النبوغ في الرياضيات وحل المسائل والقدرة على صوغ التعميمات

خبرات حل المسائل لدى أربعة من الطلاب الموهوبين

بهارات سريرامان Bharath Sriraman

جامعة مونتانا

ملخص

تعدُّ المهام الرياضية المعقدة، مثل حل المسائل، طريقة مثالية لتزويد الطلاب بفرص لتطوير العمليات الرياضية العليا، مثل التمثيل والتجريد والتعميم. طُلب في هذه الدراسة إلى تسعة من طلاب الصف التاسع المبتدئين الذين التحقوا بالصف الخاص بدراسة مادة الجبر المسرّع، حل مسائل مركبة غير اعتيادية في صحائف مذكراتهم اليومية. وقد حُددت المسائل بحيث تقدم إلى الطلاب على مدار ثلاثة أشهر، بمستوى متزايد من التعقيد. والصورة العامة التي كانت تميز حلول المسائل الخمس هي مبدأ برج الحمام أو مبدأ ديريشلت (Dirichlet Principle) [1]. وقد نجح الطلاب الأربعة النابغون في الرياضيات في اكتشاف الصورة العامة التي تميز حلول المسائل الخمس والتعبير عنها لفظيّاً، في حين أخفق الطلاب غير الموهوبين في اكتشاف خفايا الصورة العامة. وهذا يؤكد فرضية وجود علاقة بين النبوغ الرياضي والقدرة على حل المسائل، وكذلك القدرة على التعميم. ويوضح هذا البحث خبرات حل المسائل لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات، وكيف يصوغون

1) يعتقد أن عالم الرياضيات الألماني يوهان ديريشلت Dirichlet Johann هو أول من طرح هذه الفكرة في عام 1834 ، وأطلق عليها اسم مبدأ الجارور أو الدُّرج أو مبدأ الرف. لذا، فإنها غالباً ما يشار إليها بمبدأ صندوق ديريشلت. وقد أصبح هذا المبدأ يسمى مبدأ برج الحمام Pigeonhole principle، لكن الاسم الأصلي لا يزال مستخدماً في اللغات الفرنسية والإيطالية والألمانية- المراجع

التجريد والتعميمات، مع تبعات التسريع والحاجة إلى التمايز في حصص رياضيات المرحلة الثانوية.

مقدمة

تتمثل أحد الجوانب المثيرة في فكر الإنسان في مقدرته على التعميم من الخبرات الخاصة المحددة، ومن ثم تكوين مفاهيم مجردة جديدة. تدعو مبادئ ومعايير المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة The Principles & Standards Of The National Council Of Teachers Of Mathematics (Nctm, 2000) إلى برامج تعليمية تركز على حل المسائل بهدف مساعدة الطلاب على تطوير درجة التعقيد في العمليات الرياضية، مثل التمثيل والمنطق الرياضي والتجريد والتعميم. وغني عن القول، أن على الطلاب تطوير عمليات رياضية أكثر تطوراً، لا سيما حل المسائل والتمثيل والمنطق، وكذلك مقدرتهم المتزايدة على التفكير التأملي، ومراقبة أعمالهم التي تقود إلى التجريد ومقدرة أكبر على التعميم. وهكذا، فإن المقدرة على التعميم تنجم عن بعض الخبرات الرياضية التي تعدُّ مكوناً مهمّاً من مكونات القدرة الرياضية، إضافة إلى أن تطوير مثل هذه القدرة يُعدُّ أحد أهداف تعليم/تعلم الرياضيات (Nctm, 2000).

واهتم علماء النفس أيضاً بظاهرة التعميم، وحاولوا ربط القدرة على التعميم بمقاييس الذكاء (Sternberg, 1979)، وقدرات حل المشكلات المعقدة (Frensch & Sternberg, 1992). يرى جرينز (Greenes, 1981) أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات يختلفون عن المجموع العام من حيث مقدرتهم على صياغة المسائل بصورة عفوية، والمرونة في معالجة البيانات، والقدرة على التجريد والتعميم. وهناك دليل تجريبي على وجود فروق في التعميم بين الطلاب الموهوبين وغير الموهوبين في مستوى ما قبل المدرسة (Kanevsky, 1990). ويوجد أيضاً عدد قليل من الدراسات على مستوى المرحلة الثانوية توثق وتصف كيف يتعامل الطلاب النابغون مع حل المسائل المجردة، إضافة إلى تعميم المفاهيم الرياضية. وهذا يقود بدوره إلى الأسئلة الآتية:

1. ما نوع سلوكات حل المشكلات التي يتعامل بها طلاب المرحلة الثانوية؟

2. ما أوجه الاختلاف بين سلوكات حل المشكلات للطلاب الموهوبين وغير الموهوبين؟
3. كيف يجرد الطلاب النابغون المفاهيم الرياضية ويعمّمونها ؟

تعريفات

موقف حل المسألة: يمكن أن يعرّف موقف حل المسألة بالموقف الذي يشتمل على:

- مهمة مفاهيمية.
- وضع يكون فيه الفرد قادراً على الفهم، سواء أكان ذلك بوساطة التعلم السابق (Brownwell, 1942; Kilpatrick, 1985)، أم تنظيم المهمة (English, 1992)، أم طريق الأصالة (Birkhoff, 1969; Ervynch, 1991).
- موقف لا يعرف الفرد في أثنائه أي وسيلة مباشرة للشعور بالرضا والتوازن.
- موقف يعاني فيه الفرد حيرة وارتباكاً في وضع المسألة، لكنه لا يعاني ارتباكاً مطلقاً.
- نقطة متوسطة على متصل (Continuum)، يمتد من الغموض على أحد الطرفين إلى حالة من الفهم التام عند الطرف الآخر (Kilpatrick, 1985).

التعميم: العملية التي يشتق الفرد من خلالها أو يستنتج قاعدة من حالات خاصة. وتشتمل على سمات التجريد (Davis & Hersh, 1981)، وتحديد القواسم المشتركة (Dreyfus, 1991)، وتوسيع نطاق الصدق (Davydov, 1990; Dienes, 1961; Polya, 1954).

إستراتيجيات حل المشكلات: تشير إلى الأفعال و/أو الطرائق التي يستخدمها الطلاب من أجل فهم الموقف المُشكِل، وحله. وقد صُنّفت إستراتيجيات الطلاب في هذه الدراسة وفقاً لنموذج ليستر (Lester, 1985) المفاهيمي المتصل بسلوك حل المشكلة، والموضح في مراجعة الأدب والدراسات السابقة ذات العلاقة بالموضوع.

مراجعة الكتابات والدراسات السابقة

يُعدُّ نموذج جورج بوليا، عالم الرياضيات المشهور، واحداً من نماذج حل المشكلات الأكثر شهرة، ويشتمل هذا النموذج على أربع مراحل، هي: الفهم، والتخطيط، والتطبيق، والتأمل والمراجعة. ومن المآخذ على نموذج بوليا أنه كان حسابيّاً في طبيعته، وأن البحوث الناجمة عنه ركزت أساساً على التجريب. عزا لستر (Lester, 1985) إخفاق غالبية الجهود التعليمية الهادفة إلى تحسين أداء الطلاب في حل المسائل، إلى التركيز الزائد عن حده على مهارات التجريب، في الوقت الذي أُغفلت فيه المهارات الإدارية اللازمة لتنظيم نشاط الفرد (مهارات ما وراء المعرفة) (ص. 62). وقد أشير إلى أن نشاط ما وراء المعرفة، أو معرفة عمليات تفكير الشخص، أو التنظيم الذاتي، توفر أرضية لتطبيق التجريب والعمليات الحسابية (Lester, 1985; Schoenfeld, 1985, 1992)؛ لذا، أجرى «لستر» تعديلاً على نموذج بوليا ليشتمل على مكونات المعرفة وما وراء المعرفة. ففي مكون المعرفة، أعاد تسمية المراحل الأربع: الفهم، والتخطيط، والتطبيق، والمراجعة (Understanding, Planning, Implementing, & Looking Back) , على النحو الآتي: التوجه، والتنظيم، والتنفيذ، والتحقق (Orientation,Organization, Execution, & Verification). وتألف مكون ما وراء المعرفة من ثلاثة أنواع من المتغيرات، هي: متغيرات الشخص، ومتغيرات المهمة، ومتغيرات الإستراتيجية. وفيما يأتي وصف لفئات المعرفة الأربع:

التوجه (Orientation)، يشير إلى السلوك الإستراتيجي نحو تقويم المشكلة (المسألة) وفهمها. ويشتمل على إستراتيجيات شمولية وتحليلية للمعلومات، وتمثيل أولي ولاحق، وتقويم مستوى الصعوبة وفرص النجاح.

التنظيم (Organization) ، يشير إلى تحديد الأهداف، والتخطيط الشامل، والتخطيط المرحلي.

فئة التنفيذ (Execution)، تشير إلى تنظيم السلوك ليتفق مع الخطة. ويشتمل على أداء الأعمال من مرحلة إلى أخرى، ومراقبة التقدم، واتساق الخطط المرحلية، والمفاضلة بين القرارات (السرعة مقارنة بالدقة).

وأخيــراً، التحقــق (Verification)، ويتألــف من تقويــم القرارات المتخــذة، وتقويم نتاجــات الخطــط المنفذة. ويشــتمل على تقويم الإجــراءات المتخذة في مســتويات التوجه والتنظيم والتنفيذ.

يتألف مكوّن ما وراء المعرفة من وجهة نظر ليستر من ثلاث فئات من المتغيرات، هي: متغيرات الشــخص، ومتغيرات المهمة، ومتغيرات الإســتراتيجية. تشــير متغيرات الشخص إلى نظام معتقدات الفرد، والسمات المؤثرة التي قد تؤثر في الأداء، في حين تشير متغيرات المهمة إلى ســمات المهمة، مثل: المحتوى والســياق والتركيب وبناء الجملة والعملية. مثلاً، تؤثر معرفة الفرد بملامح المهمة في الأداء وســماتها. وأخيراً، تشير متغيرات الإستراتيجية إلى معرفة الفرد بالإستراتيجيات التي تعين على فهم الخطط وتنظيمها وتنفيذها وتفحصها وتقويمها. وتُربط ســلوكات ما وراء المعرفة هذه بفئــات المعرفة الأربع. يكمن هدف نموذج لســتر المفاهيمي في محاولة وصف الســلوكات في مراحل المعرفة الأربع، من حيث «نقاط» حدوث أفعال ما وراء المعرفة في أثناء حل المســألة. ويصــف الفلاســفة أحياناً فعل ما وراء المعرفة هذا على أنه «التفكير حول التفكير».

وقد اقترح شــونفلد (Scheonfeld 1985, 1992) وجوب دراســة حل المســألة ضمن الســياق الأوســع لما يعنيه مفهوم تعلم «التفكير الرياضي»، حيث وصف هذا التفكير على أنه تطوير وجهة نظر رياضــية، وتقويم عمليات التمثيل والتجريد، وامتلاك الميل، والاســتعداد لتعميمها.

وعلــى أي حــال، فــإن التعميــم مرتبــط ارتباطــاً لا ينفصــل بعمليــة التجريــد (Davydov, 1990, P, 13). ووفقاً لرأي دافيدوف (Davydov 1990)، فإن عملية تحديد صــفة ما بصــفتها عامة، وفصــلها عن صــفات أخرى يتيــح للطفل تحويل الفئــة العامة إلى أشــياء مســتقلة ومحددة من الأفعال المتلاحقة، في حين تحدث عملية التجريد عند تركيز الفرد على سمات وخصائص محددة لشيء معيّن، ومن ثم عدّ هذه الخصائص منعزلة عن الأصل. ويمكن اللجوء إلى ذلك لفهم جوهر ظاهرة معيّنة بهدف تطبيق النظرية نفسها على الحالات التي تنطبق عليها.

وقـد ركزت البحـوث المبكرة عـن التعميم علـى قدرات طـلاب المدارس الابتدائية علـى تعميـم مفاهيـم الأعـداد (Davydov, 1990; Dienes, 1961; Shapiro, 1965). واهتـم الباحثون كثيراً بعملية التعميم في تعليم الرياضـيات في الاتحاد السـوفييتي سـابقاً (Davydov, 1990; Krutetskii, 1976; Shapiro, 1965).

وفي هذا السياق، كتب شابيرو (Shapiro, 1965) الفقرة الآتية عن الطلاب الموهوبين في الرياضيات:

> «تحـدث عملية تطويـر التعميمات من الأمثلة الأولى في مراحل التعلـم المبكرة. ومع مرور الوقت، غالباً ما يدمج التحول في الشكل العام مع التعميمات، ويطبق فوراً على مجموعة كاملة من المسائل مـن نـوع واحد. أما لدى الطلاب الأقل قدرة، فإن التعميمات تنضـج تدريجيّـاً، وتظهر في مراحل متأخرة، أو أنها لا تنضج أبداً» (ص. 95).

وقـد حلّـل كروتتسـكي (Krutetskii, 1976) بـدوره، قدرة التعميم لـكل من الطلاب العاديـين، والطلاب الموهوبين ضـمن سلسـلة مـن التجـارب، وافترض أن الطلاب ذوي القـدرات المختلفة يتسـمون بالتباين في درجة التطور، من حيث القـدرة على تعميم المادة الرياضـية، والقـدرة على تذكـر التعميمات (ص. 84). وقد أجرى كروتتسـكي دراسـة على تسـعة عشـر طالباً يتباينون في قدراتهم الرياضية. واستناداً إلى تجاربه مع هؤلاء الطلاب، فقد توصّـل إلى أنه كان بمقدور الطلاب الأكثر قدرة (الموهوبين) تكوين تعميمات رياضـية على نحوٍ أسـرع وأوسـع. ولاحظ أن هؤلاء الطلاب من «أصـحاب القدرة» كانوا قادرين على بيـان التركيبـة العامة للمسـائل وفهمها قبـل أن يحلوها، في حين لم يكـن بمقدور الطلاب الأقل قدرة إدراك العناصر المشتركة في المسائل، وأخفق الطلاب «غير القادرين» في هذه المهمة. ولكي يتمكن الطلاب من صـياغة التعميمات صياغة صحيحة، يتعين عليهم التمكن من التجريد من محتوى معيّن، وتحديد أوجه الشـبه والتراكيـب والعلاقات (Krutestskii, 1976).

وفي الواقع أن غالبية الدراسـات المتعلقة بعملية التعميم تجري ضـمن سـياق مفاهيم الأعداد وعلم الحسـاب والجبر. ويبدو أنه لا توجد بحوث عن التعميم ضـمن سياق العمليات

الرياضية العليا، مثل حل المسائل على مستوى المرحلة الثانوية. ولا يوجد على وجه الخصوص بحوث عن التباين في سلوكات حل المسائل بين الطلاب الموهوبين وغير الموهوبين. وتكتسب مثل هذه البحوث قيمة كبيرة بالنسبة إلى التربويين الذين يسعون لتقديم منهاج متمايز في غرفة الصف التي تضم طلاباً متفوقين وغير متفوقين.

المنهجية

كان الباحث في هذه الدراسة معلماً في مدرسة ثانوية ريفية في الغرب الأوسط من الولايات المتحدة، شاركه فيها تسعة من الطلاب المبتدئين (أربعة ذكور، وخمسة إناث)، ملتحقين بصف مسرَّع لمادة الجبر1التي يدرِّسها الباحث. وكان الطلاب التسعة الملتحقون بصف الجبر المسرَّع راغبين في المشاركة في هذه الدراسة ومستعدين لذلك، وكانوا جميعاً من البيض الذين ينحدرون من خلفية اجتماعية واقتصادية من الطبقة الوسطى. ويتطلب الالتحاق بصف الجبر المسرّع في هذه المدرسة الثانوية توصية من معلمي الصف الثامن، إضافة إلى أداء يفوق المتوسط في متطلبات الجبر السابقة.

لم يطّلع الباحث على بيانات اختبار الطلاب التسعة في الصف في أثناء جمع البيانات وتحليلها. وعلى الرغم من ذلك، وبعد الانتهاء من جمع البيانات وتحليلها، فقد اطلع الباحث على بيانات الاختبار الخاصة بالطلاب التسعة، واكتشف أن أربعة منهم قد صُنّفوا على أنهم طلاب متفوقون في الرياضيات في مدارسهم الابتدائية، حيث استند التصنيف إلى مجموعة متنوعة من العوامل، مثل علامات اختبار الذكاء (أكثر من 124)، واختبار ستانفورد التحصيلي (Stanford Achievement Test) (المئين 95)، وتوصيات المعلمين والمرشدين التربويين. ويوضح جدول (1:2) صورة موجزة لتحصيل الطلاب التسعة.

كانت كتابة الصحائف اليومية جزءاً مكملاً لدورة الجبر المسرَّعة، حيث يعين المعلم بصورة متكررة مسألة غير عادية أو لغزاً كل أسبوعين، ويحل الطلاب هذه المسائل أو الألغاز في صحائف مذكراتهم اليومية. وقد طلب الباحث إلى الطلاب أن يدوّنوا كل شيء جربوه وفيها «الخرابيش» في هذه المذكرات.

جدول 2: 1 ملخص تحصيل الطلاب التسعة

		SAT	SAT	OLSAT
الإسم	اختبار الذكاء[1]	علامة الرياضيات[2] العلامة الخام (من 09).	تطبيقات الرياضيات العلامة[3] الخام (من 03)	غير لفظي العلامة الخام[4] (من 63)
إيمي	162	89	30	36
جون	124	85	29	32
مات	140	87	30	33
هانا	126	85	28	32
المجموعة الفرعية أ: الطلاب النابغون في الرياضيات ممن صاغوا التعميمات				
إيمي	162	89	30	36
جون	124	85	29	32
مات	140	87	30	33
هانا	126	85	28	32
المجموعة الفرعية ب: الطلاب غير الموهوبين ممن صاغوا تعميمات خاطئة				
بارت	100	68	19	22
جيم	120	74	21	25
إيزابيل	05	70	20	22
المجموعة الفرعية ج: الطلاب غير الموهوبين ممن لم يصوغوا تعميمات				
جامي	98	60	15	20
هيدي	102	62	16	21

1) ستانفورد- بينيه (الطبعة الرابعة). الوسيط = 001؛ الانحراف المعياري= 16؛ البيانات في الأعمدة 2-3 مستخلصة من سلسلة SAT (مطبقة على طلاب الصف الأول) 2) تألف جزء الرياضيات من تسعين بنداً عن مفاهيم الأرقام (34)، الحساب (26) والتطبيق (30). 3) تألف جزء الرياضيات من ثلاثين بنداً عن حل المسائل (12)، الرسوم البيانية (3)، الهندسة (6) والقياس (9). 4) اختبار قدرات مدرسة أوتيس-لينون Otis-Lennon School Ability Test-OLSAT- الطبعة السابعة، طُبّق على طلاب الصف السادس. يتألف الجزء غير اللفظي من الامتحان من بنود حول المنطق الرقمي (18)، والمنطق الكمي (18) مفاهيم رياضية

وقد منح الطلاب الذين أتموا التلميحات الثلاثة، وضمّنوا جميع أعمالهم و«خربشاتهم» دفاتر مذكراتهم، علامة كاملة. أما التلميحات الثلاثة التي زوّد بها الباحث الطلاب فهي:

1. أعد صياغة المسألة بكلماتك الخاصة. وبعبارة أخرى، ما المطلوب في هذه المسألة؟
2. كيف ستبدأ حل المسألة؟

3. حُلَّ المسألة، واكتب ملخصاً عن الأمور التي سارت على نحو جيد، والتي لم تكن كذلك.

كشفت المذكرات التي كتبت على مدار العام الدراسي أن جلّ الطلاب كان وصفهم إستراتيجيات الحل واضحاً، وكانوا قادرين على معالجة المسائل الرياضية التي لم يتضمنها المنهاج المدرسي. ومن أجل الإبقاء على الدراسة طبيعية، بعيدة عن التدخل قدر الإمكان، مع المحافظة على اتساق الممارسات داخل الغرفة الصفية، حدّد الباحث المسائل المركبة (Combinatorial Problems) الخمس (انظر ملحق أ) للدراسة بصفتها واجبات يحلها الطلاب في صحائف مذكراتهم بدءاً بالمسألة الأقل تعقيداً. وقد حُدّدت هذه المسائل بصفتها واجبات خلال ثلاثة شهور.

اختيرت هذه المسائل بكل دقة وعناية على أن تمثل أوضاعاً تسهل عملية التمثيل والمنطق والتجريد، ومن ثم يُتوصل في نهاية المطاف إلى صياغة تعميمات. وقد طُبّقت المعايير الآتية لتحديد هذه المسائل:

1. يجب أن تعالج المسائل أفكاراً رياضية معمقة، بمعنى ألا تكون عادية متكررة، وأن يتطلب حلها المثابرة والإبداع من جانب الطالب.
2. كانت المسائل مركبة بطبيعتها، ويعود ذلك إلى أن بحوث تعليم الرياضيات المطبقة على طلاب المدارس الابتدائية، قد أشارت إلى أن الأطفال لديهم قدرات حدسية في معالجة المسائل المركبة (English, 1992).
3. مثلت المسائل أوضاعاً متنوعة ومتزايدة في تعقيدها، وكانت خطة زيادة التعقيد في المسائل تدريجيّاً متسقة مع البحوث الأولى حول عملية التعميم (Davydov, 1990; Dienes, 1961; Krutestskii, 1976).
4. كانت المسائل وطرائق الحل قابلة للتعميم، إضافة إلى ذلك، فقد اتسمت الحلول لفئة من المسائل التي تبدو مختلفة ومشتركة في العمومية، بأنها صعبة جدّاً، وقد أُطلق عليها اسم مبدأ برج الحمام (Pigeonhole Principle) الذي ينص على ما يأتي: إذا وضعت الحمامات (م) في تجاويف برج الحمام (ن)، وكانت (م)

أكبر من (ن)، (م > ن)، فعندئذٍ لا بد من أن يكون في أحد تجاويف برج الحمام أكثر من حمامة واحدة.

واقترح الباحث أن الإستراتيجيات التي يطورهـا الطلاب يمكن أن تتطور مع تعقيدات المسألة، وهذا يعتمد على التمرس الرياضي للطلاب، وفي نهاية المطاف يقود بعض الطلاب إلى اكتشاف المبدأ العام الذي يمكن أن يطبق عليها جميعاً.

جمعت البيانات من خلال كتابات الطلاب لمذكراتهم، ومن خلال المقابلات التشخيصية، وكتابات المعلمين في مذكراتهم اليومية في الفصل الدراسي الثاني من العام الدراسي. وقد كُلّف الطلاب بخمس مسائل مركبة بدءاً من المسألة الأولى، وكان المسوغ وراء تقديم ثلاثة تلميحات رغبة الباحث في البدء بمراحل حل المشكلات الأربع (Lester, 1985). وقد أعطي الطلاب مدة تراوحت من أسبوع إلى عشرة أيام لحل المسألة، وكان الباحث خلالها يجمع صحائف مذكرات الطلاب الكتابية أسبوعيّاً للاطلاع على حلولهم، ومن ثم يرصد مجموعة من الأسئلة يطرحها عليهم في أثناء المقابلة.

جرت مقابلة الطلاب بعد أسبوع من تسليم المذكرات التي تضمنت كتاباتهم قبل الدوام الدراسي أو بعده. واتّبع الباحث أسلوب المقابلة الإكلينيكية (Clinical Interview) الذي ابتدعه بياجيه (Piaget, 1975)، وطبّقه على دراسة عملية التفكير لدى الطلاب. وكانت المقابلات مفتوحة النهاية بهدف إعطاء الطلاب فرصة التعبير عن عملياتهم الفكرية عند حل المسألة. وفي جلسات المقابلات الخمس جميعها التي أجريت مع الطلاب على مدار ثلاثة شهور، وجِّهت إليهم الأسئلة الآتية:

1. كيف بدأت التعامل مع المسألة؟
2. كم أمضيت من الوقت في هذه المسألة؟
3. ما وجه المقارنة بين هذه المسألة ومسائل الجبر التي نتعامل معها في الصف الآن؟
4. كيف تتحقق صحة إجابتك؟
5. كيف توضح إجابتك لصديق؟
6. هل استخدمت إجراءً معروفاً في حل المسألة؟

7. وأما فيما يتصل بالمسائل الثانية والثالثة والرابعة والخامسة، فقد سئل الطلاب هل أجروا أي تحسين أو تعديل على إستراتيجية سابقة، وهل توصلوا إلى أوجه شبه في المسائل أو الحلول؟

لقد صيغت هذه الأسئلة أملاً في أن يتمكن الطلاب من التعبير عن إستراتيجيات حلولهم. وأراد الباحث أيضاً من الطلاب أن يبرروا إجاباتهم، ويوضحوا المنطق الذي استخدموه في الحل. وقد وجّه السؤالين «الثالث و السابع» لحث الطلاب صراحة على الوصول إلى تعميمات. وبعد كل جولة من المقابلات، كان الباحث يسجل انطباعاته عن المقابلات في مذكراته الخاصة بهذا الغرض، حيث سُجلت المقابلات صوتيّاً على أشرطة، ومن ثم حُوّلت لغويّاً بصورة حرفية، ودُققت أيضاً الأخطاء التي فيها. تألفت البيانات من كتابات الطلاب في دفاتر المذكرات الخاصة بهم، ومن مخطوطات المقابلات، إضافة إلى المذكرات التي دوّنها الباحث.

تبع ذلك تحليل لكتابة صحائف الطلاب والبيانات المدونة، باستخدام مناحٍ مستقاة من نظرية راسخة ومبررة ومثبتة (Grounded Theory) (Glaser & Strauss, 1977). واستخدمت في ذلك طريقة المقارنة الثابتة (Constant Comparative) بهدف البحث عن أنماط في البيانات. ويعدُّ إجراء المقارنات من السمات الأساسية لمنهجية النظرية المثبتة. وفي هذا السياق، جرى تفعيل الفئات الأربع المتمثلة في التوجه والتنظيم والتنفيذ والتحقق المستمدة من نموذج ليستر لحل المشكلات. وقارن أيضاً الباحث سلوكاً بسلوك بهدف تصنيف البيانات وفقاً لنموذج ليستر المفاهيمي، ثم قارن كل سلوك بغيره من السلوكات في المستوى الإعدادي بهدف تحديد أوجه الشبه والاختلاف، ومن ثم يصار إلى وضعها في الفئات، وحُدّدت الفئة بخصائص أو أفعال حدّد معناها، أو أُعطيت معنى. وعندما رُمّزت البيانات وحُلّلت، حُصل على أوجه شبه واختلاف في سلوك حل المشكلات للطلاب التسعة، وفي السلوكات التي تميز صياغة التعميمات للمسائل الخمس المركبة، حيث برزت فئات التعميم والتأمل نتيجة الدراسة.

أما **التعميم** فقد وصف في هذه الدراسة على أنه العملية التي يشتق الطلاب من خلالها أو يستنتجون مبادئ ونتائج من حالات خاصة. وتتضمن تحديد القواسم المشتركة في بنية المسائل وحلولها. واشتملت أيضاً على مقارنات، إضافة إلى مجموعة أخرى أصغر منها. وبعبارة أخرى، فإن التأمل يتألف من التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول، ومن ثم تلخيص أوجه الشبه تلك على مدار مدة من الوقت. وأخيراً، تؤدي العاطفة أو الوجدان (*Affect*) دوراً كبيراً، وتؤثر أيضاً في نجاح أو فشل الطلاب في تكوين الصورة العامة التي تميز مجموعة من المسائل المستخدمة في الدراسة. ويشمل البعد الانفعالي الاتجاهات والمعتقدات والآراء والقناعات التي يتبناها الشخص (Burton, 1984; Mandler, 1948).

وتلبيةً لمتطلبات الصدق في هذه الدراسة، عمد الباحث إلى استخدام ثلاث مصادر ن البيانات للتحقق من صدقها، هي: البيانات المستقاة من كتابات الطلاب في صحائف المذكرات، ووثائق المقابلة، إضافة إلى كتابات الباحث في دفتر المذكرات الخاص به، واستخدم الباحث أيضاً إستراتيجية تبادل الذاتية أو البين- ذاتية (Inter Subjectivity) عن طريق تكليف زميل بتحليل البيانات المستقاة من المقابلات، مستخدماً أسلوب الترميز الذي وضعه الباحث. وفعلاً، رمّز الزميل ثلاثين صفحة عشوائية من بيانات المذكرات والمقابلات وحلّلها، وتوصل إلى النتيجة نفسها التي توصل إليها الباحث. وبحسب شريحة معيّنة من البيانات التي رمّزها زميل للباحث على نحوٍ مستقل، كان هناك توافق ل 89% من السلوكات التي تقع ضمن فئة التوجه، و 86% للسلوكات التي تقع ضمن التنظيم، و93% للتنفيذ و96% للتعميم، في حين حاز التأمل على 91%. وهذه النتائج تضفي مزيداً من الصدق على نتائج البحث.

وقد لبّى الباحث متطلبات صدق الدراسة كذلك عن طريق دراسة الطلاب في صف الجبر نفسه للصف التاسع، حيث وثّق ملاحظاته عن الطلاب على مدار العام الدراسي في مذكراته. وكذلك الحال من حيث تخصيص وقت كافٍ في هذا المجال، حيث إن الباحث كان أيضاً معلماً للصف التاسع، وكان ملمّاً إلماماً تامّاً بثقافة غرفة الصف. إضافة إلى

ذلك، فقد سُجّلت المقابلات الشخصية على أشرطة، ودُوّنت حرفيّاً، وأُعيدت إلى الطلاب بغرض التوضيح أو الحذف أو الإضافة.

محددات الدراسة

على القارئ أن يدرك أن سياق الدراسة قد أسهم في طبيعة النتائج. ومن هنا، يود الباحث أن يشير إلى المزايا الفريدة لهذه الدراسة النوعية، وعلى هذا، يكون بوسع القارئ الحكم على قابلية تطبيق النتائج في مواقف أخرى أو تعميمها.

كان الطلاب في هذه الدراسة مبتدئين في صف الجبر المسرع في مدرسة ثانوية ريفية. من الناحية الديمغرافية كان الطلاب جميعاً من البيض، وينحدرون من خلفية اجتماعية واقتصادية من الطبقة الوسطى. وكان ثمانية من أصل تسعة طلاب يطمحون إلى إكمال المرحلة الثانوية بدراسة حساب التفاضل والتكامل. وقد شُجّع الطلاب، المستهدفون في هذه الدراسة، وحُفّزوا على النجاح في المدرسة، وكانوا مستعدين لبذل الجهود المطلوبة في هذا البحث. وهكذا، فقد يكون لاستعداد الطلاب للمشاركة في الدراسة ودافعيتهم أثر في مستوى جهودهم والنتائج التي توصّل إليها.

كان الطلاب التسعة الذين شاركوا في هذه الدراسة، قد درسوا مقرر ما قبل الجبر (Pre-Algebra) في الصف الثامن، سنة كاملة. ولم يحدث أن تعرض هؤلاء الطلاب في خلفيتهم الرياضية قبل المرحلة الثانوية لبناء البراهين الرياضية، ولم يتوقع منهم أيضاً أن يبنوا حلولاً عامة للمسائل الجبرية وما قبل الجبرية. ولو تعرض الطلاب لمسائل تشتمل على برهان رياضي، لكان من الممكن أن يميزوا بين المسائل التي تتطلب حلولاً موجودة ومحددة (Existence Solutions) (المسائل 1 و2) مقارنة بتلك التي تتطلب حلولاً عامة (General Solutions) (المسائل 5 ،4 ،3).

كانت لدى الباحث توقعات كبيرة جدّاً تتعلق بطلاب صف الجبر المسرّع، إذ توقع أن يقضي الطلاب وقتاً أطول وحدهم في حل المسائل في صحائف مذكراتهم. وتشير صعوبة المسائل الخمس المستخدمة في هذه الدراسة إلى أن الباحث توقع قفزات مفاجئة غير

عادية من طلاب مرحلة ثانوية مبتدئين. وكان الباحث ذا فاعلية أيضــاً في تشــجيع الطلاب على كتابة إســتراتيجياتهم وملخصــاتهم التأملية بخصوص هذه المسائل على مدار الفصل الأول. لــذا، كانت هذه الخلفية متوافرة لدى هؤلاء الطلاب عند إعطائهم المســائل المركبة الخمس في الفصل الثاني. وعلى هذا، فإن الوضوح الموجود في كتابات المذكرات عائد إلى تأثير الباحث في الطلاب.

طُلب إلى الطلاب في صــف الجبر أن يحلّوا المســائل بأنفســهم دون الرجوع إلى كتب أو أصــدقاء أو أشــخاص آخرين في الصــف. ويشــير التنوع في الحلول الواردة في مذكرات الطلاب، والتنوع في التفســيرات في أثناء المقابلات، إضــافة إلى إخفاق كثير من الطلاب في التوصل إلى حلول للمسائل الثلاث الأخيرة، إلى أن الطلاب لم يتعاونوا فيما بينهم. وعلى الرغــم من ذلك، فهناك احتمال ضــئيل أن يكون بعض الطلاب قــد تحدثوا إلى غيرهم عن هذه المسائل.

النتائج

نجم عن التحليل النوعي لدراسات الحالات التسع، ثلاث مجموعات فرعية استناداً إلى ســلوكات حل المشكلة والتعميمات التي طورها الطلاب. ضمت المجموعة الفرعية: (أ) كلّاً من (Amy, John, Matt & Hanna) الذين أفلحوا في اكتشــاف الصورة العامة التي تميز حلول المســائل، أي مبدأ برج الحمام، حيث تمكنوا من تحديد أوجه الشبه في بنية المسائل وحلولها، وقد تبينوا أن الحلول تتطلب «مطابقة» كميتين غير متســاويتين أو المقارنة بينهما، وعندئــذٍ يتمكنــون من تحديد الدور الذي تؤديــه في حل المســألة، أيَ، أيُّ تجويف (في برج الحمــام) قد أكره علــى أن يحوي أكثر من حمامة واحدة. أظهر هؤلاء الطلاب مثابرة كبيرة نحو الفضول، وحُفّزوا على تعقب المسائل والتأمل مليّاً فيها على مدار مدة طويلة من الوقت. وعلى نحو ما أُشــير ســابقاً، فقد اطلع الباحث على تفاصــيل الاختبارات المتعلقة بالطلاب التســعة بعد جمــع البيانات وتحليلها، ليتبين أن الطلاب الأربعــة في المجموعة الفرعية (أ) كانوا متفوقين في الرياضيات في مدارسهم الابتدائية.

ضـمت المجموعة الفرعية (ب) كلاً مـن (Bart, Jim & Isabel) الذين كان مخطط تعميمهـم العام يتمثل في اسـتخدام عمليـات الجبر في الأعداد المعطاة في المسـائل. ركز هؤلاء الطلاب على أوجه الشـبه الظاهرية في المسـائل، وحاولوا تطبيق عمليات من الجبر. وغالبـاً مـا أظهرت مقارناتهم بين المسـائل كثيراً من التناقضـات، فقـد أخفقوا في تعقب تسلسل الأفكار من مقابلة إلى أخرى على مدار المسائل الخمس.

وأخيراً، ضـمت المجموعة الفرعيـة (ج) كلاً مـن (Jamie & Heidi)، اللذين أظهر مخططهمـا العـام «التوصـل إلى كثير مـن الأمثلة ذات الفائـدة»، وقد عُـدّل ذلك في بعض المسـائل ليشـمل «كثيراً من الأمثلة عديمة الفائدة»، واسـتخدم هـذا المخطط العام مراراً وتكراراً، وكان هدف الطالبين التمكن من المسـألة، إذ كانا مهتمين اهتماماً أساسيّاً بتنفيذ ما تتضمنه هذه المسألة وتحقق صحته.

تظهر الجـداول من (2:2–2:2–4:2) أوجه الشـبة والاختلاف في سـلوكات الطلاب، ويتبع ذلك جزء توضيحي يركز على بعض الحلول التي قدّمها (Amy, John, Matt & Hanna)، ويشتمل على مقالات قصيرة تظهر إستراتيجيات حل المسائل، إضافة إلى الخبرات الرياضية لهـؤلاء الطلاب الأربعة الموهوبين. يقارن جدول (2:2) بين سـلوكات حل المشـكلات لدى الطلاب في المجموعات الفرعية الثلاث للحل في مراحل التوجيه والتنظيم والتنفيذ والتأمل، فـي حين يقارن جدول (3:2) بين الطلاب في سـلوكات التعميم والتأمل ضـمن المجموعات الفرعيـة الثلاث. وأخيراً، يقـارن جدول (4:2) بين السـلوك الوجداني لطلاب المجموعات الفرعيـة الثـلاث. وتهدف الجـداول الثلاثة إلى إتاحة الفرصـة أمام القـارئ للمقارنة بين سلوك الطلاب الموهوبين في حل المسائل (المجموعة الفرعية ب و ج).

جدول 2:2 مقارنة سلوك الطلاب في حل المشكلات في مراحل التوجيه والتنظيم والتنفيذ والتحقق

	المجموعة الفرعية أ – النابغون (Amy, John, Matt & Hanna) (إيمي، جون، هنّا، ومات)	المجموعة الفرعية ب – غير الموهوبين (Bart, Jim , Isabel) بارت وجيم وإيزايل	المجموعة الفرعية ج– العاديون (Jamie, Heidi) (جامي وهيدي)
التوجه	فهم موقف المسألة على الدوام. تقويم كفاية معطيات المسألة. تحديد فرضيات المسألة. التمييز بين الجملة الاستفهامية والخبرية.	ضعف فهم موقف المسألة وضع الأعداد «المعطاة» في قائمة. صياغة فرضيات للموقف في المسألة المعطاة. تمييز غير واضح بين الجملة الاستفهامية والخبرية.	يسيء فهم موقف المسألة. فهم سطحي لفرضيات الموقف في المسألة المعطاة. عدم التمييز بين الجملة الاستفهامية والخبرية.
التنظيم	التخطيط العام تخطيط متواصل لتحديد «الطريق نحو الأعلى» أو «البدء من نقطة صغيرة	تخطيط شمولي عشوائي/ مبهم	تخطيط مرحلي
التنفيذ	ضبط تقلبات موقف المسألة. تأدية الأفعال المرحلية الصحيحة. مراقبة تقدم الخطط واتساقها على الدوام.	عدم ضبط تقلبات موقف المسألة. تأدية الأفعال المرحلية «غير العادية». مراقبة تقدم الخطط واتساقها دون دقة	عدم ضبط تقلبات موقف المسألة. تأدية الأفعال المرحلية. مراقبة تقدم الخطط واتساقها.

التحقق	تفحص نتائج الأفعال المرحلية. تحقق اتساق النتائج مع الخطط المنفذة. استخدام حالات خاصة في فهم سبب حدوث ظاهرة ما على نحو أفضل.	تناقض في نتائج الأفعال المرحلية. تناقض النتائج مع الخطط المنفذة. استخدام حالات خاصة في تحقق حدوث الظاهرة.	استخدام حالة خاصة في التحقق. استخدام الأمثلة/ اللاأمثلة في التوصل إلى النتائج.

جدول 2: 3 المقارنات بين سلوك الطلاب في التعميم والتفكير

	المجموعة الفرعية أ –الموهوبون (Amy, John, Matt & Hanna) (إيمي، جون، هنّا، ومات)	المجموعة الفرعية ب – غير الموهوبين (Bart, Jim , Isabel) (بارت وجيم وإيزايل)	المجموعة الفرعية ج– العاديون (Jamie, Heidi) (جامي وهيدي)
التعميم	تحديد أوجه الشبه في بنية المسألة. تحديد أوجه الشبه في حلول المسألة. استخدام القياس المنطقي. تحسين الطرائق حيثما يكون ذلك ملائماً. توسيع مجال الصحة والدقة. تفعيل المبادئ المشتركة.	تحديد أوجه الشبه الظاهرية في بنية المسألة. تناقض في التعبير اللفظي عن أوجه الشبه في حلول المسائل. فرض الترابطات بالقوة بمفاهيم الجبر. توضيح العوائق.	تحديد أوجه الشبه الظاهرية في بنية المسألة. ابتداع أوجه الشبه في حلول المسائل.

التأمل	تخمين الأمثلة الممكنة وغير الأمثلة وتحققها. الربط أو العزو إلى خبرة سابقة. اتخاذ القرار في أثناء التنفيذ والتحقق وبعدهما. التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول. استخلاص أوجه الشبه البنائية في المسائل والحلول على امتداد مدة من الزمن.	التخمين لكن دون تفحص الحدس. ضعف في اتخاذ القرار في أثناء التنفيذ والتحقق. طرح المسألة جانباً بعد الانتهاء منها. استخلاص أوجه الشبه الظاهرية من كلمات المسائل والحلول.	قليل من التخمين أو عدم التخمين. طرح المسألة جانباً بعد الانتهاء منها. عدم القيام بالتجريد

جدول 2: 4 مقارنات السلوك الوجداني

	المجموعة الفرعية أ –الموهوبون (Amy, John, Matt & Hanna) (إيمي، جون، هنّا، ومات)	المجموعة الفرعية ب – غير الموهوبين (Bart, Jim , Isabel) (بارت وجيم وإيزابل)	المجموعة الفرعية ج- العاديون (Jamie, Heidi) (جامي وهيدي)
الوجدان والانفعال	المثابرة الثقة/ انعدام الثقة الفضول إثارة الإحباط يقدّر الاتصال والتواصل الرياضيات بصفتها «طريقة للتفكير«	انعدام المثابرة الثقة/ انعدام الثقة درجة متدنية من الفضول والرضا انعدام الرغبة في الاتصال والتواصل الرياضيات بصفتها «عمليات على الأعداد».	انعدام المثابرة انعدام الثقة درجة متدنية من الفضول الرضا عدم الرغبة في الاتصال والتواصل فكرة مسبقة عن حل المسائل من الكتب المدرسية للمرحلة المتوسطة

الخبرات الرياضية للطلاب الموهوبين

المسألة الأولى: عُلب المشروبات الغازية (الصودا Soda)

بدأت «هنّا» (Hanna) المسألة بإعادة صياغتها باستخدام كلماتها الخاصة، فكتبت: «هنــاك ســتة أنواع من المشــروبات الغازيــة مدرجة في القائمــة، فإذا طلــب أحد الطلاب الحصــول على علبة واحدة منها، فكم طالباً يجب أن يطلب مشــروبات غازية، بحيث يطلب أحــد الأنواع الســتة اثنان مــن الطلاب على الأقل؟ وبعبــارة أخرى، كم طالباً ســيطلب علبة واحدة من المشروبات الغازية، بحيث تُطلب علبة واحدة على الأقل مرتين؟»

كانــت خطــة هنّا في حل المســألة علــى النحو الآتي: «عمــل قائمة بأنواع المشــروبات الغازية الســتة المختلفة، عندئذٍ ســوف تكتب» الطالب الأول، الطالب الثاني.. إلخ لترمز إلى طالب واحد لكل طلب... وهكذا لأنواع المشــروبات الغازية الستة. «وأخيراً تكوّن حلُّ هنّا من قائمة ضــمت أنواع المشروبات الغازية الســتة، حيث حدّدت طالباً واحداً لكل علبة من أنواع المشروبات الغازية الستة المختلفة، وبعدئذٍ عيّنت الطالب السابع لعلبة الزنجبيل ليرمز إلى الطالب الثاني لواحدة من أنواع المياه الغازية الستة». وتوصلت من خلال هذا العمل «إلى أن الأمر يتطلب سبعة طلاب ليطلبوا الصودا، بحيث تكون علبة صودا واحدة لكل طالب لضمان طلب علبة صــودا واحدة في الأقل، من بين أنواع الصــودا الستة من طالبين على الأقل». وقد دُهش الباحث من صــحائف مذكرات هنّا، حيث أعادت كتابة المسألة بكلماتها وأعدت خطة ونفذتها، وتوقفت عندما تحققت من أن حلها قد لبّى جميع شروط المسألة.

المسألة الثانية: مسألة الأسبرين (Aspirin)

بدأ «مات» (Matt) بحل المســألة حيث كتب: «تتلخص المســألة بالعثور على تسلســل لتناول الأسبرين في ثلاثين يوماً، ومن ثم معرفة هل سيتناول أربع عشرة حبة من الأسبرين في عدد من الأيام المتتالية». لقد فهم هذه المسألة على النحو الآتي: «لا بد من وجود طريقة ما ليتناول الشــخص أربع عشرة حبة من الأسبرين في أي عدد من الأيام المتتالية»، وتحقق حبــات الأســبرين الخمس والأربعين التي ســيتناولها في غضــون ثلاثين يومــاً. وطلباً لحل

المسـألة، تكونت إسـتراتيجية «مات» من إعـداد قائمة بالأيام الثلاثيـن، وكتابة عدد حبات الأسبرين على الجانب الآخر (انظر شكل: 1:2).

بدأ «مات» بتنفيذ خطته بعمل جدول بحيث كتب على أحد جانبيه ثلاثين يوماً، وكتب على الجانب الآخر منه عدد حبات الأسبرين. «سأحاول كتابة حبة دواء واحدة على الأقل في يوم واحد وأكتب حبّتي دواء في بعض الأيام حتى أُكمل الحبات الخمس والأربعين، وأعتقد أن هذه الطريقة سوف تتكلل بالنجاح.» حدّد «مات» حبة دواء واحدة لكل يوم من الأيام الثلاثين، ومن ثم أضاف حبة دواء أخرى إلى الأيام بدءاً من الخامس عشر وحتى التاسع والعشرين. وكتب عندئذٍ قائلاً: «الأمر ممكن، إذ إن أقل عدد من الأيام يستغرقه تناول أربع عشرة حبة أسبرين هو سبعة أيام». لم يفكر «مات» في أي شيء بعد ذلك، ولم يشر إلى حقيقة وجود أي حلول أخرى ممكنة، ويبدو أنه كان مقتنعاً أن الجواب كان سبعة أيام استناداً إلى حله. وعلى الرغم من ذلك، فإن الرواية الآتية تظهر أن «مات» كان على دراية بحلول أخرى للمسألة، إضافة إلى مقدرته على تحديد أوجه الشبه البنيوية في المسألتين الأولى والثانية.

اليوم	حبة الدواء	اليوم	حبة الدواء	اليوم	حبة الدواء
1	1	11	1	21	2
2	1	12	1	22	2
3	1	13	1	23	2
4	1	14	1	24	2
5	1	15	2	25	2
6	1	16	2	26	2
7	1	17	2	27	2
8	1	18	2	28	2
9	1	19	2	29	2
10	1	20	2	30	1

شكل 1:2 تمثيل «مات» لمسألة الأسبرين

الرواية الأولى

الباحث: هل تعتقد أن هذه هي الطريقة الوحيدة للحل؟

الطالب: أعتقد ذلك.

الباحث: إذاً، لا توجد طريقة أخرى للحل.

الطالب: هل تقصد أن هذا النوع فقط من الأعداد، هو الذي يمكن استخدامه؟

الباحث: نعم

الطالب: لا، لأنه يمكنك استخدام زوج من الثلاثيات، أو وضع يوم واحد معها جميعاً، وأما بقية الأيام فيمكنك وضع واحدة فقط.

الباحث: حسناً، كم أمضيت من الوقت في حل المسألة؟

الطالب: أمعنت فيها يومين قبل الحل، وفكرت فيها برهة من الزمن، ومن ثم كتبت المهمتين الأولى والثانية في قاعة الدراسة. وبعد ذلك، عدت إلى البيت، وفي اليوم التالي أمضيت نصف ساعة من الزمن وأنا أفكر في طريقة حلها.

الباحث: أتعني أنك قد أمضيت وقتاً أطول في حل هذه المسألة مقارنة بما سبقتها؟

الطالب: نعم، فقد كانت المسألة الأولى سهلة نوعاً ما.

الباحث: هل ترى ثمة أوجه شبه بين المسألتين؟

الطالب: ما لاحظته هو أنني كنت أمضي قُدماً وأضع واحدة، ومن ثم أضيف أخرى في بضعة أيام، ومن ثم توصلت إلى الإجابة.

الباحث: حسناً.

الطالب: هذا كل ما فعلته في المسائل جميعها (مشيراً إلى مسألة الصودا)، كان ينبغي لأحد الطلاب أن يحصل على علبتين، وبذلك، وضعت اثنتين لأحدهم.

الباحث: وماذا عن المسألة الثانية؟

الطالب: وضـعت واحدة منها في كل يوم من الأيام، ومن ثم وضعت حبتين في نصف الأيام.

المسألة الثالثة: مسألة مجموع العدد

كتبت إيمي (Amy) أفكارها عن المسألة المعطاة في صحيفة مذكراتها، قائلة:

تتلخص المســألة في معرفة كيفية حدوث شــيء ما. عليّ بأن أفكر كيف يحصــل هذا، وأبرهن لنفسي ولكم أن هذا يحصل دائماً. قد يبدو هذا غير ممكن، ولكنه سيحصل دائماً. إنــه أمــر مثير إلى حدٍّ بعيــد، عليك أن تفكر في أن ذلك لا يفيد مــع بعض مجموعة الأعداد، ولكنه ينجح مع كل مجموعة من الأعداد وفي كلٍّ منها.

ولكي تبدأ المسألة، فقد دارت خطة إيمي (Amy) حول عمل مجموعة من عشرة أعداد بين الواحد والمئة. عندئذٍ ستعمد إلى استخدام هذه المجموعة؛ لتتوصل إلى طريقتين للحصول على المجموع نفســه، ثم تعمل بعد ذلك مجموعة أخرى، وتســتمر في تكرار هذه العمليــة. وكتبت قائلة: «آمل أن أكتشف النمط، عندئذٍ أستطيع إثبات كيفية حدوث هذا.»

كانــت مجموعة «إيمي» الأولى علــى النحو الآتي:{3، 12, 23, 29, 53, 61, 70, 79, 81, 94} وكان المجموعان: (94=79+12+3) وهو عدد من ضــمن المجموعة. وبعبارة أخرى، فإن المجموع الثاني هو (94=94). ومما تجدر الإشــارة إليه، أن طريقتها في التوصــل إلى هذا كانت عن طريق طرح تســعة وســبعين من أربعة وتســعين لتحصــل على خمســة عشــر، وبعدها لاحظت أن 15=12+3، ومن هنا، فإن 94=79+12+3.

أمــا مجموعتهــا الثانية فكانت على النحو الآتي: {9, 12, 29, 41, 45, 71, 73, 88, 97, 98}، وكان المجموع الذي توصــلت إليه هذه المرة علــى النحو الآتي: (98=41+12+54). وعند هذا الحد، قررت أن تجرب أمراً آخر مختلفاً. إذ ســتبدأ بمجموعة من عشــرة أعداد، ولكــن ســتنقحها هذه المــرة بطريقة مــا، أيّ تغير بعض العناصــر أملاً في الحصــول على «نتائــج مختلفــة». وقالــت إنهــا كانت تجرب في هــذه المرحلة أملاً في اكتشــاف شــيء ما. وبــدأت بالمجموعــة الآتيــة: « {5, 14, 16, 29, 44, 46, 53, 61, 80, 89}، واخــذت تبحــث عن طرائق مختلفة للتوصــل إلى حل، وبعبارة أخرى، فإن المجموع يســاوي عدداً من ضــمن

المجموعــة، أو مجموعين يكونان متســاويين. وتوصــلت إلى حلول مختلفــة على النحو الآتي: (80=61+14+5) ؛ (80=29+5+46). عندئذٍ قررت «استبدال» بعض الأعداد و«التوصل إلــى نتائج جديدة»؛ وعليه، اســتبدلت بالأعــداد 80 ,46 ,29 ,14 ,5 أعــداداً أخرى مختلفة. وبــدأت مــع المجموعــة:{89 ,80 ,61 ,53 ,46 ,44 ,29 ,16 ,14 ,5} التي ســمتها المجموعة «الأصــلية»، وغيرتهــا إلــى {89 ,82 ,61 ,53 ,49 ,44 ,21 ,16 ,7 ,6}، وأطلقــت عليها اســم المجموعة «المنقحة». واســتبدلت بالأعداد 82 ،49 ،21 ،7 ،6 الأعداد 80 ،46 ،29 ،14 ،5؛ لترى هــل ســينتج من هذا مجموعة لا تعطــي أي حلول. وعلى الرغم من ذلــك، فقد وجدت مزيداً مــن المجاميع على جناح الســرعة، وهذا ما أثار دهشــتها بأن هــذه الطريقة لا تزال ناجعة. «89=82+7؛ يــا للروعة! لقد توصــلت إلى إجابة صــحيحة في المرة الأولــى» وقررت العثور علــى مزيد مــن المجاميع، وقد نجحــت؛ ومثال ذلك:89=61+21+7، وهو عدد من ضــمن المجموعة المنقحة؛ 44+21=49+16؛ 82 =21+61، و 44=21+16+7. وعندما وصــلت إلى نهاية مسدودة أخرى، قررت تجربة شيء جديد. وكتبت قائلة: «سأضع بعض الأفكار في اختيار الأعداد العشرة.»

وأخيراً، توصــلت إلى مجموعة الأعداد، وكانت على النحو الآتي: {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64....} «بدأت بالعدد واحد، ثم اختارت العدد اثنين. لم أكن أهدف إل الحصــول على حل آنــذاك، لذا، لم اختر العدد ثلاثة عندئذٍ، واخترت العدد أربعة بدلاً من ذلك؛ لأن 3=2+1، وبذلك يكون الحل قد ظهر فوراً، وواصلت العمل على هذا النسق. سيكون العدد الأكبر الآتي هــو ســبعة؛ لأن 7=4+2+1، لذا، لــم أختر العدد ســبعة، واخترت العدد ثمانيــة بدلاً منه.» اســتمررت بهــذا النمط مع اختيــار الأعداد بكل دقة وعناية، حتى وصــلت إلــى العدد أربعة وســتين، كما لاحظت أنها كانت تضــاعف العدد السابق لتحصــل على العدد الآتي.» لم يكن هنــاك ثمة حل ممكن، ولكن إذا ضــاعفت العدد أربعة وســتين، فســوف أحصــل على العدد مئة وثمانية وعشــرين في الوقت الذي تشــترط فيه المســألة أن تكون الأعداد محصورة بين الواحد والمئة، لذا، تعذر عليّ استخدام العدد مئة وثمانية وعشرين. يتبقى لديّ ثلاثة أعداد أخــرى يتعيــن عليّ إيجادهــا. «إذا انتقيت أي عدد عشــوائي، فانظر ما ســيحدث.» اختارت

(Amy) عـدداً مـن الأعداد العشـوائية بين أربعة وسـتين ومئة، مثل الأعـداد 87, 99, 68، 71, 84, 92، وكانـت دائمـاً تجد مجاميع مسـاوية لأعداد من ضـمن المجموعة، منها مثلاً: 78= 46+61+2+1+4، ثـم اختـارت بعد ذلك أعداداً من ضـمن مجموعـة أعدادها التي اختارتهـا بـكل دقـة وعنايـة، مثـل: 29 ,9 ,50 ,45 ,17 ،5، ووجـدت مجاميع مسـاوية لتلك الأعداد، وكان تخمينها بأن أكبر عدد من الأعداد يمكن أن يكون ضـمن المجموعة لا يوصـل إلى حل هو سـبعة أعداد، أي مجموعين متسـاويين. فتوصـلت إلى نتيجة مفادها بأن المرء يسـتطيع اختيار سـبعة أعداد صحيحة دون أن يتوصـل إلى حلول، ولما كانت المسألة تتطلب اختيار عشرة أعداد صحيحة، فإن الحل موجود دائماً.

وخلاصـة القول أن الذهاب بعيداً أعلى من العدد الأكبر، ينجم عنه ظاهرة معينة تفي بشـروط المسـألة. ففي المسـألة الأولى، أدى زيادة عدد الطلاب فوق العدد سـتة إلى طلب الصودا مرتين. وأما في المسألة الثانية، فقد أدت زيادة عدد حبات الدواء على ثلاثين حبة فأكثر، إلى إجبار الشـخص على تناول أكثر من حبة في اليوم، وترتب على ذلك سلسـلة من الأيام المتعاقبة حيث اسـتهلكت أربع عشـرة حبـة دواء تماماً. وفي هذه المسـألة، في حالة العشرة أعداد، فإن قدرة «إيمي» على تكوين مجموعة عظمى من الأعداد لم تتجاوز السبعة، قد اختيرت بدقة وعناية، نجم ذلك الحصـول على مجموعين متساويين عند اختيار عنصر ثامن. وهذه هي النقطة التي جعلت «إيمي» تفكر مليّاً بحلها، وكتبت قائلة: «لما كنت قد حاولت الحصـول على أكثـر الأبدال الممكنة في المجموعـة {1, 2, 4, 8, 16, 64،...}، فقد ذكرني ذلك بالمسـألة الأولى عندما حاولت الحصـول على أكبر عدد ممكن من متغيرات الطلبات، حيث حُدّد كل شـخص بعلبة صـودا. وبعد كل هذا، فإن هـاتين المسـألتين متشـابهتان.! هل خططت لهذا؟»

بدا واضـحاً أن إيمي «كانت قد بدأت بتطوير نقطة حدسـية حول التعميم المخفي في المسـائل، أي مبدأ برج الحمام، فقد كانت قادرة على تحديد التشـابه البنيوي في المسـائل الثلاث في أثناء المقابلة، وكانت قادرة على التعبير عن مبدأ برج الحمام لفظيّاً».

المسألة الرابعة: مسألة المعارف (الأصحاب)

فهم جون (John) مسألة المعارف (الأصحاب) هذه (The Acquaintance Problem) على النحو الآتي: «أستطيع أن آخذ عشرين شخصاً، وأثبت هل يوجد للشخص نفسه عدد الأصدقاء ذاته، كأي شخص آخر». ولكي يحل هذه المسألة، قال إنه سيعطي أعداداً للعشرين شخصاً، ومن ثم يستخدم إستراتيجية «التخمين والتحقق». ومن أجل حل المسألة، رسم الشكل الآتي (شكل 2:2):

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
210	9	8	7	6	5	4	3	2	1

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1–19	19	18	17	16	15	14	13	12	11

شكل 2:2 تمثيل جون لمسألة المعارف

شرح جون الشكل أعلاه على النحو الآتي: يمثل الصف الأعلى الأشخاص في الغرفة، أي العدد 1 يشير إلى الشخص رقم 1 وهكذا، في حين يمثل الصف الثاني عدد الأصدقاء. مثلاً ووفقاً للجدول، فإن الشخص رقم 1 لديه صديق واحد، والشخص رقم 2 لديه صديقان وهلّم جرّاً. كتب جون قائلاً: «فكرت قليلاً، وقررت هل الرقم 1 يعرف صديقاً واحداً، ومن ثم هل الرقم 2 يعرف صديقين وهكذا. حاولت ألا يكون الصديق نفسه مكرراً مرتين».

وخمن الباحث أن جون قد فكر مليّاً في المسألة، قبل أن يقرر المضي في الحل بعدم تحديد العدد نفسه من الأصدقاء للأشخاص في الغرفة. وعند سيره عبر الخطوط ووصوله إلى الشخص رقم (20) في الغرفة، عرف ذلك الشخص؛ لأن الشخص رقم (20) لا يمكنه أن يعرف (20) شخصاً في الغرفة، إذ إنه يمكن أن يعرف شخصاً واحداً في الأقل، أو تسعة عشر شخصاً، ومن هنا سينتهي المطاف بوجود شخصين لهما العدد نفسه من الأصدقاء.

وجد الباحث أن هذه الحجة قوية؛ لأنها تنطبق ضمنيّاً على مبدأ برج الحمام، ولكي نتمكن من التوصل إلى أن شخصين سينتهي بهما الأمر بالعدد نفسه من الأصدقاء، طلب

الباحث إلى جون شرح إستراتيجية حله المسألة، ومن ثم طلب إليه أن يوضح ما إذا كان هناك أي أوجه شبه في المسائل أو حلول المسائل التي تقود في نهاية المطاف إلى توضيح مبدأ برج الحمام، والصورة العامة التي اتسم بها حلّه المسائل الأولى والثانية والرابعة.

وتوضح الرواية الآتية اكتشاف جون لمبدأ برج الحمام.

الرواية الثانية

الطالب: لقد رسمت جدولاً لهم جميعاً، وأدرجت الأشخاص والمجموعات الممكنة جميعها، وحللتها بوضع الأعداد في مكانها الصحيح.

الباحث: إذاً، كيف كان الحل ؟

الطالب: رسمت الجدول، ووضعت قائمة بأسماء الأشخاص، وخمنت العدد لكل شخص على حدة.

الباحث: هل هذا هو الشيء الوحيد المشترك؟

الطالب: نعم، فالمسائل الأولى والثانية والثالثة جميعها تتطلب كمية محددة، مثل الأشخاص أو أنواع الصودا، كأن تشترط وجود عدد محدد يمكن أن يكون ممكناً. وبخصوص هذه المسألة (مشيراً إلى مسألة الأسبرين) يمكن أن تكون الكمية المعينة عشرين.

الباحث: هل تعتقد أن هناك معادلة من نوع ما، أو قانوناً مشتركاً بين هذه المسائل تحدثت عنه في السابق؟

الطالب: هناك ست علب صودا وسبعة أشخاص، وثلاثون يوماً، وخمس وأربعون حبة أسبرين؛ لذا، فإني أجزّئ الأعداد.

الباحث: إذاً، ما الذي يجري؟

الطالب: كان عدد الأشخاص أكبر من عدد علب الصودا، وعدد حبات الأسبرين أكبر من عدد الأيام، فهناك عدد أصدقاء معروفين أكبر من عدد الأشخاص.

الباحث: عدد أصدقاء معروفين أكبر من عدد الاشخاص؟

الطالب: نعم... واحد منهم أصغر.

الباحث: ماذا تعني بالأصغر؟

الطالب: عدد أشخاص أكبر من عدد الأصدقاء، لم يكونوا متساوين أبداً. هناك شيء ما أكبر أو أكثر.

الباحث: كيف يساعدك ذلك كله على حل المسألة؟

الطالب: توضح المسائل شيئاً واحداً في الأقل، وبذلك عرفت أنه لا بد من أن يكون عدد الأشخاص أكبر من عدد علب الصودا.

الباحث: وماذا حدث نتيجة ذلك؟

الطالب: (صمت). (يكتب الأعداد)... يمكن أن تحل المسألة عندئذٍ.

عند هذه النقطة من المقابلة، حدد جون تحديداً صحيحاً أوجه الشبه في بنية المسائل الأولى والثانية والرابعة. وعبّر عن هذا بقوله: إن المسائل جميعها كانت تتطلب كمية معينة، أو هل أن كمية معينة كانت ممكنة؟ لاحظ أنه عمل جدولاً لحلّه المسائل الأولى والثانية والرابعة، وأنه قارن بين كميتين، بحيث كانت إحدى الكميتين «أقل» من الأخرى. وقال أيضاً: إن هذا قد سمح بإيجاد حلول للمسائل، حيث إنه قد أفاد ضمناً منه، الأمر الذي مكّنه من إيجاد حل للمسألة، وأعني مبدأ برج الحمام، فقد اتخذ الباحث قراراً تربويّاً تعليميّاً باستخدام أعداد جون في تسهيل عملية التعبير لفظيّاً عن مبدأ برج الحمام. ومن المهم أن يلاحظ القارئ أن الباحث اتخذ هذا القرار فقط بعد أن صاغ الطالب مبدأ برج الحمام ضمنيّاً بكلماته. وأما فيما يتعلق بحالة جون، فقد بدا ذلك واضحاً بعد تحديده الكميتين اللتين قورن بينهما، حيث إن إحداهما أقل من الأخرى، الأمر الذي أعان على حل المسألة. وكانت هذه طريقته في التعبير عن مبدأ برج الحمام، وسوف يتضح هذا كله للقارئ من خلال الرواية الآتية:

الرواية الثالثة

الباحث: لمّـا كنـت قد زوّدتنـي بالأعـداد (6, 37, 45, 19, 20)، فإنني أود أن أسـألك السؤال الآتي: ماذا لو استخدمت هذه الأعداد للحمام، وتلك الأعداد لبيوتها؟

الطالب: (ضاحكاً) ستكون هناك حمامة زائدة على الدوام.

الباحث: أين؟

الطالب: سيكون هناك اثنتان في بيت واحد.

الباحث: إذن، أخبرني ما الذي يجري هنا؟

الطالب: عندئذٍ سـيمكنك أن تضع خمس عشـرة حمامة في واحدة، وتضع البقية في الأخرى (مشـيراً إلى الأعداد 30 و 45). وسيكون هناك أكثر من حمامة واحدة في بعض بيوت برج الحمام.

الباحث: وماذا عن هذين العددين (مشيراً إلى العددين 19 و 20)؟

الطالب: أحد بيوت الحمام سيحتوي على اثنتين هنا.

الباحث: حتى الآن لم تخبرني بمعادلتك.

الطالب: (برهة من الصـمت). عـدد الحمام أكثر من عـدد البيوت. دعنا نقول إن س ترمز إلى البيوت، عندئذٍ سيكون عدد الحمام أكثر من عدد البيوت.

الباحث: كيف يمكنك قول ذلك باستخدام الرمز س؟

الطالب: س + 1

الباحث: إذا أنـت أشـرت إلـى أن لديـك بيوتاً بعـدد س، وحمامـات بعدد س + 1، فماذا بعد ؟

الطالب: عندئذٍ سوف تمتلئ البيوت جميعها، وسيمتلئ أحدها أكثر من مرة واحدة. كنت مندهشاً كيف نجح ذلك في المسألة الأخيرة (مسألة المعارف أو الأصحاب)... لقد نجحت.

وهكذا، فقد توصل جون إلى الصورة العامة التي تصف حلّه المسائل الأولى والثانية والرابعة. وفي أثناء رحلته، لاحظ الباحث أن جون قد فكّر ملياً في «معادلة» ممكنة مدة ثلاثة أسابيع. وعلى عكس إيمي (Amy) التي تعثرت في التوصل إلى الصورة العامة في أثناء محاولتها إيجاد حل للمسألة الثالثة، فقد فكر جون تفكيراً واعياً في شيء ما يعين على تحويل المسائل إلى معادلة. لاحظ أن جون كان سريعاً في تعبيره عن مبدأ برج الحمام، وهذا مرده استخدامه الضمني هذا المبدأ في حله ثلاث مسائل من المسائل الأربع.

المسألة الخامسة: مسألة الفرقة الموسيقية (The Band Problem)

لم يفلح أي من الطلاب التسعة في حل مسألة الفرقة الموسيقية. لقد بنت إيمي و«مات» تفسيرات معقولة لإجراء التوافيق والتباديل، لكنهما أخفقا في تطبيق مبدأ برج الحمام على حل هذه المسألة.

ملاحظة: حلول المسائل الخمس موجودة في الملحق ب.

وبهذا ينتهي السرد الوصفي لخبرات حل المسائل للطلاب الأربعة الموهوبين. لقد اكتشفت إيمي مصادفة مبدأ تجاويف برج الحمام بعد حل المسائل الثلاث الأولى، وتمكنت من تطبيقه على حل المسألة الرابعة، في حين تمكن جون من التعبير لفظيّاً عن مبدأ برج الحمام، بعد محاولاته حل المسائل الأربع الأولى، بعد تفكيره مليّاً، وتحديد أوجه الشبه في المسائل ذوات الأرقام الأولى والثانية والرابعة. وأخيراً، تمكن كل من «مات» وهنّا من اكتشاف مبدأ برج الحمام بعد إجراء محاولات على المسائل الخمس بتحديد أوجه الشبه بين المسائل الأولى والثانية والرابعة. وقد كانت إيمي الطالبة الأكثر نجاحاً في المجموعات الفرعية. وقد عدّها كثير من أساتذة الرياضيات في جامعة مجاورة، رائعة رياضيّاً؛ نظراً إلى ابتداعها المجموعة العظمى في محاولتها حل المسألة الثالثة.

النتائج والمضامين

تشير النتائج إلى نجاح كل من الطلاب الأربعة الموهوبين إيمي وجون و«مات» وهنّا في صياغة التعميمات. وعموماً، يكمن الفرق الرئيس بين هؤلاء الطلاب وغيرهم في مراحل

حل المسائل الأربع المتمثلة في: التوجه، والتنظيم، والتنفيذ، والتحقق. ويستثمر الطلاب النابغون قدراً كبيراً من الوقت في محاولة فهم موقف المسألة، وتحديد الفرضيات بوضوح، واستنباط خطة شمولية ذات طبيعة كلية. وعلى الرغم من أن هؤلاء الطلاب لم يتوصلوا إلى حلول عامة للمسائل الخمس البتة، فإنهم عملوا قدماً على نحوٍ مستمر عن طريق البدء بحالات أكثر بساطة تعين على نمذجة موقف المسألة. ولتحقيق ذلك، كانوا يضبطون متغيرات المسألة. وبعبارة أخرى، فقد لاحظوا أن الكميات في المسائل المعطاة لم تكن ثابتة، مثلاً: ضبطت إيمي في المسألة الثالثة المتغيرات عن طريق انتقاء الأعداد الصحيحة في المجموعات بعناية فائقة، ولم يقيدوا أيضاً أنفسهم بمجموعة من عشرة أعداد فقط، بل حاولوا مع مجموعات تحتوي على أقل من عشرة أعداد صحيحة. وطبق هؤلاء الطلاب في أثناء مرحلة التنفيذ من مراحل حل المسألة إجراءات مرحلية (يدويات) باستمرار، وراقبوا تقدمهم. وعند الحصول على نتائج الإجراءات المرحلية، فُحصت لتحقق دقتها واتساقها. وفي مرحلة تحقق المسائل الثلاث الأخيرة، كان هؤلاء الطلاب يستفيدون على الدوام من حالات خاصة للتوصل إلى رؤية تفسر حدوث ظاهرة ما. أما من حيث صياغة التعميمات لهذا الصنف من المسائل، فقد أفلح الطلاب بتحديد أوجه الشبه في بنية ثلاث مسائل فأكثر على نحوٍ صحيح، وكذلك أوجه الشبه في حلولهم. لقد كانوا ماهرين في استخدام القياسات في أثناء توضيحهم وجه الشبه في المسائل، وكانوا قادرين أيضاً على الاتصال والتواصل على نحو فاعل، والتعبير عن المبدأ المشترك الذي اعتقدوا أنه يصف ثلاثاً من المسائل أو أكثر. وفي كثير من الحالات، خصصوا مجموعة فرعية أصغر من مجموعة من الأشياء متضمنة في المجموعة المعطاة.

وقد أظهرت سلوكات التعميم التي أبداها الطلاب الأربعة كلهم كثيراً من أنماط الاتساق، مع كثير من الدراسات القائمة، إذ توصل كروتتسكي إلى نتيجة مفادها أنه كي يتمكن الطلاب من صوغ تعميمات يتعين عليهم الاستخلاص من محتوى معين، وأن يحددوا أوجه الشبه والبنى والعلاقات. وقد نجحت إيمي وجون و«مات» وهنّا في الوصول إلى هذا بدرجات متفاوتة. وتضمن سلوك الطلاب التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول، واستخلاص أوجه الشبه تلك على امتداد مدة من الزمن، وترتّب أيضاً على هذه النتيجة تحقق التخمين،

وهذا يتفق مع ما أشار إليه بياجيه (Piaget, 1971) ودوبنسكي (Dubinsky, 1991) اللذان صوّرا التعميم على أنه عملية «تجريد تأملي». في حين ينظر دوبنسكي إلى التعميم بصفته مزيجاً من الأشياء والعمليات التي تشتمل على درجة عالية من المعرفة الخاصة بالموضوع. وفي هذه الدراسة، كانت المسائل الخمس هي الأشياء، وحلول تلك المسائل الخمس هي العمليات، والصورة العامة التي وصفت مجموعة المسائل والحلول، هي مبدأ برج الحمام.

وأظهر الطلاب النابغون أيضاً سلوكات تفكير أخرى لم يقل الباحث بصراحة في دراسته إنها ساعدت على عملية التعميم. وفي سياق دراسة البحث هذه، فقد لوحظ قدر كبير من سلوك اتخاذ القرار لدى الطلاب الموهوبين في أثناء مراحل التنفيذ وبعدها، وتحقق حل المسألة. يمكن أن يصور اتخاذ القرار على أنه سلوك تفكير «سريع» في أثناء عملية حل المسألة، يوجّه الطلاب إلى الحلول الصحيحة. وهناك سلوك تفكير آخر ظهر في التخمين والحدس بعد محاولة حل مسألة ما. فبعد محاولة الطلاب حل مسألة ما، فإنهم غالباً ما يخمنون، ومن ثم يتابعون تخميناتهم بتفحص الأمثلة المعقولة. لقد كان هذا أسلوباً مميزاً لكتابات إيمي في دفتر مذكراتها، ولوحظت أيضاً هذه السمة لدى الآخرين. مثلاً، قال جون إنه كان يبحث عن معادلة تعين على حل المسائل، وأخيراً توصل إليها بعد حل المسألة الرابعة.

أشار الباحث في وقت سابق إلى وجود فروق بسيطة تتصل بنوعية التعميمات التي كوّنها الطلاب النابغون. فقد كانت إيمي الطالبة الأكثر نجاحاً في هذه المجموعة الفرعية؛ لأنها اكتشفت التعميم بعد المسألة الثالثة، وتمكنت أيضاً من حل المسألة الرابعة باستخدام التعميم الذي كوّنته. بعد ذلك، حاولت تصنيف المسألة الخامسة ضمن الطريقة العامة، لكنها لم تفلح في ذلك. وقد كانت بطريقة أو بأخرى، تعمل في مستوى عالم رياضيات. وسيكون بوسع عالم الرياضيات أن يصور مخطط تعميم إيمي على النحو الآتي: اشتقت طريقة عامة في المرحلة الأولى من المسائل 1 و 2 و 3، ثم صيغت الطريقة بوضوح (برج الحمام)، وعُدّت كياناً قائماً بذاته، وحُللت بنيتها، ثم استخدمت هذه البنية لتضمين نوع مختلف من المسائل (المسألة 4)، دون إجراء أي تغييرات على الطريقة الأصلية

(Skemp, 1986). وتمكّن أيضاً جون ومات في الجانب المقابل من التوصل إلى التعميم بعد حل المسألتين 4 و 5 على التوالي، ولكنهما أخفقا في تصنيف المسألتين 3 و 5 ضمن التعميم. وفي حالة «حنا»، فقد توصلت إلى فهم حدسي تخميني للتعميم عن طريق استخلاص أوجه الشبه في المسائل 1 و 2 و 4، وعن طريق استبعاد المسألتين 3 و 5 على نحو متعمد من هذه العملية. ولما كان التجريد يُعدُّ فرضية للتعميم (Davis & Hersh, 1981; Davydove, 1990) فإن سلوكات التجريد لهؤلاء الطلاب شبيهة بتلك التي يظهرها علماء الرياضيات، وتعين على نجاح تكوين تعميمات صادقة.

تتسق السلوكات الوجدانية للطلاب الموهوبين في صياغة التعميمات مع دراسات كثيرة بهذه الخصوص (Burton, 1984; Mandler, 1984). ووفقاً ل بيرتون (Burton, 1984) فإن نشاط المعرفة يرسم بوساطة الاستجابات الوجدانية التي يمكن ملاحظتها في أثناء استعراض المراحل الثلاث: **الدخول** (*Entry*) **والهجوم** (*Attack*) **والمراجعة** (*Review*). وتسمّى المرحلة التي يُتعامل فيها مع المسألة بمرحلة الدخول، وتُثار فيها الدهشة، أو الفضول، أو التوتر بوصفه حاجة وجدانية تُحل من خلال مرحلة الاستكشاف (الهجوم)، التي تلبي بدورها حاجة المعرفة للتوصل إلى النمط الأساسي، الذي كان في هذه الدراسة مبدأ برج الحمام. وأما في حالة الطلاب الموهوبين، فقد لاحظ الباحث العواطف الإيجابية القوية التي تلازم بناء الأفكار الجديدة غالباً (Glasersfeld, 1987). وتتسق هذه النتيجة مع الكتابات والدراسات البحثية التي ترى أن جلّ العوامل الوجدانية التي تبرز من الاستجابات العاطفية، يمكن أن تعيق الخطط أو السلوكات المخططة (Burton, 1984; Mandler, 1984, Schoenfeld, 1985). إضافة إلى ما أظهره الطلاب من دهشة وفضول على مدار المسائل الخمس، فقد أظهروا أيضاً مثابرة رائعة، ونوبات من الإحباط. لقد قدّروا الاتصال والتواصل، وصوروا الرياضيات على أنها «طريقة تفكير».

امتلك الطلاب النابغون الأربعة قابلية طبيعية (Shapiro, 1965) للانتظام في سلوكات حل المسألة وبناء التعميمات. وعلى الرغم من أنهم لم يحظوا بأي فرص للإثراء أو التسريع في أثناء المرحلة المتوسطة من سني الدراسة، فإنهم أظهروا مستوى عالياً من التفكير

التأملي، إضافة إلى الاهتمام بالتوجه والتنظيم في موقف حل المسألة. وعلى العموم، ينبغي لهذه النتيجة أن تحظى بدرجة عالية من الأهمية لدى كلٍّ من المعلمين والمرشدين. ويلاحظ أن الطلاب الموهوبين قد أظهروا فهماً عميقاً، حيث إنهم كانوا قادرين على استخلاص أوجه الشبه، ومن ثم تكوين روابط مفاهيمية صحيحة. وقد أدى الوجدان دوراً رئيساً في كيفية تعاملهم مع موقف المسألة، ولاسيما أن معتقداتهم بخصوص مكونات الرياضيات، قد أثرت في كيفية معالجتهم للمسألة. وربما وجد الطلاب النابغون أن المسألة تأسرهم بما يكفي لدرجة أنها توجِد حاجة وجدانية لديهم؛ ليتوصلوا إلى النمط الأساسي الذي يميزها (Burton, 1984; Mandler, 1984, Schoenfeld, 1985).

وهكذا، فإذا ما أراد المعلمون أن يكون الطلاب ماهرين في صياغة التعميمات، فإن التحدي الأول والأخير يتمثل في إيجاد فئات متنوعة من المسائل لها حلول عامة، تمكن الطلاب من الوصول إليها وتستحوذ على اهتمامهم. وأخيراً، تشير النتائج إلى مقدرة الطلاب الموهوبين على استخلاص أوجه الشبه في بنية المسائل والأوضاع بطريقة تماثل ما يحدث في الرياضيات، وكذلك تكوين تعميمات رياضية صحيحة وصادقة. وهذا يتطلب من معلمي المرحلة الثانوية إيجاد فرص تعلم تتيح المجال أمام الطلاب الموهوبين في الرياضيات لتطوير مواهبهم واستخدامها.

قائمة المراجع

Birkhoff, G. (1969). *Mathematics And Psychology. Siam Review,* 11, 429–469.

Brownell, W. A. (1942). *The Place And Meaning In The Teaching Cf Arithmetic*. Theelementary School Journal, 4, 256–265.

Burton, L. (1984). *Mathematical Thinking: The Struggle For Meaning*. Journal Forresearch In Mathematics Education, 15, 35–49.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. New York: Hough–ton Mifflin.

Davydov, V. V. (1990). *Type Cf Generalization In Instruction*: Soviet Studies In Mathematics Education. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Dienes, Z. P. (1961). *On Abstraction And Generalization* . Harvard Educational Review, 31, 281–301.

Dreyfus,T. (1991). *Advanced Mathematical Thinking Processes* . In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (Pp. 25–40). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). *Constructive Aspects Cf Reflective Abstraction In Advanced Mathematics* . In L. P. Steffe (Ed.) Epistemological Foundations Of Math–ematical Experience (Pp. 160–187). New York: Springer–Verlag.

English, L. D. (1992). *Problem Solving With Combinations* . Arithmetic Teacher, 40(2), 72–77.

Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity* . In D. Tall (Ed.). Advanced Math–ematical Thinking (Pp. 42–53). The Netherlands: Kluwer Academic Pub–lishers.

Frensch, P. & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving: Principles And Mechanisms* . Mahwah, Nj: Erlbaum.

Gardner, M. (1997). *The Last Recreations. New York:* Springer–Verlag.

Glaser, B & Strauss, A. (1977). *The Discovery Cf Grounded Theory* : Strategies For Qualitative Research. San Francisco, Ca: University Of California San Fran–cisco.

Glasersfeld, E.Von. (1987). *Learning As A Constructive Activity* . In C. Janvier (Ed.), Problems Of Representation In The Teaching And Learning Of Mathematics (Pp. 3–18), Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Greenes, C. (1981). *Identifying The Gifted Student In Mathematics* . Arithmetic Teacher, 28, 14–18.

Kanevsky, L. S. (1990). *Pursuing Qualitative Differences In The Flexible Use Cf A Problem Solving* Strategy By Young Children. Journal For The Education Of The Gifted,13, 115–140.

Kilpatrick, J. (1985). *A Retrospective Account Cf The Past Twenty–Five Years Cf Researchon Teaching Mathematical Problem Solving* . In E. A. Silver (Ed.) Teaching And Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives (Pp. 1–16).

Hillsdale, Nj: *Lawrence Erlbaum And Associates* .

Krutetskii, V. A. *(1976). The Psychology Cf Mathematical Abilities In School Children* .(J. Teller, Trans. And J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University Of Chicago Press.

Lester, F. K. (1985). *Methodological Considerations In Research On Mathematical Problem Solving* . In E. A. Silver (Ed.), Teaching And Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives (Pp. 41–70). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum And Associates.

Mandler, G. (1984). *Mind And Body: Psychology Cf Emotion And Stress* . New York: Norton.

National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). Principles And Standards For School Mathematics. Reston, Va: Author.

Piaget, J. (1971). *Biology And Knowledge. Edinburgh University Press* .

Piaget, J. (1975). *The Child's Conception Cf The World. Totowa* , Nj: Littlefield, Adams.

Polya, G. (1945). *How To Solve It. Princeton, Nj* : Princeton University Press.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving* . New York: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). *Learning To Think Mathematically* : Problem Solving, Metacognition, And Sense Making In Mathematics. In D.A. Grouws (Ed.). Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning (Pp. 334–368). New York: Simon And Simon Schuster.

Shapiro, S.I. (1965). *A Study Cf Pupil's Individual Characteristics In Processing Mathematical* Information. Voprosy Psikhologii, 2, 1–113.

Skemp, R. (1986). *The Psychology Cf Learning Mathematics* . Penguin Books.

Sternberg, R. J. *(1979). Human Intelligence* : Perspectives On Its Theory And Measurement. Norwood, Nj: Ablex.

ملحق أ – المسائل

المسألة الأولى

يوجد ستة أبدال لاختيار مشروب الصودا: الكولا، وكولا الحمية، والليمون، والزنجبيل، والشعير، والفراولة.

كم طالباً يجب أن يطلب الصـودا، على أن يكون لكل طالب علبة صـودا، كي نتحقق أن طالبين في الأقل، قد طلبا أحد أنواع الصودا الستة المدرجة؟

المسألة الثانية

يتناول الشـخص حبة أسـبرين واحدة في الأقل مدة ثلاثين يوماً. لنفترض أنه يتناول خمسة وأربعين حبة أسبرين طوال هذه المدة، فهل يمكن أن يتناول أربع عشرة حبة أسبرين تماماً، في تسلسل معين لأيام متتابعة؟ فسر إجابتك.

المسألة الثالثة (مقتبسة من Gardner, 1997)

اختر مجموعة (س) مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة بحيث تكون أقل من مئة.

مثلاً: اختر المجموعة $S = 3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76$

فهناك اختياران مختلفان تماماً من المجموعة (س) لهما المجموع نفسه.

مثلاً، في المجموعة (س)، يمكن أن أختار أولاً 14 و 63، ومن ثم أختار 35 و 42. لاحظ أن مجموع الاثنين يساوي سبعة وسبعين. ($14+63=77$؛ $35+42=77$).

ويمكنني أيضاً أن أختار أولاً 3 و 9 و 14، ومن ثم أختار 26. لاحظ أن مجموعهما يساوي 26 ($3+9+14=26$) و ($26=26$)

وأيّاً كانت طريقة اختيارك لمجموعة مؤلفة من عشـرة أعداد صـحيحة موجبة أقل من مئة، فسيكون لديك خياران مختلفان محتملان يعطيان المجموع نفسه.

لماذا يحدث هذا؟ برهن على أن هذا يحدث دائماً.

المسألة الرابعة

يوجد عشـرون شخصـاً في الغرفة يعرف بعضهم عدداً من هؤلاء الأشخاص، في حين لا يعـرف بعضـهم الآخر أحـداً. أثبت أنه يوجد شخصـان في الغرفة لهما العدد نفسـه من المعارف.

المسألة الخامسة (مقتبسة من Gardner، 1997)

يتألف المستطيل من صفوف وأعمدة. انظر إلى فرقة موسيقية يسير أعضاؤها على صورة مجموعة مستطيلات، بحيث تكون الصفوف (م) والأعمدة (ن)، ويمكن أن يكون (م) و (ن) أي عدد طبيعي. إذا نظرنا إلى الفرقة الموسيقية من الجانب الأيسر، يلاحظ قائد الفرقة الموسيقية أن بعض أعضاء الفرقة قصار القامة، مختلفون في النسق. يُعالَج هذا الخلل الجمالي بترتيب الموسيقيين في كل صف بحسب الطول من اليسار إلى اليمين، بحيث يكون كل واحد منهم أطول من الشخص الذي يقف عن يساره أو بالطول نفسه (من وجهة نظر قائد الفرقة الموسيقية). وعلى الرغم من ذلك، عندما يستدير قائد الفرقة الموسيقية إلى الأمام، يجد مرة أخرى أن بعض أعضاء الفرقة الموسيقية قصار القامة لا يمكن رؤيتهم؛ بسبب وقوف طوال القامة أمامهم. فيشرع عند ذلك بتغيير ترتيب الموسيقيين داخل عمودهم بحسب أطوالهم، بحيث يكون الأطول قامة في الخلف.

يتردد عند هذه النقطة، في العودة مرة أخرى إلى الجانب الأيسر؛ ليرى نتائج التعديلات التي أجراها بعناية على صفوفه المرتبة. وعلى أي حال، عندما يذهب يفاجأ أن الصفوف لا تزال مرتبة بحسب الطول من اليسار إلى اليمين. إن إعادة خلط النسق داخل الأعمدة بهذه الطريقة لا يلغي الترتيب بحسب الطول في الصفوف. فلماذا يحدث هذا؟ برهن على أن الأمر يكون هكذا دائماً.

ملحق ب – الحلول

المسألة الأولى

حل مسألة الصودا كان الأكثر وضوحاً، إذ يطلب سبعة طلاب الصودا، بحيث يكون أسوأ موقف هو طلب كل واحد من الطلاب الستة الأوائل شراب صودا مختلفاً عن الآخر، لذا، يجبر الطالب السابع على طلب مشروب طُلب سابقاً.

المسألة الثانية

تحل مسألة الأسبرين عموماً من خلال افتراض تناول الشخص حبة أسبرين واحدة على الأقل في اليوم. وبناءً عليه، يكون الشخص قد استهلك ثلاثين حبة أسبرين تماماً في غضون ثلاثين يوماً، وبذلك يبقى هناك فائض بمقدار خمس عشرة حبة يستطيع الشخص تناولها عشوائيّاً على مدار الثلاثين يوماً.

المسألة الثالثة

يمكن حل مسألة مجموع الأعداد على النحو الآتي: هناك ($2^{10} = 1,024$) مجموعة فرعية من مجموعات الأعداد الصحيحة، ولكن هناك (901) حل ممكن فقط يعبّر عن عدد الأعداد الصحيحة بين أقل مجموع وأكبر مجموع. وبوجود عدد مجموعات فرعية أكبر من المجاميع الممكنة، يوجد مجموع واحد في الأقل يقابل مجموعتين فرعيتين في الأقل. ومن هنا، يوجد دائماً اختياران مختلفان تماماً، يعطيان المجموع ذاته.

المسألة الرابعة

يمكن حل مسألة المعارف على النحو الآتي: إذا وجد شخص في الغرفة ليس له أي معارف على الإطلاق، فإن كل واحد من الأشخاص الآخرين في الغرفة يمكن أن يعرف 1 أو 2 أو 3،...أو 18 شخصاً، أو ألا يكون له معارف على الإطلاق. وبناءً عليه، لدينا 19 «حفرة أو موقعاً» معدّاً على النحو الآتي: 19 ,....,3 ,2 ,1 ,0، وعلينا بتوزيع عشرين شخصاً فيما بينها. افترض بعد ذلك، أن لكل شخص في الغرفة شخصاً يعرفه. ومرة أخرى، لدينا 19 موقعاً 19 ،....,3 ,2 ,1 وعشرين شخصاً. وهكذا، سيضطر شخصان إلى أن يكون لهما العدد نفسه من المعارف.

المسألة الخامسة

يمكن إثبات مسألة الفرقة الموسيقية بوساطة (البرهان بالتناقض). افترض أن الأعمدة جميعها قد رُتبت، ولكن يوجد هناك صف فيه الموسيقي (A) (العمود I) وضع أمام (أو إلى يسار) موسيقي قصير القامة (B) (العمود J). ولما كانت الأعمدة قد رُتبت،

بحيث يكون كل موسيقي في القطعة (X) من (A)، وإلى الخلف في العمود I على الأقل بطول (A) نفسه، وكل موسيقي في القطعة (Y) من (B) فصاعداً في العمود «J» ليس أطول من (B)، ولما كانت (A) أطول من (B)، فهذا يعني أن الأعضاء في القطعة (X) أطول من الأعضاء في القطعة (Y). والآن انظر إلى نقطة الوسط، حيث رُتبت الصفوف، وليس الأعمدة. ووصولاً إلى هذه النقطة لا بد من تحريك الموسيقيين من القطعة (C) إلى أماكنهم السابقة على امتداد العمود (I)، والعودة إلى القطعة (Y) إلى أماكنهم عبر العمود (J). ويجب توزيع الأعضاء في القطعتين (C و Y) بين الصفوف $1, 2, \ldots, m$. وبحسب مبدأ برج الحمام، سينتهي المطاف بموسيقيين اثنين في الصف نفسه، لا يمكن أن يأتيا من القطعة نفسها. لذا، فسيكون في بعض الصفوف عضو (C) من القطعة (X)، قبل العضو (D) من القطعة (Y). ولما كانت (C) أطول من (D)، فإن هذا الترتيب يخالف الترتيب التصاعدي الموجود للصفوف. وعلى هذا، تتبع النتيجة البرهان بالتناقض.