

فضاءات L^p

في كل ما سيأتي يرمز Ω إلى مجموعة مفتوحة من \mathbb{R}^N مزودة بقياس ليبيغ dx . نفترض إلام القارئ بمبادئ الدوال القابلة للتكامل (أو الكمولة integrable)، الدوال القيوسة و المجموعات ذات القياس الصفري؛ انظر مثلا إلى [1] Marle ، [1] Malliavin ، [1] Neveu ، [2] Rudin ، [1] Guichardet ، [2] Dieudonné ، [1] Kolmogorov – Fomin ، [1] Chae ، [1] Wheeden – Zygmund ، [1] Hewitt – Stromberg ، إلخ . نرمز بـ $L^1(\Omega)$ لفضاء الدوال القابلة للتكامل على Ω ذات القيم في \mathbb{R} . نضع

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

عند انتهاء الغموض، سوف نستعمل L^1 بدل $L^1(\Omega)$ وكذلك $\int f$ عوض $\int_{\Omega} f(x) dx$. و كما هو المعتاد نسوي بين دالتين من L^1 متساويتين ح. ت = حيثما كان تقريبا (= إلا على مجموعة ذات قياس صفري) .
للفائدة، نذكر بـ ...

1.4. بعض نتائج الكاملة الواجب معرفتها جيدا

-
- **مبرهنة 1.4 (مبرهنة التقارب الرتيب لـ Beppo Levi)** - لتكن (f_n) متتالية دوال تزايدية من L^1 بحيث $\sup_n \int f_n < \infty$. إذن $f_n(x)$ تتقارب ح. ت على Ω إلى نهاية متهية نرمز لها بـ $f(x)$ ؛ بالإضافة إلى ذلك $f \in L^1$ و $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.
-

• **مبرهنة 2.4 (مبرهنة التقارب المهيمن أو المرجح لليبيغ)** - لتكن (f_n) متتالية دوال من L^1

نفرض بأن

$$(1) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ ح. ت على } \Omega$$

(ب) توجد دالة $g \in L^1$ بحيث لكل n ، $|f_n(x)| \leq g(x)$ ح. ت على Ω .

$$\text{إذن } f \in L^1(\Omega) \text{ و } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$$

توطئة 1.4 (توطئة فاتو Fatou) - لتكن (f_n) متتالية دوال من L^1 بحيث

$$(1) \quad f_n(x) \geq 0 \text{ لكل } n \text{ ، ح. ت على } \Omega$$

$$(2) \quad \sup_n \int f_n < \infty$$

لكن $x \in \Omega$ ، نضع $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$
إذن $f \in L^1(\Omega)$ و

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

ترميز - نرمز بـ $C_c(\Omega)$ إلى فضاء الدوال المستمرة على Ω ذات الحوامل المتراصة، أي أن
 $C_c(\Omega) = \{ f \in C(\Omega) \mid f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K \text{ حيث } K \subset \Omega \text{ متراص} \}$

• **مبرهنة 3.4 (مبرهنة الكثافة)** - الفضاء $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^1(\Omega)$ ؛ أي أن

¹ نقول بأن g حد علوي كمول للدوال (f_n) .

• $\|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon$ بحيث $\exists f_1 \in C_c(\Omega)$ ، $\forall \epsilon > 0$ و $\forall f \in L^1(\Omega)$

لتكن $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ ، $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ مجموعتين مفتوحتين و لتكن $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس (قيوسة).

مبرهنة 4.4 (تونيلي Tonelli) - لنفرض بأن

$$x \in \Omega_1 \quad \text{ح. ت لكل} \quad \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$$

و بأن

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty.$$

• إذن $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

مبرهنة 5.4 (فويني Fubini) - لنفرض بأن $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$
 إذن ، لكل $x \in \Omega_1$ ح. ت ،

$$\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{و} \quad F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$$

كذلك ، لكل $y \in \Omega_2$ ح. ت ،

$$\int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{و} \quad F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1)$$

بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

2.4. تعريف و خصائص أولية لفضاءات L^p

تعريف ٠ - ليكن $p \in \mathbb{R}$ مع $1 \leq p < \infty$ ؛ نضع

$$\cdot \{ |f|^p \in L^1(\Omega) \text{ و } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ؛ } f \text{ قیوسة و } \} = L^p(\Omega)$$

نكتب

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

سوف نتحقق فيما بعد بأن $\|\cdot\|_{L^p}$ تنظيم.

تعريف ٠ - نضع

$$\cdot \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ؛ } f \text{ قیوسة و يوجد ثابت } C \text{ بحيث } |f(x)| \leq C \text{ ت على } \Omega \} = L^\infty(\Omega)$$

نكتب

$$\cdot \{ |f(x)| \leq C \text{ ؛ } C \} \inf = \|f\|_{L^\infty}$$

سوف نتحقق فيما بعد بأن $\|\cdot\|_{L^\infty}$ تنظيم.

ملاحظة 1 - إذا كانت $f \in L^\infty(\Omega)$ فإنه لدينا

$$\cdot |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ ت على } \Omega$$

بالفعل فإنه توجد متتالية C_n بحيث $C_n \rightarrow \|f\|_{L^\infty}$ و لكل n ؛ $|f(x)| \leq C_n$ ت على Ω . إذن $|f(x)| \leq C_n$ لكل $x \in \Omega \setminus E_n$ مع E_n مجموعة ذات قياس صفري. نضع $E = \bigcup_n E_n$ بحيث أن E مجموعة ذات قياس صفري و لدينا $|f(x)| \leq C_n$ لكل n و لكل $x \in \Omega \setminus E$. بالتالي فإن $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ لكل $x \in \Omega \setminus E$

تعريف ٠ - ليكن $1 \leq p \leq \infty$ ؛ نرمز بـ p' للأس المرافق لـ p أي $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

• **مبرهنة 6.4 (متباينة هولدر Hölder's inequality)** - لتكن $f \in L^p$ و $g \in L^{p'}$ مع
 $1 \leq p \leq \infty$
 إذن $f, g \in L^1$ و

$$(3) \quad \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} .$$

إثبات - عندما يكون $p=1$ أو $p=\infty$ ، فالنتيجة بديهية. لنفرض إذن بأن $1 < p < \infty$.
 لنذكر بمتباينة يونغ ²Young's inequality

$$(4) \quad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0;$$

البرهان على (4) بديهي: بما أن الدالة \log مقعرة لأسفل على $]0, \infty[$ فإنه لدينا
 $\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log ab.$

بالتالي

$$\cdot \text{ح.ت } x \in \Omega \quad |f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'}$$

نستنتج بأن $fg \in L^1$ و أن

$$(5) \quad \int |fg| \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{L^{p'}}^{p'}.$$

و بتعويض f بـ λf ($\lambda > 0$) في (5) نحصل على:

$$(6) \quad \int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda^{p'}}\|g\|_{L^{p'}}^{p'}.$$

نختار $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^{p'}}^{p'/p}$ (بطريقة نجعل بها الحد الأيمن من (6) أصغريا). نحصل إذن
 على (3) □

² التي سنستعملها أحيانا أيضا على الشكل $ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^{p'}$ مع $C_\epsilon = \frac{1}{p-1}$

ملاحظة 2. - يجدر معرفة إحدى النتائج المفيدة جدا لمتباينة هولدر: لتكن الدوال

f_1, f_2, \dots, f_k بحيث

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1 \quad \text{مع} \quad 1 \leq i \leq k \quad f_i \in L^{p_i}(\Omega)$$

إذن الجداء $f = f_1 f_2 \dots f_k$ ينتمي إلى $L^p(\Omega)$ و

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

و في الحالة الخاصة إذا كانت $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ مع $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ، فإن $f \in L^r(\Omega)$

لكل $p \leq r \leq q$ ولدينا متباينة الاستكمال interpolation inequality

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad \text{حيث إن} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

انظر [EX].

مبرهنة 7.4. - فضاء متجهي و $\| \cdot \|_{L^p}$ تشكل نظيما لكل $1 \leq p \leq \infty$.

إثبات. - الحالتان $p = 1$ و $p = \infty$ بديهيتان (استعمل الملاحظة 1).

لنفرض بأن $1 < p < \infty$ و لتكن $f, g \in L^p$ لدينا

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

بالتالي $f + g \in L^p$ من جهة أخرى لدينا

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g|.$$

يبد أن $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}$ و بفضل متباينة هولدر نحصل على

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \|g\|_{L^p}$$

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

أي أن

□

• مبرهنة 8.4 (فيشر - رايز - Fischer - Riesz) - فضاء بناخ لكل $1 \leq p \leq \infty$.

إثبات.

(1) لنفرض أولاً بأن $p = \infty$. لتكن (f_n) متتالية كوشي في L^∞ . بإعطاء عدد طبيعي $k \geq 1$

فإنه يوجد N_k بحيث

$$\cdot m, n \geq N_k \quad \text{ل} \quad \|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}$$

إذن توجد مجموعة E_k ذات قياس صفري بحيث

$$(7) \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad \forall m, n \geq N_k.$$

أخيرا، بوضع $E = \bigcup_k E_k$ (مجموعة ذات قياس صفري)، نلاحظ بأن لكل $x \in \Omega \setminus E$ ، فإن المتتالية $f_n(x)$ لكوشي (في \mathbb{R}). لتكن $f_n(x) \rightarrow f(x)$ لـ $x \in \Omega \setminus E$. بأخذ $m \rightarrow \infty$ في (7) نحصل على

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E, \quad \forall n \geq N_k.$$

إذن $f \in L^\infty$ و $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}$ $\forall n \geq N_k$. بالتالي $\|f - f_n\|_{L^\infty} \rightarrow 0$

(2) لنفرض الآن أن $1 \leq p < \infty$. لتكن (f_n) متتالية كوشي في L^p . للحصول على النتيجة يكفي أن نبين بأن متتالية جزئية تتقارب في L^p . نستخرج متتالية جزئية (f_{n_k}) بحيث

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1$$

[و ذلك كالآتي: يوجد n_1 بحيث $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$ لكل $m, n \geq n_1$ ؛ و بعدها نأخذ $n_2 \geq n_1$ بحيث $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2}$ لكل $m, n \geq n_2$ ؛ الخ...]. سنبين بأن (f_{n_k}) متقاربة في L^p . لتسهيل التدوين، نكتب f_k عوض f_{n_k} ، بحيث يكون لدينا

$$(8) \quad \|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

بوضع

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

نحصل على

$$\|g_n\|_{L^p} \leq 1.$$

نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب بأن $g_n(x)$ تتقارب حدت على Ω نحو نهاية منتهية

نرمز لها بـ $g(x)$ مع $g \in L^p$. من جهة أخرى، لدينا لكل $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

بالتالي فإنه حد Ω على $(f_n(x))$ هي متتالية كوشي تتقارب نحو نهاية يرمز لها بـ $f(x)$. لدينا حد Ω

$$(9) \quad n \geq 2 \quad \text{ل} \quad |f(x) - f_n(x)| \leq g(x)$$

نستنتج بأن $f \in L^p$. أخيراً $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ ؛ بالفعل لدينا $|f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$ حد Ω و $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ حد علوي كمول. نختتم بفضل مبرهنة ليبينغ. \square

مبرهنة 9.4. – لتكن (f_n) متتالية من L^p و $f \in L^p$ بحيث $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$.

إذن توجد متتالية جزئية مستخرجة (f_{n_k}) بحيث

$$(أ) \quad f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{حد} \quad \Omega$$

$$(ب) \quad |f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k \quad \text{و حد} \quad \Omega \quad \text{مع} \quad h \in L^p$$

إثبات. – النتيجة بديهية بالنسبة لـ $p = \infty$. لنفرض إذن بأن $1 \leq p < \infty$. بما أن (f_n) متتالية كوشي، يمكن إعادة إثبات المبرهنة 8.4 واستخراج متتالية جزئية (f_{n_k}) تحقق (8). بالتابعة، كما هو في إثبات المبرهنة 8.4، نرى بأن $f_{n_k}(x)$ تتقارب حد Ω نحو نهاية يرمز لها بـ $f^*(x)$. بالإضافة، لدينا بفضل (9)

$$|f^*(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall k \quad \text{حد} \quad \Omega \quad \text{مع} \quad g \in L^p$$

نستنتج بأن $f^* \in L^p$ و بأن $f_{n_k} \rightarrow f^*$ في L^p (استناداً لمبرهنة ليبينغ). بالتالي $f = f^*$ حد Ω و منه نستنتج (أ). للحصول على (ب) يكفي أن نأخذ $h = f^* + g$.

3.4. انعكاسية. قابلية للفصل. ثنوي L^p

سوف نميز دراسة ثلاث حالات:

$$(أ) \quad 1 < p < \infty$$

$$(ب) \quad p = 1$$

$$(ج) \quad p = \infty.$$

³ يجب ابتداء التفريق بين f و f^* : نعرف بأن $f \rightarrow f_n$ في L^p و بأن $f_n(x) \rightarrow f^*(x)$ حد Ω .

١. دراسة L^p لـ $1 < p < \infty$

إنها أفضل الحالات حيث إن L^p انعكاسي، قابل للفصل وثنوي L^p يتطابق مع $L^{p'}$.

• مبرهنة 10.4. - L^p انعكاسي لـ $1 < p < \infty$

يقسم البرهان إلى ثلاث مراحل.

المرحلة الأولى (متباينة Clarkson الأولى) - ليكن $2 \leq p < \infty$ لدينا

$$(10) \quad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad \forall f, g \in L^p.$$

إثبات - بالطبع فإنه يكفي أن نبرهن بأن

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} (|a|^p + |b|^p) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

لدينا

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$$

(عد إلى الحالة حيث $\beta = 1$ ولاحظ بأن الدالة $(x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1$ متزايدة على

$[0, \infty[$. بأخذ $\alpha = \left| \frac{a+b}{2} \right|$ و $\beta = \left| \frac{a-b}{2} \right|$ نحصل على

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{p/2} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{p/2} \leq \frac{1}{2} |a|^p + \frac{1}{2} |b|^p.$$

[هذه المتباينة الأخيرة ناتجة عن خاصية التحديب للدالة $x \mapsto |x|^{p/2}$ لأن $p \geq 2$.] \square

المرحلة الثانية. - L^p محدب بانتظام، و بالتالي انعكاسي لـ $2 \leq p < \infty$.

بالفعل، ليكن $\epsilon > 0$ ثابتاً. نفرض أن

$$\|f\|_{L^p} \leq 1 \quad \text{و} \quad \|g\|_{L^p} \leq 1 \quad \text{و} \quad \|f-g\|_{L^p} > \epsilon$$

نستنتج من (10) بأن

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} < 1 - \delta \quad \text{و منه} \quad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p$$

مع

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0.$$

إذن L^p محدب بانتظام، و بالتالي انعكاسي بفضل البرهنة 29.3 . □

المرحلة الثالثة - L^p انعكاسي لـ $1 < p \leq 2$.

إثبات - ليكن $1 < p \leq 2$. نعتبر المؤثر $T : L^p \rightarrow (L^{p'})'$ المعرف كالآتي :

ليكن $u \in L^p$ مثبتا؛ التطبيق $f \in L^{p'} \mapsto \int u f$ ، نرمل له بـ Tu بحيث

$$\langle Tu, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^{p'}.$$

لدينا (بناء على متباينة هولدر)

$$|\langle Tu, f \rangle| \leq \|u\|_{L^p} \|f\|_{L^{p'}}$$

و بالتالي

$$(11) \quad \|Tu\|_{(L^{p'})'} \leq \|u\|_{L^p}.$$

من جهة أخرى، نضع

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2} u(x) \quad \text{إذ} \quad f_0(x) = 0 \quad \text{إذا} \quad u(x) = 0.$$

لدينا $f_0 \in L^{p'}$ ، $\|f_0\|_{L^{p'}} = \|u\|_{L^p}^{p-1}$ ، و $\langle Tu, f_0 \rangle = \|u\|_{L^p}^p$. إذن

$$(12) \quad \|Tu\|_{(L^{p'})'} \geq \frac{\langle Tu, f_0 \rangle}{\|f_0\|} = \|u\|_{L^p}.$$

بمقارنة (11) و (12) نحصل على $\|Tu\|_{(L^{p'})'} = \|u\|_{L^p}$. نستنتج بأن T تقايس من L^p إلى فضاء جزئي مغلق (لأن L^p كامل) من $(L^{p'})'$. لكن $L^{p'}$ انعكاسي (المرحلة الثانية) و عليه (لازمة 18.3) فإن $(L^{p'})'$ انعكاسي . بالتالي (قضية 17.3) فإن $T(L^p)$ انعكاسي و كذلك L^p . □

ملاحظة 3. - نثبت أيضا بأن L^p محدب بانتظام في حالة $1 < p \leq 2$. نستعمل لهذا

الغرض متباينة Clarkson الثانية الصالحة لـ $1 < p \leq 2$:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \leq \left[\frac{1}{2} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|g\|_{L^p}^p \right]^{1/(p-1)}.$$

هذه المتباينة صعبة الإثبات إلى حد ما مقارنة بمتباينة Clarkson الأولى؛ انظر مثلا [EX] أو [EX] · Hewitt – Stromberg [1] و لقاربة مختلفة قليلا، انظر [1] Diestel ، [1] Morawetz و

• **مبرهنة 11.4 (مبرهنة التمثيل لرايز) -** ليكن $1 < p < \infty$ وليكن $\varphi \in (L^p)'$.
إذن يوجد $u \in L^{p'}$ وحيد بحيث

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p.$$

بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

• **ملاحظة 4.** - المبرهنة 11.4 هامة جدا. فهي تبين بأن أي دالي خطي مستمر على L^p مع $1 < p < \infty$ ، يمكن تمثيله بواسطة دالة من $L^{p'}$. التطبيق $\varphi \mapsto u$ هو مؤثر خطي متقايس و غامر، يمكننا من مطابقة ثنوي L^p مع الفضاء $L^{p'}$. فيما يلي سنستعمل بشكل منتظم المطابقة

$$(L^p)' = L^{p'}.$$

إثبات - نعرف المؤثر $T : L^{p'} \rightarrow (L^p)'$ بـ

$$\langle Tu, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p$$

و عليه نحصل على

$$\|Tu\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^{p'}} \quad \forall u \in L^{p'}$$

(اعمل بالطريقة المتبعة في المرحلة الثالثة من إثبات المبرهنة 10.4) . يجب علينا أن نتحقق بأن T غامر . نضع $E = T(L^{p'})$. بما أن E فضاء جزئي مغلق، يبقى لنا أن نبين أن E كثيف في $(L^p)'$. ليكن $h \in (L^p)''$ [لأن $L^p = L^p$ انعكاسي] بحيث $\langle Tu, h \rangle = 0$ لكل $u \in L^{p'}$ ؛ نتحقق بأن $h = 0$ لدينا

$$\int u h = \langle Tu, h \rangle = 0 \quad \forall u \in L^{p'}.$$

نستنتج بأن $h = 0$ باختيار $u = |h|^{p-2}h$. □

• **مبرهنة 12.4 (كثافة) -** الفضاء $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$ لـ $1 \leq p < \infty$.

لنبدأ بتعريف و توطئة.

تعريف. - ليكن $1 \leq p \leq \infty$ ؛ نقول بأن دالة $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ تنتمي إلى $L^p_{loc}(\Omega)$ إذا
 $\cdot f \mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ لكل متراس $K \subset \Omega$.

توطئة 2.4. - لتكن $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ بحيث

$$(13) \quad \int f u = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega).$$

إذن $f = 0$ ح. ت على Ω .

إثبات التوطئة 2.4. - نعمل على مرحلتين:

(1) لنفرض إضافة أنه لدينا $f \in L^1(\Omega)$ و $|\Omega| < \infty$.
 ل $\epsilon > 0$ معطى، يوجد $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث $\|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon$. بحسب (13) لدينا

$$(14) \quad \left| \int f_1 u \right| \leq \epsilon \|u\|_{L^\infty} \quad \forall u \in C_c(\Omega).$$

ليكن

$$\begin{aligned} K_1 &= \{x \in \Omega, f_1(x) \geq \epsilon\} \\ K_2 &= \{x \in \Omega, f_1(x) \leq -\epsilon\}. \end{aligned}$$

بما أن K_1 و K_2 متراسان منفصلان، فإنه يمكننا بفضل مبرهنة Tietze - Urysohn (انظر

[1] Dieudonné ، [2] L. Schwartz أو [1] Yosida) إنشاء دالة $u_0 \in C_c(\Omega)$ بحيث

$$\left. \begin{array}{l} x \in K_1 \quad \text{إذا} \quad +1 \\ x \in K_2 \quad \text{إذا} \quad -1 \end{array} \right\} = u_0(x)$$

و

$$\cdot x \in \Omega \quad \text{لكل} \quad |u_0(x)| \leq 1$$

بوضع $K = K_1 \cup K_2$ ، نحصل على

$$\int_{\Omega} f_1 u_0 = \int_{\Omega \setminus K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

إذن، بفضل (14)

⁴ لتكن $A \subset \Omega$ قيوسة، رمز بـ $|A|$ لقياس A ؛ من المحتمل أن يكون $|A|$ لانهائياً.

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 \leq \epsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1 u_0| \leq \epsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1|.$$

بالتالي

$$\int_{\Omega} |f_1| = \int_K |f_1| + \int_{\Omega \setminus K} |f_1| \leq \epsilon + 2 \int_{\Omega \setminus K} |f_1| \leq \epsilon + 2\epsilon|\Omega|$$

ذلك لأن

$$\int_{\Omega \setminus K} |f_1| \leq \epsilon$$

إذن

$$\|f\|_{L^1} \leq \|f - f_1\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1} \leq 2\epsilon + 2\epsilon|\Omega|.$$

و حيث إن هذه المتباينة محققة لكل $\epsilon > 0$ ، نستنتج بأن $f = 0$ ح.ت على Ω .

(2) لتتطرق الآن إلى الحالة العامة. نكتب $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ حيث إن Ω_n مجموعة مفتوحة، $\bar{\Omega}_n$

متراص، $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$ [خذ مثلاً $\Omega_n = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, C^\Omega) > \frac{1}{n} \text{ و } |x| < n\}$]. بتطبيق ما سبق على Ω_n و $f|_{\Omega_n}$ ، نرى أن $f = 0$ ح.ت على Ω_n و نستنتج بأن $f = 0$ ح.ت على Ω . \square

إثبات المبرهنة 12.4 - نعرف مسبقاً بأن $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^1(\Omega)$. لنفرض إذن بأن $1 < p < \infty$. لإثبات أن $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$ ، يكفي أن نتحقق أنه إذا كان $h \in L^p(\Omega)$ بحيث $\int hu = 0$ لكل $u \in C_c(\Omega)$ ، فإن $h = 0$. لكن $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ بما أن $\int |h| \mathbf{1}_K \leq \|h\|_{L^p} |K|^{1/p} < \infty$ و يمكننا إذن تطبيق التوطئة 2.4 لنستنتج بأن $h = 0$ ح.ت. \square

مبرهنة 13.4 - $L^p(\Omega)$ قابل للفصل لكل $1 \leq p < \infty$.

إثبات - لنرمز بـ $(R_i)_{i \in I}$ إلى العائلة (القابلة للعد) المؤلفة من المجموعات R ذات

$$\text{الشكل } [a_k, b_k] \text{ مع } R = \prod_{k=1}^N [a_k, b_k] \text{ و } a_k, b_k \in \mathbb{Q} \text{ و } R \subset \Omega.$$

نرمز بـ E إلى الفضاء التجهي المعروف على \mathbb{Q} و المولد بالدوال 1_{R_i} (أي التوافق الخطية المتتمية ذات المعاملات المنطقية من الدوال 1_{R_i})؛ وذلك حتى يكون E قابلا للعد. لنبين أن E كثيف في $L^p(\Omega)$. ليكن $f \in L^p(\Omega)$ و $\epsilon > 0$ مثبتين. ليكن $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث إن $\|f - f_1\|_{L^p} < \epsilon$ (مبرهنة 12.4). لتكن Ω' مجموعة مفتوحة و محدودة بحيث $Supp f_1 \subset \Omega' \subset \Omega$. بما أن $f_1 \in C_c(\Omega')$ ، يمكننا بسهولة إنشاء دالة $f_2 \in E$ بحيث $Supp f_2 \subset \Omega'$ و $|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\epsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$ (نبدأ بتغطية $Supp f_1$ بعدد من المجموعات R_i بحيث إن مدى تردد f_1 على R_i يكون أقل من أو يساوي $\frac{\epsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$). ينتج عن ذلك أن $\|f_2 - f_1\|_{L^p} \leq \epsilon$ و بالتالي $\|f - f_2\|_{L^p} < 2\epsilon$. □

ملاحظة 5. - لإثبات المبرهنة 13.4 كان بالإمكان أيضا استعمال مسألة إذا كان K فضاء متريا متراصا فإن $C(K)$ قابل للفصل (انظر مثلا [1] (7.4.4) Dieudonné).

ب. دراسة L^1 .

• **مبرهنة 14.4.** - ليكن $\varphi \in (L^1)'$ إذن يوجد $u \in L^\infty$ وحيد بحيث

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^1.$$

بالإضافة إلى ذلك فإنه لدينا

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$$

• **ملاحظة 6.** - تؤكد المبرهنة 14.4 بأن أي دالي خطي مستمر على L^1 يمثل بواسطة دالة من L^∞ . التطبيق $u \mapsto \varphi$ هو تقايس غامر، يمكننا من مطابقة $(L^1)'$ و L^∞ فيما يلي سنستعمل بشكل منتظم المطابقة

$$(L^1)' = L^\infty.$$

إثبات. - لنبدأ بإثبات وجود u . نختار دالة $w \in L^2(\Omega)$ بحيث أنه لكل متراص $K \subset \Omega$ ، $w \geq \epsilon_K > 0$ على K [من الواضح وجود دالة كهذه: خذ مثلا $w(x) = \alpha_n$ لـ $x \in \Omega$ ، $n \leq |x| < n+1$ ، و قم بتعديل الثوابت $\alpha_n > 0$ بحيث أن $w \in L^2(\Omega)$]. التطبيق $f \in L^2 \mapsto \langle \varphi, w f \rangle$ هو دالي خطي مستمر على L^2 .

و بحسب البرهنة 11.4 (مطبقة لـ $p=2$) فإنه يوجد $v \in L^2$ بحيث

$$(15) \quad \langle \varphi, wf \rangle = \int v f \quad \forall f \in L^2.$$

لنضع $u(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$ ؛ التي هي معرفة بما أن $w(x) > 0$ لكل $x \in \Omega$ و u قیوسة. لنثبت أن $u \in L^\infty$ و أن $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)'} \cdot$ بحسب (15) لدينا

$$(16) \quad \left| \int v f \right| \leq \|\varphi\|_{(L^1)'} \|wf\|_{L^1} \quad \forall f \in L^2.$$

ليكن $C > \|\varphi\|_{(L^1)'}$ لنبين بأن قياس المجموعة

$$A = \{x \in \Omega; |u(x)| > C\}$$

صفري (و بالتالي فإن $u \in L^\infty$ و أن $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)'}$) . لنستدل بالتناقض. إذا كان قياس A غير صفري فإنه توجد مجموعة $\tilde{A} \subset A$ قیوسة بحيث أن $0 < |\tilde{A}| < \infty$. لنستعمل في (16) الدالة

$$\left. \begin{array}{l} u(x) > 0 \quad \text{و} \quad x \in \tilde{A} \quad \text{إذا} \quad +1 \\ u(x) < 0 \quad \text{و} \quad x \in \tilde{A} \quad \text{إذا} \quad -1 \\ x \in \Omega \setminus \tilde{A} \quad \text{إذا} \quad 0 \end{array} \right\} = f(x)$$

نحصل على $\int_{\tilde{A}} |u| w \leq \|\varphi\|_{(L^1)'}$ ، و بالتالي $\int_{\tilde{A}} w \leq C \int_{\tilde{A}} w$ ، مما يؤدي إلى تناقض بما أن $\int_{\tilde{A}} w > 0$.

لنلخص: لقد أنشأنا دالة $u \in L^\infty(\Omega)$ بحيث $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)'}$ و كذلك

$$(17) \quad \langle \varphi, wf \rangle = \int u w f \quad \forall f \in L^2.$$

و هذا يستلزم

$$(18) \quad \langle \varphi, g \rangle = \int u g \quad \forall g \in C_c(\Omega).$$

بالفعل إذا $g \in C_c(\Omega)$ فإن $f = \frac{g}{w} \in L^2$ (بما أن $w \geq \epsilon > 0$ على $\text{Supp } g$) و عليه يمكن تعويض f في (17) . و حيث أن $C_c(\Omega)$ كثيف في L^1 ، يمكن الاستنتاج من (18) أن

$$\langle \varphi, g \rangle = \int u g \quad \forall g \in L^1.$$

أخيرا، لدينا

$$|\langle \varphi, g \rangle| \leq \int |ug| \leq \|u\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \quad \forall g \in L^1$$

ومنه أن $\|\varphi\|_{(L^1)'} \leq \|u\|_{L^\infty}$ مما ينتج $\|\varphi\|_{(L^1)'} = \|u\|_{L^\infty}$ أما وحدانية الدالة u فهي نتيجة مباشرة للتوطئة 2.4. □

• **ملاحظة 7.** - L^1 فضاء غير انعكاسي. بالفعل، لنفرض (تثبيتنا للأفكار) أن $0 \in \Omega$. لنعتبر المتتالية $f_n = \alpha_n \mathbf{1}_{B(0, \frac{1}{n})}$ حيث العدد الطبيعي n كبير بما فيه الكفاية حتى يكون لدينا $B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ و $\alpha_n = \left| B(0, \frac{1}{n}) \right|^{-1}$ بحيث إن $\|f_n\|_{L^1} = 1$. لو كان L^1 انعكاسيا، لوجدت متتالية جزئية (f_{n_k}) و دالة $f \in L^1$ بحيث $f_{n_k} \rightharpoonup f$ للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(L^1, L^\infty)$ إذن

$$(19) \quad \int f_{n_k} \varphi \rightarrow \int f \varphi \quad \forall \varphi \in L^\infty.$$

عندما تكون $\varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$ نرى بأن $\int f_{n_k} \varphi = 0$ لـ k كبير بما فيه الكفاية. و منه ينتج من (19) بأن

$$\int f \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\}).$$

لنطبق التوطئة 2.4 في المجموعة المفتوحة $\Omega \setminus \{0\}$ على الدالة f (المقصورة على $\Omega \setminus \{0\}$) فنحصل على أن $f = 0$ ح. ت على $\Omega \setminus \{0\}$. إذن $f = 0$ ح. ت على Ω . من جهة أخرى، إذا أخذنا $\varphi \equiv 1$ في (19) نصل إلى $\int f = 1 -$ مما يؤدي إلى تناقض.

ج. دراسة L^∞

لقد رأينا (مبرهنة 14.4) بأن $L^\infty = (L^1)'$ من هذا فإن الفضاء L^∞ يمتلك بعض الخواص " الحسنة " من بينها:

• (1) كرة الوحدة المغلقة B_{L^∞} متراسة للطوبولوجيا الضعيفة * $\sigma(L^\infty, L^1)$ (مبرهنة 15.3).

• (2) إذا كانت (f_n) متتالية محدودة في L^∞ ، يمكننا استخراج متتالية جزئية متقاربة في L^∞ للطوبولوجيا الضعيفة * $\sigma(L^\infty, L^1)$ (مبرهنة 25.3 و مبرهنة 13.4).

غير أن L^∞ ليس انعكاسيا (و إلا فإن L^1 سيكون انعكاسيا نتيجة للازمة 18.3 علما بأن L^1 ليس كذلك).

ثنوي L^∞ يحوي L^1 (بما أن $(L^1)' = L^\infty$) و هو أكبر منه فعليا؛ توجد داليات خطية مستمرة φ على L^∞ ليست من النوع

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^\infty \quad \text{مع} \quad u \in L^1$$

لننشئ مثلا " واقعا " . لنفرض أن $0 \in \Omega$ و لتكن $\varphi_0 : C_c(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $\varphi_0(f) = f(0)$ لـ $f \in C_c(\Omega)$ بحيث تكون φ_0 داليا خطيا و مستمرا على $C_c(\Omega)$ للنظيم L^∞ . حسب مبرهنة هان - بناخ، يتمدد φ_0 إلى دالي خطي و مستمر على L^∞ نمرز له بـ φ لدينا

$$(20) \quad \langle \varphi, f \rangle = f(0) \quad \forall f \in C_c(\Omega).$$

لنبين أنه لا توجد دالة $u \in L^1$ بحيث

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^\infty.$$

بالفعل لو أن هذه الدالة u وجدت لأصبح لدينا

$$\int u f = 0 \quad \forall f \in C_c(\Omega \setminus \{0\}).$$

اعتمادا على التوطئة 2.4 (مطبقة على $\Omega \setminus \{0\}$) نحصل على $u = 0$ حـ ت على $\Omega \setminus \{0\}$ مما يستلزم $u = 0$ حـ ت على Ω . بالتالي

$$\langle \varphi, f \rangle = 0 \quad \forall f \in L^\infty$$

– و هذا يناقض (20) . □

* **ملاحظة 8** . – إذا كان ثنوي L^∞ لا يتطابق مع L^1 ، فيمكننا التساؤل إلى ماذا " يشبه " $(L^\infty)'$. من أجل هذا الغرض، نعتبر $L^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ كـ C^* جبر بناخ تبديلي (انظر مثلا [1] Rudin) . بحسب مبرهنة Gelfand ، فإن $L^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ متشاكل تقابليا و متقايس مع $C(K; \mathbb{C})$ (حيث إن K فضاء طوبولوجي متراص، و بصورة أدق هو طيف جبر L^∞) . نتيجة لذلك فإن $(L^\infty(\Omega; \mathbb{C}))'$ يتطابق مع فضاء قياسات (رادون Radon) على K (بقيم في \mathbb{C}) [و $(L^\infty(\Omega; \mathbb{R}))'$ يتطابق مع فضاء قياسات (رادون) على K بقيم في \mathbb{R}] . لمزيد من التفاصيل، انظر [1] Rudin أو [1] Yosida ، صفحة 118 .

ملاحظة 9 . – الفضاء L^∞ غير قابل للفصل . لإثبات هذا الأمر، من الملائم استعمال الـ

توطئة 3.4. - ليكن E فضاء بناخ. لنفرض أنه توجد عائلة $(O_i)_{i \in I}$ بحيث

(أ) لكل $i \in I$ ، O_i مجموعة مفتوحة غير خالية من E .

(ب) إذا كان $i \neq j$ ، $O_i \cap O_j = \emptyset$.

(ج) I غير قابل للعد.

إذن E غير قابل للفصل.

إثبات التوطئة 3.4. - لنبرهن بالتناقض و نفرض بأن E قابل للفصل. لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية كثيفة في E . لكل $i \in I$ ، $O_i \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ ، ونختار $n(i)$ بحيث $u_{n(i)} \in O_i$. التطبيق $i \mapsto n(i)$ متباين؛ إذ أن $n(i) = n(j)$ يستلزم $O_i \cap O_j \neq \emptyset$ و $u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$ و منه $i = j$. بالتالي فإن I قابل للعد - وهو ما يناقض (ج). \square

لنبين الآن أن L^∞ غير قابل للفصل. لكل $a \in \Omega$ ، نثبت $r_a < \text{dist}(a, C^c)$ ؛ نضع $u_a = \mathbf{1}_{B(a, r_a)}$

$$O_a = \left\{ f \in L^\infty; \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2} \right\}.$$

نتحقق بدون عناء بأن العائلة $(O_a)_{a \in \Omega}$ تستوفي (أ)، (ب) و (ج).

يلخص الجدول الآتي الخواص الأساسية لفضاءات L^p التي التقيناها في المقطع 3.4.

الفضاء	انعكاسي	قابل للفصل	الفضاء الثنوي
L^p $1 < p < \infty$	نعم	نعم	$L^{p'}$
L^1	لا	نعم	L^∞
L^∞	لا	لا	يحتوي L^1 فعلياً

4.4. الملفوف و التنظيم

في هذه الفقرة نأخذ $\Omega = \mathbb{R}^N$ معاداً في القضية 17.4 و اللازمة 23.4 .

• **مبرهنة 15.4** - لتكن $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leq p \leq \infty$.
 إذن لـ $x \in \mathbb{R}^N$ ح.ت، الدالة $y \mapsto f(x-y)g(y)$ كمولة (قابلة للتكامل) على \mathbb{R}^N .
 نضع

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

إذن $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ و

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

إثبات - النتيجة بديهية إذا $p = \infty$. لنفرض أولاً أن $p = 1$ و لتكن

$$F(x, y) = f(x-y)g(y).$$

لـ $y \in \mathbb{R}^N$ ح.ت، لدينا

$$\int |F(x, y)|dx = |g(y)| \int |f(x-y)|dx = \|f\|_{L^1} |g(y)| < \infty$$

و

$$\int dy \int |F(x, y)|dx = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

بتطبيق مبرهنة تونيللي (مبرهنة 4.4) نرى بأن $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. بفضل مبرهنة فوبيني (مبرهنة 5.4) نحصل على

$$x \in \mathbb{R}^N \quad \text{ح.ت} \quad \int |F(x, y)|dy < \infty$$

و

$$\int dx \int |F(x, y)|dy \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

يتطابق هذا تماما مع استنتاج المبرهنة 15.4 .

لنفرض الآن بأن $1 < p < \infty$. مما سبق نعرف أنه لـ $x \in \mathbb{R}^N$ حيث مثبت، فإن الدالة $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ كمولة على \mathbb{R}^N ؛ أي

$$|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L_y^p(\mathbb{R}^N).$$

بما أن $|f(x-y)|^{1/p'} \in L_y^{p'}$ ، فإننا نستنتج من متباينة هولدر أن

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \cdot |f(x-y)|^{1/p'} \in L_y^1$$

و

$$\int |f(x-y)||g(y)| dy \leq \left(\int |f(x-y)||g(y)|^p dy \right)^{1/p} \|f\|_{L^1}^{1/p'}$$

أي أن

$$|(f * g)(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x) \cdot \|f\|_{L^1}^{p/p'}.$$

بتطبيق نتيجة الحالة $p=1$ ، نرى بأن

$$\|f * g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}^p \|f\|_{L^1}^{p/p'} \quad \text{و} \quad f * g \in L^p$$

أي أن

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

□

ترميز: - بإعطاء دالة f ، نضع $\check{f}(x) = f(-x)$.

قضية 16.4 - لتكن $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ، $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ و $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ إذن لدينا

$$\int (f * g)h = \int g(\check{f} * h).$$

إثبات: - الدالة $F(x, y) = f(x-y)g(y)h(x)$ تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ و ذلك لأن

$$\int |h(x)| \left(\int |f(x-y)| |g(y)| dy \right) dx < \infty$$

نتيجة للمبرهنة 15.4 و لتباينة هولدر.
بالتالي

$$\int (f * g)(x) h(x) dx = \int dx \int F(x, y) dy = \int dy \int F(x, y) dx = \int g(y) (\check{f} * h)(y) dy.$$

□

الحوامل في الملفوف

إن مفهوم الحامل لدالة مستمرة جد معروف و هو المجموعة التتممة لأكبر مجموعة مفتوحة تكون عليها الدالة f معدومة (أو بمعنى آخر هو إغلاق المجموعة $\{x; f(x) \neq 0\}$) عند تعاملنا مع الدوال القیوسة يجب أن نكون حذرين - لأن هذه الدوال معرفة حيثما تقريبا - و عليه فإن التعريف السابق لا يكون صالحا [يمكن الاقتناع بذلك باعتبار الدالة $1_{\mathbb{Q}}$ التعريف الصائب لهذه الحالة هو التالي:

قضية 17.4 و تعريف الحامل. - لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة و لتكن f دالة معرفة على Ω و بقيم في \mathbb{R} . نعتبر عائلة جميع المجموعات المفتوحة $(\omega_i)_{i \in I}$ ، $\omega_i \subset \Omega$ بحيث لكل

$$i \in I, f = 0 \text{ على } \omega_i \cdot \text{نضع } \omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$$

إذن $f = 0$ على ω

بالتعريف فإن $Supp f = \Omega \setminus \omega$

ملاحظة 10.

(ا) إذا كانت f_1 و f_2 دالتين بحيث $f_1 = f_2$ على Ω فإن $Supp f_1 = Supp f_2$.
يمكننا إذن التحدث عن حامل دالة $f \in L^p$ (دون توضيح أي ممثل نختاره في صف التكافؤ).

ب) إذا كانت f مستمرة على Ω ، تتحقق بيسر بأن هذا التعريف يتطابق مع التعريف العادي.

إثبات - ليس واضحا أن $f=0$ ح.ت على ω نظرا لأن العائلة I ليست قابلة للعد. و لكن يمكننا الوصول إلى حالة قابلية العد بالطريقة التالية :

لتكن (K_n) متتالية متراصات بحيث $\omega = \bigcup_n K_n$

[خذ مثلا $K_n = \{ x \in \omega \mid |x| \leq n \text{ و } \text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \omega) \geq \frac{1}{n} \}$]

بعد ذلك ، لكل n ، يغطي K_n بعدد منته من الـ ω_i ، ليكن $K_n \subset \bigcup_{i \in I_n} \omega_i$ مع $I_n \subset I$

منته. بوضع $J = \bigcup_n I_n$ (J قابل للعد) لدينا $\omega = \bigcup_{i \in J} \omega_i$

بما أن $f=0$ ح.ت على ω_i ، نستنتج بأن $f=0$ ح.ت على ω . \square

• **قضية 18.4** - لتكن $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. إذن

$$\text{Supp}(f * g) \subset \overline{\text{Supp}f + \text{Supp}g}$$

إثبات - ليكن $x \in \mathbb{R}^N$ مثبتا بحيث تكون الدالة $y \mapsto f(x-y)g(y)$ كمولة (انظر المبرهنة 15.4) . لدينا

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int_{(x-\text{Supp}f) \cap \text{Supp}g} f(x-y)g(y)dy.$$

إذا كان $x \notin \text{Supp}f + \text{Supp}g$ ، فإن $(x - \text{Supp}f) \cap \text{Supp}g = \emptyset$ و $(f * g)(x) = 0$. إذن

$$(f * g)(x) = 0 \quad \text{ح.ت على } C(\text{Supp}f + \text{Supp}g)$$

و بالخصوص

$$(f * g)(x) = 0 \quad \text{ح.ت على } \text{Int} C(\text{Supp}f + \text{Supp}g)$$

و منه فإن $\text{Supp}(f * g) \subset \overline{\text{Supp}f + \text{Supp}g}$. \square

• **ملاحظة 11.** - بطبيعة الحال إذا كانت كل من f و g ذات حامل متراس، فإن $f * g$ تكون ذات حامل متراس. و على العموم إذا كان حامل إحداهما فقط متراسا، فإن $f * g$ لا تكون ذات حامل متراس.

قضية 19.4. - لتكن $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ إذن

$$f * g \in C(\mathbb{R}^N).$$

إثبات. - ننبه أولا أنه لكل $x \in \mathbb{R}^N$ ، فإن الدالة $y \mapsto f(x-y)g(y)$ كمولة على \mathbb{R}^N و بالتالي فإن $(f * g)(x)$ معرفة لكل $x \in \mathbb{R}^N$.
لتكن $x_n \rightarrow x$ و لنضع

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$$

$$F(y) = f(x - y)g(y)$$

حتى يكون $F_n(y) \rightarrow F(y)$ ح.ت على \mathbb{R}^N . من جهة أخرى، ليكن K متراسا مثبتا بحيث أن $(x_n - \text{Supp}f) \subset K$ لكل n . إذن $f(x_n - y) = 0$ لـ $y \notin K$ و بالتالي فإن

$$|F_n(y)| \leq \|f\|_{L^\infty} \mathbf{1}_K(y) |g(y)|$$

$$(f * g)(x_n) = \int F_n(y) dy \rightarrow \int F(y) dy = (f * g)(x).$$

□

ترميز. - يرمز $C^k(\Omega)$ إلى فضاء الدوال القابلة للاشتقاق المستمر على Ω إلى المرتبة k

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega)$$

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

(تستعمل بعض المراجع الرمز $D(\Omega)$ أو $C_0^\infty(\Omega)$ عوضا عن $C_c^\infty(\Omega)$).

• قضية 20.4 - لتكن $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ (k عدد طبيعي) . إذن⁵

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g \quad \text{و} \quad f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$$

بالخصوص، إذا كانت $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ ، فإن $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

إثبات - باستعمال الاستقراء نعود مباشرة إلى الحالة $k = 1$.

ليكن $x \in \mathbb{R}^N$ مثبتاً؛ لنبين أن $f * g$ قابلة للاشتقاق عند x و بأن⁶

$$\nabla(f * g)(x) = (\nabla f * g)(x).$$

ليكن $h \in \mathbb{R}^N$ مع $|h| < 1$ (h مقدر لأن يؤول إلى 0) . لدينا

$$\begin{aligned} & |f(x + h - y) - f(x - y) - h \nabla f(x - y)| \\ &= \left| \int_0^1 [h \nabla f(x + sh - y) - h \nabla f(x - y)] ds \right| \leq |h| \epsilon(|h|) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

مع $\epsilon(|h|) \rightarrow 0$ عندما $|h| \rightarrow 0$ (بما أن ∇f مستمر بانتظام على \mathbb{R}^N) .

ليكن K متراصاً مثبتاً كبيراً بقدر كاف بحيث أن $x + B(0, 1) - \text{Supp} f \subset K$. لدينا

$$f(x + h - y) - f(x - y) - h \nabla f(x - y) = 0 \quad \forall y \notin K, \quad \forall h \in B(0, 1)$$

و منه

$$|f(x + h - y) - f(x - y) - h \nabla f(x - y)| \leq |h| \epsilon(|h|) \mathbf{1}_K(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall h \in B(0, 1).$$

ما ينتج عنه

⁵ يرمز D^α هنا إلى أي مشتق من المشتقات الحزئية

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f \quad \text{مع} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq k$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right).$$

$$|(f * g)(x + h) - (f * g)(x) - h(\nabla f * g)(x)| \leq |h| \epsilon(|h|) \int_K |g(y)| dy.$$

و عليه فإن $f * g$ قابلة للاشتقاق عند x و $\square \cdot \nabla(f * g)(x) = (\nabla f * g)(x)$

المتاليات المنظمة

تعريف. - نسمي متتالية منظمة (أو تنظيمية) Mollifiers كل متتالية $(\rho_n)_{n \geq 1}$ من الدوال بحيث

$$\cdot \mathbb{R}^N \text{ على } \rho_n(x) \geq 0 \quad , \quad \int \rho_n = 1 \quad , \quad \text{Supp} \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}) \quad , \quad \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

من هنا فصاعداً، سوف نستعمل بشكل منتظم الرمز (ρ_n) للإشارة إلى متتالية منظمة. نلاحظ بأنه توجد متتاليات منظمة. إذ يكفي أن نثبت دالة $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ مع

$$\int \rho > 0 \quad \text{و} \quad \mathbb{R}^N \text{ على } \rho \geq 0 \quad , \quad \text{Supp} \rho \subset B(0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} |x| < 1 \quad \text{إذا} \quad e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \\ |x| \geq 1 \quad \text{إذا} \quad 0 \end{array} \right\} = \rho(x)$$

$$\cdot C = \left(\int \rho \right)^{-1} \text{ مع } \rho_n(x) = C n^N \rho(nx) \text{ نعتبر}$$

قضية 21.4. - لتكن $f \in C(\mathbb{R}^N)$ ؛ إذن $f \rightarrow \rho_n * f$ بانتظام على كل متراس من \mathbb{R}^N .

إثبات. - ليكن $K \subset \mathbb{R}^N$ متراساً مثبتاً. لكل $\epsilon > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ (متعلق بـ K و ϵ) بحيث

$$|f(x - y) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0, \delta).$$

لدينا

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int [f(x - y) - f(x)] \rho_n(y) dy = \int_{B(0, \frac{1}{n})} [f(x - y) - f(x)] \rho_n(y) dy$$

وإذن لـ $n > \frac{1}{\delta}$ و $x \in K$ ،

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \epsilon \int \rho_n = \epsilon.$$

□

• **مبرهنة 22.4.** - لتكن $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leq p < \infty$ إذن $\rho_n * f \rightarrow f$ في $L^p(\mathbb{R}^N)$.

إثبات. - ليكن $\epsilon > 0$ و لتكن $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ مثبتة بحيث أن $\|f - f_1\|_{L^p} < \epsilon$ (انظر المبرهنة 12.4). بحسب القضية 21.4 ، نعرف بأن $\rho_n * f_1 \rightarrow f_1$ بانتظام على كل متراس من جهة أخرى لدينا (انظر القضية 18.4)

$$K \text{ متراس مثبت} \quad , \quad \overline{Supp(\rho_n * f_1) \subset B(0, \frac{1}{n}) + Supp f_1} \subset K$$

بالتالي، نستنتج بأن

$$\|\rho_n * f_1 - f_1\|_{L^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

في الأخير نكتب

$$\rho_n * f - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [\rho_n * f_1 - f_1] + [f_1 - f];$$

ومنه نصل إلى

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p} \leq 2\|f - f_1\|_{L^p} + \|\rho_n * f_1 - f_1\|_{L^p}$$

(اعتمادا على المبرهنة 15.4)

لدينا إذن

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n * f - f\|_{L^p} \leq 2\epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n * f - f\|_{L^p} = 0.$$

أي

□

• **لازمة 23.4.** - لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة كيفية.
 إذن $C_c^\infty(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$ لـ $1 \leq p < \infty$.

إثبات⁷. - لتكن $f \in L^p(\Omega)$ ، $\epsilon > 0$ ، و $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث

$$\|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon.$$

نعتبر الدالة \bar{f}_1 المعرفة بالآتي

$$\left. \begin{array}{l} x \in \Omega \quad \text{إذا} \quad f_1(x) \\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \quad \text{إذا} \quad 0 \end{array} \right\} = \bar{f}_1(x)$$

بحيث أن $\bar{f}_1 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ و (مبرهنة 22.4) $\|\rho_n * \bar{f}_1 - \bar{f}_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$ من جهة أخرى

$$\text{لـ } n \text{ كبير بما فيه الكفاية.} \quad \text{Supp}(\rho_n * \bar{f}_1) \subset B(0, \frac{1}{n}) + \text{Supp} f_1 \subset \Omega$$

لتكن $u_n = (\rho_n * \bar{f}_1)|_\Omega$ ، إذن ، لـ n كبير بما فيه الكفاية ، $u_n \in C_c(\Omega)$ و بالإضافة إلى ذلك
 $\|u_n - f_1\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$
 إذن ، لـ n كبير بما فيه الكفاية ، $\|u_n - f\|_{L^p(\Omega)} < 2\epsilon$ □

5.4. معيار التراص القوي في L^p

إنه من المهم أن نعرف متى تكون عائلة دوال من الفضاء $L^p(\Omega)$ متراصة نسبيًا في $L^p(\Omega)$ بالنسبة للطوبولوجيا القوية. نذكر أولاً بمبرهنة أسكولي التي تحييب على نفس السؤال في $C(K)$ حيث K فضاء متري متراص.

⁷ أدخلت طريقة التنظيم بالملفوف من طرف Leray و Friedrichs .

• **مبرهنة 24.4 (أسكولي)** - ليكن K فضاء متريا متراسا و لتكن \mathcal{K} مجموعة جزئية محدودة من $C(K)$.
نفرض بأن \mathcal{K} متساوية الاستمرار بانتظام؛ أي

$$(21) \cdot \forall f \in \mathcal{K} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \iff d(x_1, x_2) < \delta \quad \text{بحيث} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

إذن \mathcal{K} متراسة نسبيا في $C(K)$.

بالنسبة لإثبات مبرهنة أسكولي، انظر مثلا [1] Dixmier ، [1] Choquet ، [1] Dieudonné ، [1] Yosida . المبرهنة الآتية (و لازمتها) هما " نسختا L^p " لمبرهنة أسكولي .

ترميز:

$$(1) \text{ نضع } (\tau_h f)(x) = f(x+h) \text{ (إنسحاب } f \text{ بـ } h \text{)}$$

(2) لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة؛ نقول بأن مجموعة مفتوحة ω محتواة بقوة في Ω و نكتب $\omega \subset\subset \Omega$ إذا $\omega \subset \subset \bar{\omega}^8$ و إذا كان $\bar{\omega}$ متراسا .

• **مبرهنة 25.4 (M.Riesz - Fréchet - Kolmogorov)** - لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة و لتكن $\omega \subset \Omega$

لتكن \mathcal{F} مجموعة جزئية من $L^p(\Omega)$ مع $1 \leq p < \infty$. نفرض بأن

$$(22) \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \text{بحيث} \quad \delta < d(\omega, C^\Omega) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\text{مع} \quad |h| < \delta \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon$$

إذن $\mathcal{F}|_\omega$ متراسة نسبيا في $L^p(\omega)$.

⁸ $\bar{\omega}$ ترمز إلى إغلاق ω في \mathbb{R}^N .

⁹ لاحظ أنه إذا $x \in \omega$ و $|h| < \delta < d(\omega, C^\Omega)$ فإن $x+h \in \omega$ و بالتالي فإن $f(x+h)$ معرفة. الفرضية (22) هي شرط تساوي استمرارية " مكاملة " ؛ يمكن مقارنتها بـ (21) .

إثبات - يمكننا دائماً الافتراض بأن Ω محدودة. لـ $f \in \mathcal{F}$ نضع

$$\left. \begin{array}{l} x \in \Omega \quad \text{إذا} \quad f(x) \\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \quad \text{إذا} \quad 0 \end{array} \right\} = \bar{f}(x)$$

نضع

$$\bar{\mathcal{F}} = \{\bar{f}; f \in \mathcal{F}\}$$

بحيث إن $\bar{\mathcal{F}}$ تكون محدودة في $L^p(\mathbb{R}^N)$ و في $L^1(\mathbb{R}^N)$. نتبع ثلاث خطوات

(أ) لدينا

$$\forall n > \frac{1}{\delta} \quad \text{و} \quad \forall \bar{f} \in \bar{\mathcal{F}} \quad \|\rho_n * \bar{f} - \bar{f}\|_{L^p(\omega)} < \epsilon$$

ذلك لأن

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)| \rho_n(y) dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y) dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

و منه

$$|(\rho_n * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)|^p \leq \int_{B(0, \frac{1}{n})} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y) dy.$$

إذن

$$\int_{\omega} |(\rho_n * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)|^p dx \leq \int_{B(0, \frac{1}{n})} \rho_n(y) dy \int_{\omega} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p dx < \epsilon^p$$

لـ $n > \frac{1}{\delta}$ (بحسب (22)).

(ب) العائلة $\mathcal{H} = (\rho_n * \bar{f})|_{\omega}$ تحقق، لكل n ، فرضيات مبرهنة أسكولي. بالفعل لدينا

بداية

$$\|\rho_n * \bar{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_n\|_{L^\infty} \|\bar{f}\|_{L^1} \leq C \quad \forall \bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}.$$

من جهة أخرى، لدينا $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$

$$\|\rho_n\|_{Lip} = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\rho_n(z_1) - \rho_n(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \quad 10$$

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \bar{f})(x_1) - (\rho_n * \bar{f})(x_2)| &\leq |x_1 - x_2| \|\rho_n\|_{Lip} \|\bar{f}\|_{L^1} \\ &\leq C|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

و عليه فإن \mathcal{H} متراصة نسبيا في $C(\bar{\omega})$ و بالأحرى في $L^p(\omega)$.

(ج) خلاصة البرهان. بإعطاء $\epsilon > 0$ ، نثبت $n > \frac{1}{\delta}$ بحيث

$$\|(\rho_n * \bar{f}) - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

بما أن \mathcal{H} متراص نسبيا في $L^p(\omega)$ ، يمكننا تغطية \mathcal{H} بعدد منته من الكرات نصف قطرها ϵ (في $L^p(\omega)$). الكرات المقابلة ذات النصف قطر 2ϵ تغطي إذن $\mathcal{F}|_{\omega}$. بالتالي $\mathcal{F}|_{\omega}$ متراصة نسبيا في $L^p(\omega)$. \square

• **لازمة 26.4.** - لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة و لتكن \mathcal{F} مجموعة جزئية محدودة من $L^p(\Omega)$ مع $1 \leq p < \infty$.
نفرض بأن

$$(23) \quad \left. \begin{array}{l} \exists \delta > 0 \quad \forall \omega \subset \subset \Omega \quad \forall \epsilon > 0 \\ \forall f \in \mathcal{F} \quad \text{و} \quad |h| < \delta \quad \text{مع} \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \end{array} \right\} \text{بحيث}$$

$$(24) \quad \cdot \forall f \in \mathcal{F} \quad \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \epsilon \quad \text{بحيث} \quad \exists \omega \subset \subset \Omega \quad \forall \epsilon > 0$$

• إذن \mathcal{F} متراصة نسبيا في $L^p(\Omega)$.

إثبات. - ل $\epsilon > 0$ معطى، نثبت $\omega \subset \subset \Omega$ بحيث

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

بحسب المبرهنة 25.4 نعرف أن $\mathcal{F}|_{\omega}$ متراصة نسبيا في $L^p(\omega)$. يمكننا إذن تغطية $\mathcal{F}|_{\omega}$ بعدد منته من الكرات نصف قطرها ϵ في $L^p(\omega)$. ليكن

$$g_i \in L^p(\omega) \quad \text{مع} \quad \mathcal{F}|_{\omega} \subset \bigcup_{i=1}^k B(g_i, \epsilon)$$

(هذه الكرات مقرررة في $L^p(\omega)$) . نضع

$$\tilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

□ تتحقق بسهولة بأن $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^k B(\tilde{g}_i, 2\epsilon)$ (هذه الكرات مقرررة في $L^p(\Omega)$) .

ملاحظة 12. - عكس اللازمة 26.4 صحيح . (انظر مثلا [EX]) .

ملاحظة 13. - لتكن \mathcal{F} مجموعة جزئية محدودة من $L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leq p < \infty$ تحقق

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ بحيث } \forall h \text{ مع } |h| < \delta \text{ و } \forall f \in \mathcal{F} \cdot \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$$

عموما لا يمكن الاستنتاج بأن \mathcal{F} متراسة نسبيا في $L^p(\mathbb{R}^N)$ ؛ فقط يمكن القول بأن $\mathcal{F}|_\omega$ متراسة نسبيا في $L^p(\omega)$ لكل مجموعة مفتوحة محدودة ω في \mathbb{R}^N . (انظر مثلا في [EX]) .

لننه بتطبيق آخر بسيط (لكن مفيد !) للمبرهنة 25.4 .

لازمة 27.4. - لتكن $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$ دالة مثبتة و لتكن

$$\mathcal{F} = G * \mathcal{B}$$

حيث \mathcal{B} ترمز إلى مجموعة محدودة من $L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leq p < \infty$.
إذن $\mathcal{F}|_\omega$ متراسة نسبيا في $L^p(\omega)$ لكل مجموعة مفتوحة محدودة ω من \mathbb{R}^N .

إثبات. - من الواضح أن \mathcal{F} محدودة في $L^p(\mathbb{R}^N)$ من جهة أخرى إذا كانت $f = G * u$ مع $u \in \mathcal{B}$ فإن

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|(\tau_h G - G) * u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\tau_h G - G\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

نصل إلى النتيجة بفضل الـ

توطئة 4.4. - لتكن $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leq q < \infty$. إذن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h G - G\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

إثبات - ليكن $\epsilon > 0$ معطى و لتكن

$$\|G - G_1\|_{L^q} < \epsilon \quad \text{بحيث} \quad G_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$$

لدينا

$$\begin{aligned} \|\tau_h G - G\|_{L^q} &\leq \|\tau_h G - \tau_h G_1\|_{L^q} + \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q} + \|G_1 - G\|_{L^q} \\ &\leq 2\epsilon + \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q}. \end{aligned}$$

من جهة أخرى، من البديهي أن $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q} = 0$ و منه إذن

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\tau_h G - G\|_{L^q} \leq 2\epsilon.$$

□

تعاليق حول الفصل الرابع

(1) لقد قمنا في المقطع 1.4 بالتذكير ببعض المبادئ الأساسية لنظرية الكاملة. من بين النتائج المفيدة التي لم يتم ذكرها، نورد، من بينها الـ

* **مبرهنة Egorov 28.4** - نرض بأن $|\Omega| < \infty$. لتكن (f_n) متتالية دوال قيوسة من Ω إلى \mathbb{R} بحيث إن

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{ح. ت على } \Omega \quad (\text{مع } |f(x)| < \infty \text{ ح. ت.})$$

إذن

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists A \subset \Omega \quad \text{بحيث} \\ | \Omega \setminus A | < \epsilon \quad \text{و} \quad f_n \rightarrow f \quad \text{بانتظام على } A \end{aligned}$$

بالنسبة للبرهان، انظر مثلا Chae [1] ، Yosida [1] ، Marle [1] ، Malliavin [1] ،
 ، Hewitt – Stromberg [1] ، Dieudonné [2] ، Friedman [3] ،
 · Wheeden – Zygmund [1]

(2) فضاء القياسات على Ω · مجموعات ضعيفة التراص في L^1 ·

لقد رأينا أن المجموعات المحدودة في $L^p(\Omega)$ متراسة نسبيًا للطوبولوجيا $\sigma(L^p, L^{p'})$ لما يكون $1 < p \leq \infty$ · لكن $L^1(\Omega)$ غير انعكاسي و حتى يمكننا إثبات أن $L^1(\Omega)$ ليس فضاء ثنويًا · يستنتج من هذا بأن المجموعات المحدودة في $L^1(\Omega)$ لا تملك أية خاصية للتراص ضمن أي طوبولوجيا ضعيفة · و " لتجاوز هذا العائق " يمكن إغمار $L^1(\Omega)$ في فضاء أكبر: الفضاء $M(\Omega)$ لقياسات رادون على Ω ·

من أجل هذا الغرض، نعتبر الفضاء $E = C_c(\Omega)$ مزودًا بالنظام $\|u\| = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ · نرسم إلى فضائه الثنوي E' بـ $M(\Omega)$ · سوف نطابق $L^1(\Omega)$ مع فضاء جزئي لـ $M(\Omega)$ · من أجل هذا نعرف التطبيق $T : L^1(\Omega) \rightarrow M(\Omega)$ كالآتي:

لـ $f \in L^1(\Omega)$ معطاة، فإن التطبيق $f u \mapsto \int f u$ هو شكل خطي مستمر على $C_c(\Omega)$ نرسم له بـ Tf ؛ بحيث أن

$$\langle Tf, u \rangle_{E', E} = \int f u.$$

تتحقق بسهولة بأن T تطبيق خطي من $L^1(\Omega)$ في $M(\Omega)$ و بأن

$$\|Tf\|_{M(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in C_c(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int f u = \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad (\text{انظر [EX]})$$

بمعنى آخر، T هو تقايس من $L^1(\Omega)$ إلى $M(\Omega)$ · بفضل T يمكننا مطابقة $L^1(\Omega)$ بفضاء جزئي لـ $M(\Omega)$ · المجموعات المحدودة في $L^1(\Omega)$ تكون متراسة نسبيًا في $M(\Omega)$ بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة * $\sigma(M, C_c)$ · كذلك، نرى بأنه إذا كانت (f_n) متتالية محدودة من $L^1(\Omega)$ فإنه توجد متتالية جزئية مستخرجة (f_{n_k}) تتقارب إلى قياس μ للطوبولوجيا $\sigma(M, C_c)$ ، أي

$$\int f_{n_k} u \rightarrow \langle \mu, u \rangle \quad \forall u \in C_c(\Omega).$$

أخيرا نشير إلى المسألة العويصة الآتية: ما هي المجموعات من $L^1(\Omega)$ المتراسة نسبيا للطوبولوجيا $\sigma(L^1, L^\infty)$ ؟
الجواب يعطى بالـ

* **مبرهنة 29.4 (Dunford – Pettis)** . – لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة محدودة (للتبسيط) . لتكن $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ مجموعة جزئية محدودة . إذن \mathcal{F} متراسة نسبيا للطوبولوجيا $\sigma(L^1, L^\infty)$ إذا و فقط إذا كان لدينا

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{بحيث} \quad \int_A |f| < \epsilon \\ \forall f \in \mathcal{F} \quad \text{و} \quad \forall A \subset \Omega \quad \text{مع} \quad |A| < \delta$$

بالنسبة للبرهان، انظر مثلا [1] Dunford – Schwartz ، [1] Beauzamy ، [1] Neveu ، [1] Dellacherie – Meyer (الفصل الأول) أو [EX] .

(3) دوال ذات قيم متجهية

لتكن Ω مجموعة مفتوحة من \mathbb{R}^N وليكن E فضاء بناخ . نعرف $L^p(\Omega; E)$ كفضاء للدوال المعرفة على Ω ، بقيم في E ، القويمة بمعنى يجب توضيحه ، بحيث $\int_{\Omega} \|f(x)\|^p dx < \infty$ مع التغيير الاعتيادي لـ $p = \infty$. إن معظم الخصائص التي رأيناها في المقطعين 2.4 و 3.4 تبقى صحيحة شريطة إضافة فرضيات ملائمة على E (قابل للفصل أو انعكاسي) . على سبيل المثال إذا كان E انعكاسيا و $1 < p < \infty$ فإن $L^p(\Omega; E)$ انعكاسي وثنويه يتطابق مع $L^{p'}(\Omega; E')$ (انظر مثلا [1] Edwards ، [5] L.Schwartz و [1] Marle إذا كان E فضاء هلبرت) . هذه الفضاءات تلعب دورا هاما في نظرية معادلات التطور Evolution equations (في هذه الحالة فإن Ω يكون مجالا من \mathbb{R}) .

(4) نظرية الاستكمال Interpolation Theory

لنعرض نتيجة مثيرة تمثل نقطة البداية لهذه النظرية .

* **مبرهنة 30.4** (M.Riesz – Thorin, Marcinkiewicz) - لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة محدودة (للتبسيط). ليكن $T : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ مؤثرا خطيا و مستمرا. نفرض بأن $T : L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ إذن $T : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ لكل $1 < p < \infty$

بالنسبة للبرهان، انظر مثلا [1] Dunford – Schwartz ، [1] Stein – Weiss ، [1] Reed – Simon (الجزء الثاني) و [EX] . لقد طورت نظرية الاستكمال من طرف Lions ، Calderon ، Peetre ، Stein و غيرهم. تعد وسيلة جد مفيدة في التحليل، و خاصة في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية، انظر مثلا [1] Lions – Magenes .

(5) متباينة يونغ

* **مبرهنة 31.4** (يونغ) - لتكن $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ مع

$$1 \leq p \leq \infty \quad 1 \leq q \leq \infty \quad \text{و} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$$

إذن

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^N) \quad \text{و} \quad \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

بالنسبة للبرهان، انظر مثلا [EX] .

(6) إن مفهوم المفوف - معمما إلى التوزيعات (انظر [1] L.Schwartz) - يلعب دورا أساسيا في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية. مرد هذا، من بين ذلك، إلى إمكانية التعبير عن حل المعادلة $P(D)u = f$ (حيث إن $P(D)$ مؤثر تفاضلي بمعاملات ثابتة) على الشكل $u = E * f$ ، حيث إن E هو الحل الأساسي (fundamental solution) لـ $P(D)$ (مبرهنة Malgrange – Ehrenpreis)؛ انظر التعليق 2 ب من الفصل الأول.