

### اللعِبُ بِـ «القوى»

Bharath Sriraman

جامعة مونتانو

Pawel Strzelecki

معهد الرياضيات، جامعة وارسو، بولاندا



### ملخص

يستكشف هذا الفصل النطاق الواسع للرياضيات البحتة التي أصبحت سهلة المنال عبر استخدام المسائل التي تشتمل على القوى Powers. ونركز هنا على وجه الخصوص، على ضرورة تحقيق التوازن بين منحى تدريسي ومنهاج تعليمي في الرياضيات يستند إلى التطبيق والسياق من ناحية، والرياضيات البحتة القوية، الكامنة ببساطة تحت الأسئلة المطروحة والمفهومة بسهولة في الرياضيات البحتة من ناحية أخرى؛ وبذلك يدرك الطلاب محدودية أدوات الحساب، واكتساب تقديرٍ لجمال الرياضيات وقوتها، إضافة إلى قابليتها البعيدة المدى للتطبيق في العالم الحقيقي.

## المقدمة

ندرس في هذا البحث التبعات التربوية والمنهاجية في المجال العام «للقوى». ونعني بـ «القوى» الرياضيات الناشئة عن دراسة الدوال الأسية (Exponential Functions). وتوصي معايير الجبر في الولايات المتحدة أن يصار إلى تعريف طلاب الصفوف التاسع إلى الثاني عشر بالدالة الأسية وفئات الدوال على نحو عام بما في ذلك الدوال متعددة الحدود (Polynomial)، واللوغرتمية (Logarithmic) والفترية (NCTM, Periodic) (2000). ويُعرّف طلاب الصفين التاسع والعاشر (الذين تتراوح أعمارهم بين 13-16 سنة) على نحو تقليدي في الولايات المتحدة بالدوال الأسية، عن طريق توسيع قوانين الأس من قوى العدد الصحيح (Integer Powers) إلى القوى الحقيقية (Real Powers). وعادة ما يتبع ذلك رسوم بيانية للدوال الأسية، مثل:  $2^x$ ,  $3^x$  وهكذا، بهدف نقل حقيقة أن نطاق الدوال على صيغة  $a^x$  ( $a > 1$ ) يكون عبارة عن مجموعة أعداد حقيقية، في حين يكون المدى  $(0, \infty)$ . ويظهر الرسم البياني أيضاً خصائص مثل زيادة سلوك الدالة، ويمثل محور السينات ( $x$ -Axis) الخط الأفقي المقارب لهذه الدالة، ويكون على صيغة  $x \rightarrow -\infty$ . ثم يصار إلى تعريف الطلاب بالحالة  $0 < a < 1$ ؛ من أجل دراسة خصائص نعرفها جميعاً. ويتمثل الموضوع الرئيس في هذه المعاملة التقليدية للدوال الأسية في تعريف الطلاب العدد غير النسبي (E) عن طريق دراسة سلوك  $(1 + 1/n)^n$  as  $n \rightarrow \infty$ . وأخيراً، يُعرّف الطلاب باللوغريتمات (Logarithms) والقوانين المماثلة في اللوغريتمات المشتقة من لوغريتمات الأسس (Logarithms Of Exponents).

وبحسب الخبرات الرياضية للمؤلف الثاني في بولندا بصفته طالباً في المرحلة الثانوية، فإن الدوال الأسية تظهر في وقت متأخر نوعاً ما في المنهاج مقارنة بمنهاج الولايات المتحدة الأمريكية، أي مع بداية السنة الثالثة للمرحلة الثانوية (للطلاب الذين تتراوح أعمارهم بين 16 و 17 سنة). وقد كان تسلسل الأحداث مشابهاً لما وصفناه في الفقرة السابقة. ففي البداية تعلّم الطلاب كيفية تعريف القوة ذات الأس النسبي (Rational Exponents)، وبذلك، تُلبى متطلبات قوانين الأسس الطبيعية جميعاً. وبعدئذٍ، وبالنظر إلى الرسم البياني، يُحثّ الطلاب على ملاحظة أن الدوال الأسية تنظم التقدم اللوغاريتمي إلى

تقدم هندسي (وتستخدم هذه السمة في رسم الدوال الأسية على ورقة رسم بياني) إلخ. وأخيراً، عُرِّفت القوى ذات الأسس الحقيقية العشوائية بطريقة أكثر أو أقل دقة باستخدام الاضطراب (Monotonicity) في الأعداد. ومن الصعوبة بمكان تحديد عدد الطلاب الذين تمكنوا من استيعاب هذا الجزء من الكتاب المدرسي والاحتفاظ بما استوعبوه. وعلى أي حال، فإننا نخشى أن العدد لم يكن كبيراً. لقد كان هدف هذا الكتاب، في رأينا، واضحاً ويتمثل في تبسيط الرياضيات على غرار طريقة مجموعة البورباكي<sup>(1)</sup> (Bourbaki)، ولكن يا للأسف، لم يفلح في ذلك، فتعريف مجموعة «البورباكي» لـ  $2^{\sqrt{2}}$  بصفته أصغر حد أعلى لمجموعة القوى النسبية للعدد، 2، لم يكن موفقاً، إذ إن الطالب البالغ من العمر ستة عشر عاماً، والمتألق رياضياً، لديه كثير من الأمور الأكثر أهمية التي بوسعه عملها، لذا، يجب أن تكون الرياضيات البحتة مصدر ترفيه وتسلية، وسنعود إلى هذا لاحقاً.

ويواجه الطلاب أيضاً في المنهاج التقليدي مشكلات في الكلمات المرتبطة بالدوال الأسية: إذ إن الدوال التي تنتج من الانحدار الأسّي للبيانات الناشئة عن العلوم الطبيعية والاجتماعية والمالية، تُعطى الأولوية عند تقديمها للطلاب في سياق حل المسائل الكلامية. وهناك كثير من الأمثلة على مثل هذه الدالة. فمثلاً،  $p = 760e^{-0.145H}$  تربط الضغط  $p$  على السطح المستوي (بالمليمتر الزئبقي) حتى ارتفاع  $h$  (بالكيلومتر) فوق مستوى سطح البحر. وينمذج انتشار المعلومات عبر وسائل الإعلام (التلفاز والمجلات) بواسطة الصيغة  $d = p(1 - e^{-kt})$ ، حيث تشير  $p$  إلى عينة محددة، في حين تشير  $T$  إلى الزمن (Coleman, 1964). وتوجد أمثلة تقليدية كثيرة في الفيزياء. مثلاً، يمثل قانون نيوتن في التبريد بالصيغة الآتية:  $f(T) = T + (f_0 - T)e^{kt}$ ، حيث  $k < 0$ ، وتمثل  $f_0$  الحرارة الابتدائية للجسم المسخن، في حين تمثل  $T$  حرارة الوسط المحيط. ومن الأمثلة التقليدية الأخرى التحلل الإشعاعي ونمو البكتيريا وغيرهما.

(1) نيكولا بورباكي Bourbaki Nicolas اسم جماعي مستعار لمجموعة من خبراء الرياضيات (معظمهم فرنسيون)، وهي مجموعة كانت تحرر منذ عام 1934، سلسلة من كتب الرياضيات في محاولة منها لجعلها أكثر منطقية، حيث تبدأ دائماً من العام إلى الخاص، وتعرّف جميع المصطلحات والمفاهيم التي تستعملها، وهذا يسهل على القارئ فهم المادة المكتوبة. وقد عُرِّفت البراهين الرياضية التي تستخدمها ببراهين بورباكي، أي براهين يفهمها الناس من غير ذوي الاختصاص أيضاً- المرجع.

وقد قُلب هذا المنحى من خلال المنهاج المستند إلى الإصلاح في الولايات المتحدة، الذي يركز على نمذجة الأنشطة بوصفها وسيلة لتوليد البيانات، حيث يمكن، مثلاً، استخدام الكرات المرتدة ذات درجة مرونة معروفة. وبناءً على هذا المثال، يطلب إلى الطلاب إلقاء الكرة (كرة سلة، كرة تنس،... إلخ) من ارتفاع معروف، ومتابعة ارتفاع الارتدادات إلى أن تستقر الكرة على الأرض. ويكون لمثل هذه البيانات معنى عند إدراك سير ارتفاع الكرة المرتدة مقارنة بعدد الارتدادات الذي يوضح تناقص النمط الأسّي، ومن ثم يؤدي إلى الانحدار الأسّي. مثلاً، تتمذج البيانات الخاصة بكرة السلة المرتدة بكل دقة من خلال  $f(x) = A(0.5)^x$ ، حيث تشير A إلى الارتفاع الابتدائي، في حين تشير x إلى عدد الارتدادات. وهذه أمثلة محددة من بين عدد كبير من النماذج التي تشير إلى أنشطة تعرّض الطلاب للرياضيات التطبيقية في سياق العالم الحقيقي في سن مبكرة جداً في المدرسة (Lesh & Doerr, 2003). ويمثل هذا نقيضاً كاملاً لأيام «الخوالي الجميلة» عندما كان على المرء أن يدرس مساقاً في المعادلات التفاضلية ليواجه مثل هذا النوع من المسائل ضمن بيئة تعليمية إملائية.

ينقل التعرض للجوانب التطبيقية من الرياضيات جانباً واحداً فقط للطلاب من طيف الرياضيات، ويمكننا القول إن أنشطة الرياضيات البحثية يمكن تحقيقها أيضاً، بوساطة مسائل تحتوي على قوى يمكن أن تقود الطلاب إلى تبصر عميق بسلوك الأعداد، والاحتمالات المثيرة في الرياضيات البحثية، على الرغم من جملتها الابتدائية المثيرة. ويتمثل هدفنا من هذا البحث في إبراز هذه الاحتمالات البديلة في الرياضيات البحثية، وتطبيقها عن طريق التلاعب بالقوى، وبذلك يتسع خيال الطلاب.

### مدخل لأساسيات نظرية الأعداد

المدخل إلى أساسيات نظرية الأعداد يصادف الطلاب مفاهيم أساسية لنظرية الأعداد، مثل الأعداد الأولية والأعداد المركبة، وخوارزمية القسمة، والاختبارات المتعلقة بها، ومفاهيم المضاعف المشترك الأصغر، والقاسم المشترك الأعظم، والنظرية الأساسية في الحساب في مرحلة المدرسة المتوسطة للطلاب الذين تتراوح أعمارهم بين

(10-13 سنة). وبالأسف، ليس هناك متابعة، أو أنها متابعة لا تفي بالغرض، لهذه الموضوعات في مراحل الدراسة العليا. ويتمثل أحد عيوب المنهاج في إظهار حساب التفاضل والتكامل، بصفته قمة خبرات المرحلة الثانوية للطلاب في تناول مجموعة من الأعداد الحقيقية ذات دوال متغيرات مستمرة. ويقدم التسلسل التقليدي للجبر، والهندسة، وعلم المثلثات، والهندسة التحليلية فرصاً ضئيلة لتطوير مفاهيم نظرية الأعداد الأولية التي يعرفها الطلاب سابقاً على نحوٍ أكبر. ويمكن للمسائل التي تحتوي على قوى أن تكون مفيدة في حل مثل هذا الوضع غير الملائم. ويمكن تصنيف جُلِّ الكتب الموجودة التي تشتمل على معالجة المسائل المحتوية على قوى ونظرية الأعداد، في كتب «المسابقات»، لذا، فهي توجد هائلة «نخبوية» تتعلق بمثل هذه المسائل. ونحن نفكر في ذلك بطريقة مغايرة، وندعو المعلمين إلى الإفادة، على نحوٍ ملائم، من مهام «القوة»؛ لينقلوا إلى الطلاب قوة الرياضيات البحتة ومحدودية أدوات الحساب. وسيصار إلى توضيح مثل هذه المسألة لاحقاً.

قد يفترض أحدهم السؤال الآتي: ما باقي قسمة العدد 131 6 على 215؟ لا تستطيع معظم الآلات الحاسبة حل هذه المسألة، وهذا يحتم علينا ضرورة تفحص المسألة بأدوات مفاهيمية مختلفة. نستطيع التفكير فيما يعنيه الباقي، ويمكننا الرجوع إلى مفاهيم من الصفوف الأولى والبدء بعمليات حساب أساسية، مثل:

ما باقي قسمة العدد 5 على 3؟ إنه 2، كان ذلك سهلاً.

ما باقي قسمة  $5 \times 8 = 40$  على 3؟ إنه 1، لا يزال الأمر سهلاً.

والآن، ما باقي قسمة  $5 \times 8 \times 7 = 280$  على 3؟ نستطيع بصعوبة إجراء القسمة على 3، والتوصل إلى أن الباقي يساوي 1.

هل هناك درس يمكن تعلّمه من خلال هذا العمل التجريبي؟ نعم؛ الظاهرة الرياضية المهمة التي نسعى إلى إيصالها تتمثل في أننا لو حسبنا باقي كلٍّ من 7، 8، 5 (التي هي 2، 1، 2 على التوالي)، وضربنا هذا الباقي، أي  $4 = 2 \times 2 \times 1$ ، وقسمناه على 3، فإننا سنحصل على الرقم نفسه في باقي قسمة 280 على 3. ويطلق على هذه الظاهرة بصورة عامة نظرية



لذا، فإن الرقم الأخير هو 7.

ولمّا كنا قادرين على تحديد الأعداد الأخيرة للأعداد الكبيرة، فلماذا لا ننظر إلى مسألة تحديد الأعداد الأولية.

### البدء بمسائل الأعداد: «مبررات» للتوافق والتحلل

دعونا نستهل حديثنا بمسألة موجودة. هل ثمة قوة صحيحة للعدد 2 تبدأ بـ 1999... في امتدادها العشري؟ وبعبارة أخرى، يطلب إلينا السؤال المطروح إثبات وجود عدد صحيح « $n$ » مثل العدد  $2^{1999} = 2^{1999} = \dots$  دون السؤال على نحو صريح عن مقدار هذه القوة بالتحديد. ونستطيع بكل وضوح افتراض أن  $n > 0$ . عندما نرفع العدد 2 إلى أي قوة صحيحة، هناك تسعة خيارات واضحة لكل رقم بعد ذلك. وبذلك، يكون هناك  $10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$  طريقة ممكنة لترتيب الأرقام الأربعة الأولى. ولمّا كانت  $n > 0$ ، فليس لدينا أي قيود على عدد القيم التي نستطيع إيجادها، ونستطيع بسهولة أن نوجد أكثر من 9000 قيمة للعدد  $2^n$ . وباستخدام مبدأ برج الحمام، يجب أن تبدأ بعض قوى العدد 2 بالأعداد الأربعة الأولى نفسها، لكننا لا نزال غير متأكدين أن إحدى هذه السلاسل الأولية تساوي فعلاً 1999. ويُعدُّ هذا سؤالاً دقيقاً ذا صلة باللانسيبية، وقد أراجأناه بعض الوقت بعد الإشارة إلى شيء أكثر سهولة.

هناك مسألة لطيفة تحل بسهولة من خلال مبدأ برج الحمام، وتستفيد من خصائص قابلية القسمة في إثبات وجود بعض قوى العدد 3 التي تنتهي بـ 001. ويمكن توضيح هذا بسهولة على النحو الآتي: افترض أن  $3^m$  و  $3^n$  حيث  $(m > n > 1)$ ، وعند قسمتهما على العدد 1000 يكون الباقي متساوياً. (يحتاج وجود مثل  $M$  و  $N$  إلى تطبيق مبدأ برج الحمام، وسنترك هذا كله للقارئ). إذن، فإن  $(3^{m-n} - 1) \cdot 3^n = 3^m - 3^n = 3^m - 3^n$  تقبل القسمة على 1000. ومن الواضح الآن أن  $3N$  و 1000 ليس بينهما عامل مشترك، وهذا يعني أن 1000 يجب أن تقسم العامل  $3^{m-n} - 1$ ، وهذا يعني أيضاً أن  $3^{m-n}$  ينتهي بـ 001.

دعنا نعود مرة أخرى إلى قوى العدد 2، وإلى السؤال الآتي: هل كان أحدها يبدأ بالعدد 1999، في الترميز العشري. ربما يبدو هذا التسلسل غريباً جداً من حيث ظهوره في بداية الترميز العشري لبعض قوى العدد 2. فدعونا نجرب شيئاً أكثر سهولة في البداية، ولتأخذ مثلاً، التسلسل  $A(N)$  المؤلف من الأعداد الأولى للقوى المتتالية للعدد 2:

8، 4، 2، 1، 5، 3، 2، 1، 6، 3، 1، 8، 4، 2، 1، ..... فهل سيظهر العدد 7 في هذا

التسلسل؟

هذه المسألة معروفة في النسخ المختلفة للدراسات المتعلقة بالرياضيات، وظهرت الإشارة الأولى إليها في الكتاب المشهور المعادلات التفاضلية العادية Ordinary Differential Equations (Arnold, 1978)، وعادةً ما تكون مصحوبة بحقائق مساعدة، أو مقترحات يقصد بها إيجاد حلول يمكن الوصول إليها بسهولة. ومع ذلك، لم يصادفنا أي حل تفصيلي لهذه المسألة. وسنعالج هذا الموقف المؤسف، وسوف نوضح في هذه العملية الرياضيات الغنية التي تنتجم عنها. بادئ ذي بدء، فإن أي حل سريع باستخدام ورقة وقلم رصاص أو أي أداة حساب أخرى سوف يتوصل بسهولة إلى:

$$2^{46} = 70,368,744,177,664$$

وبالمضي قدماً في هذه التجربة، نستطيع ملاحظة أن العدد 7 يمثل العدد الأول في القوة السادسة والخمسين والسادسة والستين والسادسة والسبعين والسادسة والثمانين للقوة 2 (لكن العدد الأول للقوة 106 للعدد 2 هو 8 وليس 7). ومع ذلك، فإن هذه الطريقة التجريبية بعيدة كل البعد من أن تكون جذابة رياضياً، ونحن نحتاج إلى حل أفضل يتيح لنا وضع نتائج أخرى. ويجب علينا في البداية أن ندرك معنى الجملة القائلة إن العدد 7 يمثل العدد الأول للعدد  $2n$ . الجواب بسيط: فالعدد سبعة يمثل العدد الأول لـ  $2n$  إذا، وإذا فقط، كان للعدد الطبيعي  $k$ :

$$7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$

ونستطيع الحصول على وصف أكثر سهولة لهذا الشرط إذا أخذنا اللوغريتمات العشرية لكلا الجانبين في الحساب، وهو ما يعرفه طلابنا. وعلى هذا، ينتج:  $K + \text{Log}(7)$  و  $8 + \text{Log}(2) < k + \text{Log} 8$ . ولما كانت اللوغريتمات العشرية للعددين 7 و8 تقع بين 0 و1، فنستطيع القول إن  $K$  هو الجزء المتمم للعدد،  $n\text{Log}(2)$  الذي يقود إلى التباينات الآتية:

$$\text{Log} 7 < n\text{Log}2 - [n\text{Log}2] < \text{Log}8$$

ويكفي الآن أن نجتمع بعض الحقائق المعروفة، وندعو القارئ إلى تحققها.

ليما (مُبرهنة) 1: العدد  $\text{Log}(2)$  غير نسبي.

ليما 2: إذا كان العدد  $x$  غير نسبي، وكان  $c(n) := nx - [nx]$ ، فعندئذ يكون لكل  $A$  و  $B$  تنتمي إلى المجموعة  $[0,1]$  عدد غير محدود من التسلسل  $c(n)$  يقع داخل الفترة  $(A,B)$ .

نأمل أن يحث من يقرؤون هذا الكتاب طلابهم ويشجعونهم على إثبات ليما 1، التي من السهل جداً إثباتها بوساطة التناقض. وبافتراض أن البرهان قد تم، فدعونا نلقي نظرة على إثبات ليما 2، ومن ثم نتفحص تبعاتها.

إثبات ليما 2: لاحظ أولاً أن عناصر التسلسل  $c(n)$  جميعها مختلفة. وفعلاً إذا كان  $c(k) = c(m)$  حيث  $k > m$ ، فإن  $[kx] - [mx] = (k-m)x$  وهذا يُعدُّ تناقضاً، حيث إن ناتج العدد الصحيح غير الصفر  $(k-m)$ ، والعدد غير النسبي  $x$  لا يمكن أن يكونا عدداً صحيحاً.

لنأخذ الآن عدداً صحيحاً موجباً  $N$  حيث يكون  $1/n < b-a$ ، وحيث تكون الأعداد  $c(1), c(2), \dots, c(n+1)$

مختلفة وتنتمي إلى الفترة  $[0,1]$ ، ونستدل بوساطة مبدأ برج الحمام أنه للعددين  $I$  و  $S$ ، حيث  $I$  و  $(I+S)$  يقعان بين 1 و  $(N+1)$ ، فيكون لدينا التباين الآتي:

$$0 < \varepsilon = |c(i) - (i+s)| \leq 1/n < b-a$$

والآن، لُفَّ المحور الحقيقي على صورة محيط الدائرة  $T$  بمحيط طوله  $l$  مع نقطة  $0$  مميزة في المركز. للعددين  $a, b$  في  $[0, 1]$ ، ندلل بوساطة  $(a, b)$  قوس  $T$ ، الذي يقابل الفترة  $(a, b)$ ، على المحور الحقيقي. لتكن  $f: T \rightarrow T$  دوراناً بعكس اتجاه عقارب الساعة بزاوية نصف قطرية  $X\pi/2$ . ويتعين علينا النظر إلى صور النقطة المميزة  $0$  تحت التكرارات  $F$  على  $T$ ، بدلاً من مراقبة الأعداد  $c(n)$  في الفترة  $[0, 1]$ . وبعد لحظة من التأمل، فإننا نلاحظ أن طول القوس  $(0, b(n))$  حيث  $b(n) = f \circ f \circ \dots \circ f(0)$  من التفاصيل  $[ \bullet = \text{مساوٍ } ]$   $c(n)$  ومن هنا، فإننا نعرف بوساطة  $(1)$  أن طول القوس بين النقاط  $b(i), b(i+s)$  أصغر من  $b-a$ . وهذا يعني أن مجموع تكرار  $s$  لـ  $f$  هو دوران لنصف الزاوية القطرية  $X\pi/2$ . واتجاه الدوران لا يهم أيّاً كان. وهذا يعني أن العدد غير المحدود للنقاط  $b(s), b(2s), b(3s), \dots$  تنتمي إلى القوس  $(a, b)$ . وفي الحقيقة، إذا بدأنا من النقطة الثابتة  $0$  وسرنا مدة زمنية غير محدودة على امتداد المحيط  $T$  باتجاه واحد فقط بخطوات طولها  $\varepsilon$ ، فإننا سنقفز إلى القوس  $(A, B)$  مرات غير محدودة، حيث إن طوله  $(B-A)$  أكبر من طول خطواتنا، وهذا يتمم البرهان.

والآن، بتطبيق ليما 2 على  $a = \text{Log}(7), b = \text{Log}(8), x = \text{Log}(2)$  نستخلص أن  $7$  هو الرقم الأول للقوى غير المحدودة للعدد  $2$ . وإذا ما طبقنا ليما 2 مرة أخرى على الأعداد  $a = \text{Log}(77) - 1, b = \text{Log}(78) - 1, x = \text{Log}(2)$ ، فعدنئذٍ، نستخلص بسبب التساوي بين  $1 = [\text{Log}77] = [\text{Log}78]$ ، أن العدد  $7$  يظهر مرتين في المكانين الأول والثاني للمؤشر العشري لقوة العدد  $2$ . ونكتشف من خلال استخدام البرهان القياسي أن أي تسلسل محدود للأرقام يمكن أن يظهر في بداية المؤشر العشري لقوة العدد  $2$  مثل  $1234$  أو  $567890$ ، أو (أخيراً)  $1999$ . إذا كنت لا تصدق هذه الجملة الأخيرة، فإننا ندعوك إلى حساب (لنقل)  $2^{9030}$  أو  $2^{11166}$ . وسنظهر بعض التواريخ المهمة في نهاية هذه الرواية، مقارنة بقوى العدد  $2$  المقابلة لإقتناع المتشككين، ونستطيع إضافة إلى ذلك استنتاج النتيجة المباشرة الآتية:

النتيجة الطبيعية المباشرة: إذا كان العدد الصحيح  $p > 1$  ليس قوة العدد الصحيح 10، فعندئذٍ يمكن أن يظهر أي تسلسل للأرقام في بداية المؤشر العشري للقوة  $n$  لـ  $p$  لبعض  $n$ .

والسؤال الذي يطرح نفسه مرة أخرى: لماذا لم يظهر الرقم 7 من ضمن العناصر الأولى للتسلسل الذي طرحناه في البداية؟ ولماذا يتظاهر هذا التسلسل المخادع على أنه دوري؟ والسبب في ذلك بسيط، ويمكن أن يُقرب الرقم  $\text{Log}(2) = 0.3010299956 \dots$  بوساطة الرقم النسبي 0.3، ويكون التسلسل  $c(n) = nx - [nx]$  دورياً للأرقام النسبية  $x$  جميعها. وبعبارة أخرى:  $2^{10} = 1024$ ، وهو رقم قريب جداً من الألف. ويتمثل ضربه في العدد ألف بإضافة أصفار في النهاية، بحيث تبقى الأعداد الأولى ثابتة. لذا، نتوصل إلى استنتاج خاطئ بمجرد النظر إلى عدد قليل من التسلسل  $a(n)$  في البداية، أن التسلسل الذي يحوي على الفترة 10 و 7 ليس عنصراً (عضواً) فيه، في حين يظهر العدد 8 في كثير من الأحيان. ولكي يُرى الرقم سبعة، يجب على المرء أن ينظر إلى الأرقام الستة الأولى في  $a(n)$  (أي، الرقم الأول من  $2^6 = 24$ )، ومن ثم ينتظر إلى أن تعمل الآثار التراكمية للاضطرابات الصغيرة  $1000 - 2^{10} = 24$ .

في عام، 1910 أثبت سيربنسكي (Sierpinski) وويل (Weyl) وبول (Bohl)، كل على حدة، أنه لكل عدد  $x$  غير نسبي فإن التسلسل  $c(n) = nx - [nx]$  يكون موزعاً على الفترة (Arnold & Avez, 1968)  $[0, 1]$  وعلى نحو أكثر دقة، إذا أخذنا  $b$  و  $a$  عشوائياً من  $[0, 1]$  حيث  $(a < b)$ ، وتشير  $k(n, a, b)$  إلى مجموع عناصر المجموعة

$$\mathcal{E}(a, b) = \{c(i) : 1 \leq i \leq n, c(i) \in [a, b]\}$$

فعندئذٍ نحصل على:  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n, a, b) / n = b - a$

$$n \rightarrow \infty$$

ولمزيد من الإيضاح، فإن هذه النظرية تقول إننا إذا سرنا على امتداد محيط دائرة وحدة متكاملة، بحيث نسير بخطوات غير نسبية، فعندئذٍ، نمرّ فوق كل حفرة بتكرار متناسب وبحجم الحفرة. دعنا نعبر عن هذه الحقيقة بلغتنا الخاصة باستخدام قوة العدد 2. لنفترض أن  $a(8, n)$  و  $a(7, n)$  أعداد السبعات والثمانيات من مجموع الأعداد  $n$  للتسلسل  $a(n)$ ، فإنه وفقاً للصيغة الأخيرة يكون لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(7, n) / n = \log 8 - \log 7$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(8, n) / n = \log 9 - \log 8, \text{ ومن ثم، فإن}$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(7, n) / a(8, n) = (\log 8 - \log 7) / (\log 9 - \log 8) = 1.1337$$

$$\dots > 1$$

$$n \rightarrow \infty$$

وهذا يعني أنه بالنظر إلى الأجزاء الأولية من التسلسل  $a(n)$  فإننا سنجد سبعات أكثر من الثمانيات. وتعدّ النتيجة التي توصل إليها الباحثون المشار إليهم آنفاً، إضافة إلى حقيقتنا الصغيرة بخصوص السبعات والثمانيات، نتائج بسيطة لنظرية عامة عميقة جداً في نظرية الإرجوديك Ergodic Theory<sup>(1)</sup> المنسوبة إلى (Cornfield, G. D Birkhoff) (Fomin, & Sinai, 1982) التي نحث القارئ المهتم على متابعتها. ونختتم هذا الجزء بمسألة بسيطة لقرائنا.

(1) نظرية الإرجوديك Theory Ergodic فرع من الرياضيات نشأ في ثلاثينيات القرن العشرين على يد Koopman And Birkhoff, Neumann, Von. يهتم بدراسة النظم الديناميكية في حالة قياس اللامتغير والمسائل المتعلقة به، ولهذه النظرية علاقة بالهندسة أيضاً ونظرية الأعداد، ولها تطبيقات على العمليات العشوائية. وقد خضعت هذه النظرية إلى تطوير مستمر من علماء الفيزياء- المراجع

المسألة: لأي  $n$  يكون للعدد  $2^n$  أربع سبعات متتالية في البداية. وماذا يكون بالنسبة لخمس سبعات؟ كيف يمكننا تقدير، مما ورد ذكره أعلاه، أقل  $n$  حيث يبدأ المؤشر العشري للعدد  $2^n$  بـ 2004 سبعات متتالية؟

### مسائل عملية: التعمق أكثر فأكثر

إذا غيرنا قوانين القوى (الأس)، نلاحظ أن  $Ax + Y = Ax \cdot Ay$ . دعنا نفترض أن  $A > 0$ ، فندئذٍ يمكن افتراض السؤال العام على النحو الآتي:  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، ما الحلول الأخرى كلها لـ  $F(X+Y) = F(X) \cdot F(Y)$ ؟ وهناك مسألة جيدة أخرى تبرز من ملاحظة أن  $\log(XY) = \log X + \log Y$ . إذن، ما الحلول الأخرى لـ  $F(X \cdot Y) = F(X) + F(Y)$ ؟ من المسائل التقليدية ذات الصلة إيجاد الدوال جميعها التي تفي بمعادلة كوشي الدالية:  $F(X+Y) = F(X) + F(Y)$ . وبالإجابة عن هذه المسائل، فإن المرء يدخل في أعماق استقصاء المعادلات الدالية، وهي معادلات يستطيع المعلمون استخدامها بوصفها مشروعاً ممتداً للطلاب ذوي الذكاء المتوقع.

### بعض القوى غير العادية لـ 2 والنتائج

من أجل إقناع المشككين في الخاصية غير العادية للقوى 2، أدرجنا قائمة بالقوى 2 التي ترتبط بعينات (متحيزة) لأحداث تاريخية مهمة.

$966 \cdot 2^{568} = 9.66... \times 10^{170}$	معمودية بولاندا
$1066 \cdot 2^{5561} = 1.066... \times 10^{1674}$	معركة هاستينجز
$1492 \cdot 2^{3761} = 1.492... \times 10^{1132}$	كولمبوس يكتشف أميركا
$1636 \cdot 2^{9528} = 1.636... \times 10^{2868}$	تأسيس جامعة هارفارد
$1658 \cdot 2^{3223} = 1.658... \times 10^{970}$	وفاة كرومويل
$1660 \cdot 2^{4874} = 1.660... \times 10^{1467}$	تأسيس الرابطة الملكية

$1664 \cdot 2^{6040} = 1.664... \times 10^{1818}$	تغيير اسم نيوأمستردام إلى نيويورك
$1687 \cdot 2^{6143} = 1.687... \times 10^{1849}$	الطبعة الأولى «لمبادئ» نيوتن
$1721 \cdot 2^{10229} = 1.721... \times 10^{3079}$	وولبول يصبح أول رئيس وزراء لبريطانيا
$1789 \cdot 2^{9857} = 1.789... \times 10^{2967}$	الثورة الفرنسية
$1815 \cdot 2^{931} = 1.815... \times 10^{280}$	واترلو
$1939 \cdot 2^{5522} = 1.939... \cdot 10^{1662}$	بداية الحرب العالمية الثانية
$1945 \cdot 2^{1931} = 1.945... \times 10^{581}$	نهاية الحرب العالمية الثانية

نأمل أن نكون قد أوصلنا إلى القارئ خصوصية الرياضيات البحتة المتضمنة في المسائل التي تحتوي على القوى. وتكمل مسألة التلاعب بالمسائل، التي تشتمل على القوى لعمل روابط متينة بموضوعات في نظرية الأعداد والتوافقيات والتحليل، والرياضيات التطبيقية والإحصاء التي يتعلمها الطلاب خلال المنحى النموذجي الذي يحظى حالياً بحماس كبير. وقد استخدم المؤلف الأول لهذا البحث مسائل بأرقام بداية ونهاية شبيهة بتلك المشار إليها في هذا البحث، لطلاب يبلغون من العمر أربعة عشر عاماً كانوا ملتحقين بمساق الجبر. وقد تمثل الهدف التربوي التعليمي باستخدام خبرات حل مسائل «الرياضيات البحتة»، ونجم عن ذلك زيادة اهتمام الطلاب بأسرار الأعداد الصحيحة وخفاياها. ومن الأمور الأخرى، إدراك الطلاب محددات أدوات الحساب، وفهم الحاجة إلى إبداع أدوات مفاهيمية لمعالجة المسألة. ولقيت مسائل أخرى أيضاً، تشتمل على ظاهرة خاصة من بين الأعداد الصحيحة الموجبة، ونجم عنها اكتشاف مبدأ برج الحمام، نجاحاً باهراً في غرفة الصف (Sriraman, 2004A; 2004B).

وفي الختام، نأمل ألا ننسى أبداً الجمال الذي تتضمنه أنشطة الرياضيات البحتة، وأن ننقل إلى طلابنا أن مثل هذه الأنشطة هي التي ألهمت خيال علماء الرياضيات، وأسهمت في تطورها منذ بداياتها الأولى. ونحن نعتقد أن صورة عالم الرياضيات البحتة المضطجع

تحت شجرة (الذي يبدو للعين غير المدربة على التمييز أنه لا يفعل شيئاً) ، تتمم صورة عالم الرياضيات التطبيقي والعالم المجتهد المنهمك في محاولة إعطاء معنى لفوضى العالم الواقعي وغطرسته، ففي المحصلة، ماذا سيفعل الشخص الثاني إذا لم يتم الأول بأي شيء؟

## قائمة المراجع

- Arnold, V. I. (1978) Ordinary Differential Equations (Translated From Russian By R. A. Silverman). Boston, Ma: Mit Press.
- Arnold, V. I., & Avez, A. (1968) Ergodic Problems In Classical Mechanics, New York: Benjamin.
- Coleman, J. (1964). Introduction To Mathematical Sociology. New York: The Free Press.
- Cornfeld, I., Fomin, S., & Sinai, Ya. G. (1982). Ergodic Theory. New York: Springer-Verlag.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations Of A Models And Modeling Perspective On Mathematics Teaching, Learning And Problem Solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), Beyond Constructivism (Pp. 3-34). Mahwah, Nj: Erlbaum.
- National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). Principles And Standards For School Mathematics. Reston, Va: Author.
- Sriraman, B. (2004A). Discovering A Mathematical Principle: The Case Of Matt. Mathematics In School, 33(2), 25-31.
- Sriraman, B. (2004B). Reflective Abstraction, Uniframes And The Formulation Of Generalizations. The Journal Of Mathematical Behavior, 23(2), 205-222.

### ملاحظة

1- لقد هدفت البورباكي أساساً إلى تأليف مجموعة من الأعمال القائمة على أسس دقيقة ورسمية يستطيع خبراء الرياضيات استخدامها في المستقبل. لمزيد من المعلومات، أنظر Théorie des Ensembles de la collection elements de

<http://www.bourbaki.ens.fr/> وموقع Mathématique, Hermann, Paris

2- يقول مبدأ برج الحمام: إذا كان لدينا عدد  $m$  من الحمام و عدد  $n$  من بيوت الحمام حيث  $m \geq n$ ، فإن بعض البيوت ستضم أكثر من حمامة. ولهذا المبدأ تطبيقات عملية واسعة في الرياضيات.

3- يمكن العثور على مرجع لهذه النظرية على موقع

<http://mathworld.wolfram.com/BirkhoffsErgodicTheorem.html>

