*)$ متهي البعد، و إذن مغلقين.
في الحالة العامة، لدينا فقط الاستلزامان

A غامر $\implies$ A^* متباين

A^* غامر $\implies$ A متباين.

العكس غير صحيح، كما يبينه المثال الآتي:

$E = F = l^2$ ؛ لكل $x \in l^2$ ، $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ نرفق $Ax = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n\geqslant 1}$ بحيث أن $A = A^*$.
A^* (على التوالي A) متباين لكن A (على التوالي A^*) غير غامر؛
A (على التوالي A^*) ذو صورة كثيفة، غير مغلقة.

نشير أخيرا إلى تمييز للمؤثرات المحدودة:

مبرهنة 21.2. **ـ ليكن** $A : D(A) \subset E \to F$ **مؤثرا غير محدود، مغلقا، مع** $\overline{D(A)} = E$.
الخصائص الآتية متكافئة:

(ا) $D(A) = E$

(ب) A **محدود**

(جـ) $D(A^*) = F'$

(د) A^* **محدود.**

في هذه الأحوال لدينا

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}.$$

إثبات. ـ **(ا)** $\Longrightarrow$ **(ب)**: طبق مبرهنة البيان المغلق.

(ب) $\Longrightarrow$ **(جـ)**: طبق تعريف $D(A^*)$.

(جـ) $\Longrightarrow$ **(د)**: طبق القضية 16.2 و مبرهنة البيان المغلق.

* **(د)** $\Longrightarrow$ **(ا)**: أكثر تعقيدا. نلاحظ أولا بأن $D(A^*)$ مغلق. بالفعل، ليكن $v_n \in D(A^*)$ مع $v_n \longrightarrow v$ في F' . لدينا

$$\|A^*(v_n - v_m)\| \leqslant c\|v_n - v_m\|;$$

بالتالي $(A^* v_n)$ تتقارب نحو نهاية f . بما أن A^* مغلق، $v \in D(A^*)$ و $A^* v = f$.

في الفضاء $X = E \times F$ ، نعتبر الفضاءين الجزئيين $G = G(A)$ و $L = \{0\} \times F$ بحيث أن

$$G + L = D(A) \times F \qquad \text{و} \qquad G^\perp + L^\perp = E' \times D(A^*) \cdot$$

بالتالي فإن $G^\perp + L^\perp$ مغلق في X' . تسمح لنا المبرهنة 15.2 باستنتاج أن $G + L$ مغلق؛ إذن $D(A)$ مغلق. بما أن $\overline{D(A)} = E$ ، نستنتج بأن $D(A) = E$.

لنبرهن الآن بأن $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$. لدينا

$$< v, Au > = < A^* v, u > \qquad \forall u \in E, \quad \forall v \in F'.$$

إذن

$$| < v, Au > | \leqslant \|A^*\| \|v\| \|u\|$$

و

$$\|Au\| = \sup_{\|v\| \leqslant 1} | < v, Au > | \leqslant \|A^*\| \|u\|$$

(بفضل اللازمة 4.1). بالتالي $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. عكسيا لدينا

$$\|A^* v\| \overset{\text{تعريف}}{=} \sup_{\|u\| \leqslant 1} | < A^* v, u > | = \sup_{\|u\| \leqslant 1} | < v, Au > | \leqslant \|A\| \|v\|.$$

بالنتيجة $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. $\square$

تعاليق حول الفصل الثاني

1) يمكننا بوضوح وصف بعض الفضاءات الجزئية المغلقة التي لا تملك أي مكمل طوبولوجي. على سبيل المثال، c_0 لا يملك أي مكمل طوبولوجي في l^∞ (انظر De Vito [1])؛ نذكر بأن l^∞ يرمز لفضاء المتتاليات $x = (x_n)$ المحدودة في $\mathbb{R}$ ، المزود بالنظيم $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$ و c_0 هو الفضاء الجزئي المغلق للمتتاليات التي تحقق $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. نجد أمثلة أخرى في Rudin [1] (فضاء جزئي من L^1) أو في Köthe [1] و Beauzamy [1] (فضاء جزئي من l^p ، $p \neq 2$).

2) أغلب نتائج الفصل 2 تعمم إلى فضاءات Fréchet (فضاءات محدبة محليا locally convex ، ممترة metrisable و تامة complete). هناك عدة تعميمات ممكنة؛ انظر مثلا Schaefer [1] ، Horvath [1] ، Edwards [1] ، Treves [1], [3] ، Köthe [1] . من حوافز هذه التعميمات، نظرية التوزيع distribution theory (انظر L. Schwartz [1]) حيث الكثير من الفضاءات المهمة ليست بفضاءات بناخ. بالنسبة للتطبيقات على نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية theory of partial differential equations ، يمكن الاطلاع على Hörmander [1] ، Treves [1] [2] [3] .

3) نجد في Kato [1] بعض التوسيعات لنتائج المقطع 5.2 .