الفصل الرابع

هل الموهبة والإبداع في الرياضيات مترادفان؟

تحليل نظري لهذين المفهومين

بهارات سريرامان Bharath Sriraman

جامعة مونتانا

ملخص

يفترض المرء أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات في مرحلة الروضة وحتى الصف الثاني عشر (K-12) الذين يجري تصنيفهم بوساطة اختبارات خارج المستوى[1] (Out Of Level)، هم أيضاً طلاب مبدعون في أعمالهم. ويكوّن علماء الرياضيات «المبدعون» مجموعة فرعية صغيرة في ميدان الرياضيات التخصصية (Professional Mathematics). إذ لا تعني الموهبة في الرياضيات عند هذا المستوى الإبداع بالضرورة، ولكن مما لا شك فيه أن العكس صحيح. هل يعد مصطلحا النبوغ والإبداع مترادفين في مجال الرياضيات؟ طُوّر مفهوما الإبداع والموهبة في الرياضيات من خلال تركيب وتحليل الكتابات العامة المتعلقة بالإبداع والموهبة وتحليلها. وفي هذا الإطار يُقارن بين مفهومي الإبداع، والنبوغ في مستويات الـ(K-12)، والمستويات الاحترافية بهدف وضع مبادئ، ونماذج «تحقق أقصى قدر ممكن» من التوافق بين هذين المفهومين. وتُناقش كذلك علاقة هذه النماذج بمستوى الروضة-الصف 12، ومستويات الاحتراف مع الأخذ في الحسبان

1) يستخدم مصطلح يشير إلى ممارسة تقييم طالب باستخدام اختبار طور الطلاب في متسوى آخر (غالباً في مستوى ورأس أقل). ولكن يستخدم المصطلح انضمامه الاختبارات المتحرر ة من المستوى والتي يمكن أن تستخدم للكشف عن المواهب في اللغة والرياضيات.

الاعتبارات العملية الخاصة بغرفة الصف. ويوسع هذا البحث نطاق الأفكار التي قدّمها يوسيسكين(Usiskin, 2000) على نحوٍ كبير.

مقدمة

غالباً ما ينظر إلى الرياضيات بصفتها مجالاً مقتصراً على علماء الرياضيات المختصين. أما كلمة الإبداع، فتعد «ضبابية» وتخضع لكثير من التفسيرات. والسؤال الآن هو: ماذا يعني الإبداع في الرياضيات؟ هل هو مجرد اكتشاف نتيجة أصيلة؟ وإذا كان الأمر كذلك، فهل يصبح الإبداع عندئذٍ مجالاً مقتصراً على علماء الرياضيات المختصين؟ وهل يعدُّ اكتشاف الطلاب نتيجة أو إستراتيجية رياضية معروفة مسبقاً عملاً إبداعيّاً؟ في هذا السياق، يرى علماء رياضيات بارزون من أمثال جاك هادمرد (Jacques Hadamard, 1945) وجورج بوليا (George Polya, 1954) أن الفرق الوحيد بين عمل علماء الرياضيات والطلاب النابغين هو مجرد فرق في الدرجة. أيْ أن كلاًّ منهم يعمل بما يتوافق ومستواه، وعلينا بأن ندرك أن الطلاب قادرون على أن يكونوا مبدعين. وعموماً، فإن وجهة النظر هذه تبدو جلية لمعلمي الطلاب النابغين في الرياضيات، الذين يتوقعون من طلابهم أن يظهروا سمات الإبداع. وبعبارة أخرى، هل يعني اختيار الطلاب بصفتهم متفوقين في الرياضيات، أن يكونوا كذلك مبدعين فيها؟ وهل يعني النبوغ الرياضي الإبداع في الرياضيات؟

يرى كاجاندار (Kajander, 1990) أن الإبداع حتى بين الموهوبين في الرياضيّات الذين يظهرون سمات إبداعية كالتفكير التباعدي (Divergent Thinking)، يكون عبارة عن نوع خاص من أنواع الإبداع، ولا يمت بالضرورة للتفكير التباعدي بصلة (ص. 254). وتتضمن هذه الجملة السؤال الآتي: هل الإبداع في الرياضيات يقتضي ضمناً الموهبة. مما لا شك فيه، أن هذه الجملة صحيحة على مستوى بحوث الرياضيات، إذ بوسع المرء أن يجادل بسهولة في أن علماء الرياضيات المختصين الموهوبون، استناداً إلى حقيقة حصولهم على شهادة الدكتوراه في الحقل، وأنهم أيضاً ذوو فاعلية في مجال البحث العلمي. وعلى الرغم

من ذلك، حتى عند هذا المستوى، فإن علماء الرياضيات المختصين يصنفون حفنة صغيرة فقط من زملائهم على أنهم «مبدعون» بمعنى الكلمة (Usiskin, 2000).

قد تساعد هرمية يوسيسكين ذات المستويات الثمانية على توضيح درجات الموهبة والنبوغ فيما يتصل بعلماء الرياضيات. وقد وضع هذه الهرمية لتصنيف الموهبة الرياضية التي تتراوح بين مستوى (صفر – 7). حيث يمثل مستوى صفر (انعدام الموهبة) في هذا التسلسل الهرمي الطلاب اليافعين الذين يعرفون القليل جدّاً من الرياضيات، في حين يمثل المستوى الأول (مستوى الثقافة) اليافعين الذين لديهم معرفة أولية بالأرقام بصفتها جزءاً من الاستخدام الثقافي، وتماثل معرفتهم الرياضية معرفة طلاب الصفوف من السادس حتى التاسع. ومن الواضح أن نسبة كبيرة جدّاً من الناس العاديين تقع ضمن المستويين الأول والثاني.

وهكذا، يتوزع بقية مجتمع الموهبة في الرياضيات ضمن المستويات الثاني إلى السابع على أساس الموهبة الرياضية. ويمثل المستوى الثاني طلاب صفوف الشرف (الإحلال المتقدم) للمرحلة الثانوية القادرين على التخصص في الرياضيات الذين يصبحون في نهاية المطاف معلمي رياضيات في المرحلة الثانوية. يمثل المستوى الثالث «الطلاب الرائعين» الذين يكونون من بين من يحصلون على علامة من 750–800 في اختبار التحصيل المدرسي 1 أو الذين يأتون في المركز الرابع أو الخامس في اختبار المقررات المتقدمة (Advanced Placement AP) في التفاضل والتكامل. يتمتع هؤلاء الطلاب بقدرات القيام بعمل الخريجين المبتدئين في الرياضيات. ويمثل المستوى الرابع (الطالب الاستثنائي) الطلاب الذين يتميزون في مسابقات الرياضيات، ويقبلون في المخيمات الصيفية للعلوم/الرياضيات و/أو الكليات بسبب موهبتهم. إن هؤلاء الطلاب قادرون على بناء البرهان الرياضي ومناقشة علماء الرياضيات في الرياضيات. ويمثل المستوى الخامس علماء الرياضيات المنتجين. وعلى الرغم من أن وصف يوسيسكين لهذا المستوى غامض ومبهم، فإن المرء يستطيع أن يستدل على أنه يمثل الطلاب الذين أتموا درجة الدكتوراه في الرياضيات بنجاح، أو علوم أخرى ذات صلة بالرياضيات، وأنهم قادرون أيضاً على الكتابة والنشر في هذا الحقل. أما المستوى السادس فهو «المنطقة التي أُجيزت» أو

أُجمع عليها (The Ratified Territory) في مجال علماء الرياضيات المتميزين الذين تقدموا بمجالهم إلى الأمام بإنجازات بارزة؛ ومثل هؤلاء العلماء تجدهم في كل زمان، في مختلف المجالات التي يعملون فيها. وهؤلاء هم زملاء رجل الأعمال ألفرد سلون (Alfred P. Sloan) الذين كانوا الأفضل ضمن فئتهم العمرية في الولايات المتحدة. وأخيراً، يمثل مستوى السابع العظماء في جميع العصور؛ الفائزين بجوائز الحقل في الرياضيات 2. ويقتصر هذا المستوى على العمالقة أو العباقرة أمثال ليونارد يولر (Leonard Euler)، وكارل فريدرك جوس (Karl Friedrich Gauss)، وبيرنهارد ريمان (Bernhard Riemmann)، وسرينيفازا رامانوجان (Srinivasa Ramanuja)، وديفيد هيلبرت (David Hilbert)، وهنري بوانكريه (Henri Poincaré).

ويلاحظ أن علماء الرياضيات المختصين ظهروا في المستوى الخامس في هرمية يوسيسكين للموهبة الرياضية ذات المستويات الثمانية، في حين ظهر علماء الرياضيات المبدعون في المستويين السادس و السابع. وبناءً عليه، فإن الإبداع في الرياضيات في المجال الاحترافي يشير إلى النبوغ والموهبة الرياضية، ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً. أما الطلاب الموهبة والنبوغ في الرياضيات فقد جاؤوا في المستويين الثالث والرابع في هذا التصنيف الهرمي للموهبة الرياضية. وتتلخص النقطة التي ركز عليها يوسيسكين في أن هؤلاء الطلاب يمتلكون إمكانات التقدم عبر المجال الاحترافي (المستوى الخامس) بوجود المساندة التدريسية والوجدانية الملائمة عندما ينتقلون من مرحلة الروضةإلى الصف الثاني عشر ثم إلى الجامعة.

الدافع لهذا البحث

تشير دراسات كثيرة مثل (Gramond, 1994; Davis, 1997; Smith, 1966; Torrance, 1981)، إلى أن السمات السلوكية للأفراد المبدعين تتعارض في كثير من الأحيان مع السلوك المقبول في المدارس الرسمية. فمثلاً، عادة ما يترتب على السلوك السلبي، مثل اللامبالاة بقوانين غرفة الصف وإظهار السأم والسخرية والنشاط المفرط، إجراءات تأديبية بدلاً من التدخلات الوجدانية الملائمة. وأما الطلاب الذين يمتثلون

لقواعد السلوك، فإنهم يميلون في الأغلب إلى إخفاء قدراتهم العقلية لأسباب اجتماعية، وينظرون إلى موهبتهم الأكاديمية بصفتها مصدراً للحسد. يزخر التاريخ بكثير من الأمثلة لأشخاص مبدعين، وصفوا بالمصطلحات الدارجة بالمنتكسين (Deviants). وقد أورد بروور (Brower, 1999) ما يربو على خمسين مثالاً لكتّاب مشهورين ومبتكرين وعلماء وفنانين وممثلي مسرح ممن أودعوا السجن بسبب مخاوف المجتمع من أفكارهم القادرة على إحداث تحولات جذرية في التفكير العام.

وغالباً ما يكون التبرير الجماعي لكبت الإبداع في مستويات مرحلة الروضة إلى الصف الثاني عشر تحت غطاء فعل ما يعتقد أنه لمصلحة معظم الطلاب، والتعلل بحجة «العدالة والإنصاف»، هذا المفهوم الذي يُساء استخدامه، والتستر وراء خطط المناهج وأهداف التحصيل المدرسي وما إلى ذلك. وقد أثار إقرار قانون «عدم إهمال أي طفل» (No Child Left Behind, Nclb) تحت ستار «العدالة والإنصاف»، جدلاً كثيراً حول ما يجب فعله مع الطلاب النابغين والمبدعين في غرفة الصف. وقد بلغ هذا الجدل الحد الذي وصف فيه مارشاك (Marshak, 2003) دعوة قانون «عدم إهمال أي طفل» إلى المساءلة استناداً إلى الاختبارات المقننة لمهارات القراءة والكتابة والحساب التقليدية التي يثمّنها المجتمع الصناعي، بالخطوة العملاقة للوراء، أي إلى أربعينيات القرن الماضي. وقال أيضاً: بعيداً عن المهارات «التقليدية» الثلاث (القراءة والكتابة والحساب)، فإن هناك كثيراً من المهارات الأخرى، مثل حل المشكلات والتفكير الإبداعي، تعدُّ ضرورية للنجاح في المجتمعات العالمية في القرن الحادي والعشرين، وقد كان هناك انتقاد مستمر من جهات كثيرة، ومنها مؤسسات التعليم العالي، للقيود المبالغ فيها التي يفرضها الأكاديميون على الالتحاق بفروع الدراسة، إضافة إلى «الاتجاهات الغربية الضيقة والمتأصلة» (Crème, 2003, P. 273). ويلقى مثل هذا النقد صدى خاصّاً في عالم الرياضيات، لا سيما في مستوى مرحلة الروضة- الصف الثاني عشر، حيث نادراً ما يُشجَّع الطلاب النابغون من غير العرق الغربي، على التعبير بأساليب رياضية معقولة قد تكون مألوفة لهم من ثقافاتهم. ويُعلّمون تبني الاتجاهات الغربية بدلاً من ذلك. وخلاصة القول أن الدراسات تشير إلى أن النبوغ في الأغلب يكون مرتبطاً بالانصياع للتقاليد السائدة، في حين يُصوَّر الإبداع على أنه

سلعة مهمشة يرعاها ويغذيها بعض المعلمين، ولكنه لا يحظى بالتشجيع في العادة. وعلى أي حال، يبدو أن هناك انفصاماً بين قيمة الإبداع في مستوى الروضة–الصف الثاني عشر وقيمته في المجالات المهنية، وهذا ما يجعلنا نفكر ملياً في كيفية تلافي هذا الانقسام. وقد ناقشنا هذه القضية في الفصل الحالي تحت سؤال: ماذا عن **حل المسائل؟**

يلاحظ أن المسائل التي يعالجها علماء الرياضيات مليئة بالشكوك وعدم اليقين. وعلى الرغم من ذلك، فإنه نادراً ما تقدم غالبية مناحي المناهج الدراسية والتدريسية للطلاب وجهة النظر المفتوحة هذه عن الرياضيات. وفي الحقيقة، نادراً ما تستخدم الممارسات الصفية ومناهج الرياضيات المسائل المطروحة مفتوحة النهاية، ولا تسمح أيضاً للطلاب باستخدام مدة زمنية طويلة في التعامل مع تلك المسائل، أو التعامل معها على نحوٍ مستقل.

والجانب المشجع في هذه الأجواء، هو أن عملية حل المشكلات في دروس الرياضيات قد حظيت بتركيز زائد، منذ انطلاق المجلس الوطني لمعلمي معايير الرياضيات The Original National Council of Teachers of Mathematics Standards,) 1989) . وعلى الرغم من ذلك، وبعد مرور مدة طويلة، فقد أصبح حل المشكلات شعاراً عقائدياً وذريعة يُحتج بها كأنه الدواء الشافي لعلاج علل المناهج. ويدعم هذا القول نتائج الدراسات المتعلقة بحل المشكلات. مثلاً، وصف شوينفيلد (Schoenfeld, 1993) في دليل البحث عن تعليم الرياضيات وتعلّمها (*The Handbook For Research On Mathematics Teaching And Learning*) ، كيف أصبح حقل تعليم الرياضيات في الولايات المتحدة عرضة للتقلبات طوال عشر سنوات تقريباً، متأرجحاً بين المهارات الأساسية وحل المشكلات. وقد أعرب عن تفاؤله باستمرار الحركة التي أشار إليها كثيرون في ذلك الوقت ب «عقد حل المشكلات» في تعليم الرياضيات. وعلى الرغم من ذلك، ومنذ نشر الدليل في عام 1993، «فقد بشّر التركيز العام على الاختبارات المصيرية (High Stakes Tests) بالعودة غير المأمونة للمهارات الأساسية» (Lesh & Sriraman, 2005, P. 501) .

إضافة إلى ذلك، دعنا ننظر إلى الحقائق الآتية: حظي نمط بوليا الاستكشافي لحل مسائل الرياضيات (Polya- Style Problem Solving Heuristics) ، - **مثل ارسم صورة،**

اعكس العملية، ابحث عن مسألة مشابهة، أو حدد المعطيات والأهداف، بتاريخ طويل من المناصرة بصفة هذه القدرات مهمة لتطور الطلاب (Polya, 1945). ولكن ماذا يعني أن تفهم هذه الإستراتيجيات؟ من الواضح أن لمثل هذه الإستراتيجيات قوة وصفية. أي، غالباً ما يستخدم الخبراء مثل هذه المصطلحات عند تقديم توضيحات لسلوكهم، بعد حلهم فعلاً المسائل، أو لسلوكات الأشخاص الآخرين الذين يلاحظونهم في أثناء حلهم هذه المسائل. ولكن، هناك أدلة قليلة على أن العمليات العامة التي يستخدمها الخبراء في وصف سلوكاتهم السابقة في حل المسائل، يمكن أن تمثل وصفات لتوجيه الخطوات الآتية للمبتدئين في أثناء الجلسات المتواصلة لحل المسألة. ويوجد أيضاً لدى الباحثين الذين يجمعون البيانات عن حل المسائل، نزعة طبيعية للتدقيق في البيانات المتوافرة لهم من منظور نماذج بدهية لحل المسائل. وعلى الرغم من القيمة الكبيرة لمثل هذه الطريقة، فإننا نتساءل: هل يزيد هذا المنحى فعلاً من تقدم بحوث حل المسائل؟ وإذا ما تفحص المرء تاريخ بحوث حل المسائل، فقد مرت مناسبات مهمة جدّاً أدرك فيها الباحثون وجهة النظر الاستكشافية (Heuristic View) المقيدة لحل المسائل التي توفرها الأدوات الحالية لبحوث حل المسائل، ونجحوا في إعادة تصميم النماذج القائمة بعمليات أكثر وصفاً. وعلى الرغم من ذلك، تبقى لدينا مشكلة وهي أن العمليات الوصفية أشبه ما تكون بمسميات لفئات كبيرة من المهارات أكثر من كونها مهارات بحد ذاتها. وبناءً عليه، ففي محاولات الذهاب إلى ما وراء «القوة الوصفية» (Prescriptive Power) لتحويل هذه العمليات إلى «قوة توجيهية» أكبر (Prescriptive Power)، فقد عمد الباحثون والمعلمون إلى وسيلة تقوم على تحويل كل «عملية وصفية» إلى قائمة أكبر من العمليات الأكثر تقييداً، ولكنها في الوقت ذاته أكثر وضوحاً. وعلى الرغم من ذلك، فإذا ما اعتُمد هذا المنحى، فإن معظم ما يعنيه فهم هذه العمليات سوف يشتمل على معرفة وقت استخدامها. لذا، فلا بد من إدخال قوانين الترتيب الأعلى (Higher Order) ومبادئه الإدارية التي تحدد متى وكيف ستستخدم عمليات الترتيب الأدنى (Lower Order) التوصيفية.

إن المعضلة الواضحة التي تبرز في هذه القوائم القصيرة للعمليات الوصفية، هي أنها بدت عامة جدّاً لتكون ذات معنى. ومن جهة أخرى، تميل القوائم الطويلة للعمليات التوجيهية

إلى التعدد، بحيث تصبح معروفة وقت استخدامها من خلال فهمنا لها. وزيادة على ذلك، فإن إضافة المزيد من القوانين والمعتقدات فوق المعرفية يؤدي فقط إلى مضاعفة هاتين الصعوبتين الأساسيتين. وبعد مرور هذه المدة الطويلة على نشر كتاب شونفيلد، أفاد ليستر وكيلي (Lester & Kehle (2003، في مراجعة واسعة أخرى للدراسات، بوجود تقدم ضئيل في بحوث حل المشكلات، وقالا إن ما يمكن أن يقدمه منحى حل المشكلات للمدارس لا يزال قليلاً. أي أن على حقل تعليم الرياضيات أن يذهب إلى «ما هو أبعد من تسلسل خطوات العملية والوثائق المرمّزة» في منهجيات وطرائق البحوث، و«نماذج الأداء الحاسوبية البسيطة القائمة على الإجراء» لتطوير طرائق لوصف حل المسألة، من حيث النظم المفاهيمية التي تؤثر في أداء الطلاب (Silver, 1985, P. 257). وهكذا، فإن استخدام حل المسألة في غرفة الصف يثير تساؤلات كثيرة عن هدفه وفعاليته.

الإبداع في الرياضيات: ندرة التعريفات المحددة بالمجال في الرياضيات

بعد هذه المقدمة عن الموهبة والإبداع ومدلولاتهما في المجتمع، سوف نركز اهتمامنا بصورة أكثر تحديداً وعمقاً على مجال الرياضيات؛ بهدف إيجاد تعريفات مناسبة لهذين المصطلحين. لقد استخدمنا الدراسات الموجودة في استقصاء المعاني الكثيرة، وتحديد ملاءمتها وعلاقتها بمستوى مرحلة الروضة- الصف 12 ومستوى المختصين. تتسم معظم التعريفات الحالية للإبداع في الرياضيات الموجودة في مؤلفات الرياضيات وكتب تدريسها، بأنها ضبابية أو مربكة ومحيرة. وربما يعود سبب وجود هذا الغموض إلى صعوبة وصف هذا المفهوم المعقد. فمثلاً، عُرِّف الإبداع في الرياضيات عبر استخدام مجازات متنوعة، مثل القدرة على التمييز والاختيار، والتمييز بين الأنماط المقبولة وغير المقبولة، والانهماك في اتخاذ قرار بطريقة لاخوارزمية (Non-Algorithmic). وأن الدراسات المتعلقة بالطلاب المبدعين رياضيّاً في مرحلة الروضة-الصف 12 يكتنفها أيضاً الغموض والضبابية. لقد ارتبطت القدرة الرياضية الاستثنائية في هذه المرحلة (مستوى 4 للموهبة) بمتلازمة آينشتاين the Einstein syndrome، ومتلازمة أسبيرجر The Asperger Syndrome. تتميز متلازمة آينشتاين بالقدرة الرياضية الاستثنائية مع تأخر في تطور النطق، في حين

توصـف متلازمة أسـبيرجر بأنها اضطراب الطيف الذي يمتاز «بضـعف شديد في التفاعل الاجتماعـي المتبادل، والانغماس في اهتمامات ضـيقة أو الهوس بموضـوع معيّن...وأحياناً انعدام الرشاقة/ عدم الاتزان الحركي» (Clumsiness James, 2003, P. 62). وتستدعي قلـة التعريفات المحددة للإبداع في الرياضـيات في مؤلفات الرياضـيات وكتب تدريسـها، الابتعـاد عـن الرياضـيات المحددة بالمجـال إلى الكتابـات العامة عن الإبـداع بهدف بناء تعريف ملائم.

الإبداع: تعريفات عامة في علم النفس/علم النفس التربوي

يمكـن العثـور علـى كثير مـن التعريفات فـي الكتابات العامـة. فقد اسـتخدم كرافت (Craft, 2002) مصـطلح «إبـداع الحياة الواسـعة» (Life Wide Creativity) في وصـف السـياقات المتعددة للحياة اليومية التي تتجلى فيها ظاهرة الإبداع. في حين وصـف باحثون آخرون الإبداع على أنه اسـتجابة «البقاء أو التكيـف» (Survival Or Adaptive) الطبيعية للبشـر فـي بيئة دائمة التغير. وأشـار كرافت إلى ضـرورة التمييز بين الإبـداع اليومي، مثل ارتجال وصـفه من «الإبداع الاسـتثنائي» الذي يؤدي إلى تحولات جذرية في جسـم المعرفة فـي مجال محـدد. ومن المقبول عمومـاً أن أعمال «الإبداع الاسـتثنائي» يمكن الحكم عليها فقط من خبراء ضـمن مجال المعرفة المحدد. فمثلاً، يمكن الحكم على برهان أندرو وايلز (Andrew Wiles) لنظريـة فيرمات الأخيـرة (Last Theorem) من عدد قليل من علماء الرياضيات ضمن مجال فرعي محدد جدّاً لنظرية الأعداد (Number Theory)[1].

---

1) تقـول نظريـة الأعـداد Number Theory إنــه لا توجد ثلاثة أعداد صـحيحة موجبـة، A, B, C And، تحقق المعادلـة $an + bn = cn$، حيث n أكبر أو تسـاوي 2. فـي عـام 1637، اعتقد الفرنسـي بيير فيرمات (Pierre De Fermat) أنه حصـل على برهان، وذكر ذلك في تعليق علـى كتاب ديوفاتيس عالم الرياضـيات الذي عاش في مدينة الإسـكندرية في العام 250 ق.م، لكنه قال إنه لا يستطيع أن يكتب البرهان لضيق الهامش. وبعد ذلك مات فيرمات وسميت هذه النظرية بنظرية فيرمات الأخيرة. حاول أعظم رياضيي العالم برهان نظرية فيرمات بلا جدوى، وهكذا ظلت تلك المسألة دون حل أكثر من 350 عاماً. وفي نهاية المطاف، جاء عالم الرياضـيات الإنجليزي أندرو وايلز (Andrew Wiles) الذي جعل حلم حياته حل نظرية فيرمات، حيث قضـى سبع سنوات في حلها، وأعلن ذلك في عام 1993، لكن جاء من اكتشف وجود خطأ في البرهان، مما اضطره إلى قضاء عام آخر لتصحيح هذا الخطأ- المراجع

ويمكن للمرء أن يجد، على نحوٍ أكثر تحديداً، في مجال علم النفس التربوي عدداً من التعريفات للإبداع. مثلاً، ارتأى ويسبيرج (Weisberg, 1993) أن الإبداع يقتضي استخدام عمليات المعرفة العادية والنتائج في النتاجات الأصيلة غير العادية. وزيادة على ذلك، عرّف ستيرنبيرج ولوبارت (Sternberg & Lubart, 2000) الإبداع أنه القدرة على إنتاج عمل أصيل غير متوقع، يكون مفيداً وسهل التكيف. في حين تفرض تعريفات أخرى متطلب التجديد أو الابتكار أو الشذوذ والغرابة (Novelty, Innovation Or Unusualness) في الإجابة عن أي مسألة (Torrance, 1974). وعرّف كثير من نظريات التجميع (Confluence Theory) الإبداع على أنه التقاء المعرفة والقدرة وأسلوب التفكير والمتغيرات الدافعية والبيئية، وتطور أفكار المجال المحدد التي ينجم عنها منه نتاجات إبداعية. مثلاً، ارتأى شيكزنتميهالي (Csikszentmihalyi 2000) أن الإبداع أحد الطفرات التي تنجم عن التفاعل المناسب بين الفرد والمجال والحقل. وأخيراً، قدم بلاكر وبيغيتو (Plucker And Beghetto, 2004) تعريفاً تجريبيّاً للإبداع استناداً إلى نتائج مجموعة من الدراسات التجريبية في الحقل، حيث عرّفا الإبداع بصفته «تفاعلاً بين القدرة والعمليات التي يستطيع الفرد أو الجماعة من خلالها تقديم مُخرج أو منتج يتميز بالجدة والفائدة، على نحو ما هو محدد ضمن بعض السياقات الاجتماعية» (ص. 156).

تطبيق التعريفات العامة للإبداع على الرياضيات

لا يتوقع المرء عادة عملاً إبداعيّاً غير عادي على مستوى مرحلة الروضة–الصف 12. وعلى الرغم من ذلك، فمن الممكن أن يقدم الطلاب رؤى جديدة في مسألة رياضيات، أو تفسيراً جديداً أو تعليقاً أو شرحاً لدراسة أو عمل تاريخي. ومما لا شك فيه أن الطالب في هذا المستوى يكون قادراً على الإتيان بشيء أصيل. ويمكن أن يؤدي تركيب التعريفات المتعددة للإبداع إلى تعريف عملي للإبداع في الرياضيات في كلا المستويين– المختصين ومستوى مرحلة الروضة–الصف 12. ويمكن أن يعرّف الإبداع في الرياضيات على المستوى

الاحترافي ب (أ) القدرة على إنتاج عمل أصيل يوسع المعرفة على نحوٍ كبير و/أو (ب) ذلك الذي يفتح الطريق لأسئلة جديدة لعلماء الرياضيات الآخرين.

مثلاً، قاد بحث هويت (Hewitt, 1984) عن حلقات الدوال المتصلة إلى احتمالات وأسئلة جديدة غير مكتشفة في حقل التحليل وعلم المكان «الطوبولوجيا» (Topology)، وتناولها علماء الرياضيات الآخرون عقوداً عدة. وخير إيضاح معاصر على تأثيرات بحث هويت بعيدة المدى، هي أن تبحث عن عنوان البحث على «جوجل» لترى أن ما يزيد على مئة وعشرين ألف مشاهد يبحثون عنه.

ومن جانب آخر، يمكن أن يعرّف الإبداع في الرياضيات على مستوى مرحلة الروضة-الصف 12 أنه: (أ) العملية التي ينجم عنها شيء جديد غير عادي، و/أو حل/حلول مذهلة لمسألة ما أو مسائل مشابهة و/أو (ب) صياغة أسئلة جديدة، و/أو احتمالات تتيح النظر في مسألة قديمة من زاوية جديدة تتطلب التخيل والتصور (Einstein & Inheld, 1938; Kuhn, 1962). ويلاحظ أن الجزء الثاني يشبه تعريفات الإبداع في الرياضيات الاحترافية إلى حدٍّ بعيد.

وتشير البحوث أيضاً إلى أن الأفراد المبدعين في المستويين الاحترافي ومستوى مرحلة الروضة-الصف 12 يميلون إلى إعادة صياغة المسألة أو البحث عن مسألة مشابهة. وأنهم أيضاً يختلفون عن أقرانهم من حيث كونهم مفكرين مستقلين إلى حدٍّ بعيد، وميالين إلى المثابرة، والتأمل كثيراً.

الظروف التي تعزز الإبداع في الرياضيات على المستوى الاحترافي

بعد أن أصبح لدينا تعريفات عملية للإبداع في الرياضيات، فمن الطبيعي أن نستكشف الظروف التي يظهر فيها الإبداع. ولتوضيح الظروف التي تعزز ظهور الإبداع على الصعيد الاحترافي، أجرى سريرامان (C Sriraman, 2004) دراسة نوعية مع خمسة من علماء الرياضيات المختصين المبدعين المشهورين، هدفت إلى التوصل

إلى فهم أفضل للظروف التي بموجبها يظهر الإبداع في الرياضيات. تحدّث علماء الرياضيات الخمسة عن عمليات التفكير المتضمنة في ابتكار الرياضيات. وأشارت النتائج إلى أن العملية الإبداعية لعلماء الرياضيات قد اتبعت بصورة عامة نموذج الجشتالت ذا المراحل الأربع المتمثلة في الإعداد والحضانة والإشراق والتحقق *preparation–incubation–illuminationverıfication*. وتبيَّن أيضاً أن عمليات التفاعل الاجتماعي والتصور والاستدلال والحدس كانت من بين خصائص الإبداع في الرياضيات. ومن الخصائص الأخرى التي أسهمت في إنتاج بحثهم، إتاحة الوقت لهم في الكليات لمتابعة البحوث وحرية الحركة والإغراء الجمالي للرياضيات، إضافة إلى الحافز على حل المسائل وما يترتب عليه من نتائج هائلة في عالم الواقع. وقد تحدث علماء الرياضيات الخمسة جميعهم مطولاً حول لحظة «أها» أو «وجدتها» (Eureka)، التي منحتهم رؤية جديدة للمسألة قادتهم إلى بناء البرهان بنجاح.

النبوغ الرياضي

كشفت دراسة تركيبية لأدبيات البحوث عن النبوغ الرياضي وسمات التفكير الرياضي أن الباحثين عرّفوا مفهوم الموهبة الرياضية من حيث قدرة الفرد في العمليات الرياضية مثل: (أ) القدرة على استخلاص البنى الرياضية وتعميمها وفهمها؛ (ب) القدرة على إدارة البيانات؛ (ج) القدرة على إتقان مبادئ التفكير المنطقي والاستنتاج؛ (د) القدرة على التفكير القياسي والتجريبي، ومناقشة المسائل ذات الصلة؛ (هـ) المرونة والقدرة على قلب العمليات والأفكار الرياضية ؛ (و) المعرفة البدهية بالبرهان الرياضي؛ (ز) القدرة على اكتشاف المبادئ الرياضية على نحوٍ متسق؛ (ح) القدرة على اتخاذ قرارات في مواقف حل المسائل؛ (ط) القدرة على تصور المسائل أو العلاقات أو كلّ منها؛ (ي) القدرة على استنتاج السلوك الذي يستخدم لفحص صحة البنية الرياضية أو بطلانها؛ (ك) القدرة على التمييز بين المبادئ التجريبية والنظرية؛ و (ل) القدرة على التفكير المعاود أو المتردد (Recursive Thinking)

إضافة إلى ذلك، ارتبط النبوغ على الدوام بالقدرة على التعلم بوتيرة أسرع (Chang, 1985; Heid, 1983). تعد معظم العمليات الرياضية المدرجة أعلاه ذات سمة معرفية، وتُدرس في أثناء مرحلة الروضة-الصف 12. وتجدر ملاحظة أن كثيراً من هذه الدراسات تشتمل على أدوات مستندة إلى مهمة تحديد المفاهيم/ الأفكار الرياضية التي تعرض لها الطالب بعض الشيء. وهناك ملاحظة أخرى لا تقل أهمية عن سابقتها، وهي أنه على الرغم من أن كثيراً من هذه السمات تؤدي دوراً مهمّاً، وتعد أيضاً ضرورية في الرياضيات الاحترافية، فإنها ليست كافية لإظهار الإبداع جليّاً. وبعبارة أخرى، كي تؤدي دور عالم رياضيات محترف (المستوى 5)، وتبتكر رياضيات جديدة، فإن هناك قدرات أكثر أهمية من غيرها. وعند اتخاذ القرارات المحددة، تؤدي القدرة على التجريد والتعميم والاستدلال وبناء المبادئ النظرية والتفكير المعاود دوراً مهمّاً في ابتكار الرياضيات على المستوى الاحترافي. وتؤدي أيضاً عمليات الاستدلال، وبناء المبادئ النظرية، والتفكير التكراري دوراً حيوياً في كيفية ابتكار الرياضيات الجديدة. ويمكن تصوير هذه العملية ببساطة على النحو الآتي: يحاول عالم الرياضيات التطبيقي أن يبتدع نماذج رياضية تحاكي العالم الفعلي، في حين يميل عالم الرياضيات البحتة إلى استخدام هذه النماذج ليرى تأثيراتها. وفي أثناء عملية النمذجة، تواجه عالم الرياضيات التطبيقي بعض الأوضاع المادية، فيحاول تحديد المبادئ الأساسية، في حين يتراجع عالم الرياضيات إلى الوراء، ويستخلصها ليحصل على وضع تدوم فيه هذه المبادئ الأساسية، ويرى الآثار المترتبة على ذلك. ويعمل عالم الرياضيات البحتة الذي يتعامل مع الآثار بطريقة رسمية؛ ليتبين ما ينطبق منطقيّاً على هذه المجموعة المعينة من الفرضيات، دون أن يلقي بالاً أيكون هذا النموذج مناسباً أم لا.

حاول واسون وجونسون- ليرد معرفة هل يكون الشباب اليافعون قادرين على تقدير التبعات المنطقية عند إعطائهم مجموعة من الافتراضات. وقد اهتم الباحثان على وجه الخصوص بتحديد السياقات التي قادت اليافعين 3 إلى التوصل إلى استنتاجات مضللة. ووفقاً لرأي واسون وجونسون- ليرد، فإن الفرد الراشد (The Rational Individual) هو القادر فقط على عمل استدلالات؛ وقد لا يكون راشداً بأي معنى آخر للكلمة (ص. 2). ونظراً إلى أن عملية الاستدلال يمكن أن تقود إلى تعميمات رياضية (Mathematical

Generalizations)، فقــد درســ الباحثــان كيفية اكتشــاف الراشــدين القوانيــن العامة، بإعطائهــم تجــارب منظمة تحتوي على فرضــية، وطلبــا إليهم أن يقرروا عناصــر البرهان ذات الصــلة باختبــار هــذه الحقيقــة. وهكــذا، فقــد استقصــى الباحثان طريقة اكتشــاف الراشــدين القوانيــن، بوضــع تجــارب بنيويــة يصــار بموجبهــا إلــى «عرض الموضــوعات بفرضــية، وعليهــم أن يقرروا بنــود الأدلة ذات الصــلة باختبار هذه الحقيقة. لقد صُــممت التجارب لاستقصــاء ميل الأفراد إلى تقديم حلول غير متســرعة اســتناداً إلى دليل مطابق» (صــ. 202). وتوصــل الباحثان إلى كثير مــن النتائج المثيرة. أولها، ميــل أفراد العينة إلى التوصــل إلى اســتدلالات مضــللة عند تقديمها مــع عبارت توكيديــة مثبتة. ونتيجــة أخرى، تمثلــت فــي أن معظم أفراد الدراســة كانــوا ميّالين إلــى محاولة تحقق التعميمــات بدلاً من محاولــة إثبــات بطلانها. وزيــادة على ذلك، فقــد لاحظ الباحثــان أن محتوى المــواد التي أُجــري عليها الاســتدلالات، كان مهمّاً. حيث عمد أفراد الدراســة إلــى إجراء تحويلات غير مشــروعة (Illicit Conversions)، وكانوا متحيزين إلى التحقق عند مصــادفة مادة ذات طبيعة مجردة، مثل المســائل الرياضــية حول فضــاء عدد أبعــاده «ن» (N-Dimentional Space) الــذي يمكــن تمثيلــه بالرموز فقــط. وعلى الرغم مــن ذلك، عندما كانــت المادة ملموســة، وتوصــل أفراد الدراســة إلى تحديد روابــط متنوعة بينها، فقد عمــدوا إلى إيجاد روابط فرضــية بين الحقائق ثم قياســها. وبعبارة أخرى، يختلف سلوك الاستدلال الرياضي عن سلوك الاستدلال اليومي العادي، وأن الأفراد النابغون في الرياضيات ماهرون في الربط المنطقي الصــحيح بيــن الأفكار المجردة بطريقــة مختلفة عن الأفــكار اليومية. وقد درس فيجوتســكي (Vygotsky, 1962, 1978) هذا التمييز بين المفاهيم اليومية (أو التجريبية) المجردة (أو النظرية) في بحثه الاستقصــائي حول تكوين المفاهيم، وتابع أيضاً دافيدوف (Davydov, 1988, 1990) هذا الموضوع لاحقاً.

استكشــف فيجوتســكي في البداية مفهوم التعميمــات العلمية في أثناء تقصــيه كيفية تكويــن المفهــوم، وميز بيــن نوعين مــن المفاهيم، وأعنــي المفاهيــم العفويــة أو اليومية، والمفاهيــم العلمية والنظرية. أما دافيدوف (Davydov, 1988)، الذي واصــل هذا البحث في تكويــن المفاهيم، فأكد أن الفرق المهم بين المفاهيــم اليومية (التجريبية) والمفاهيم

النظريــة يتمثل في طريقة تكوينها. وفقاً لرأي دافيدوف، يتمثل الفرق بين المفاهيم اليومية والمفاهيم النظرية أيضــاً في نــوع التجريد الذي يتعامل معه المــرء؛ أي التجريد التجريبي مقابل التجريد النظري، إذ يشتمل الأول على مقارنات سطحية لفهم أوجه الشبه والاختلاف، في حين يشتمل الآخر على مقارنات بنيوية. وهكذا، تتطلب التعميمات التجريبية استخلاص أوجه الشــبه بين مجموعة من الأشــياء التي قد تمثل بذاتها وظائف وبنى متفاوتة. وقد ذكر دافيدوف، مثلاً، أن مفهوم الاســتدارة(Roundness) يمكن استخلاصه من مفهوم الطبق (Dish) أو العجلة (Wheel) وهلّم جرّا. وعلى الرغم من ذلك، لا يُظهر مفهوم الاســتدارة المحتوى الموضــوعي الفعلي الــذي يمثل مركز النقاط على بعد مســافة محددة من النقطة الثابتــة. ولا يكون هذا المحتوى واضــحاً من مجرد شــكل الاســتدارة ومظهرهــا. وقد ادعى دافيدوف أن اســتثمار التعميم التجريبي المفيد فقط في تكوين المفاهيم اليومية غير كافٍ لصياغة التعميمات النظرية التي تميز الرياضيات. وبعيداً عن سلوك الاستدلال في الأوضاع النظرية، فإن التفكير الرياضــي يتميز أيضــاً ب «التفكير المعاود» وهو مصطلح استعير من عمليات معالجة البيانات الحاسوبية.

ووفقاً لرأي فاتايل (Vatile, 1989) ، تُعد المعاودة النموذج الذي عالج البشر بموجبه المســائل. ويقول كيرين وبيري (Kieren And Pirie, 1991) إن التفكير المعاود عبارة عن مجــاز ملائــم» للتدقيق في الظاهرة المعقدة كليّاً من منظور معرفة الشــخص للرياضــيات وفهمــه لها». (صــ. 79) . وقد دعم المؤلفان هــذا الادعاء بإثبات أنه يوجد في مســار حياة الأطفال ذوي المرجعية الذاتية عدد من «الاحتمالات السلوكية». وبناءً عليه، لما كان الأطفال ذوي مرجعيــة ذاتية، فإن المعاودة في الطبيعة تُعد إحدى وســائل المعرفة لديهم، إذ تتكوّن معرفتهم من خلال «الأفعال الفكرية التي تقتضــي أن تكــون المدخلات نتائج أفعال التفكير السابقة» (ص. 79) . ونظراً إلى أن الأطفال ذوو مرجعية ذاتية، فإن إحدى الوسائل المعرفية الرئيسة لديهم تكرارية بطبيعتها، وتتكوّن معرفتهم «من خلال الأفعال الفكرية التي تقتضي اســتخدام نتائج أفعال التفكير السابقة بصفتها مدخلات» (ص. 79) . ويرتبط هذا الجانب المعرفي بالرياضــيات بصــورة خاصــة؛ لأن بناء المعرفة والفهم الرياضــيين عملية حيوية ترتبــط فيها معرفة المرء الحالية والفهم المبني عليها بالمعرفة الســابقة. وقد حلّل كيرين

وبيري المعاودة في أفعال الطلاب وأفكارهم في خبرة حل المشكلات. وقد طرحا «مسألة المصافحة» المشهورة: «كم عدد المصافحات المطلوبة في صف عدد طلابه خمسة وثلاثون طالباً، بحيث يصافح كل شخص في الغرفة كل شخص مرة واحدة فقط؟»

إحدى إستراتيجيات الحل التي استخدمتها إحدى المجموعات تمثلت أولاً في تخصيص المسألة التي تشمل ثلاثين شخصاً إلى مسألة تشمل المجموعة كلها. وابتكر الطلاب إستراتيجية بحيث يوضع الأشخاص في صفوف، ويصافح الشخص الأبعد عن الباب بقية الاشخاص جميعاً، ويبلغ آخر شخص يصافحه بعدد المصافحات، وبعد ذلك يغادر الغرفة. ثم يكرر الشخص الثاني الأبعد عن الباب العملية نفسها، ويغادر الغرفة، وبعد تكرارات عدة، يجمع آخر شخص عدد المصافحات؛ أي: 1 +.....+ 32 + 33 + 34، ويغادر الغرفة. لاحظ أنه يمكن تعميم الحل السابق بسهولة لحالة واحدة على أشخاص عددهم «ن» . وتتمثل إحدى نتائج هذه الدراسة في عدم اكتراث معظم الطلاب بحساب الحل لخمسة وثلاثين شخصاً، حيث إنهم ابتكروا إستراتيجية ناجحة لهذا الغرض.

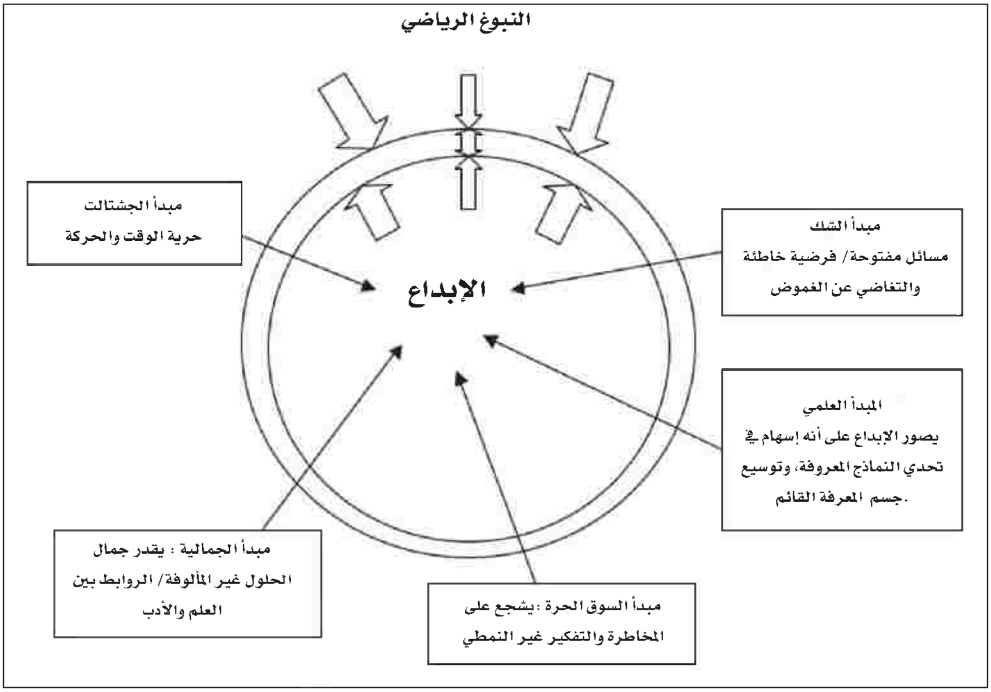
وتدل حقيقة أن المسألة لم تُحل بأي صورة، على أن الطلاب ارتأوا أن حلها لا يختزل إلى إجابة أو نتيجة حالة خاصة، بل «يتطلب» بنية تلك الحالة الخاصة أو يستخدمها. وتحوي «بنية» هذه الحالة الخاصة فكرة رياضية جوهرية صحيحة (سلسلة مصافحات غير متكررة)، إضافة إلى شكل يمكن وصفها إجرائيّاً من خلاله.

تصور الباحثان هذه البنية المعاودة بيانيّاً بصفتها مثلثاً من الأنشطة، يشتمل على التخصيص وإيجاد النتائج، ومن ثم التعميم من خلال التفسير وتحقق الصدق. وتعد عملية التخصيص لحالات معينة والتخمين، ومن ثم التعميم بوساطة التفسير، وتحقق الصدق، سمة شائعة بين الطلاب النابغين في الرياضيات. وتظهر هذه العملية أيضاً أوجه الشبه بخصوص كيفية تفسير علماء الرياضيات المختصين النتائج في حقلهم ونقلها (Sriraman, 2004c).

مناقشة للصفوف من الروضة حتى الصف الثاني عشر: الآثار والتوصيات

توضح المناقشات السابقة أنه على الرغم من امتلاك الطلاب النابغين في الرياضيات الخصائص المعرفية المطلوبة للعمل على المستوى الاحترافي، فإن بعض السمات المعرفية تعدُّ أكثر أهمية من غيرها. ويقتضي هذا الهرم استخدام مسائل تستدعي استخدام مستوى عالٍ من الاستدلال وابتكار/اكتشاف المبادئ والتفكير المعاود.

وتشير مناقشة الإبداع في الرياضيات إلى أن كثيراً من خصائصه التي يصفها علماء الرياضيات بصفتها جوانب ذات قيمة كبيرة في مهنتهم، مثل حرية اختيار المسائل ومتابعتها في وضع تعليمي، وحرية الحركة المطلوبة في أثناء العمل، ومعرفة الفرق بين التعلم والإبداع، والإغراء الجمالي للرياضيات وفاعلية التحرك نحو حل مسائل ذات آثار عالمية هائلة، قد تكون على درجة عالية من الصعوبة لتحاكي غرفة الصف التقليدية. ويوضح الشكل(1:4) نموذجاً يشتمل على استخدام المبادئ الخمسة لتحقيق أقصى قدر ممكن من الإبداع بين النابغين في الرياضيات في مستوى الصف الثاني عشر. لقد لخصت خمسة مبادئ عامة مستمدة من الدراسات حول الإبداع في الرياضيات التي يمكن تطبيقها في غرفة الصف يوميّاً لزيادة إمكانية تفتّح الإبداع في الرياضيات في غرفة الصف.



شكل 1:4 تناغم الإبداع والنبوغ في مستوى الصف الثاني عشر

المبادئ الخمسة الشاملة للارتقاء بالإبداع

كما هو واضح من الشكل 1:4، فقد سُمّيت المبادئ الخمسة الشاملة التي برزت من تركيب دراسات تعزيز الإبداع في الرياضيات وتحليلها، على النحو الآتي: (أ) مبدأ الجشتالت، (ب) المبدأ الجمالي، (ت) مبدأ السوق الحرة، (ث) المبدأ العلمي، (ج) مبدأ الشك.

مبدأ الجشتالت (The Gestalt Principle): صور عالما الرياضيات البارزان هادمرد (Hadamard) وبوانكريه (Poincaré) الإبداع على أنه عملية يجري فيها عالم الرياضيات خيارات بين الأسئلة التي تقود إلى الفائدة مقارنة بتلك التي لا تقود إلى جديد. لقد تأثر هذان العالمان بعلم نفس الجشتالت في زمانهما، ووصفا الإبداع في الرياضيات بصفته عملية تتكون من أربع مراحل، هي: الإعداد، والحضانة، والإشراق، والتحقق (Wallas, 1926). وعلى الرغم من أن علماء النفس انتقدوا نموذج الجشتالت في الإبداع؛

لأنه يعزو جزءاً واسعاً من الإبداع «المجهول» إلى محركات اللاشعور في أثناء مرحلة الحضانة، فإن كثيراً من الدراسات التي أجراها علماء الرياضيات أكدت على الدوام صحة هذا النموذج (Burton, 1999A, 1999B; Davis & Hersh, 1981; Shaw, 1994; Sriraman, 2004c). وقد ظهر في هذه الدراسات جميعها، أن الفرد بعد أن يتناول حل المسألة مدة من الوقت (الإعداد) دون حدوث أي انفراج، فإنه يطرح المسألة جانباً ويبدأ بالتفكير في مسألة أخرى، فتقود مدة الحضانة هذه إلى رؤية حل المسألة، ثم إلى لحظة «وجدتها! أو أها!» أو «اليوريكا» من الإشراق. ولا شك في أن جل الناس قد مروا بهذه اللحظة السحرية. وعلى الرغم من قيمة مفهوم الجشتالت القديم هذا، فإنه يعاني الإهمال والتجاهل في غرفة الصف. وقد اكتشف كروتتسكي (Krutetskii, 1976) أن الأطفال النابغين في الرياضيات، قد مروا ببهجة الفرح الناجم عن الاكتشاف؛ هذا الفرح «الذي» يشتمل على شعور بالرضا من معرفة الصعاب التي تُغلّب عليها، وأن جهود المرء نفسها قد حققت الهدف (ص. 347). وهذا يقتضي أن يشجع المعلمون الطلاب النابغين في الرياضيات على التعامل مع مسائل ذات صعوبة ملائمة على مدار مدة ممتدة من الوقت، وبذلك يوجدون فرص اكتشاف الرؤية، والبصيرة والمرور بخبرة نشوة لحظة اليوريكا.

المبدأ الجمالي (The Aesthetic Principle): غالباً ما تحدّث علماء الرياضيات عن الإغراء الجمالي لوضع نظرية «جميلة» تجمع الأفكار المتباينة بعضها مع بعض، أو تربط بين الأفكار من مجالات الرياضيات المختلفة، أو تستخدم أسلوب إثبات غير نمطي (Birkhoff, 1956, 1969; Dreyfus & Eisenburg, 1986; Hardy, 1940). وتعدُّ نظرية ويدربيرن (Wedderburn Theorem)، التي تعدُّ حلقة القسمة المنتهية مثالاً على توحيد أفكار عشوائية؛ لأن البرهان يشتمل على الجبر والتحليل المركب ونظرية الأعداد. وإن حجة كانتور (Cantor) أيضاً المتعلقة بلا معدودية مجموعة من الأرقام الحقيقية، غالباً ما يستشهد بها بصفتها مثالاً لأسلوب الإثبات الرياضي الذكي وغير النمطي. وقد شبّه عالم الرياضيات الإنجليزي المشهور هاردي (G.H. Hardy, 1940) عالم الرياضيات المحترف بالفنان، فهو كالفنان صانع أنماط في عالم الأفكار المجردة. ومما قاله:

«إن عالم الرياضيات كالرسام أو الشاعر، فهو صانع أنماط. وإذا ما كانت أنماطه أكثر ديمومة من أنماطهم، فمرد ذلك إلى أنها مصنوعة من الأفكار...يجب أن تكون أنماط عالم الرياضيات، كأنماط الرسام أو الشاعر، جميلة؛ ويجب أن تتناغم الأفكار كالألوان أو الكلمات بعضها مع بعض. الاختبار الأول هو الجمال: لا مكان للرياضيات البشعة في العالم». (P.13)

أظهرت الدراسات الحديثة التي أجريت في أستراليا وألمانيا على طلاب المرحلتين المتوسطة والثانوية، أن الطلاب كانوا قادرين على تقدير «الجمال» في الحلول البسيطة للمسألة الرياضية المعقدة، إذ وجد برنكمان (Brinkmann, 2004) أن ذوي التحصيل المتدني أيضاً يقدرون الكفاح من أجل التوصل إلى الرؤية التي تفتح باب الحل للغز الرياضي. وارتأى بارنز (Barnes, 2000) أن اختيار المعلم مسألة من واقع الحياة، و«الإخراج المسرحي» الدقيق للحظة الاكتشاف، يُعدّان عنصرين حاسمين في نقل صورة محببة للرياضيات إلى غرفة الصف.

مبدأ السوق الحرة (The Free Market Principle): يخاطر علماء الرياضيات المختصون كثيراً عندما يعلنون إثباتاً لمسألة رياضية طال حلها كثيراً، إذ غالباً ما يضع علماء الرياضيات سمعتهم على المحك إذا ما اكتُشف خلل ما في برهانهم. مثلاً، تعرّض إعلان لويس دي برانغيس (Louis De Brangs) لبرهان فرضية ريمان (Riemann) لتفحص دقيق من الخبراء[4]. وقد قاد هذا الأمر لاحقاً إلى تجاهل ادعائه للبرهان اللامع لحدسية بيبرباخ (Bieberbach Conjecture). وقد انتبه مجتمع الرياضيات في الغرب لبرهان لويس لتخمين بيبرباخ فقط، عندما دعمت مجموعة مشهورة من علماء الرياضيات في الاتحاد السوفييتي برهانه. وفي الجانب المقابل، تقبّل مجتمع الرياضيات ادعاءات رامانوجان (Ramanujan) البدهية المتعددة التي تفتقر إلى الإثبات على نطاق واسع، بسبب دعم عمالقة لها من أمثال هاردي (G.H. Hardy) وليتيل وود (J.E. Littlewood)، ويتمثل تأثير هذه الحكايات من علماء الرياضيات المختصين في غرفة الصف بتشجيع المعلمين الطلاب على المخاطرة. فعلى وجه الخصوص، يتعين عليهم تشجيع الطلاب الموهوبين/المبدعين على عرض حلولهم المسائل الرياضية في المسابقات، أو اللقاءات

الطلابية المفتوحة، سـواء كانت إقليمية أو على مسـتوى الدولة، متيحاً لهم فرصـة اكتساب الخبرة في الدفاع عن أفكارهم عند تفحص أقرانهم لها بكل دقة.

المبدأ العلمي (The Scholarly Principle) : يتعين على معلمي مرحلة الروضـة- الصـف الثاني عشـر أن يتبنوا فكرة الانحراف الإبداعي (Creative Deviance) [1] خلال إسهامهم في بناء جسم المعرفة الرياضية، ويتعين عليهم أيضاً أن يكونوا مرنين ومنفتحين على المجالات البديلة التي يسـتخدمها الطلاب في حل المسـائل. وإضافة إلى ذلك، ويتعين عليهم أن يوجدوا بيئة صفية مناسبة، ويشجعوا الطلاب على الحوار والتدقيق في مصداقية المناحي المسـتخدمة من الطلاب والمعلمين الآخرين في حل المسائل. ويتعين عليهم أيضاً تشجيع الطلاب الموهوبين على تعميم المسألة و/أو الحل، إضافة إلى افتراض مجموعة من المسائل المماثلة في سياقات أخرى. إذ تساعد إتاحة الفرص للطلاب على افتراض المسائل وفهمها وتصميمها، ومساعدة الطلاب على التمييز بين المسائل الرياضية وغير الرياضية، والمسائل القوية من الضعيفة، والمسائل القابلة للحل من غير القابلة للحل. إضافة إلى ذلك، يمكن اسـتثمار التفكير المستقل عن طريق تقديم فرص للطلاب لاستقصاء حالات المسألة دون أي تعليمات صـريحة (English, In Press; Sriraman & English, 2004). ويُشـجِّع المعلمون أيضـاً على الانتظام في تسـريع المنهاج وتكثيفه؛ حتى يصـل الطلاب الموهوبون فـي الرياضـيات إلـى المفاهيـم المتقدمة بسـرعة تعينهم علـى الارتقاء بالنشـاط العلمي المسـتقل. ولّدت الدراسة الطولية للشباب ذوي النضـج المبكر في الرياضيات (Study Of Mathematically Precocious Youth - Smpy) التـي بدأتها جوليانا سـتانلي (Julian Stanley) وجون هوبكنز (Johns Hopkins) عام (1971)، كمية كبيرة جدّاً من البيانات التجريبيـة جمعـت على مـدار ثلاثين عاماً، نجم عنهـا كثير من النتائج عـن أنواع المناهج والتدخلات الوجدانية التي تعزز من متابعة الدورات المتقدمة في الرياضيات، وقد أنتج على

1) يُعرّف علماء الاجتماع الانحراف بالسلوك الذي ينتهك القوانين والتقاليد الصريحة والضمنية السائدة في المجتمع. ويشير مصطلح الانحراف عادة إلى السـلوك غير المشـروع. أما أن يكون الانحراف إبداعيّا فعندما يطرح الفرد أفكاراً جديدة ويرفض الانصـياع للقوانين السـائدة. فما الذي سـيحدث، مثـلاً، عندما يطرح أحد الموظفين، فكرة جديـدة ويطلب تنفيذها لكن مديره يطلب إليه التخلي عن الفكـرة. قد يلجأ الموظف إلى تجاهل تعليمات المدير ويطبّق الفكرة بطريقة غير قانونية، وهذا ما يسمّى الانحراف أو التمرد الإبداعي deviance creative- المراجع

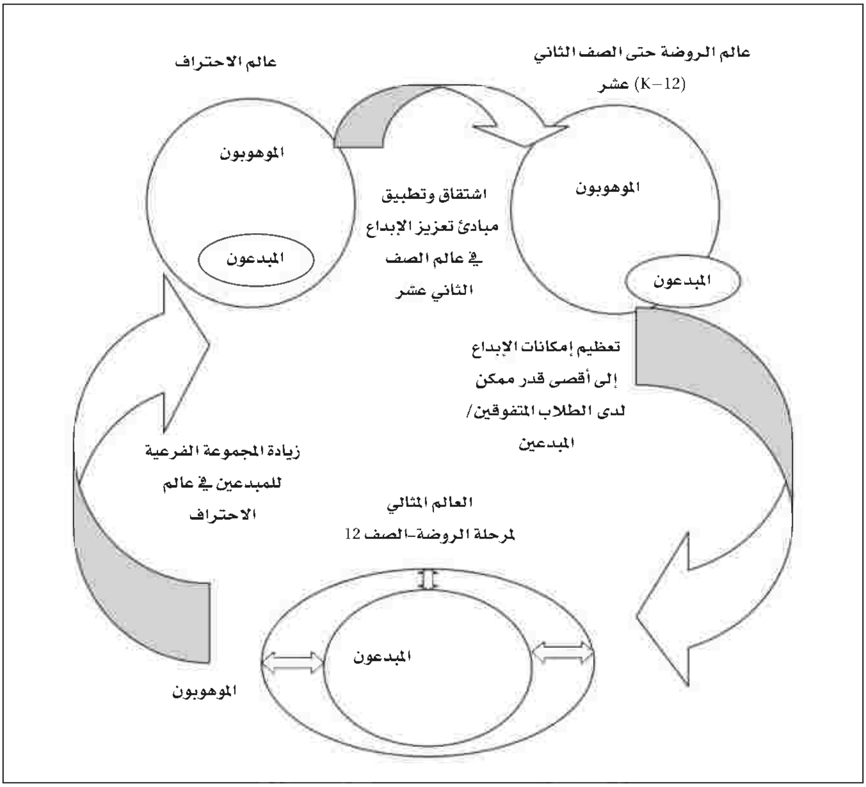
إثرهـا ما يربو على مئتين وخمسـين ورقة بحثية قدمت دعمـاً تجريبيّاً متميزاً تتعلق بفاعلية تسريع منهاج الرياضيات وتكثيفه (Benbow, Lubinski, & Sushy, 1996).

مبدأ الشك (The Uncertainty Principle): تُعدّ الرياضيات، على المستوى الاحترافي، مليئة بالشك والغموض كما اتضح من الاقتباسات المقدمة سابقاً. يتطلب الإبداع، بعكس التعلم، أن يتعرض الطلاب للشك إضافة إلى صعوبة ابتكار الرياضيات. وتتطلب هذه القدرة من المعلم تقديم دعم وجداني للطلاب الذين يعانون الإحباط إذا لم يقدروا على حل مسألة صعبة. وينبغي لـك تعريض الطلاب دوريّاً لأفكار من تاريخ العلوم والرياضيات التي تطورت عبر قرون من الزمن، واستنفدت جهود أجيال من علماء الرياضيات إلى أن توصلوا إلى حل المسألة في نهاية المطاف. سيفيد استثمار هذه السمة في النهاية الطلاب الموهوبين في الرياضيات في المسار الاحترافي. ففي عام (1992)، طوّر كيسوتر (Kiesswetter) ما يسمى بنموذج هامبورج (*Hamburg Model*) في ألمانيا الذي تركز تركيزاً أكبر على إتاحة المجال أمام الطلاب الموهوبين في الرياضيات للمشاركة في نشاط طرح المسائل، يتبع ذلك مرحلة استكشاف للإستراتيجيات المجدية وغير المجدية في حل المسائل المطروحة. وقد استحوذ هذا المنحى على جوهر الطبيعة الاحترافية للرياضيات، حيث تؤدي المهمة الأكثر صعوبة في الأغلب إلى صياغة النظرية (Theorem) صياغة صحيحة. وعلى النقيض من ذلك، تميل بعض النماذج الموجودة داخل الولايات المتحدة كالنماذج المستخدمة في مركز الشباب الموهوبين (Centre For Talented Youth) إلى التركيز على تسريع تعلم المفاهيم والعمليات من المنهاج العادي، وبذلك تُعِدُّ الطلاب لدورات متقدمة ضمن الرياضيات (Barnet & Corraza, 1993).

وبعد عرض المبادئ الخمسة التي تحقق أقصى قدر ممكن من الإبداع في غرفة الصف من مرحلة الروضة - الصف 12، سأعرض النموذج (شكل 2:4) الذي يستحوذ على الجوهر الأساس لهذا البحث، ويوضح العلاقة والتوافق لبنى النبوغ والإبداع في الرياضيات بين مستوى الروضة - الصف 12 والمسارات الاحترافية للرياضيات.

النموذج المفاهيمي

يوضح النموذج المقدم في الشكل(2:4) الطبيعة النشطة للعلاقة بين الإبداع في الرياضيات والنبوغ الرياضي، ويوضح أيضاً إمكانات جسر الهوة بين مستوى الروضة وحتى الصف الثاني عشر، والمسارات الاحترافية للرياضيات. يوضح مستوى الروضة حتى الصف الثاني عشر الموجود في أعلى يسار الشكل، أن الإبداع في الرياضيات يظهر في «هامش» المجموع العام للطلاب الموهوبين في الرياضيات. وفي الجانب المقابل، يوضح العالَم الاحترافي للرياضيات أن الرياضيات سلعة نادرة. والسؤال المطروح الآن، كيف يمكن جسر الهوة بين هذين العالَمين المنفصلين - الاحتراف والإبداع؟ يشير النموذج إلى إمكانية جسر الهوة بين هذه المسارات المنفصلة للرياضيات الاحترافية، وغرفة صف رياضيات في مستوى الروضة حتى الصف الثاني عشر، عبر مزيد من التركيز للإرتقاء بالقدرة الإبداعية لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات في غرفة الصف «المثالية». ويمكن تحقيق ذلك من خلال تطبيق المبادئ الخمسة (شكل 1:4) التي ينجح في استخدامها علماء الرياضيات المبدعون في غرفة الصف في مستوى الروضة وحتى الصف الثاني عشر. ومما لا شك فيه أن البيئة الصفية، ولا سيما تلك التي تضم طلاباً متفوقين رياضيّاً، التي تكون فيها مبادئ الجشتالت والسوق الحرة والعلمية والشك جزءاً من العملية التعليمية، تزيد من إمكانية الإبداع إلى أقصى حدٍّ ممكن بين الموهوبين في الرياضيات. وتساعد الزيادة في الإبداع هؤلاء الطلاب وهم يشقون طريقهم إلى مرحلة ما بعد الثانوية، ومرحلة إجراء البحوث في الرياضيات، أو ينتقلون من المستوى الرابع إلى الخامس أو السادس. ومن الجدير بالذكر أن التقدم نحو المستوى السادس يزيد من المجموعة الفرعية لعلماء الرياضيات المبدعين.



شكل 2:4 تحقيق أقصى قدر ممكن من التوافق بين الإبداع والنبوغ

وعلى الرغم من أن النموذج المفاهيمي ثلاثي تكاملي (Triadic) في طبيعته، فإنه يختلف عن النماذج العامة التي اقترحها رينزولي (Renzulli, 1978–1986) وستيرنبيرج (Sternberg, 1997)، من حيث إنه يوضح العلاقة بين الإبداع والنبوغ في مجالات محددة من الرياضيات. ويحتوي النموذج على عناصر مفهوم رنزولي ثلاثي الحلقات للتفوق، ووجهة نظر ستيرنبيرج الثلاثية للتفوق. يشير مفهوم رينزولي ثلاثي الحلقات إلى أن النبوغ تفاعل بين القدرات التي هي أعلى من المعدل، والسلوك الملتزم بالتركيز على المهمة، والإبداع. يتميز عالم الرياضيات الاحترافي (المستوى 5) بقدرات رياضية فوق المعدل بين علماء الرياضيات، والالتزام بالبحث. ومع ذلك، يبقى الإبداع في الرياضيات عند هذا المستوى سلعة بعيدة المنال تظهر بين مجموعة ضئيلة من مجموع علماء الرياضيات. يمكن توكيد مفهوم رنزولي للالتزام بالمهمة في العالم المثالي لمرحلة الروضة– الصف 12 تحت مبدأ

الشك، الذي يرى أن المسائل الصعبة تستغرق وقتاً طويلاً ونضالاً مضنياً حتى تُحل. وترى وجهة نظر ستيرنبيرج الثلاثية في الإبداع أن الأفراد الموهوبين يمتلكون مزيجاً متفاوتاً من النبوغ التحليلي والتركيبي (الإبداعي) والعملي. وقد لقيت وجهة النظر هذه صدى خاصّاً في عالم الرياضيات، إذ يمتلك علماء الرياضيات (المستوى 5) المنتجون في مجال بحوثهم مستوى عالياً من القدرات التحليلية والعملية، حيث تظهر القدرات العملية في اختيار مسائل يمكن حلها ونشرها. ويمتلك أيضاً علماء الرياضيات المبدعون (المستويان 6 و 7) مستويات أعلى من قدرات التركيب، مقارنة بعلماء الرياضيات في المستوى 5، من حيث إن البحوث التي ينشرونها تفتح آفاقاً جديدة للبحث لدى علماء الرياضيات الآخرين. وخير مثال على ذلك البحث الذي قام به «هويت» (Hewitt) عام (1948). وربما تجري مقايضة هذه المستويات العالية من قدرات التركيب بمستويات أقل من القدرات العملية. مثلاً، غالباً ما يعمد علماء الرياضيات في (المستويين 7/6) إلى ترك البرهان في المنتصف، أو حتى أنهم يهملون نشر أعمالهم أحياناً.

هناك كثير من الأمثلة في تاريخ الرياضيات التي تظهر فيها مثل هذه النزعات بين علماء الرياضيات المبدعين جدّاً. مثلاً، ترك عالم الرياضيات الهندي سرينفازا رامانوجون (Srinivasa Ramanujan, 1887–1920)، مذكرات كتبت بخط اليد مليئة بالنظريات غير المثبتة، التي لا تزال تسهم في التوجهات الخصبة لنمو نظرية الأعداد التحليلية والدوال الإهليجية (Elliptic Functions) والسلاسل اللانهائية (Infinite Series) والكسور المستمرة (Continued Fractions). واسهمت أيضاً قائمة ديفيد هيلبيرت (David Helbert, 1900) المكونة من ثلاث وعشرين مسألة، التي قدمها لعلماء الرياضيات في المؤتمر الذي عقد عام 1900 في باريس، في ظاهرة نمو الرياضيات، والاتجاه الخاص الذي نمت فيه (Rowe & Gray, 2000). ولا تزال فرضية «ريمان» مسألة مفتوحة تعكس آثاراً عميقة على مجالات كثيرة من الرياضيات. وخير مثال حديث على هذا، هو مثال بول إردوس (Paul Erdos) وهو عالم رياضيات معاصر عبقري غامض، اشتهر بإعطاء علماء الرياضيات الآخرين تخمينات، و/أو مسائل بتلميحات وحلول جزئية أو دون حلول. وقد اتّسم علماء الرياضيات الذين حلوا تلك المسائل وكتبوا النتائج، باللطف حيث أدرجوا اسم

إردوس بصفته مشاركاً في تأليف بحوثهم. وفي الحقيقة أن زملاء إردوس في التأليف أعطوا لأنفسهم رقماً أسموه (إردوس رقم 1، Erdos Number 1)، وأطلق علماء الرياضيات الذين شاركوهم في البحوث على أنفسهم (إردوس رقم 2، Erdos Number 2) وهكذا.

يمكن أيضاً رؤية وجهة نظر ستيرنبيرج الثلاثية للموهبة في النموذج في الشكل 4 :2. ولكي نزيد إمكانات الإبداع في الظهور إلى حدها الأقصى في حصة الرياضيات، يمكن أن يشجع المعلمون الطلاب المبدعين رياضيّاً على المشاركة في تقديم رؤاهم التركيبية في الربط بين المسائل المتنوعة مع بقية الطلاب في الصف (Sriraman, 2004a). ويمكن أيضاً استخدام الأمثلة التاريخية في التفكير التركيبي (Synthetic Thinking) في الرياضيات، التي يبدو كأنها تربط الأفكار والمفاهيم المتنوعة في الصف، لإضفاء مزيد من الإيضاح على قوة هذه الرؤى وقيمتها. تحوي المبادئ العلمية والسوق الحرة والجمالية على جوانب من وجهة نظر ستيرنبرغ الثلاثية في النبوغ.

وتشتمل المبادئ الخمسة على أفكار لباحثين متنوعي الثقافات، يمكن أن تعزز الإبداع بوجه عام عن طريق ربط مفاهيم الآداب والعلوم بالرياضيات وبالعكس. وتتمثل السمات المشتركة لمئات الباحثين متنوعي الثقافات (قدامى ومعاصرين)، كما حلّلها روبرت روت-بيرشتاين (Root-Bernstein 1989, 1996, 2000, 2001, 2003) وآخرون غيره، في: (أ) التفكير الهندسي البصري و/أو التفكير في المبادئ الهندسية، (ب) الانتقال المتكرر في وجهات النظر (ج) التفكير في التشبيهات (Analogies) (د) الوعي المعرفي أو معرفة قيود المجال، (هـ) الاهتمام باستقصاء المفارقات التي غالباً ما تظهر التفاعل بين اللغة والرياضيات والعلوم، (و) الاعتقاد بموسى أوكام (Occam's Razor)، أو الاعتقاد أن الأفكار البسيطة السهلة أفضل من المعقدة، (ز) الاعتراف بدور المصادفة (ح) النزعة نحو التأثير في الجدول الزمني (Sriraman, 2005).

موسى[1] أو مقص أوكام (Occam's Razor) مبدأ وضعه الإنجليزي وليام الأوكامي (1288–1347)، من الأمثلة الحديثة التي ساقها روت- بيرشتاين، مدى تأثير لوحات الرسام الهولندي ماوريتس كورنيليس إيشر (Escher Maurits Cornelis) المستوحاة رياضيّاً، في الفيزيائي الرياضي البريطاني روجر بنروز (Roger Penrose)، الذي زار أحد معارض الفنان في العام 1954. وبتحفيز من الزوايا التي رسمها إيشر في بعدين وبدت مستحيلة، بدأ بنروز بإيجاد أشيائه المستحيلة، مثل المثلث «المستحيل» الشهير الذي يظهر مثلثاً ثلاثي الأبعاد ينعطف إلى الأمام وإلى الخلف ببعدين. وكتب روت – بيرشتاين عن ذلك:

> «عرض روجر بنروز المثلث على والده ليونيل بنروز Lionel S. Penrose وهو عالم أحياء اشتغل بالفن، واخترع السلّم المستحيل (Impossible Staircase) الذي يبدو فيه السلّم بصورة حلزونية إلى الأعلى وإلى الأسفل في آنٍ معاً، وبعث بنسخة منه إلى إيشر، الذي طور الجوانب الفنية للسلم المستحيل بطرق باتت مشهورة حتى يومنا هذا.» (ص. 274).

ومن التأثيرات المشهورة لفن إيشر في الرياضيات مسألة التبليط (Tiling Problem) الدورية واللادورية (Periodic And Aperiodic) التي اشتهرت بوساطة روجر بنروز ومارتن جاردنر (Martin Gardner)، وساعدت دارسي خصائص البلورات (Crystallographers) على فهم بنية كثير من السبائك المعدنية اللادورية (Root–Berstein, 2003).

الطبيعة المتغيرة للرياضيات

يتمثل الجانب المهم الآخر في هذه المناقشة في السؤال المتصل بالتوازن بين الرياضيات البحتة والتطبيقية. حيث تشير الدراسات إلى أن طبيعة الرياضيات ذات الصلة بهذا العصر قد تغيرت كذلك. وعلى الرغم من الجذور الغنية والقديمة، فقد ارتأى ستين (Steen, 2001) أن على علماء الرياضيات في زماننا هذا أن يدينوا بالعرفان إسهامات الباحثين في فروع المجالات المعرفية الخارجية كالأحياء والفيزياء والمال والعلوم

1) وينص على أن: أبسط الفرضيات هي أصحها. ويعتمد المبدأ على أن شرح أي ظاهرة يجب أن يقوم على أقل عدد من الفرضيات من خلال ترك أي فرضية لا تؤثر في الظاهرة أو النظرية أو تشرحها- المراجع

المعلوماتية والاقتصـاد والتربية والطب وما إلى ذلك، الذين اسـتخدموا الرياضيات بنجاح فـي إيجـاد نمـاذج كان لهـا تطبيقات عميقـة ومؤثرة في عالمنـا هذا. وفي الواقـع أن حقل الرياضـيات نجم عن هذه الدراسات البينية متعددة التخصصات، والتطبيقات التي انبثقت عنها وازدهرت مع بزوغ القرن الحادي والعشرين.

ومـع ذلـك، فإن حل المسـائل على نحو ما هو مطبّق في غرفة الصـف لا يشـتمل على هـذا المنحى البيني متعدد التخصصـات ونمذجة ما يحصـل في العالـم الحقيقي. أما في المرحلـة الجامعيـة في الولايات المتحدة، فيتركز الاهتمام بصـورة متزايدة على الإسـراع في إعداد طلاب اليوم في المجالات المناسـبة للمسـتقبل. ويعلق «سـتين» على ذلك قائلاً: يعتمـد علم الأحياء على البيانات والحسـاب والنمـاذج اعتماداً كبيراً، فقد أصـبحت أقرب إلـى الرياضـيات فـي كل جانب مـن جوانبها (ص. Xi). وفي هذا السـياق، يمـول مجلس البحـوث الوطني ومؤسسـة العلوم الوطنيـة الجامعات على نحو كبير للبـدء ببرامج دكتوراة متعددة التخصصات (Interdisciplinary Doctoral Programs) تجمع بين الرياضيات وغيرهـا مـن العلـوم، بهدف تأهيـل علماء ماهريـن في تحويـل الحقائق إلى «رياضـيات». وعـادة مـا تكـون الرياضـيات فـي المرحلة الثانويـة بوابـة للعبور إلـى عالم الموضـوعات الرياضـية الواسـع العميق. ومع ذلـك، لا تزال معظم مناهـج الرياضـيات التقليدية تعامل بالمعالجة التقليدية للرياضـيات، مقارنة بالمنحى النموذجي والمنحى متعدد التخصصات المسـتخدم في العالم الحقيقي. وقد اشتكى شيفيلد، بينيت، بيريوزابل، ديرموند، وويرثيمر (Sheffield, Bennett, Berriozabal, Dearmond, And Wertheimer, 1995) مـن عـدم إحداث تغيـر كثير في مناهج الرياضـيات منذ ذلك الحين، وأشـاروا إلى أن الطلاب النابغين في الرياضيات كانوا الأقل إفادة من التغيير، وغير قادرين على استخدام موهبتهم التي يمكن تصـويرها على أنها مورد اجتماعـي ثمين للمحافظة على القيادة في عالم متغير تقنيّاً. وزيادة على ذلك، تفيد رياضـيات المرحلة الثانوية أيضـاً بصـفتها حارساً على بوابة الدراسات المتقدمة في كثير من المجالات (Kerr, 1997).

ويمكـن القـول أن التعامل التقليدي مع الرياضـيات له أثر قليل أو معدوم في الأنشـطة المسـتندة إلى نمذجة تتطلب القدرة على التواصـل والعمل بروح الفريق. إضـافة إلى ذلك، فقد حالت الرياضـيات التقليدية تاريخيّاً بين الطالبات المتفوقات ومتابعة أربع سـنوات من رياضـيات المرحلة الثانوية. ويصـعب معالجة مثل هذا العجز في مستوى الجامعة، ويترتب عليـه وجـود عدد قليل مـن الطلاب القادريـن على العمل بمسـتوى الخريجيـن في الحقول متعددة التخصصـات، مثل البيولوجيا الرياضـية والمعلوماتية الحيويـة (Steen, 2005). وفي ضـوء ذلـك، يمكن لأي عالم تربوي يقـرأ التاريخ أن يتنبأ بأثر كرة الثلـج أو دورة اللَّوم (Cycle Of Blaming) لعـدم الإعـداد الكافـي فـي المرحلـة الثانويـة مـروراً بالمرحلـة المتوسـطة وانتهـاءً بالمرحلـة الابتدائيـة، وهـذا يعنـي أن علينـا أن نعمـل من الأسـفل إلـى الأعلـى. أي، يتعيـن علينـا البـدء مـن مراحـل الدراسـة المبكـرة بدراسـة النظـم المعقـدة التـي تحـدث فـي واقـع الحيـاة. وأشـار ليش وكابـوت وهاميلتـون (Lesh, Kaput And Hamilton, 2006) إلى تلك المشروعات، كالتي تقدمها جامعة بيردو (Purdue University) للمسـاواة بين الجنسـين في مشـروع الهندسـة، التي تقاس فيها قدرات الطلاب وتحصيلهم باستخدام مهمات صُمّمت لتحاكي واقع الحياة في حل المسائل. وقالوا إن كثيراً من أوجه الفهم والقدرات التي تبرز في هذه المشـروعات بصـفتها أساسية للنجاح، لا يُركز عليها في الكتب المدرسية أو الاختبارات التقليدية. وإن ما يثير الدهشة، أن هؤلاء الطلاب ينحدرون من مجتمعات ممثلة بنسـبة ضـئيلة جدّاً، ولا سيما الإناث والأقليات العرقيـة، في مجـالات تؤكد على الرياضـيات والعلوم والتقانة، وهم محرومون بسـبب عدم تعرُّف قدراتهم في السابق (Lesh & Sriraman, 2005A, 2005B; Sriraman, 2005).

وهكذا، فقد يكون من المفيد بصورة أكثر أن ينتظم الطلاب في أنشطة استنباط نماذج تعرضـهم لنظم حيـاة واقعية معقدة بدلاً من التركيز على اسـتنباط حل المسـائل. وهنـاك احتمـال كبير أن يتابـع الطلاب الموهوبـون في الرياضـيات النظم المفاهيمية الرياضـية النـاجمة عن هذه الاستقصـاءات، من حيث تطبيقاتها على وجه التحديد، إضـافة إلى كونها توجِد أفكاراً بدهية يمكن اكتشـاف النظريات من خلالها، وهذا يماثل تماماً ما يفعله علماء الرياضيات الحقيقيون (Sriraman & Strzelecki, 2004).

ملاحظات ختامية

ختاماً، لا يقتصر هدف مجتمع تعليم الموهوبين على ضمان تحقيق الطلاب الموهوبين في الرياضيات قدراتهم ليصبحوا علماء رياضيات منتجين وعمليين، بل يشمل التحقق أيضاً من عدم إهمال الطلاب المبدعين في الرياضيات من بين الموهوبين فيها، فقد يكون هؤلاء في المحصلة هم الطلاب القادرين على التقدم بهذا الحقل إلى الأمام من خلال طرائقهم ورؤاهم غير العادية وغير التقليدية. وفي نهاية المطاف، يؤدي أثر الفراشة (Butterfly Effect) الناجم عن إهمال إحدى هذه القدرات لدى طلاب المستوى 6 (علماء الرياضيات المبدعين) في غرفة الصف، إلى التأثير فعلاً في حياة آلاف الطلاب من المستوى 5 (علماء الرياضيات المنتجين). والحالة التي توضح هذه التأثيرات بعيدة المدى لأثر الفراشة هذا يتمثل في قائمة مسائل هيلبرت الرياضية (Hilbert,1900) التي عززت كلاً من الرياضيات البحتة والتطبيقية، وكذلك ملاحظات رامانوجان المدونة في دفاتر مذكراته.

قائمة المراجع

Barnes, M. (2000). Magical Moments In Mathematics: Insights Into The Process Of Coming To Know. For The Learning Of Mathematics, 20(1), 33–43. Barnett, L.

B., & Corazza, L. (1993). *Identification Cf Mathematical Talent And Program–matic Efforts To Facilitate Development Cf Talent*. European Journal For High Ability, 4, 48–61

Behr, M., & Khoury, H. (1986). *Children's Inferencing Behavior*. Journal For Re–search In Mathematics Education, 17(5), 369–381.

Benbow, C. P., Lubinski, D. & Sushy, B. (1996). *The Impact Cf Smpy's Educational Programs From The Perspective Cf The Participant*. In C. P. Benbow & D. Lubinski(Eds), Intellectual Talent (Pp. 266–300).Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Birkhoff, G. D. (1956). *Mathematics Cf Aesthetics*. In J. R. Newman (Ed.), The World Of Mathematics, Vol. 4 (7Th Ed., Pp. 2185–2197). New York: Simon And Schuster.

Birkhoff, G. D.(1969). *Mathematics And Psychology*. Siam Review, 11, 429–469.

Brinkmann, A. (2004). The Experience Of Mathematical Beauty. In Contributions To P. C. Clarkson, M. Hannula (Organizers), Tsg 24: Students' Motivation And Attitudes Towards Mathematics And Its Study. Proceedings Of The 10Th International Congress Of Mathematics Education, Copenhagen, Denmark.

Brower, R. (1999). *Dangerous Minds*: Eminently Creative People Who Spent Time In Jail. Creativity Research Journal, 12(1), 3–14.

Burton, L. (1999A). *The Practices Cf Mathematicians*: What Do They Tell Us About Coming To Know Mathematics? Educational Studies In Mathematics, 37(2), 121–143.

Burton, L. (1999B). *Why Is Intuition So Important To Mathematics But Missing From Mathematics Education*? For The Learning Of Mathematics, 19(3), 27–32.

Chambers, J. A. (1964). Relating Personality And Biographical Factors To Scientific Creativity. Psychological Monographs, 78(7), 584.

Chang, L. L. (1985). *Who Are The Mathematically Gıfted Elementary School Children*? Roeper Review, 8(2), 76–79.

Craft, A. (2003). *The Limits To Creativity In Education*: Dilemmas For The Educator. British Journal Of Educational Studies, 51(2), 113–127.

Craft, A. (2002). *Creativity In The Early Years: A Lıfewide Foundation*. London: Continuum.

Cramond, B. (1994). *Attention–Deficit Hyperactivity Disorder And Creativity—What Is The Connection?* Journal Of Creative Behavior, 28, 193–210.

Creme, P. (2003). *Why Can't We Allow Students To Be More Creative?* Teaching In Higher Education, 8(2), 273–277.

Csikszentmihalyi, M. (1988). *Society, Culture, And Person*: A Systems View Of Creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), The Nature Of Creativity: Contemporary Psychological Perspectives (Pp. 325–339). Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (2000). *Implications Cf A Systems Perspective For The Study Cf Creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 313–338). Cambridge University Press.

Davis, G. A. (1997). *Identıfying Creative Students And Measuring Creativity* . In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), Handbook Of Gifted Education (Pp. 269–281). Boston: Allyn Bacon.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience* . New York: Hough–ton Mifflin.

Davydov, V. V (1988). *The Concept Cf Theoretical Generalization And Problems Cf Educational Psychology* . Studies In Soviet Thought, 36, 169–202.

Davydov, V. V. (1990). *Type Cf Generalization In Instruction* : Logical And Psy–chological Problems In The Structuring Of School Curricula. In J. Kilpatrick (Ed.), Soviet Studies In Mathematics Education, Vol. 2, Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Diezmann, C., & Watters, J. (2003). *The Importance Cf Challenging Tasks For Mathematically Gıfted Students* . Gifted And Talented International, 17(2), 76–84.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). *On The Aesthetics Cf Mathematical Thought. For The Learning Cf Mathematics* , 6(1), 2–10.

Einstein, A., & Inheld, L. (1938). *The Evolution Cf Physics. New York: Simon And Schuster* .

English, L. D. (In Press). *Problem Posing In The Elementary Curriculum* . In F. Lester, & R. Charles (Eds.), Teaching Mathematics Through Problem Solv–ing. Reston, Virginia: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity. In D. Tall (Ed.)* . Advanced Math–ematical Thinking (Pp. 42–53). Kluwer Academic Publishers.

Frensch, P., & Sternberg, R. *(1992). Complex Problem Solving: Principles And Mechanisms* . Mahwah, Nj: Erlbaum.

Goldberg, A., & Suppes, P. (1972). *A Computer Assisted Instruction Program For Exercises On Finding Axioms* . Educational Studies In Mathematics, 4, 429–449.

Greenes, C. (1981). *Identıfying The Gıfted Student In Mathematics* . Arithmetic Teacher, 28(6), 14–17.

Gruber, H. E. (1989). *The Evolving Systems Approach To Creative Work* . In D. B. Wallce & H. E. Gruber, Creative People At Work: Twelve Cognitive Case Studies. Oxford: Oxford University Press.

Gruber, H. E. (1981). *Darwin On Man. Chicago: University Cf Chicago Press* .

Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). *The Case Study Method And Evolving Sys–tems Approach For Understanding Unique Creative People At Work* . In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 93–115). *Cambridge Univer–sity Press* . Hadamard, J. W. (1945). Essay On The Psychology Of Invention In The Mathematical Field. Princeton, Nj: Princeton University Press.

Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology* . London.

Heid, M. K. (1983). *Characteristics And Special Needs Cf The Gıfted Student In Mathematics* . The Mathematics Teacher, 76, 221–226.

Hershkowitz, R. (1989). *Visualization In Geometry—Two Sides Cf The Coin* . Focus On Learning Problems In Mathematics, 11, 61–76.

Hewitt, E. (1948). *Rings Cf Real—Valued Continuous Functions* . Transactions Of The American Mathematical Society, 64, 45–99.

Hilbert, D. (1900). *Mathematische Probleme* : Vortrag, Gehalten Auf Dem Inter–nationalen Mathematiker—Congress Zu Paris 1900. Gṭt. Nachr. 253–297.

Jackson, L. (2002). *Freaks, Geeks And Asperger Syndrome* : A User Guide To Ado–lescence. London: Jessica Kingsley.

James, I. (2003). *Austism In Mathematicians* . The Mathematical Intelligencer, 25(4), 62–65.

Kajander, A. (1990) *Measuring Mathematical Aptitude In Exploratory Computer Environments* . Roeper Review, 12(4), 254–256.

Kanevsky, L. S. (1990). *Pursuing Qualitative Dıfferences In The Flexible Use Cf A Problem Solving Strategy By Young Children* . Journal For The Education Of The Gifted,13, 115–140.

Kerr, B. A. (1997). *Developing Talents In Girls And Young Women* . In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook Cf Gıfted Education (2Nd Ed., Pp. 483–497)* . Boston: Allyn & Bacon.

Kieren, T., & Pirie, S. *(1991). Recursion And The Mathematical Experience* . In L. P.Steffe (Ed.) Epistemological Foundations Of Mathematical Experience (Pp. 78–102). New York: Springer—Verlag.

Kiesswetter, K. (1985). *Die Fṛderung Von Mathematisch Besonders Begabten Und Interessierten Schülern—Ein Bislang Vernachl Ssigtes Sonderp Dogogisches*

Problem . Der Mathematische Und Naturwissenschaftliche Unterricht, 38, 300–306.

Kiesswetter, K. (1992). *Mathematische Begabung* . Ber Die Komplexitt Der–phnomene Und Die Unzulںnglichkeiten Von Punktbewertungen. Math–ematik– Unterricht, 38, 5–18.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology Cf Mathematical Abilities In School Chil–dren* . (J. Teller, Trans. & J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: Univer–sity Of Chicago Press.

Kuhn, T. S. *(1962). The Structure Cf Scientıfic Revolutions. Chicago* : University Of Chicago Press.

Lesh, R., Kaput, J., & Hamilton, E. (Eds.) (2006, In Press), Foundations For The Future: The Need For New Mathematical Understandings & Abilities In The 21St Century. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2005A). *John Dewey Revisited– Pragmatism And The Models– Modeling Perspective On Mathematical Learning* . In A. Beckmann, C. Michelsen & B. Sriraman (Eds). Proceedings Of The 1St International Symposium On Mathematics And Its Connections To The Arts And Sci–ences. (Pp. 32–51). May 18–21, 2005, University Of Schwaebisch Gmuend: Germany.Franzbecker Verlag,

Lesh, R., & Sriraman, B. *(2005B).* Mathematics Education As A Design Science . International Reviews On Mathematical Education (Zentralblatt Für Dida–ktik Der Mathematik), 37(6), 490–505.

Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). *From Problem Solving To Modeling* : The Evo–lution Of Thinking About Research On Complex Mathematical Activity. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.) Beyond Constructivism: Models And Modeling Perspectives On Mathematics Problem Solving, Learning And Teaching (Pp. 501–518). Mahwah, Nj: Erlbaum.

Marshak, D. (2003). *No Child Lcft Behind* : A Foolish Race Into The Past. Phi Delta Kappan, 85(3) 229–231.

Massé, L., & Gagné, F. (2002). *Gıfts And Talents As Sources Cf Envy In High School Settings* . Gifted Child Quarterly. 46(1), 15–29.

Minsky, M. (1985). *The Society Cf Mind* . New York: Simon & Schuster Inc. National Council Of Teachers Of Mathematics (1989). Curriculum And Standards For School Mathematics, Reston, Va: Author.

Nickerson, R. S. (2000). *Enhancing Creativity* . In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 392–430). *Cambridge University Press* .

Plucker, J., & Beghetto, R. A. (2004). *Why Creativity Is Domain General* , Why It Looksdomain Specific, And Why The Distinction Does Not Matter. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.), Creativity: From Potential To Realization (Pp. 153–168). Washington Dc: American Psychological As–sociation.

Policastro, E., & Gardner, H. (2000). *From Case Studies To Robust Generalizations* : An Approach To The Study Of Creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 213–225). Cambridge University Press.

Poincaré, H. (1948). *Science And Method* . New York: Dover.

Polya, G. (1945). *How To Solve It. Princeton* , Nj: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics And Plausible Reasoning* : Induction And Analogy In Mathematics (Vol. Ii). Princeton University Press.

Presmeg, N. C. (1986). *Visualization And Mathematical Gıftedness* . Educational Studies In Mathematics, 17, 297–311.

Renzulli, J. S. (1978). *What Makes Gıftedness* ? Reexamining A Definition. Phi Delta Kappan, 60, 180–184, 261.

Renzulli, J. S. (1986). The Three–Ring Conception Of Giftedness: A Develop–mental Model For Creative Productivity. In R. J. Sternberg & J. E. David–son (Eds.),Conceptions Of Giftedness (Pp. 332–357). New York: Cambridge University Press.

Ripple, R. E. (1989). *Ordinary Creativity* , Contemporary Educational Psychology, 14, 189–202.

Root–Bernstein, R. S. (1989). *Discovering. Cambridge, Ma* : Harvard University Press.

Root–Bernstein, R. S. (1996). *The Sciences And Arts Share A Common Creative Aesthetic* . In A. I. Tauber (Ed.), The Elusive Synthesis: Aesthetics And Sci–ence (Pp. 49–82). Netherlands: Kluwer.

Root–Bernstein, R. S. (2000). *Art Advances Science* . Nature, 407, 134.

Root–Bernstein, R. S. (2001). *Music, Science* , And Creativity. Leonardo, 34, 63–68.

Root–Bernstein, R. S. (2003). *The Art Cf Innovation* : Polymaths And The Universality Of The Creative Process. In L. Shavanina (Ed.), *International Handbook Cf Innovation* , (Pp. 267–278), Amsterdam: Elsevier.

Rowe, D., & Gray, J. (2000). *The Hilbert Challenge* . Oxford University Press.

Schoenfeld, A. (1985).Mathematical Problem Solving. Lawrence Erlbaum & Associates Schoenfeld, A. H. (1993). *Learning To Think Mathematically*: Problem Solving, Metacognition, And Sense Making In Mathematics. In D. Grouws (Ed.) Handbookof Research On Mathematics Teaching And Learning (Pp. 334–370). New York: Mc– Millan.

Shapiro, S. I. (1965). *A Study Cf Pupil's Individual Characteristics In Processing Mathematical Information* . Voprosy Psikhologii, No. 2.

Shaw, M. P. (1994). *Affective Components Cf Scientific Creativity* . In M. P. Shaw & M. A. Runco (Eds.), Creativity And Affect (Pp. 3–43), Norwood, Nj: Ablex.

Sheffield, L. J., Bennett, J., Berriozabal, M., Dearmond, M., & Wertheimer, R. (1995). Report Of The Task Force On The Mathematically Promising. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Silver, E. A. (Ed.) (1985). *Teaching And Learning Mathematical Problem Solving*: Multiple Research Perspectives. Hillsdale, Nj: Erlbaum.

Smith, J. M. (1966). *Setting Conditions For Creative Teaching In The Elementary School* . Boston: Allyn And Bacon.

Sowell, T. (2001). *The Einstein Syndrome* . New York: Basic Books.

Sriraman, B. (In Press). Implications Of Research On Mathematics Gifted Education For The Secondary Curriculum. To Appear In C. Callahan & J. Plucker (Editors) What The Research Says: Encyclopedia On Research In Gifted Education. Prufrock Press.

Sriraman, B. (2002). How Do Mathematically Gifted Students Abstract And Generalize Mathematical Concepts. Nagc 2002 Research Briefs, 16, 83–87.

Sriraman, B. (2003). *Mathematical Giftedness* , Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations. The Journal Of Secondary Gifted Education. 14(3), 151–165. Sriraman, B. (2004A). Reflective Abstraction, Uniframes And The Formulation Of Generalizations. The Journal Of Mathematical Behavior, 23(2), 205–222.

Sriraman, B. (2004B). *Discovering A Mathematical Principle*: The Case Of Matt. Mathematics In School, 33(2), 25–31.

Sriraman, B. (2004C). *The Characteristics Cf Mathematical Creativity*. The Mathematics Educator, 14(1), 19–34.

Sriraman, B. (2004D). *Gifted Ninth Graders' Notions Cf Procf*. Investigating Parallels In Approaches Of Mathematically Gifted Students And Professional Mathematicians. Journal For The Education Of The Gifted, 27(4), 267–292.

Sriraman, B. (2005). Philosophy As A Bridge Between Mathematics Arts And The Sciences. In A. Beckmann, C. Michelsen, & B. Sriraman Et Al (Eds.), Proceedings Of The 1St International Symposium On Mathematics And Its Connections To The Arts And Sciences (Pp. 7–31). May 18–21, 2005, University Of Schwaebisch Gmuend, Germany: Franzbecker Verlag.

Sriraman, B., & English, L. (2004). *Combinatorial Mathematics*: Research Into Practice. The Mathematics Teacher, 98(3), 182–191

Sriraman, B., & Strzelecki, P. (2004). *Playing With Powers*. The International Journal For Technology In Mathematics Education, 11(1), 29–34.

Steen, L. A. (2001). *Revolution By Stealth*. In D. A. Holton (Ed). The Teaching And Learning Of Mathematics At University Level (Pp. 303–312). Kluwer Academic Publishers: Dodrecht.

Steen, L. A. (2005). *Math & Bio 2010: Linking Undergraduate Disciplines*. Mathematical Association Of America.

Sternberg, R. J. (1997). A Triarchic View Of Giftedness: Theory And Practice. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook Cf Gifted Education (Pp. 43–53)*. Boston: Allyn Bacon.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing In Creativity. American Psychologist, 51, 677–688.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). *The Concept Cf Creativity*: Prospects And Paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.)., Handbook Of Creativity (Pp. 93–115). Cambridge University Press.

Suppes, P., & Binford, F. (1965). *Experimental Teaching Cf Mathematical Logic In The Elementary School*. The Arithmetic Teacher, 12, 187–195.

Torrance, E. P. (1981). *Non–Test Ways Cf Identıfying The Creatively Gıfted* . In J. C. Gowan, J. Khatena, & E. P. Torrance (Eds.), Creativity: Its Educational Implications (2Nd Ed., Pp. 165–170). Dubuque, Ia: Kendall/Hunt.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests Cf Creative Thinking*: Norms–Technical Manual. Lexington, Ma: Ginn.

Usiskin, Z. (2000). The Development Into The Mathematically Talented. Journal Of Secondary Gifted Education, 11(3), 152–162.

Vitale, B. (1989). *Elusive Recursion* : A Trip In A Recursive Land. New Ideas In Psy–chology, 7(3), 253–276.

Vygotsky, L. (1962). *Thought And Language. Cambridge* , Ma: Mit Press.

Vygotsky, L. (1978). Mind In Society: The Development Of Higher Psychological Processes. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Wallas, G. (1926). *The Art Cf Thought* . New York: Harcourt Brace.

Wason, P. C., & Johnson–Laird, P. N. (1972). *Psychology Cf Reasoning. Cambridge, Ma: Harvard University Press* .

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking* . New York: Harper.

Weisberg, R.W. (1993). *Creativity* : Beyond The Myth Of Genius. New York: Free–man.

Yakimanskaya, I. S. (1970). *Individual Dıfferences In Solving Geometry Problems On Procf* . In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.). Soviet Studies In The Psy–chology Of Learning And Teaching Mathematics (Vol. 4), Stanford: School Mathematics Study Group.

Ypma, E.G. (1968). *Predictions Cf The Industrial Creativity Cf Research Scientists From Biographical Information* . Dissertation Abstracts International, 30, 5731B– 5732B.

ملاحظات

1. تضع هذه العلامات الطلاب ضمن مجموعة المئين 99-95 تقريباً.
2. جون تشارلز فيلدز (John Charles Fields, 1863-1932) هو الذي أسس جوائز ميداليات فيلدز التي تعادل جائزة نوبل لحقل الرياضيات. توزّع هذه

الميداليـات سـنويّاً بين علماء الرياضـيات دون سـن الأربعين عاماً فـي المؤتمر الدولي للرياضيات.

3. وجـد بهـر وكـوري (Behr And Khoury, 1986) أن سـلوك الاسـتدلال لطلاب المدارس الصـغار كان مماثلاً لما وجده واسـون وجونسون-ليرد (Wason And Johnson-Laird, 1972).

4. تنص فرضـية ريمان (Riemann Hypothesis) على أن دالة أصفار ريمان زيتا (The Zeros Of Riemann's Zeta Function) تكوّن جميعها جزءاً حقيقيّاً من نصـف واحد. وكان هذا تخميناً من ريمـان في العام 1859، ومنذ ذلك الحين، لم يثبت أحد هذا التخمين أو يثبت بطلانه. وربما تكون هذه المسـألة حاليّاً من أكثر المسائل في الرياضيات التي لم يتسنّ للعلماء حلها منذ زمن بعيد.

5. مـن السـهل أن يفهـم الطلاب الجامعيـون تخميـن بيبربـاخ (Bieberbach) مع بعض التعرض للتحليل المعقد بسـبب الطبيعة الأولية للعبارة. تحول الدالة وحيدة التكافـؤ f نقطـة فـي قرص الوحدة إلـى النقطـة الممثلة بالعـدد المركب $f(z)$ المعروض بسلاسل لانهائية $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \ldots$، حيث المعاملات $a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots$ أعـداد مركبـة ثابتة تحدد f. وفي العـام 1916، خمّن بيرباخ أنه بصرف النظر عن أي f نأخذها، فإن: $|a_n| \leq n$، وقد أثبت لويس برانجيز هذا في العام 1985.