

## مراجعة طلاب المرحلة الابتدائية الكوريين الموهوبين في الرياضيات

### لنظرية يولر (Euler) للشكل متعدد الوجوه

جيهون يم، سانغهوم سونغ، وجون كيم

Jaehoon Yim, Sanghun Song, And Jiwon Kim

جامعة جيونجج الوطنية للتربية، كوريا الجنوبية



### ملخص

يستكشف هذا البحث كيفية تشابه البنى التي يقدمها طلاب الصفين الخامس والسادس الابتدائيين الموهوبين في الرياضيات باستخدام نظرية يولر للشكل متعدد الوجوه (Polyhedron Theorem)، مع تلك النظرية التي يقدمها علماء الرياضيات كما ناقشها لاکاتوس (Lakatos 1976). طُلب إلى أحد عشر طالباً من الموهوبين في الرياضيات في المرحلة الابتدائية تبرير النظرية، وتقديم أمثلة لحل التعارض بين النظرية والأمثلة المضادة، فقدّم الطلاب نوعين من التبريرات للنظرية. وصُنّفت الأشكال الهندسية المجسّمة كما وردت في الأمثلة المضادة، على النحو الآتي: (أ) أشكال مصممة مجسّمة بسطوح منحنية (ب) أشكال مصممة مجسّمة مؤلفة من أشكال مجسّمة متعددة السطوح (Polyhedron) تشترك في النقاط أو الخطوط أو الأوجه (ج) أشكال كثيرة السطوح مع ثقوب (د) أشكال كثيرة السطوح تحتوي على أشكال كثيرة السطوح. اقترح الطلاب، إضافة إلى استخدام طريقة «منع الوحوش» (التشوه والقصور) (Monster-Barring)

(Method)<sup>(1)</sup>، نوعين جديدين من التخمينات لحل التعارض بين الأمثلة المضادة والنظرية وطريقة منع الاستثناءات وطريقة تعديل التشوه. حيث تشبه البنى التي قدمها الطلاب تلك التي قدمها علماء الرياضيات كما ناقشها لاكاتوس.

## المقدمة

تقول إحدى وجهات النظر في تدريس الرياضيات إن من المهم تحليل عملية التطور الرياضي التاريخية للمعرفة الرياضية وإعادة بنائها؛ بهدف تحسين عملية تعليم الرياضيات وتعلّمها. ويشترك عدد من العلماء أمثال (Brandford (1980); Clairaut (1741, 1746); Klein (1948); Toeplitz (1963); Lakatos (1976); Freudenthal (1983, 1991); (And Brousseau (1976) في وجهة النظر هذه التي تفترض عادة وجود علاقة وثيقة بين النشأة التاريخية للفرد وعملية التعلم، وتفترض أيضاً أن الطلاب، بمساعدة المعلم وتوجيهه، قادرون على بناء معرفة شبيهة بتلك التي حصل عليها علماء الرياضيات تاريخياً. وقد أظهر لاكاتوس وجهة النظر هذه ولا سيما في كتابه بعنوان - البرهان والتفنيد - عبر حوار متخيل بين معلم وطلابه، يدعم فيه المعلم والطلاب ادعاءات كل منهم وينتقدها من منظور شخصيات تاريخية متعددة. ومع ذلك، فإن البنية المعرفية التي نفذها المعلمون والطلاب، كما قدمها لاكاتوس، هي تلك التي نفذها مشاهير علماء الرياضيات وفيهم يولر وليجندر وكوشي (Euler, Legendre, Cauchy). ويبدو أن وجهة نظر لاكاتوس شبه التجريبية تطلب إلى الطلاب تعلّم الرياضيات في أثناء العمل بطريقة علماء الرياضيات (Chazan, 1990) من خلال إثارة التساؤل الآتي: «هل من الممكن أيضاً لطلاب المرحلة الابتدائية إنشاء البنى المعرفية استناداً إلى نظرية يولر للمجسم متعدد السطوح، شبيهة بتلك البنى التي ينتجها علماء الرياضيات كما ناقشها لاكاتوس؟» وقد ركزت هذه الدراسة في محاولتنا للإجابة عن مثل هذا السؤال، على: (أ) البنى المعرفية لطلاب المرحلة الابتدائية الموهوبين في الرياضيات، مقارنة بتلك المقدمة من علماء الرياضيات، كما ناقشها لاكاتوس، (ب) كيفية

(1) منع الـوحوش method barring-monster the مصطلح ابتدعه لاكاتوس (1976) للإشارة إلى تنقيح فرضية ما باستبعاد الأمثلة المضادة السيئة.

وهي طريقة للتعامل مع «الوحوش»: أي الأمثلة المضادة التي تبرز عندما تكون التعبيرات ضمن البرهان غير ما يقصد بها أصلاً - المراجع

تبرير طلاب الصفين الخامس والسادس الموهوبين في الرياضيات نظرية يولر للمجسم متعدد السطوح، (ج) البنى التي اقترحوها بصفحتها أمثلة مضادة لنظرية يولر للمجسم متعدد السطوح، و (د) ردود أفعالهم عند مواجهتهم لأمثلة مضادة.

## خلفية

### استعراض الدراسات السابقة

وجد سريرمان (2003) اختلافاً كبيراً في سلوك حل المسألة بين طلاب المرحلة الثانوية الموهوبين في الرياضيات وغير الموهوبين، وأفاد أن الطلاب النابغين يقضون وقتاً أطول في محاولة فهم موقف المسألة، وتحليل الفرضية بوضوح، ومن ثم وضع خطة تكون عالمية بطبيعتها. وقد ركزت الدراسات السابقة لعمليات المعرفة لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات على التعميم والتجريد والتبرير وحل المسألة (Lee, 1976; Krutetskii, 2004, 2003, Sriraman, 2005). ووجد «لي» (Lee, 2005) أيضاً أن الطلاب النابغين في الرياضيات يميلون إلى التقدم نحو مستويات عالية من الاستدلال من خلال التفكير التأملي.

حلّ بعض الباحثين بناء المعرفة للطلاب استناداً إلى منظور لاکاتوس (Athins, 1997; Boats, Dwyer, Laing, 2003; Borasi, 1992; Cox, 2004; Nunokawa, 1996; Reid, 2006; Sriraman, 2002). مثلاً، أعاد سريرمان بناء المناحي شبه التجريبية لمحاولات الطلاب الستة المذكورين آنفاً في حل مسألة تتعلق بالعد، وعرض احتمالات بناء الصيغ الرياضية في أثناء المناقشة الصفية بروح لاکاتوس. وأفاد كوكس (Cox, 2004) أن قدرة طلاب المرحلة الثانوية على البرهنة تتحسن بعد تعريفهم بعملية «التخمين البرهان النقد – القبول أو الرفض» في حصص الهندسة. وقد وصف بوراسي (Borasi, 1992) عملية مراجعة طالبين من المرحلة الثانوية لتعريف المضلع، وتوصل إلى أن التعامل مع المضلع «بطريقة لاکاتوس» قد أتاح المجال للتفكير الرياضي والأنشطة التي تشجع المشاركين على الإفادة من حدسهم وقدراتهم الرياضية. وحلّ «ريد» (Reid, 2002) عملية حل المسألة لطلاب الصف الخامس الأساسي، وصنّف عملياتهم في التعامل مع الأمثلة المضادة، استناداً إلى طريقة منع التشوه أو الانحراف، ومنع الاستثناء (Exception Barring)، إلى ثلاثة

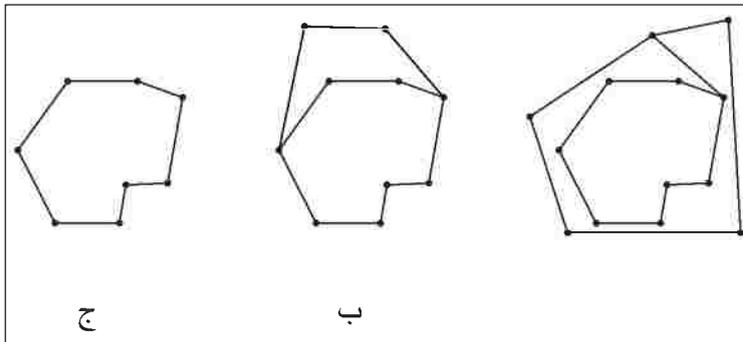
أنماط من الاستدلال. وأضاف أثنز (Athins, 1997) أيضاً أنه لاحظ حالة منع تشوهه على الزوايا في حصة رياضيات للصف الرابع.

### نظرية يولر للشكل متعدد السطوح في براهين لாகاتوس وتفنيداته

عرض لாகاتوس في كتاب البرهان والتفنيد (Proofs And Refutations) بعض التبريرات لنظرية يولر، مثل إثبات كاتشي الذي ظهر في تاريخ الرياضيات عبر الحوارات بين المعلم والطلاب. فمثلاً، جعل لாகاتوس طالبين هما: Zeta و Sigma يقولان التوضيح الآتي (P.70-72).

الخطوة الأولى: لمضلع  $V=E$

الخطوة الثانية: لأي مضلع  $V-E=0$  (شكل 1:11 أ). إذا طبقت مضلعاً آخر على الشكل (ليس بالضرورة بالسطح أو المستوى نفسه) يكون للمضلع الإضافي عدد  $n_1$  حافات و  $n_1$  رؤوس. وبتطبيقه على الشكل الأصلي على امتداد سلسلة من  $n_1$  حافات و  $n_1 + 1$  رؤوس، نزيد عدد الحافات على النحو الآتي:  $n_1 - n_1$  وعدد الرؤوس  $(n_1 + 1) - n_1$ ، أي سيكون في نظام المضلع الجديد زيادة في عدد الحافات مقارنة بعدد الرؤوس:  $E - V = 1$  (شكل 1:11 ب). للتطبيق التام أو غير المعتاد للأشكال نظر (شكل 1:11 ج). سوف يؤدي «تطبيق» وجه جديد على النظام دائماً إلى رفع الزيادة بواحد، أو، إلى نظام  $F$  مضلع مبني بهذه الطريقة  $E - V = F - 1$ .



شكل (1:11)

**الخطوة الثالثة:** يمكنني توسعة تجربة فكري بسهولة لتشمل نظاماً مضلعاً «مغلقاً».

ويمكن تحقيق مثل هذا الإغلاق بتغطية نظام مضلع مفتوح متعدد

الأضلاع بمغلف مضلع: تطبيق مثل هذا الغطاء المضلع سوف يزيد  $F$

بقيمة واحد دون إحداث تغيير على  $V$  أو  $E$ ، أو للنظام متعدد الأضلاع

المغلق، أو الشكل متعدد السطوح المغلق المبني بهذه الطريقة يكون:

$$V - E + F = 2$$

بعد التخمين والبرهان، تبرز أمثلة مضادة تفند التخمين والبرهان. وقد أطلق لاكلاتوس

على الأمثلة المضادة التي تفند مصطلح ليما<sup>(1)</sup> (Lemma)، أو التخمينات الفرعية، اسم

الأمثلة المضادة المحلية (Local Counterexamples)، والأمثلة المضادة التي تفند

التخمين الأصلي بالأمثلة الكلية (Global Counterexamples) (ص. 10:11)، واقترح

سنة أنواع من الأمثلة المضادة (شكل 11 - 7: 11 - 2) التي تظهر في تاريخ الرياضيات على

نحوها هو موضع أدناه.

عندما يصار إلى عرض مثال مضاد، فهناك خمسة خيارات. أما الخيار الأول، فينظر

إلى التخمين المرفوض على أنه غير صحيح، ومن ثم يرفضه. في حين يستخدم الخيار

الثاني طريقة «منع الوحش» (التشوه، الانحراف)، حيث ينظر إلى المثال المضاد على

أنه مخلوق عجيب، ويصار إلى الإبقاء على التخمين الأصلي (ص. 16-23). وتولد هذه

الطريقة تعريفاً واضح المعالم، لكنها غير مفيدة من وجهة نظر الاستكشاف؛ لأنها لا تعين

على تحسين التخمين، في حين يتمثل الخيار الثالث في منع الاستثناء، حيث يصار إلى تغيير

التخمين الأصلي إلى تخمين منقح بإضافة جملة شرطية تشير إلى الاستثناء (P.24-27).

ولا تضمن هذه الطريقة تحديد الاستثناءات جميعها، وتبقي على القضية المتعلقة بمدى

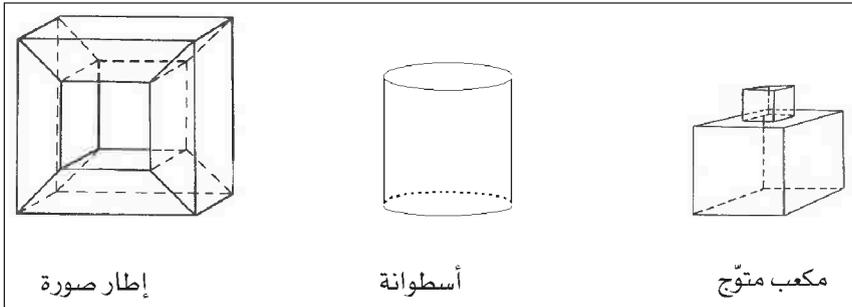
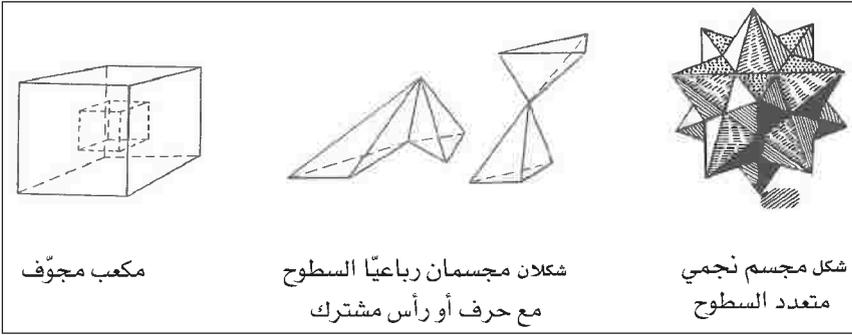
صدق النظرية. ويتمثل الخيار الرابع في طريقة تعديل التشوه، حيث ينظر إلى المنظور

(1) ليما Lemma في الرياضيات تعني عبارة رياضية يتوقع أن تكون صحيحة، أو عبارة رياضية مثبتة. وهي تسمى مبرهنة تمهيدية أو مساعدة، وهي جزء

من إثبات نظرية رئيسة، أي افتراض فرعي يستخدم في إثبات فرضية أو مسألة أخرى. وهي ليست مهمة في ذاتها لكن تساعد على إثبات نظرية مهمة.

وقد تصبح نظرية بعد الإثبات، لكنها تظل تسمى «ليما»، مثل ليما غاوس وليما زورن وغرونوال (Gronwall Lemma & Zorn's Lemma Gauss's).

الذي عُدَّت بموجبه الأمثلة أمثلة مضادة على أنه مشوه. ويُفسَّر المثال المضاد على أنه مثال ع إعادة تعديل المنظور (P.30-33). أما الخيار الخامس فيتمثل في دمج المُبرهنة التمهيدية، حيث يحلل البرهان بكل عناية ودقة لتحديد المُبرهنة الخاطئة التي قد تكون غير ظاهرة أو غير محددة في السابق، وعند كشفها، تضاف إلى التخمين الأولي بصفتها شرطاً لتحسين التخمين المفند (P.33-42).



## المنهجية

### المشاركون

على الرغم من وجود تعريفات متعددة للموهبة الرياضية، لكن لا يوجد تعريف مقبول عالمياً (E.G., Bluton, 1983; Miller, 1990; Gagne, 1991). وقد استخدمنا في هذه الدراسة تعريف جانبيه (Gagne, 1991) للطلاب الموهوبين في الرياضيات بصفتهم «الطلاب الذين حدّدهم خبراء على أنهم يمتلكون قدرة متميزة وإمكانات لتحقيق إنجازات كبيرة.» وشارك في هذه الدراسة أحد عشر طالباً من الصفين الخامس والسادس الابتدائيين،

تتراوح أعمارهم بين عشرة أعوام واثنى عشر عاماً من مدارس ابتدائية كورية عدة في مقاطعة جيونجي Gyeonggi. وكان من المشاركين خمسة طلاب في الصف الخامس وستة طلاب من الصف السادس الابتدائي. وكان طلاب الصف السادس الستة يعدّون برنامجاً متقدماً للطلاب الموهوبين في الرياضيات؛ ثلاثة منهم (A, B, C) ملتحقون ببرنامج جامعي ترعاه الحكومة، والثلاثة الآخرون (D, E, F) ملتحقون ببرنامج تابع لوزارة التربية والتعليم. أما طلاب الصف الخامس (G, H, I, J, K)، فقد اجتازوا عملية انتقاء اشتملت على اختبار كتابي ومقابلة معمقة، وأوصى مدير مدرستهم بإلحاقهم بالبرنامج الجامعي. وكان الطلاب جميعهم يتمتعون بدافعية قوية ومتضلعين من الرياضيات.

## المهام

أعطي المشاركون المهام الآتية:

المهمة الأولى: اشرح ما تعرفه عن العلاقة بين الرؤوس (V) والأحرف (E) والأوجه (F) في الجسم متعدد السطوح، ووضح كيف يمكن تبرير مثل هذه العلاقة.

المهمة الثانية: هل المعادلة الآتية صحيحة في الجسمات متعددة السطوح جميعها:  $V = E + F - 2$ ؟ وإذا لم يكن الأمر كذلك، فمتى لا يكون ذلك صحيحاً؟

المهمة الثالثة: إذا عددت أن مثلاً مضاداً يمثل مجسماً متعدد السطوح، فكيف ستراجع النظرية؟

وإذا كنت تعتقد أن مثلاً مضاداً لا يمثل مجسماً متعدد السطوح، فكيف ستراجع تعريف الجسم متعدد السطوح وتتحققه؟

صُمّمت المهمة الأولى لتحديد معرفة المشاركين في نظرية مجسم متعدد السطوح وتحديد طريقة تبريرهم للنظرية، في حين هدفت المهمة الثانية على تحديد أنواع الأمثلة المضادة التي حددها المشاركون. أما المهمة الثالثة، فصُمّمت لملاحظة كيفية حل المشاركين التباين بين النظرية والأمثلة المضادة.

كان المشاركون يعرفون العلاقة بين الرؤوس والأحرف والأوجه الممثلة بالمعادلة:  $V = 2E + F - 2$  قبل مشاركتهم في هذه الدراسة. وعلى الرغم من ذلك، فلم يختبر أي منهم صدق النظرية سابقاً في المجسمات متعددة السطوح كلها، ولم يبحث أيضاً أي منهم عن أمثلة مضادة للنظرية.

### جمع البيانات وتحليلها

صُمّمت هذه الدراسة استناداً إلى منهجية دراسة الحالة المتعددة (Multiple Case Study) التي وضعها ين (Yin, 2003). حيث أُعطي المشاركون الأحد عشر هذه المهام في مجموعات مرتبة، وأجريت معهم مقابلات في المدة الواقعة ما بين شهر نوفمبر عام 2005 حتى شهر يناير عام 2007. وقد صُوّر أحد الباحثين كل مشارك بواسطة الفيديو في أثناء حل المهام، ثم صُوّروا لاحقاً عندما قابلهم باحث آخر. وأكمل المشاركون المهام في غضون ساعتين تقريباً، ثم حلّل الباحثون لقطات الفيديو والمخطوطات وتقارير الملاحظات وأوراق عمل المشاركين.

وقد شمل التحليل ثلاثة أنواع من البيانات التي جمعها الباحثون: (أ) أنواع التبريرات، (ب) أنواع الأمثلة المضادة، (ج) طرق حل التضارب. وحُلّت أنواع التبريرات والأمثلة المضادة التي عرضها المشاركون باستخدام الترميز المفتوح Open Coding (Strauss And Corbin, 1998)، حيث قُسمت أنواع التبريرات إلى فئتين، والأمثلة المضادة إلى أربعة أنواع، قُسمت ثلاثة منها إلى جزأين فرعيين أو ثلاثة أجزاء فرعية. وقد حُلّت محاولات المشاركين في تعاملهم مع التباين بين الأمثلة المضادة والتخمينات التي أظهرتها الأمثلة المضادة باستخدام الترميز الانتقائي Selective Coding (Strauss And Corbin, 1998) الذي استند إلى «طريقة منع التشوه»، و«طريقة منع الاستثناء»، و«طريقة تعديل التشوه»، و«طريقة دمج المبرهنة-ليما» التي اقترحها لاكاتوس. واستخدم أيضاً تحليل جدول المتغيرات الإحصائية، وتولى زملاء الدراسة عملية تحقق النتائج (Merriam, 1998).

## النتائج

### تبريرات المشاركين لنظرية يولر للشكل متعدد السطوح

يمكن تقسيم تبريرات المشاركين للنظرية إلى طريقتين: (أ) تصنيف المجسمات متعددة السطوح إلى فئات عدة، وتبرير النظرية لكل فئة من فئات المجسمات متعددة السطوح، (ب) محاولة عرض تبريرات عامة دون اللجوء إلى تصنيف المجسمات متعددة السطوح. وقد برّر جلّ المشاركين النظرية في أثناء تصنيف المجسمات متعددة السطوح إلى فئات، ومن ثم تبرير النظرية. وقد أظهر المشاركون (D) في المقابلة المشار إليها أدناه من خلال تفسيره منطقيًا أن النظرية مبررة في الأشكال المنشورية (Prism) والهرمية (Pyramids) والموشورية (Prismoids).

#### المقابلة الأولى:

المشارك D: يبدو أولاً، في أشكال المناشير، أنه يمكن تبريرها في الحالات جميعها.

الباحث: ماذا تعني بذلك؟

المشارك D: (وهو يرسم أشكالاً) حسناً، انظر إلى منشور بعدد زوايا يساوي  $n$  وهو منشور مستطيل، ويسمى كذلك لأن قاعدته مستطيلة. إذن، عندنا أربعة رؤوس على الوجه العلوي وأربعة رؤوس على الوجه السفلي، وبذلك فإن عدد الرؤوس يساوي  $2n$ . وأن عدد الأحرف يساوي  $3n$  بسبب وجود أربعة أحرف على الوجه العلوي، وأربعة على الوجه السفلي، وأربعة على الجوانب. وكذلك، فإن عدد الأوجه يساوي  $n+2$  بسبب وجود أربعة أوجه على الجوانب، إضافة إلى الوجهين العلوي والسفلي. وأما في حالة المنشور الخماسي، فإن عدد الأوجه يساوي أيضاً  $n+2$ ، حيث يوجد خمسة أوجه جانبية إضافة إلى القاعدة (الأوجه العلوية والسفلية). وتشير المعادلة «  $V - E + F$  » إلى «عدد الرؤوس - عدد الأحرف + عدد الأوجه»، وفي

حالة المناشير التي عدد زواياها  $n$  فإنها تكون:  $2n-3n +$

$(n+2)$ ، لذا، فإن « $V - E + F$ » تساوي 2.

الباحث: نعم.

المشارك D: إذن، لقد انتهينا من المناشير... وأما في الأشكال الهرمية

فيمكن تبريرها أيضاً في الأحوال جميعها.

الباحث: وضح ذلك من فضلك.

المشارك D: هرم عدد زواياه  $n$ ، يمكن تبريره لأن عدد رؤوسه يساوي  $n+$

1. ولديه عدد أحرف تساوي  $2n$ ، وأوجه تساوي  $n+1$ . فإذا

أضفت عدد الرؤوس إلى عدد الأوجه وطرحتها من عدد

الأحرف فسوف تحصل على 2.

عرض المشارك D توضيحات باستخدام الأشكال متعددة السطوح، مثل المنشور

المستطيل في حالة المنشور، والهرم والشكل الموشوري. ويُعدُّ المنشور المستطيل مثلاً عاماً

(Mason & Pimm, 1984) يمثل زاوية المنشور. وأما في حالة الشكل أو الأشكال متعددة

السطوح العادية مثل كرة القدم، فقد استقصى المشارك D تطبيقات النظرية بوساطة عدِّ

مجموع نقاط مجسمات معيَّنة وأحرفها وأوجهها.

أما المشارك B فلم يعتمد إلى تصنيف الأشكال، ولكنه جرب التبريرات العامة بدلاً

من ذلك، حيث بدأ بنقطة (انظر شكل 8:11)، وتحقق صحة  $V - E + F$  مع ازدياد عدد

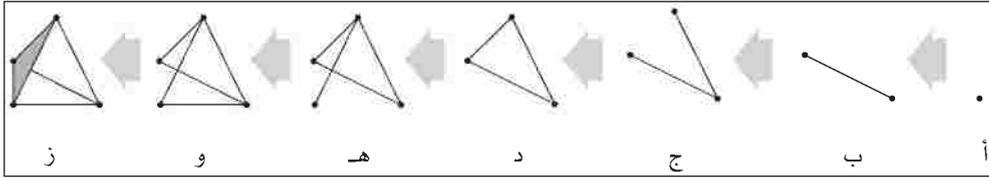
النقاط والخطوط والأوجه تدريجياً. وكانت هناك  $V$  واحدة فقط في البداية بالنسبة إليه،

لكن  $V$  و  $E$  أو  $E$  و  $F$  تزداد بقيمة واحد على التوالي بالسير قدماً من (A) إلى (G)، في حين

تستقر  $V-E+F$  عند واحد. وفي المرحلة الأخيرة، عند تغطية أحد الأوجه في (G)، أثبت

أن  $V-E+F=2$ ، استناداً إلى حقيقة أن  $F$  تزداد بمقدار واحد. وهذا التبرير يماثل تفسيرات

الطالبين زيتا وسيجما (Zeta And Sigma) عند لاكاتوس (1976, Pp. 70-72).



شكل (8:11)

بعد تبرير نظرية يولر، عبّر المشاركون جميعاً عن رأي يفيد بوجود شكل متعدد السطوح لم تكن فيه نظرية يولر صحيحة. مثلاً، اعتقد المشاركون D، كما هو مشار إليه في المقابلة الثانية، بعدم انطباق النظرية على الأشكال متعددة السطوح جميعها.

#### المقابلة الثانية

**المشارك D:** حسناً... في البداية، بُررت فقط في الأشكال العادية متعددة السطوح دون استثناء، وذلك بسبب وجود خمسة أنواع من الأشكال العادية متعددة السطوح. أعتقد أنها مبررة في الأشكال الخمسة جميعاً، ومن ثم فهي مبررة في المناشير والأشكال الموشورية. لذا، فإنني أعتقد أنها مبررة في معظم الأشكال متعددة السطوح بصورة عامة.

**الباحث:** إذن، هل تعتقد وجود حالات لا تنطبق عليها النظرية؟  
**المشارك D:** في بعض الحالات... أعتقد أنها لا تنطبق على الحالات جميعها. (بدأ يرسم أشكال ليحصل على مجسمات تثبت عدم انطباق نظرية الأشكال متعددة السطوح).

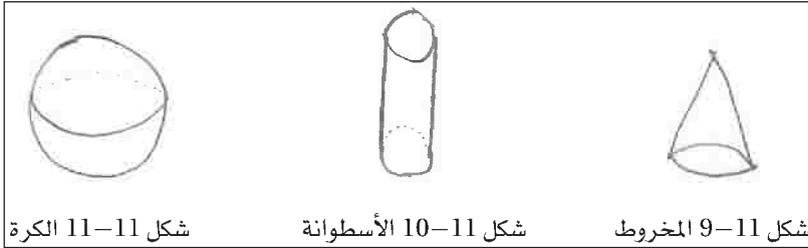
وعلى الرغم من أن المشارك B برّر النظرية باستخدام الطريقة العامة، فإنه حاول إيجاد مثال مضاد معتقداً وجود مثال على الأقل. وقد عبّر المشاركون جميعاً عن رأيهم بوجود مثال لا تنطبق عليه النظرية.

### المجسّمات الهندسية التي اقترحها المشاركون بصفحتها أمثلة مضادة

اقترح المشاركون أنواعاً مختلفة من الأشكال الهندسية المجسّمة على أنها أمثلة مضادة للنظرية. وصنّفت الأشكال الهندسية المجسّمة التي اقترحها المشاركون إلى أربع مجموعات كما هو موضح أدناه.

#### مجسّمات بسطوح منحنية

اقترح المشاركون (B, C, E, F, H, I) مجسّمات بسطوح منحنية كالشكل المخروطي (شكل 9:11) والأسطوانة (شكل 10:11) والكروي (شكل 11:11) على أنها أمثلة مضادة.



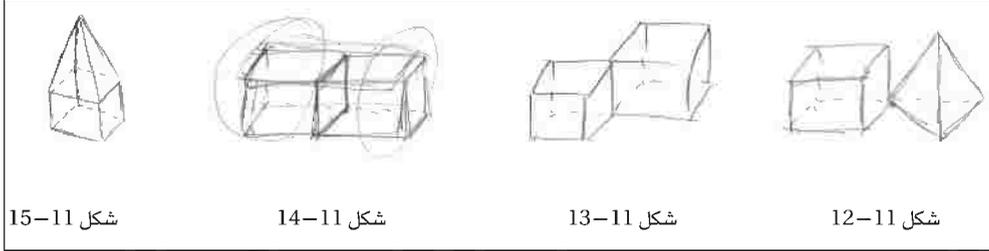
#### مجسّمات هندسية متعددة السطوح تشترك في النقاط والخطوط والأوجه

استشهد تسعة مشاركين هم: (A, B, C, D, E, F, G, H, I) بمجسّمات مكونة من شكلين هندسيين متعددي الأوجه يشتركان في النقاط والخطوط والأوجه بصفحتها أمثلة مضادة. ويمكن تقسيم هذه المجسّمات إلى: (أ) مجسّمات تشترك اشتراكاً تاماً في بعض النقاط أو الخطوط أو الأوجه (من شكل 12:11 إلى شكل 15:11)، (ب) مجسّمات تشترك جزئياً فقط في خطوط أو أوجه (من شكل 16:11 إلى شكل 19:11).

#### مجسّمات تشترك اشتراكاً كاملاً في النقاط أو الخطوط أو الأوجه

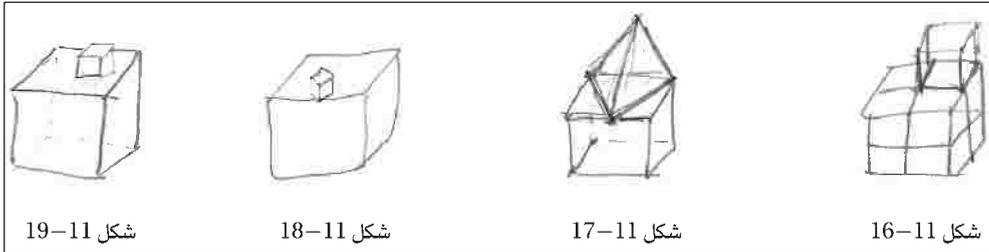
تنطبق النظرية في المجسّمات التي تشترك في نقطة واحدة كما هو موضح في شكل 12:11، على كل شكل متعدد الأوجه، ويشترك شكلان متعددا الأوجه في نقطة، حيث  $V-E+F=3$ . واقترح المشاركون أيضاً مجسّمات تشترك في الحرف (شكل 13:11)، إضافة

إلى تلك المجسمات التي تشترك في الوجه اشتراكاً تاماً (شكل 14:11 و 15:11) بصفتها أمثلة مضادة.

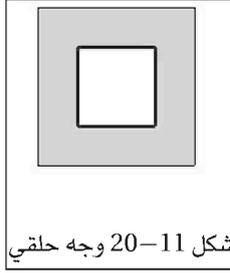


مجسمات تشترك جزئياً فقط في خطوط أو أوجه

أثار الشكلان 14:11 و 15:11 لدى المشاركين السؤال الآتي: هل يكون من المناسب أن نعهما مشتركين في الوجوه؟ واقترح المشاركون المجسمات المعدلة التي تشترك جزئياً في الخطوط أو الوجوه بصفتها أمثلة مضادة.



فكر المشاركون ملياً في كيفية عدّ الأحرف عندما تكون مشتركة جزئياً كما في شكل 16:11، وعندما تكون مقسمة كما في شكل 17:11. وقاد المثال المضاد المشار إليه في شكل 19:11 المشاركين إلى التفكير في السؤال الآتي: «هل من المناسب أن نعد الوجه الناجم عن ربط وجهين وجهاً واحداً؟» أطلق لاکاتوس (Lakatos, 1976, P.74) على هذه الحالة اسم «وجه حلقي» (Ring-Shaped Face) (شكل 20:11).



شكل 11-20 وجه حلقي

### المجسمات متعددة الأسطح بثقوب (Polyhedra With Holes)

يمثل النوع الثالث من المجسمات الذي اقترحه المشاركون (A, B, C, G, J, K) أمثلة مضادة لمجسمات تحتوي على ثقوب، كما هو موضح في الشكل 11:21 إلى الشكل 11:32. وقد شجعت هذه الأمثلة المضادة المشاركين على إعادة التفكير في تعريف الوجه أيضاً.



شكل 11-23

شكل 11-22

شكل 11-21

### المجسمات متعددة الأوجه التي تحتوي على مجسمات أخرى متعددة الأوجه

اقترح ثمانية مشاركون، هم: (A, B, C, D, F, G, J, K) مجسمات تكون متعددة الأوجه، تحتوي على مجسمات أخرى متعددة الأوجه بصفتها أمثلة مضادة. ويمكن تقسيم مثل هذه الأمثلة المضادة إلى ثلاثة أنواع فرعية على النحو الآتي: يتمثل النوع الأول بوجود مجسم داخل مجسم آخر، بحيث لا يشترك معه في أي وجه أو نقطة أو خط (شكل 11:24)، في حين يتمثل النوع الثاني بمجسمين يشتركان في وجه اشتراكاً تاماً (شكل 11:25)، أما النوع الثالث، فيتمثل في وجود شكل داخل شكل آخر، ويشترك الشكلان في جزء من الوجه (شكل 11:26).



شكل 11-26

شكل 11-25

شكل 11-24

### إجابات المشاركين على التباين الذي أحدثته الأمثلة المضادة

قُسمت إجابات المشاركين على التباين بين الأمثلة المضادة والنظرية إلى أربع فئات، هي: طريقة منع التشوه، وطريقة منع الاستثناء، وطريقة تعديل التشوه، والتخمينات الجديدة.

#### طريقة منع التشوه

استخدم المشاركون D و E طريقة منع التشوه. واقترح المشاركون E في الحلقة الثالثة أشكالاً مخروطية وأسطوانية وكروية بصفاتها أمثلة مضادة، وتساءل عن كيفية تحديد عدد النقاط والخطوط والأوجه في هذه الأشكال. وبعد ذلك قال: «الشكل متعدد الأوجه هو عبارة عن شكل هندسي مجسم مكون من مضلعات متعددة»، والسطح المنحني لا يكون مضلعاً. وعلى هذا، فإن المجسمات ذات السطوح المنحنية ليست أشكالاً متعددة الأوجه بل هي كائنات غير سوية غريبة الشكل.

#### المقابلة الثالثة

المشارك E: المخاريط لها سطوح منحنية، لذا، أرى أنها لن تقيّد.

الباحث: ما المشكلة في السطوح المنحنية؟

المشارك E: لأنك لا تستطيع إحصاء عدد الأحرف والأوجه في السطوح

المنحنية. فهل تستطيع إحصاء عدد الأوجه؟ لكن عدد

الرؤوس واحد، وأعتقد أنه لا يوجد أي حرف بحسب التعريف

الذي أفكر فيه.

الباحث: هل تستطيع القول أن المخروط شكل متعدد الأوجه؟ نظرية يولر تتحدث عن الأشكال متعددة الأوجه.

المشارك E: عندما نتحدث عن السطوح المنحنية فإن للمجسم الكروي سطوحاً منحنية، ولهذا المجسم وجه واحد، ولكن ليس له حرف أو نقطة مميزة، وأرى أنه لا يوجد شيء من هذا القبيل.

الباحث: ما تعريف الشكل متعدد الأوجه، في رأيك؟

المشارك E: أعتقد أنه مكون من أوجه لها زوايا. (بدأ بكتابة التعريف) «الشكل متعدد الأوجه = شكل هندسي مجسم مكون من مضلعات متعددة».

#### طريقة منع الاستثناء

لاحظ الباحثون المشاركون (A, D, F, G, I) وهم يجربون طريقة منع الاستثناء. وقد عرّف المشترك F الشكل متعدد الأوجه أنه «شكل هندسي مكون من أوجه». وبذلك، فإن الأشكال الهندسية المجسمة تعدُّ أشكالاً متعددة الأوجه؛ لأن السطوح المنحنية عبارة عن وجوه. وبهدف استثناء المخاريط والأسطوانات والأشكال الكروية، عدّل المشارك F التخمين الأصلي ليصبح على النحو الآتي: «في جميع الأشكال متعددة الأوجه، باستثناء تلك المكونة من أوجه منحنية، فإن  $V-E+F=2$ ». واستخدم المشارك I في المقابلة الرابعة طريقة منع الاستثناء عن طريق تعديل النظرية لتصبح على النحو الآتي: «في الأشكال متعددة الأوجه التي لا تحتوي على دائرة، فإن  $V-E+F=2$ ».

#### المقابلة الرابعة

الباحث: (مشيراً إلى الشكلين الكروي والأسطواني)، هل يمكننا أن نعدّهما أشكالاً متعددة الأوجه أيضاً؟

المشارك I: لديهما وجه أو أكثر. يمكننا أن نعدّهما شكلاً متعدد الأوجه.

الباحث: إذن، ألا يجب علينا تعديل هذه المعادلة  $(V-E+F=2)$ ؟

المشارك I: نعم...

الباحث: كيف يمكننا تغييرها؟

المشارك I: (فكر ملياً) إذا ضمنا الدائرة... فإنني أعتقد أن أي شكل متعدد

الأوجه دون أي دوائر ينتمي إلى هذه الفئة ( $V-E+F=2$ ).

أليس كذلك؟

اقترح المشارك I مجسمين مستطيلين يشتركان في حرف واحد (شكل 11:27)

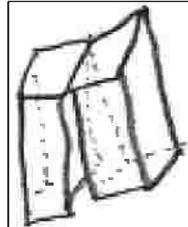
بصفتها مثالين مضادين. ثم نقح بعد ذلك النظرية لتصبح على النحو الآتي: «في الأشكال

متعددة الأوجه التي لا تحتوي على دائرة وغير مربوطة بغيرها من الأشكال متعددة الأوجه،

فإن  $V-E+F=2$ ». ووجد المشارك G أشكالاً هندسية مجسمة بثقوب على أنها أمثلة مضادة،

وعدّل النظرية لتصبح على النحو الآتي: «في الأشكال متعددة الوجوه غير المخترقة بثقب

اخترافاً تاماً، فإن  $V-E+F=2$ ».



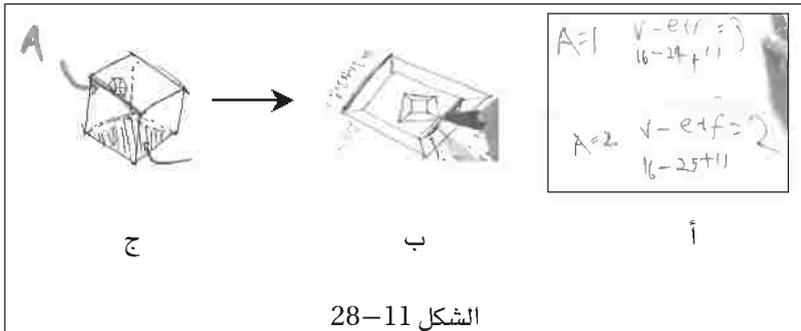
شكل 11-27

### طريقة تعديل التشوه

جرّب المشاركون B, D, E, F, G طريقة تعديل التشوه لتحويل المثال المضاد إلى مثال.

واعتمد المشارك B بعد التوصل إلى المثال المضاد الذي يكون فيه جزء من الوجه مشتركاً

بشكلين، أن تبرير نظرية يولر يعتمد على عدّ الحافة المقسمة بنقطة، حافة واحدة أو اثنتين.



قارن المشارك B النتائج عند عدّ الحرف (الخط أ في شكل 11:28 أ) المقسوم بنقطة على أنه حرف واحد ( $A=1$ )، وعندما عدّه على أنه اثنان ( $A=2$ ). وعندئذٍ، فإن المشارك B في المقابلة الخامسة أوضح سبب عدّه الحرف المقسوم بنقطة في هذا الشكل الهندسي المجسم على أنه اثنان.

### المقابلة الخامسة

الباحث: هل يُعدّ المجسم شكلاً متعدد الأوجه؟

المشارك B: نعم، إنه كذلك.

الباحث: إذن، ماذا بوسعنا أن نفعّل؟

(المشارك يكتب B)

المشارك B: إذا كان هناك رأس في منتصف الحرف (حتى لو لم يكن في المنتصف تماماً)، فعندئذٍ سيصار إلى عدّ الجانبين الأيمن والأيسر للرأس على نحوٍ مستقل. ومن الضروري جداً عدّ هذا الجزء على نحوٍ منفصل (الجزء الأيسر من الخط أ)، وذلك الجزء أيضاً (الجزء الأيمن من الخط أ). وفي حالة الأشكال المستوية، نعدّ أي خط بين أي نقطتين بصورة منفصلة؛ ويجب عليك حتى تتمكن من جعل (قيمة  $V-E+F$ ) في المجسمات تساوي 2، أن تعدّ الجانبين الأيمن والأيسر للنقطة كل جانب على حدة.

وأن أحد المشاركين أيضاً لم يعدّ الشكلين متعددي الأوجه اللذين يشتركان في وجه اشتراكاً تاماً، حيث إن أحدهما بداخل الآخر (شكل 11:25)، على أنهما مثال مضاد بعد استخدام طريقة تعديل التشوه. ورأى المشارك D أن الشكل لم يكن مثلاً مضاداً لأنه عدّ مجسماً مغموراً دون غطاء، بدلاً من كونهما مجسمين يشتركان في وجه واحد.

أما الوجه الذي على شكل حلقة (شكل 11:20)، ففضّل بعض المشاركين استخدام طريقة منع التشوه بعدم عدّه وجهاً، ومن ثم، استخدم طريقة تعديل التشوه بعدم عدّ الأشكال المجسّمة ذات الوجه الحلقي على أنها أمثلة مضادة  $V=16, E=24, F=10, V-E+F=2$ . وقد استخدم المشارك I، طريقة منع التشوه للأشكال الأسطوانية (شكل 11:19).  $E+F=2$

والكروية، وطريقة تعديل التشوه للمخروط آخذاً في الحسبان أن نظرية الأشكال المتعددة يمكن تعديلها بموجب الشرط  $V=1, E=1, F=2$ .

### التخمينات الجديدة

لم تقتصر مناحي المشاركين على منع التشوه، وتعديله ومنع الاستثناء، وهي طرائق تتشابه إلى حد ما، حيث إنها جميعاً تستخدم لدعم الصيغة الرياضية  $V-E+F=2$ . لذا، اقترح المشاركون نوعين جديدين من التخمينات، يشتمل أولهما على البحث عن صيغة جديدة بخصوص قيمة  $V-E+F$  التي يُعبّر من خلالها عن العلاقة بين النقاط، والخطوط، والأوجه في الأشكال الهندسية المجسمة، وفيها الأمثلة المضادة التي توصلوا إليها. ويمثل الجدول الآتي 1:11 ملخصاً للتخمينات الجديدة التي اقترحها المشاركون:

جدول 1:11 ملخص تخمينات المشاركين

المشاركون	الشروط	$V-E+F$
G	إذا لم يكن الوجه على شكل الحلقة في الأشكال متعددة الأوجه بثقوب	0
I	في الأشكال متعددة الأوجه التي تحتوي على دائرة	1
G and F	في الأشكال متعددة الأوجه التي تشترك اشتراكاً تاماً إما بنقطة أو بخط مع أشكال أخرى متعددة الأوجه	3
H	إذا رُبطت الأشكال المجسمة عند الرأس أو الحرف أو الوجه	
F	في الأشكال متعددة الأوجه التي تحتوي على أشكال أخرى متعددة الأوجه مثل المكعب الأجوّف (Hollow Cube)	4

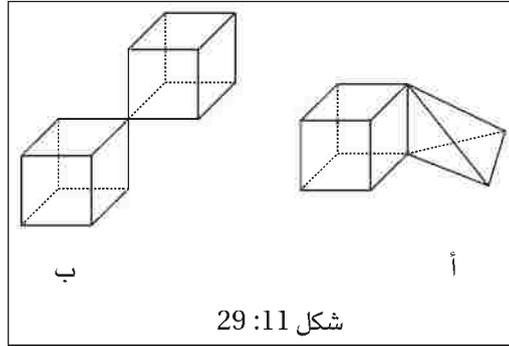
تتعلق الأنواع الأخرى من التخمينات التي اقترحها المشاركون A بضرورة أخذ العناصر الجديدة في الحسبان خلا النقاط والخطوط والأوجه. واقترح كما في المقابلة السادسة تطوير صيغة تشتمل على عناصر ثلاثية الأبعاد.

## المقابلة السادسة

المشارك A: يمكن في حالة البعد الثنائي، وضع قانون بكل سهولة باستخدام  $V, E, F$  فقط، لكن في ثلاثية الأبعاد يُضاف عنصر جديد هو المساحة. وعلى هذا، إذا كانت صيغة نظرية يولر قد وضعت باستخدام عناصر ثنائية الأبعاد، فإنني أعتقد أن بإمكاننا وضع صيغة جديدة تنطبق حصرياً على البعد الثالث وفيه المساحة، أليس كذلك؟

الباحث: العنصر الجديد ذو الأبعاد الثلاثة. هل نستطيع القيام بذلك فعلاً ذلك إذا فكرنا في ذلك؟  
المشارك A: نعم، أعتقد ذلك.

الباحث: إذن، كيف يمكننا تحديد الأرقام في ثلاثيات الأبعاد؟  
المشارك A: باستخدام المساحة.



شكل 11: 29

وبعد ذلك، اقترحتُ المعادلتين  $V-E+F-S=1$  و  $V-E+F+S=3$  بصفتهمَا تخمينين جديدين، وتؤكد أن المعادلة  $V-E+F-S=1$  يمكن تبريرها بالأشكال المجسمة في شكل: 29:11 على النحو الآتي:  $V=15, E=24, F=12, S=2, V-E+F-S=1$ . (شكل 11: 29 ب)  $V=10, E=17, F=10, S=2, V-E+F-S=1$ . وقد قاد هذا التخمين المشارك A إلى التفكير في إمكانية توسعة نظرية الأشكال متعددة الأوجه لتشتمل على مجسمات رباعية الأبعاد.

## مناقشة

كانت الأشكال متعددة السطوح التي درسها المشاركون قبل البحث مقصورة على فئة الأشكال العادية متعددة الأوجه، والمناشير، والأشكال الهرمية والموشورية والأشكال متعددة الأوجه شبه العادية مثل كرة القدم، التي تنطبق نظرية يولر عليها جميعها. وعلى الرغم من ذلك، فكّر المشاركون في وجود بعض الأشكال متعددة الأوجه التي لا تنطبق عليها النظرية. وبدا أن هذا الاعتقاد نجم عن طريقة التبرير التي استخدمها غالبية المشاركين. يمكن الحصول على قيمة  $V-E+F$  بإحصاء عدد النقاط والأحرف والأوجه في حالة الأشكال المنشورية والهرمية والموشورية (فمثلاً: في المنشور ذي الزوايا التي عددها  $n$ ، فإن  $V=2n, E=3n, F=n+2$ ، وبذلك، فإن  $V-E+F=2$ ). وعلى الرغم من ذلك، فقد أخفق هذا التبرير في تقديم معلومات عن أنواع جديدة من المجسمات التي لم تجتز هذا الاختبار بعد. وتشير آراء المشاركين التي تقول بوجود أشكال متعددة الأوجه لم تصلح معها نظرية الأشكال متعددة السطوح، إلى اعتقادهم أن نطاق الأشكال متعددة الأوجه واسع. ويدعم وجهة النظر هذه الأنواع المتعددة من المجسمات التي عرضها المشاركون بصفتها أمثلة مضادة.

هناك أوجه تشابه قوية بين الأشكال المجسمة التي اقترحها المشاركون على أنها أمثلة مضادة، وتلك التي ناقشها لاكاتوس. وتمثّل النوع الأول من الأمثلة المضادة التي توصل إليها المشاركون في المجسمات ذات الأوجه المنحنية، التي ظهرت لدى لاكاتوس كالأسطوانات (ص.22). في حين تمثّل النوع الثاني بشكلين هندسيين، أو أكثر، متعددي الأوجه يشتركان في النقاط أو الخطوط أو الأوجه، التي اكتشفها علماء رياضيات أمثال هيزل (Hessel) (الأشكال التي تشترك في الخطوط أو النقاط) ولوليير (Lhuillier) (المكعب مع قمة أو تاج) في العامين 1813 و 1832 على التوالي (P.15,34). وكان لوليير أول من اكتشف النوع الثالث من الأمثلة المضادة (ص.19)، إضافة إلى إطار الصورة والنفق اللذين أشار إليهما لاكاتوس، وجد المشاركون أيضاً شكلاً متعدد الأوجه لم يكن مثقوباً بصورة تامة. أما النوع الرابع، فيتمثل في الأشكال متعددة الأوجه داخل أشكال أخرى متعددة الأوجه، التي اكتشفها

هيزل ولولير استناداً إلى الفكرة التي توصل إليها خلال مراقبة مجموعة المعادن شبه البلورية (Crystalloid Of Mineralogy) الموجودة داخل معدن بلوري شفاف (ص. 13).

ونحن نعتقد أنه يمكن استخدام الأمثلة المضادة في مساعدة الطلاب على تطوير الاستدلال الرياضي (Lakatos, 1976; Boats, Et Al., 2003). وقد درس المشاركون في هذه الدراسة مفاهيم مثل: الشكل متعدد السطوح، والوجه وتوصلوا إلى تعريفات جديدة. وشجعتهم الأمثلة المضادة التي اكتشفها المشاركون أيضاً على دراسة تعريف المصطلحات على نحوٍ دقيق. وقد دفع الوجه الحلقي خاصة بعض المشاركين إلى إعادة النظر في تعريف الشكل متعدد الأوجه، حيث أكدوا عدم إمكانية تسميته بالشكل متعدد الأوجه؛ لأن الشكل لا يتماشى ومجموع الزوايا الداخلية للشكل متعدد الأوجه  $180 \times n - 2$ . وهذا يبين أنه كان ينظر إلى صيغة مجموع الزوايا الداخلية للشكل متعدد الأوجه بصفته خاصية للتعريف تقرر هل كان الشكل متعدد الأوجه أم لا. وتشبه هذه الطريقة في تعريف الشكل متعدد الأوجه، التعريف الذي عرضه بالتزر (Lakatos, 1976, P. 16) (Baltzer): «أي، نظام الشكل متعدد الأوجه حيث المعادلة  $V-E+F=2$ ».

لقد لوحظ أن طلاب المرحلة الابتدائية استخدموا طريقة منع التشوه وطريقة منع الاستثناء عند كل من «ريد» و«أثنز»، ولوحظ أيضاً استخدام المشاركين في هذه الدراسة طريقة منع التشوه، وطريقة منع الاستثناء، وطريقة تعديل التشوه، والتخمينات الجديدة. ولم يرفض المشاركون النظرية الأصلية، بل حاولوا تطوير تخمينات جديدة تتألف من أمثلة مضادة، وقد أقدم أربعة من المشاركين الخمسة الذين استخدموا طريقة منع الاستثناء على وضع تخمينات جديدة. وكانت هناك حالات في الماضي، عُدَّت فيها بعض الأمثلة المضادة انحرافات، وبذلك استُثِنَت، لكنها قُبِلت أخيراً، واعتمُدت بصفته أمثلة (E.G. Lakatos, 1976, P.31). وقد أظهر المشاركون هذه القدرة على مراجعة موقفٍ ما وتغييره. واتخذوا في البداية كلاً من طريقة منع التشوه وطريقة منع الاستثناء دليلاً على الأمثلة المضادة التي عرضوها، لكنهم حاولوا تضمين الأمثلة المضادة داخل نطاق الأمثلة في أثناء تعديل التشوه

أو التخمينات الجديدة. وهذه المرونة في التفكير هي التي قال كروتسكي وسريرامان إنها تُعدّ سمة من سمات الموهوبين في الرياضيات.

رأى لاکاتوس أن طريقة دمج المبرهنة التمهيدية تُعد طريقة مفيدة لتقوية التخمين استناداً إلى البرهان. ويُعدّ تحليل البرهان شرطاً أساسياً لهذه الطريقة، ويُعدّ أيضاً عنصراً مهماً من عناصر البرهان والتنفيذ، كما أشار نوكاوا (Nunokawa, 1996). وعلى الرغم من ذلك، لم تلاحظ طريقة دمج المبرهنة التمهيدية وتحليل البرهان في هذه الدراسة. وعندما شُجّع المشاركون B، الذي عرض إثباتاً بازدياد عناصر الشكل متعدد الأوجه، على التفكير في صدق إثباته للمثال المضاد (الشكل 11:18)، عرض حلاً لتعديل التشوه بقوله: «ليس البرهان هو الخطأ، بل إن هناك مشكلة في هذا الجسم».

## الخاتمة

تركز هذه الدراسة على البنى التي عرضها طلاب الصف الخامس أو السادس الأساسي لحل المهام المتعلقة بنظرية يولر للمجسمات متعددة السطوح، ومقارنتها بالبنى التي عرضها علماء الرياضيات، التي ناقشها لاکاتوس. ولدى تحليل سريرامان (Sriraman, 2004) مفهوم طلاب الصف التاسع الأساسي للبرهان، بيّن أن العمليات التي استخدمها الطلاب الموهوبون تظهر تماثلاً ملحوظاً مع تلك التي استخدمها علماء الرياضيات المختصون. وتظهر هذه الدراسة أيضاً تشابهاً بين أبنية طلاب الصفين الخامس والسادس الأساسييين الموهوبين في الرياضيات، وأبنية علماء الرياضيات الذين درسهم لاکاتوس. إن الأمثلة المضادة وطرق حل التضارب بين النظرية والأمثلة المضادة التي اقترحها المشاركون، باستثناء طريقة دمج المبرهنة التمهيدية وتحليل البرهان، قد أظهرت تشابهاً ملحوظاً مع تلك المقدمة في تاريخ الرياضيات.

## قائمة المراجع

- Athins, S. (1997). Lakatos' Proofs And Refutations Comes Alive In An Elementary Classroom. *School Science And Mathematics*, 97(3), 150–154.
- Bluton, C. (1983). Science Talent: The Elusive Gift. *School Science And Mathematics*, 83(8), 654–664.
- Boats, J. J., Dwyer, N. K., Laing, S., & Fratella, M. P. (2003). Geometric Conjectures: The Importance Of Counterexamples. *Mathematics Teaching In The Middle School*, 9(4), 210–215.
- Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics Through Inquiry*. Portsmouth, Nh: Heinemann.
- Branford, B. (1908). *A Study Of Mathematical Education*. Oxford: Clarendon Press.
- Brousseau, G. (1997). *Theory Of Didactical Situations In Mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield , Ed. And Trans.). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Chazan, D. (1990). Quasi–Empirical Views Of Mathematics And Mathematics Teaching. *Interchange*, 20(1), 14–23.
- Clairaut, A. C. (1741). *Éléments De Géométrie*. Paris: Gauthier–Villars.
- Clairaut, A. C. (1746). *Éléments De Algèbre*. Paris: Rue Saint Jacques.
- Cox, R. (2004). Using Conjectures To Teach Students The Role Of Proof. *Mathematics Teacher*, 97(1), 48–52.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology Of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Gagne, F. (1991). Toward A Differentiated Model Of Gifted And Talent. In N. Colangelo & G.A. Davis (Eds.), *Handbook Of Gifted Education* (Pp. 65–80). Boston: Allyn And Bacon.
- Klein, F. (1948). *Elementary Mathematics From An Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*. (E. R. Hedrick & C. A. Noble, Trans.). New York: Dover. (Original Work Published 1924).

- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children*. Chicago: The University Of Chicago Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs And Refutations: The Logic Of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1986). A Renaissance Of Empiricism In The Recent Philosophy Of Mathematics? In T. Tymoczko (Ed.), *New Directions In The Philosophy Of Mathematics* (Pp. 29–48). Boston: Birkhauser.
- Lee, K. H. (2005). Mathematically Gifted Students' Geometrical Reasoning And Informal Proof. In L. C. Helen, & L. V. Jill (Eds.), *Proceedings Of The 29Th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education* (Vol 3. Pp. 241–248), Melbourn, Australia: Pme.
- Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic Examples: Seeing The General In The Particular. *Educational Studies In Mathematics*, 15, 277–289.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research And Case Study Applications In Education*. John Wiley & Sons, Inc.
- Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. (Eric Digest No. E482).
- Nunokawa, K. (1996). Applying Lakatos' Theory To The Theory Of Mathematical Problem Solving. *Educational Studies In Mathematics*, 31, 269–293.
- Reid, D. (2002). Conjectures And Refutations In Grade 5 Mathematics. *Journal For Research In Mathematics Education*, 33(1), 5–29.
- Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations: The Problem–Solving Experiences Of Four Gifted Students. *Journal Of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151–165.
- Sriraman, B. (2004). Gifted Ninth Graders' Notions Of Proof: Investigating Parallels In Approaches Of Mathematically Gifted Students And Professional Mathematicians. *Journal For The Education Of The Gifted*, 27(4), 267–292.
- Sriraman, B. (2006). An Ode To Imre Lakatos: Quasi–Thought Experiments To Bridge The Ideal And Actual Mathematics Classrooms. *Interchange*, 37(1–2), 151–178.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics Of Qualitative Research* (2Nd Ed.). Thousand Oaks, Ca: Sage Publications.

Toeplitz, O. (1963). *The Calculus—A Genetic Approach* (L. Lange, Trans.). Chicago: The University Of Chicago Press. (Original Work Published 1949).

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design And Methods* (3Rd Ed.). Thousand Oaks, Ca: Sage Publications.

