5

فضاءات هلبرت

1.5. تعاريف، خصائص أولية، إسقاط على محدب مغلق

تعريف. ـ ليكن H فضاء متجهيا. الجداء السلمي (u,v) هو دالي ثنائي الخطية من $H \times H$ إلى $\mathbb{R}$ ، متناظر، و معرف موجب [أي $0 \leqslant (u,u)$ $\forall u \in H$ و $0 < (u,u)$ إذا $u \neq 0$].
نذكر بأن الجداء السلمي يحقق متباينة كوشي - شفارتز $\mathrm{Cauchy-Schwarz}$:

$$|(u,v)| \leqslant (u,u)^{1/2}(v,v)^{1/2} \qquad \forall u,v \in H.$$

[نلاحظ أنه لإثبات متباينة كوشي - شفارتز لا نستعمل الفرضية $0 < (u,u)$ إذا $u \neq 0$].
نذكر أيضا بأن $|u| = (u,u)^{1/2}$ هو نظيم [1] .
[بالفعل $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(u,v) \leqslant |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$].
نذكر أخيرا " بمتطابقة متوازي الأضلاع " :

$$(1) \qquad \left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2), \qquad \forall a,b \in H.$$

تعريف. ـ يقال بأن H فضاء هلبرت إذا كان فضاء متجهيا مرفقا بجداء سلمي (u,v) بحيث يكون تاما بالنسبة للنظيم $(u,u)^{1/2}$.

في كل ما سيأتي يرمز H إلى فضاء هلبرت.

---

[1] نرمز عادة بالرمز $|\;|$ (عوضا عن $\|\;\|$) للنظيم المصاحب لجداء سلمي.

مثال أساسي: $L^2(\Omega)$ مرفق بالجداء السلمي

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx$$

هو فضاء هلبرت؛ فضاء صوبوليف H^1 الذي سوف نلتقي به في الفصلين 8 و 9 هو فضاء هلبرت " على منوال " L^2 .

• **قضية** 1.5. ـ H **محدب بانتظام و بالتالي انعكاسي.**

إثبات. ـ ليكن $\epsilon>0$ ، $u,v\in H$ بحيث $|u|\leqslant 1$ ، $|v|\leqslant 1$ و $|u-v|>\epsilon$. بفضل متطابقة متوازي الأضلاع لدينا

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^2\leqslant 1-\frac{\epsilon^2}{4} \quad \text{و بالتالي} \quad \left|\frac{u+v}{2}\right|<1-\delta \quad \text{مع} \quad \delta=1-\left(1-\frac{\epsilon^2}{4}\right)^{1/2}>0 \text{ .}$$

□

• **مبرهنة** 2.5 **(إسقاط على محدب مغلق). ـ ليكن** $K\subset H$ **محدبا مغلقا غير خال. إذن لكل** $f\in H$ ، **يوجد** $u\in K$ **وحيد بحيث**

$$|f-u|=\min_{v\in K}|f-v|. \tag{2}$$

بالإضافة إلى ذلك يتميز u **بالخاصية:**

$$\begin{cases} u\in K \\ (f-u,v-u)\leqslant 0 \qquad \forall v\in K. \end{cases} \tag{3}$$

نضع $u=P_Kf=$ **إسقاط** f **على** K .

إثبات.

أ) وجود. ـ سوف نقدم برهانين

1) الدالة $\varphi(v) = |f - v|$ محدبة، مستمرة و $\lim_{|v|\to\infty} \varphi(v) = +\infty$. إذن (لازمة 20.3) φ تدرك نهايتها الصغرى على K بما أن H انعكاسي.

2) البرهان الثاني لا يستدعي استعمال نظرية الفضاءات الانعكاسية. لتكن (v_n) متتالية تصغيرية لـ (2) ، أي أن $v_n \in K$ و

$$d_n = |f - v_n| \longrightarrow d = \inf_{v\in K} |f - v|.$$

لنبين أن (v_n) هي متتالية كوشي. بتطبيق متطابقة متوازي الأضلاع مع $a = f - v_n$ ، $b = f - v_m$ نصل إلى

$$\left|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right|^2 + \left|\frac{v_n - v_m}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

غير أن $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ ، إذن $\left|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right| \geqslant d$. بالتالي

$$\left|\frac{v_n - v_m}{2}\right|^2 \leqslant \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \qquad \text{و} \qquad \lim_{m,n\to\infty} |v_n - v_m| = 0 \text{ .}$$

إذن $v_n \longrightarrow u \in K$ و لدينا $d = |f - u|$.

ب) تكافؤ (2) و (3)

ليكن $u \in K$ محققا لـ (2) و ليكن $w \in K$. لدينا

$$v = (1 - t)u + tw \in K \qquad \text{لـ} \qquad t \in]0, 1]$$

و إذن

$$|f - u| \leqslant |f - [(1 - t)u + tw]| = |(f - u) - t(w - u)|.$$

بالتالي

$$|f - u|^2 \leqslant |f - u|^2 - 2t(f - u, w - u) + t^2|w - u|^2.$$

أي أن $2(f - u, w - u) \leqslant t|w - u|^2$. عندما $t \longrightarrow 0$ نحصل على (3) .

عكسيا، ليكن $u \in K$ محققا لـ (3) . إذن لدينا

$$|u - f|^2 - |v - f|^2 = 2(f - u, v - u) - |u - v|^2 \leqslant 0 \qquad \forall v \in K;$$

و منه نحصل على (2) .

جـ) وحدانية

ليكن u_1 و u_2 محققين لـ (3) · لدينا

$$(f - u_1, v - u_1) \leqslant 0 \qquad \forall v \in K \tag{4}$$

$$(f - u_2, v - u_2) \leqslant 0 \qquad \forall v \in K. \tag{5}$$

بوضع $v = u_2$ في (4) و $v = u_1$ في (5) ، نحصل بعد الجمع على $0 \leqslant |u_1 - u_2|^2$ [2] · □

قضية 3.5. ـ **تحت فرضيات المبرهنة** 2.5 **لدينا**

$$|P_K f_1 - P_K f_2| \leqslant |f_1 - f_2| \qquad \forall f_1, f_2 \in H.$$

إثبات. ـ بوضعنا $u_1 = P_K f_1$ و $u_2 = P_K f_2$ نصل إلى

$$(f_1 - u_1, v - u_1) \leqslant 0 \qquad \forall v \in K \tag{6}$$

$$(f_2 - u_2, v - u_2) \leqslant 0 \qquad \forall v \in K. \tag{7}$$

بأخذ $v = u_2$ في (6) و $v = u_1$ في (7) نحصل بعد الجمع على

$$|u_1 - u_2|^2 \leqslant (f_1 - f_2, u_1 - u_2).$$

بالتالي $|u_1 - u_2| \leqslant |f_1 - f_2|$ · □

لازمة 4.5. ـ **ليكن** $M \subset H$ **فضاء جزئيا متجهيا مغلقا· ليكن** $f \in H$ ·
إذن $u = P_M f$ **يتميز بـ**

$$\begin{cases} u \in M \\ (f - u, v) = 0 \qquad \forall v \in M. \end{cases} \tag{8}$$

[2] وحدانية u على الشكل (2) تحصل أيضا مباشرة من خاصية التحدب الفعلي للنظيم في فضاء هلبرت·

بالإضافة إلى ذلك فإن P_M مؤثر خطي.

إثبات. ــ من (3) لدينا

$$(f-u, v-u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in M$$

إذن

$$(f-u, tv-u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in M, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

مما ينتج عنه

$$(f-u, v) = 0 \qquad \forall v \in M.$$

و بالعكس عندما يكون u محققا لـ (8) فإن

$$(f-u, v-u) = 0 \qquad \forall v \in M.$$

□

2.5. ثنوي فضاء هلبرت

• **مبرهنة** 5.5 **(مبرهنة التمثيل لرايز - فريشيه** $\text{Riesz} - \text{Fréchet}$ **). ــ يعطى** $\varphi \in H'$ **،** **يوجد عنصر وحيد** $f \in H$ **بحيث**

$$< \varphi, v >= (f, v) \qquad \forall v \in H.$$

بالإضافة إلى ذلك فإنه لدينا

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}.$$

إثبات. ــ نقدم من جديد برهانين:

1) البرهان الأول يشبه إثبات المبرهنة 11.4 · نعتبر التطبيق $T : H \longrightarrow H'$ المعرف كالآتي: بإعطاء $f \in H$ ، فإن التطبيق $v \longmapsto (f, v)$ هو دالي خطي مستمر على H ؛ إذن هو يعرف عنصرا من H' يرمز له بـ Tf ، أي

$$< Tf, v >= (f, v) \qquad \forall v \in H.$$

إنه واضح من متباينة كوشي - شفارتز أن $\|Tf\|_{H'} = |f|$ · إذن T هو مؤثر خطي تقايسي من H على $T(H)$ الذي هو فضاء جزئي من H' · للختم يبقى أن نثبت بأن $T(H)$ كثيف في H' · ليكن $h \in H'' = H$ (بما أن H انعكاسي) بحيث أن $< Tf, h >= 0 \quad \forall f \in H$ ؛ لنبين أن $h = 0$ · لدينا $(f, h) = 0 \quad \forall f \in H$ و بالتالي فإن $h = 0$ ·

2) البرهان الثاني لا يستدعي نظرية الفضاءات الانعكاسية·
ليكن $M = \varphi^{-1}(0)$ ؛ M فضاء جزئيا مغلقا من H ·
إذا كان $M = H$ ، أي $\varphi \equiv 0$ ، فإننا نختم باتخاذ $f = 0$ ·
لنفرض أن $M \neq H$ · لنبين أنه يوجد عنصر $g \in H$ بحيث:

$$g \notin M \text{ ،} \qquad |g| = 1 \qquad \text{و} \qquad (g, w) = 0 \qquad \forall w \in M \text{ ·}$$

بالفعل، ليكن $g_0 \in H$ مع $g_0 \notin M$ ، و ليكن $g_1 = P_M g_0$ ؛ نأخذ بعد ذلك $g = \dfrac{g_0 - g_1}{|g_0 - g_1|}$. كل $v \in H$ لديه تحليل من الشكل $v = \lambda g + w$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$ و $w \in M$: يكفي وضع

$$\lambda = \frac{< \varphi, v >}{< \varphi, g >} \qquad \text{و} \qquad w = v - \lambda g \text{ ·}$$

يأتي إذن $0 = (g, w) = (g, v - \lambda g)$ ، أي أن $(g, v) = \lambda = \dfrac{< \varphi, v >}{< \varphi, g >}$ · نستنتج بأن $< \varphi, v >=< f, v > \quad \forall v \in H$ حيث إن f معرفة بـ $f =< \varphi, g > g$ · $\square$

• **ملاحظة** 1. ــ H و H' : **نطابقهما أو لا نطابقهما؟ الثلاثي** $V \subset H \subset V'$ ·

المبرهنة 5.5 تبين أنه يمكن تمثيل أي دالي خطي مستمر على H بواسطة الجداء السلمي· التطبيق $\varphi \longmapsto f$ هو تشاكل تقابلي تقايسي يمكن من مطابقة H و H' · سنقوم بهذه المطابقة في أغلب الأحيان و لكن ليس دائما· لنصف حالة نوعية حيث لا يمكن القيام بهذه المطابقة· ليكن H فضاء هلبرت مزودا بالجداء السلمي $(,)$ و النظيم $| \ |$ · ليكن V فضاء جزئيا متجهيا كثيفا في H · لنفرض بأن V مزود بالنظيم $\| \ \|$ و الذي يجعل منه فضاء بناخ

انعكاسيا. لنفرض بأن الاحتواء القانوني لـ V في H مستمر، أي

$$|v| \leqslant C\|v\| \qquad \forall v \in V.$$

نطابق H' و H . يمكننا إذن غمر H في V' بفضل الطريقة التالية: بإعطاء $f \in H$ ، فإن التطبيق $v \in V \longmapsto (f,v)$ هو دالي خطي مستمر على H و بالتالي على V ؛ لنرمز له بـ $Tf \in V'$ بحيث أن

$$< Tf, v >_{V',V} = (f,v) \qquad \forall f \in H, \qquad \forall v \in V.$$

نتحقق بسهولة من أن $T : H \longrightarrow V'$ يملك الخصائص الآتية

(أ) $\|Tf\|_{V'} \leqslant C|f| \qquad \forall f \in H$ ،

(ب) T متباين،

(جـ) $T(H)$ كثيف في V' [3] .

بمساعدة T نغمر H في V' و نحصل على الصورة

$$V \subset H = H' \subset V' \tag{9}$$

حيث إن الاحتواءات القانونية مستمرة و كثيفة.

نلاحظ أنه بهذه المطابقة تتساوى $< \varphi, v >_{V',V}$ و (φ, v) كلما كان لدينا $\varphi \in H$ و $v \in V$.

نقول عندئذ أن H هو الفضاء المحوري.

لنفرض الآن أن V عوض أن يكون فضاء بناخ عام فهو فضاء هلبرت، و له جداؤه السلمي الخاص به $((\ ,\ ))$ المرفق بالنظيم $\|\ \|$. يمكن إذن مطابقة V و V' عن طريق الجداء السلمي $((\ ,\ ))$. غير أن (9) تصبح في هذه الحالة بلا معنى. هذا يبين أنه لا يمكن القيام بالمطابقتين في آن واحد: يجب الاختيار. لقد تعودنا ــ و هو اختيار كيفي ــ بتفضيل المطابقة $H = H'$ مع (9) كنتيجة و عدم مطابقة V و V' . في هذا الموضوع نقترح على القارئ تأمل المثال الآتي:

$H = l^2 = \{\ u = (u_n)\ ؛\ \sum u_n^2 < \infty\ \}$ مزود بالجداء السلمي $(u,v) = \sum u_n v_n$ ،

$V = \{\ u = (u_n)\ ؛\ \sum n^2 u_n^2 < \infty\ \}$ مزود بالجداء السلمي $((u,v)) = \sum n^2 u_n v_n$.

[3] عموما T ليس غامرا من H على V' .

ملاحظة 2. ــ باستعمال التشاكل التقابلي لرايز - فريشيه (و البرهان الثاني للمبرهنة 5.5) يمكن الإثبات مباشرة أن H انعكاسي دون اللجوء إلى نظرية الفضاءات المنتظمة التحديب.

ملاحظة 3. ــ عندما نعتمد المطابقة $H' = H$ ، فإن المتعامد $M^\perp$ لفضاء جزئي $M \subset H$ يعتبر فضاء جزئيا من H و

$$M^\perp = \{u \in H;\ (u,v) = 0 \quad \forall v \in M\}.$$

في فضاء هلبرت، كل فضاء جزئي مغلق يقبل تكملة طوبولوجية (انظر المقطع 4.2). في الحقيقة، إنه واضح (بفضل اللازمة 4.5) أنه إذا كان M فضاء جزئيا مغلقا فلدينا

$$M \cap M^\perp = \{0\} \qquad \text{و} \qquad M + M^\perp = H \cdot$$

3.5. مبرهنات ستامباكيا و لاكس - ملغرام

تعريف. ــ نقول إن داليا ثنائي الخطية $a(.,.) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ هو

(أ) مستمر إذا وجد ثابت C بحيث إن

$$|a(u,v)| \leqslant C|u||v| \qquad \forall u, v \in H,$$

(ب) إهليلجي إذا وجد ثابت $\alpha > 0$ بحيث إن

$$a(v,v) \geqslant \alpha|v|^2 \qquad \forall v \in H.$$

مبرهنة 6.5 (ستامباكيا Stampacchia). ــ ليكن $a(.,.)$ داليا ثنائي الخطية مستمرا و إهليلجيا. لتكن K مجموعة محدبة، مغلقة و غير خالية.
بإعطاء $\varphi \in H'$ فإنه يوجد $u \in K$ وحيدا بحيث إن

$$a(u, v-u) \ \geqslant <\varphi, v-u> \qquad \forall v \in K. \tag{10}$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كان a متناظرا، فإن u يتميز بالخاصية

$$\begin{cases} u \in K \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - <\varphi, u> = \min\limits_{v \in K}\Big\{\dfrac{1}{2}a(v,v) - <\varphi, v>\Big\}. \end{cases} \tag{11}$$

لإثبات المبرهنة 6.5 ، نستعمل النتيجة الكلاسيكية الآتية :

• مبرهنة 7.5 **(مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ - طريقة التقريبات المتتالية لبيكارد** Picard **).**
ـ ليكن (X,d) **فضاء متريا تاما و ليكن** $S : X \longrightarrow X$ **تطبيقا بحيث أن**

$$d(Sv_1, Sv_2) \leqslant kd(v_1, v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in X \qquad \text{مع} \qquad k < 1 \cdot$$

إذن يملك S **نقطة ثابتة وحيدة،** $u = Su$ ·

(انظر مثلا [1] Choquet أو [2] L. Schwartz).

<u>إثبات المبرهنة 6.5 ·</u> ـ حسب مبرهنة التمثيل لرايز - فريشيه (مبرهنة 5.5) فإنه يوجد $f \in H$ وحيدا بحيث إن

$$< \varphi, v >= (f, v) \qquad \forall v \in H.$$

من جهة أخرى، لكل $u \in H$ مثبت، فإن التطبيق $v \longmapsto a(u,v)$ هو دالي خطي مستمر على H ، و بفضل مبرهنة التمثيل لرايز - فريشيه فإنه يوجد عنصر من H ، نرمز له بـ Au ، بحيث إن $a(u,v) = (Au, v)$ $\forall v \in H$ · من الواضح أن A مؤثر خطي من H إلى H و أن

$$|Au| \leqslant C|u| \qquad \forall u \in H \tag{12}$$

$$(Au, u) \geqslant \alpha |u|^2 \qquad \forall u \in H. \tag{13}$$

تصبح المسألة (10) عبارة عن إيجاد $u \in K$ بحيث

$$(Au, v - u) \geqslant (f, v - u) \qquad \forall v \in K. \tag{14}$$

ليكن $\rho > 0$ ثابتا، سوف يعين فيما بعد· المتباينة (14) تكافئ

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in K \tag{15}$$

أي $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$ ·

لكل $v \in K$ ، نضع $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$. لنبين أنه عند الاختيار الملائم لـ $\rho > 0$ فإن S سوف يكون انكماشا فعليا. أي أنه يوجد $k < 1$ بحيث إن

$$|Sv_1 - Sv_2| \leqslant k|v_1 - v_2| \qquad \forall v_1, v_2 \in K.$$

في الحقيقة، حسب القضية 3.5 لدينا

$$|Sv_1 - Sv_2| \leqslant |(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)|$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}|Sv_1 - Sv_2|^2 &= |v_1 - v_2|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2|Av_1 - Av_2|^2\\ &\leqslant |v_1 - v_2|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2).\end{aligned}$$

لنثبت $\rho > 0$ بحيث إن $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2 < 1$ (خذ $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{C^2}$) نرى أن S يملك نقطة ثابتة وحيدة[4] .

لنفرض الآن أن $a(.,.)$ متناظر. إذن $a(.,.)$ يعرف جداء سلميا جديدا على H و النظيم المرفق $u \longmapsto a(u,u)^{1/2}$ مكافئ للنظيم $|\ |$. إذن H هو فضاء هلبرت بالنسبة لهذا الجداء السلمي أيضا. بتطبيق مبرهنة التمثيل لرايز - فريشيه نحصل على $g \in H$ بحيث

$$< \varphi, v >= a(g,v) \qquad \forall v \in H.$$

إذن (10) تصير

$$a(g - u, v - u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in K \tag{16}$$

أي أن $u = P_K g$ إسقاط بالنسبة للجداء السلمي الجديد المعرف بـ a . حسب المبرهنة 2.5 فإن (16) تكافئ البحث عن $u \in K$ يحقق

$$\min_{v \in K} a(g - v, g - v)^{1/2}.$$

هذا يعود إلى إيجاد القيمة الصغرى على K لـ $a(g - v, g - v)$ أو أيضا

$a(v,v) - 2a(g,v)$ ، أو أيضا $\dfrac{1}{2}a(v,v) - < \varphi, v >$.

□

ملاحظة 4. ـ نتحقق بسهولة من أنه إذا كان $a(.,.)$ داليا ثنائي الخطية بحيث

[4] عند بحث حساب النقطة الثابتة بطريقة تكرارية فإنه يجدر بنا أخذ $\rho = \alpha/C^2$ (التي تعطي القيمة الصغرى لـ k) لتسريع تقارب التكرارات.

$$a(v,v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in H$$

فإن الدالة $v \longmapsto a(v,v)$ محدبة.

• **لازمة** 8.5 **(لاكس - ملغرام** Lax – Milgram **). ــ ليكن** $a(.,.)$ **داليا ثنائي الخطية مستمرا و إهليلجيا.**
إذن لكل $\varphi \in H'$ **يوجد** $u \in H$ **وحيدا بحيث إن**

$$a(u,v) =< \varphi, v > \qquad \forall v \in H. \tag{17}$$

بالإضافة إلى ذلك، إذا كان a **متناظرا، فإن** u **يتميز بالخاصية**

$$u \in H \qquad \text{و} \qquad \frac{1}{2}a(u,u) - < \varphi, u >= \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - < \varphi, v > \right\}. \tag{18}$$

<u>إثبات.</u> ــ طبق المبرهنة 6.5 و استدل كما في اللازمة 4.5 . □

ملاحظة 5. ــ إن مبرهنة لاكس - ملغرام هي أداة سهلة و فعالة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية الإهليلجية (انظر الفصلين 8 و 9). إنه لمن المهم ملاحظة العلاقة بين المعادلة (17) و مسألة إيجاد القيمة الصغرى (18) . لهذه العلاقة عادة تفسير في الميكانيكا أو الفيزياء (مبدأ الأقل فعلا، تصغير الطاقة، إلخ). في مصطلح حساب التغيرات Calculus of Variation ، تعرف المعادلة (17) بمعادلة Euler لمسألة التصغير (18) . نلاحظ أيضا، بهذه المناسبة، أن المعادلة (17) تظهر عندما نكتب " $F'(u) = 0$ " حيث $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - < \varphi, v >$.

ملاحظة 6. ــ يمكن إعطاء برهان مباشر و بسيط لمسألة أن المعادلة (17) لها حل وحيد. بالفعل، إن حل (17) يرجع إلى إثبات أن

$$\forall f \in H \text{ ،} \qquad \exists u \in H \text{ وحيد} \qquad \text{بحيث} \qquad Au = f \text{ ،}$$

بمعنى آخر أن A هو تقابل. غير أن

(أ) $R(A)$ مغلق لأن $\alpha|v| \leqslant |Av| \qquad \forall v \in H$ ،

(ب) $R(A)$ كثيف لأن

$$(Au, v) = 0 \qquad \forall u \in H$$

يستلزم $v = 0$.

4.5. مجموع هلبرتي. قاعدة هلبرتية

تعريف. ـ لتكن $(E_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية فضاءات جزئية مغلقة من H .
نقول بأن H هو **مجموع هلبرتي** للمتتالية (E_n) ، و نرمز له بـ $H = \oplus_n E_n$ ، إذا:
(أ) الـ (E_n) متعامدون مثنى مثنى، أي

$$(u, v) = 0 \qquad \forall u \in E_m, \qquad \forall v \in E_n, \qquad m \neq n$$

(ب) الفضاء المتجهي المولد بالمتتالية (E_n) كثيف في H[5] .

• **مبرهنة** 9.5. **ـ لنفرض أن** H **مجموع هلبرتي للمتتالية** $(E_n)_{n\geqslant 1}$. **ليكن** $u \in H$ **و ليكن** $u_n = P_{E_n} u$.
إذن لدينا

(أ) $\displaystyle u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **أي أن** $\displaystyle u = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n$

(ب) $\displaystyle |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$ (**متساوية** Bessel – Parseval).

و بالعكس، بإعطاء متتالية (u_n) **من** H **بحيث أن** $u_n \in E_n \ \forall n$ **و** $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$ ، **إذن التسلسلة** $\displaystyle \sum_n u_n$ **متقاربة و** $\displaystyle u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **يحقق** $u_n = P_{E_n} u$.

---

[5] نقصد الفضاء المتجهي المولد بالمعنى الجبري، أي التوافيق الخطية المنتهية لعناصر من (E_n) .

<u>إثبات.</u> ـ ليكن $S_k = \sum_{n=1}^{k} P_{E_n}$ ؛ S_k هو مؤثر خطي و مستمر من H إلى H .
لـ $u \in H$ لدينا

$$|S_k u|^2 = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2. \tag{19}$$

من جهة أخرى (لازمة 4.5) لدينا

$$(u, u_n) = |u_n|^2$$

و بالجمع

$$(u, S_k u) = |S_k u|^2.$$

و عليه

$$|S_k u| \leqslant |u| \qquad \forall u \in H. \tag{20}$$

ليكن F الفضاء المتجهي المولد بالمتتالية (E_n) . ليكن $\epsilon > 0$ و ليكن $\bar{u} \in F$ بحيث $|u - \bar{u}| \leqslant \epsilon$. لـ k كبير بقدر كاف، لدينا $S_k \bar{u} = \bar{u}$. من جهة أخرى (بفضل (20)) لدينا

$$|S_k u - S_k \bar{u}| \leqslant |u - \bar{u}|.$$

بالتالي $|S_k u - u| \leqslant 2|u - \bar{u}| \leqslant 2\epsilon$ لـ k كبيربقدر كاف، أي أن $\lim_{k\to\infty} S_k u = u$.
من (19) نستنتج إذن (ب). □

ملاحظة 7. ـ بصفة عامة $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \infty$ و بالتالي فإن المتسلسلة $\sum u_n$ ليست ناظمية.

تعريف ـ نسمي قاعدة (أساس) هلبرتية (أو قاعدة، ببساطة عند انتفاء أي خلط[6]) كل متتالية (e_n) من عناصر H بحيث

(أ) $|e_n| = 1$ $\forall n$ ، $(e_m, e_n) = 0$ $\forall m, n$ ، $m \neq n$.

(ب) الفضاء المتجهي المولد من (e_n) كثيف في H .

ينتج من المبرهنة 9.5 أنه إذا كانت (e_n) قاعدة هلبرت فإن كل $u \in H$ يكتب:

[6] لا تخلط خصوصا مع قاعدة جبرية، أي، عائلة (e_i) من H بحيث إن كل عنصر من H يكتب بطريقة وحيدة كتوفيقية خطية منتهية من (e_i) .

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}(u,e_n)e_n \qquad \text{مع} \qquad |u|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n)|^2 \cdot$$

عكسيا، بإعطاء متتالية $(\alpha_n)\in l^2$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ تتقارب نحو عنصر نرمز له بـ u ؛ لدينا

$$(u,e_n)=\alpha_n \qquad \text{و} \qquad |u|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 \cdot$$

• **مبرهنة** 10.5. ـ **كل فضاء هلبرت قابل للفصل يملك قاعدة هلبرتية.**

إثبات. ـ لتكن (v_n) مجموعة جزئية قابلة للعد و كثيفة من H . ليكن F_k الفضاء المتجهي المولد من $[v_1,v_2,...v_k]$. تشكل الـ (F_k) متتالية تزايدية من فضاءات جزئية ذات أبعاد منتهية بحيث إن $\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$ كثيف في H . نختار قاعدة ناظمية التعامد في F_1 ثم نتممها إلى قاعدة ناظمية التعامد في F_2 و هكذا. نحصل بالتالي على قاعدة هلبرتية في H . □

ملاحظة 8. ـ إذا كان H غير قابل للفصل، يمكننا أيضا (بواسطة لازمة زورن) إثبات وجود قاعدة هلبرتية $(e_i)_{i\in I}$ غير قابلة للعد. المبرهنة 9.5 تبقى صحيحة إذا عوضنا المتسلسلات المتقاربة بالعائلات القابلة للجمع (انظر [1] Choquet أو [2] L. Schwartz).

ملاحظة 9. ـ تبين المبرهنة 10.5 أن جميع فضاءات هلبرت القابلة للفصل متشاكلة تقابليا و متقايسة مع l^2 . بطبيعة الحال هذه النتيجة (ذات المظهر المثير!) لا تقلل من أهمية دراسة $L^2(\Omega)$ (أو فضاء صوبوليف H^1).

ملاحظة 10. ـ سنرى في الفصل السادس كيف ننشئ قاعدة هلبرتية مكونة من متجهات ذاتية لمؤثرات ذاتية مرافقة متراصة. في $L^2(\Omega)$ نستعمل عادة قواعد خاصة مكونة من دوال ذاتية لمؤثر تفاضلي (انظر المقطع 6.8 و المقطع 8.9). فمثلا في $L^2(0,\pi)$ القاعدة المكونة من الدوال

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right)_{n\geqslant 1} \qquad \text{أو} \qquad \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\right)_{n\geqslant 0} ،$$

تؤدي إلى التمثيل عن طريق متسلسلات فورييه Fourier و التحليل التوافقي Harmonic Analysis ؛ انظر مثلا Katznelson [1] · بالنسبة للقواعد المرفقة لدوال Bessel ، Legendre ، Hermite ، Laguerre ، Tchebichev ، Jacobi ، إلخ، يمكن للقارئ مراجعة Courant Hilbert [1] ، الجزء 1 ·

تعاليق حول الفصل الخامس

* 1) تمييز فضاءات هلبرت

من المهم معرفة ما إذا كان نظيم $\| \|$ معطى على فضاء متجهي E هو نظيم هلبرتي، أي ما إذا كان يوجد جداء سلمي $(,)$ على E بحيث

$$(u,u)^{1/2} = \|u\| \qquad \forall u \in E.$$

هناك عدة معايير معروفة:

أ) مبرهنة 11.5 (Fréchet – Von Neumann – Jordan)· **ـ لنفرض أن النظيم** $\| \|$ **يحقق متطابقة متوازي الأضلاع** (1) ، **إذن** $\| \|$ **هو نظيم هلبرتي·**

بالنسبة للبرهان، انظر Yosida [1] أو [EX] ·

ب) مبرهنة 12.5 (Kakutani [1])· **ـ ليكن** E **فضاء نظيميا مع** $dimE \geqslant 3$ · **نفرض أن كل فضاء جزئي ثنائي البعد يملك مسقطا نظيمه** 1 **(أي أنه يوجد** $P : E \longrightarrow F$ **مؤثر خطي مستمر بحيث إن** $Pu = u$ **لكل** $u \in F$ **و** $\|P\| \leqslant 1$ **)·**

[7] نلاحظ بهذا الصدد أن كل فضاء جزئي F أحادي البعد يملك دائما مسقطا ذا نظيم 1 (بفضل مبرهنة هان - بناخ)·

إذن النظيم || || هلبرتي[7] .

جـ) مبرهنة 13.5 (de Figueiredo – Karlovitz [1]). **ـ ليكن** E **فضاء نظيميا مع** $dimE \geqslant 3$. **نضع**

$$Tu = \begin{cases} u & \text{إذا } \|u\| \leqslant 1 \\ \dfrac{u}{\|u\|} & \text{إذا } \|u\| \geqslant 1. \end{cases}$$

نفرض أن

$$\|Tu - Tv\| \leqslant \|u - v\| \qquad \forall u, v \in E.$$

إذن النظيم || || هلبرتي[8] .

لنذكر أيضا، في هذا الموضوع، نتيجة ذكرت من قبل (انظر ملاحظة 8.2).

مبرهنة 14.5 (Lindenstrauss – Tzafriri [1]). **ـ يكون فضاء بناخ قابلا للهلبرتة (أي يوجد نظيم هلبرتي مكافئ للنظيم الأساسي) إذا كان كل فضاء جزئي مغلق يملك مكملا طوبولوجيا**[9] .

---

[8] نبرهن أنه في كل فضاء نظيمي لدينا

$$\|Tu - Tv\| \leqslant 2\|u - v\| \qquad \forall u, v \in E$$

و أنه، عموما، لا يمكن تحسين الثابت 2 .

[9] الأمر سيان بالقول بأن كل فضاء جزئي مغلق يملك مسقطا مستمرا P . لاحظ، هنا، أننا لا نفرض أن $\|P\| \leqslant 1$ بعكس فرضيات المبرهنة 12.5 .

2) المتباينات التغيراتية.

إن مبرهنة ستامباكيا هي نقطة البداية لنظرية المتباينات التغيراتية Variational inequalities (انظر Kinderlehrer – Stampacchia [1])؛ لهذه النظرية تطبيقات عديدة في الميكانيكا و الفيزياء (انظر Duvaut – Lions [1])، في التحكم الأمثل Optimal Control (انظر Lions [2])، في التحكم الاتفاقي Stochastic Control (انظر Bensoussan – Lions [1])، إلخ.

* 3) المعادلات غير الخطية المرتبطة بمؤثرات رتيبة.

مبرهنتا ستامباكيا و لاكس - ملغرام تمتدان إلى بعض الفئات من المؤثرات غير الخطية. لنورد مثلا الـ

مبرهنة 15.5 (Minty – Browder). ـ **ليكن** E **فضاء بناخ انعكاسيا. ليكن** $A : E \longrightarrow E'$ **تطبيقا (غير خطي) مستمرا بحيث إن**

$$< Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 > \; > \; 0 \qquad \forall v_1, v_2 \in E, \qquad v_1 \neq v_2$$

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{< Av, v >}{\|v\|} = \infty.$$

إذن لكل $f \in E'$ ، **يوجد** $u \in E$ **حلا وحيدا للمعادلة** $Au = f$.

---

* 4) القواعد في فضاءات بناخ .

إن مفهوم القاعدة يمتد إلى فضاءات بناخ. نقول إن $(e_n)_{n \geqslant 1}$ هي قاعدة شاودر Schauder لفضاء بناخ E إذا كان لكل $u \in E$ توجد متتالية $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ من $\mathbb{R}$ وحيدة بحيث $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. إن القواعد تلعب دورا هاما في هندسة فضاءات بناخ (انظر مثلا Lindenstrauss – Tzafriri [2]). كل الفضاءات المألوفة في التحليل (القابلة للفصل) تملك قاعدة شاودر (انظر مثلا I. Singer [1]). هذا ما قاد بناخ إلى طرح السؤال الآتي: هل كل

فضاء بناخ قابل للفصل يمتلك قاعدة شاودر؟ الجواب سلبي (Enflo [1]). حتى إنه يمكننا إنشاء فضاءات جزئية مغلقة من l^p ، $1 < p < \infty$ ، $p \neq 2$ ، بدون قاعدة (انظر Lindenstrauss – Tzafriri [2]). برهن Szankowski مؤخرا بأن $\mathcal{L}(H)$ ليس له قاعدة (H فضاء هلبرت قابل للفصل ببعد لانهائي). سوف نصادف في الفصل السادس سؤالا شبيها عن المؤثرات المتراصة و الذي أجيب عنه بالسلب أيضا.