عمليات حل المسائل الرياضية لدى الطلاب التايلانديين الموهوبين

معهد تطوير تدريس العلوم والتقنية

سوباترا باتفيزان Supattra Pattivisan

بانكوك، تايلاند مارغريت نيس Margaret L. Niess

جامعة ولاية أوريغون

ملخص

هدفت هذه الدراسة إلى فحص عمليات حل المسائل التي يستخدمها الطلاب التايلانديون الموهوبون في حل المسائل الرياضية غير الاعتيادية. وقد شارك في هذه الدراسة خمسة طلاب تايلانديين موهوبين، حيث مارس كل واحد منهم طريقة التفكير بصوت عالٍ قبل الشروع في حل ثلاث مسائل غير اعتيادية تركز على نظرية الأعداد (Number Theory) والتوافيق (Combinatorics) والهندسة (Geometry) على التوالي. واشتملت بيانات الدراسة على أشرطة فيديو للتفكير بصوت عالٍ، ومقابلات، وحلول الطلاب المكتوبة، إضافة إلى الملاحظات الميدانية للباحثة. نجم عن هذه النتائج نموذج تايلاندي لعملية حل المسائل التي فصّلت السلوك المتبع في كل مرحلة من المراحل الأربع، وهي: الفهم والتخطيط والتنفيذ والتحقق. وأسهمت السلوكات فوق المعرفية في أنشطة المشاركين في كل مرحلة من هذه المراحل، وقدمت النتائج أيضاً خمس فئات للأدلة ذات صلة بعمليات حل المسائل لدى الطلاب تمثلت في: المعرفة الرياضية المتقدمة، الاستعداد

لاستخدام طرائق حلول بديلة متعددة، تذُّكر المعارف والخبرات السابقة والاستعداد لأخذها في الحسبان، والاعتماد على الوجدان، ودعم الآباء والمعلمين.

خلفية الدراسة

يُعـدُّ حل المشكلات أحد أشـكال التعلم الاستقصائي، حيث تطبـق المعرفة الموجودة فـي موقـف جديـد أو غيـر مألـوف مـن أجـل اكتسـاب معرفـة جديـدة (Killen, 1996; Sternberg, 1995). وتتطلـب المشاركـة فـي حـل المسائـل تنسيق عمليـات المعرفة وما فـوق المعرفـة، واختيـار الإستراتيجيات المناسبـة وتطبيقهـا، إضافة إلى تعديـل السلوك ليتـواءم ومطالـب المهام المتغيـرة (Montague, 1991). وقد اقترحـت مجموعة متنوعة مـن النمـاذج لوصـف العمليات التـي يستخدمها مـن يحلّون المسائـل منذ البدايـة إلى أن يتمكنـوا من حـل مهامهم. مثـلاً، يتألف نموذج بوليا مـن أربع مراحل، هي: فهـم المسألة، وضـع خطة، تنفيذ الخطة، والنظر إلى الـوراء (Polya, 1957). وقد عدّل كاروفالو وليستر (Carofalo And Lester, 1985) أخيـراً نمـوذج بوليا، بإضافة مكونـات المعرفة وما فوق المعرفة موضحة في أربع مراحل على النحو الآتي: التوجه، التنظيم، التنفيذ، والتحقق. وقدم منتاغو وأبلجيـت (Montague And Applegate, 1993) نموذجاً يركز على سبع عمليات معرفية، هي: (القراءة، إعادة الصياغة، التصور، الافتراض، التقدير، الحساب، والتحقق، إضافة إلى ثلاث عمليات فوق معرفية، هي: (التعليم الذاتي، والاستجواب الذاتي، والمراقبة الذاتية). وقد أكد نموذجان فقط، هما نموذج غاروفالو وليستر (Garofalo And Lester) ونمـوذج مونتـاج وأبليجيت، على استخـدام الطلاب الموهوبين العمليات فـوق المعرفية في الأدب. وقد أشارت البحوث التي أجريت على هذه النماذج إلى استخدام الطلاب الموهوبين إستراتيجيـات فوق معرفية في حـل المسائل. وأشارت أيضاً إلـى استخدام جوهري للتعليم الذاتـي (Self-Instruction) على امتداد المسألة، إضافة إلى الاستجواب الذاتي (Self-Questioning) علـى نحـوٍ متكرر فـي أثناء قـراءة المسألة وبعد قراءتهـا، وكذلك أنشطة التقويم والمراقبة الذاتية الفاعلة.

يُعـرّف الطلاب الموهوبون في الرياضيات أنهم الطلاب القادرون على القيام بعمليات رياضيـة تماثـل تلك التـي يقوم بهـا الطلاب الكبـار، حيـث يستطيعون استخـدام عمليات تفكيـر نوعية مختلفة فـي حـل المسائـل (Sowell, Zeigler, Bergwell, & Cartwright, 1990). وفـي الوقـت ذاته، تتطلب عملية الحـل الناجحة للمسائـل الرياضية قدرة الطلاب علـى اختيار الإستراتيجيـات المعرفية الملائمـة، واستخدام فهم المسألـة وتمثيلها وحلها (Mayer, 1992; Schoenfeld, 1985). تتضمـن هذه القدرات المعرفة فوق المعرفية التي تعدُّ ضرورية للتعلم وحـل المسائل عالية المستوى(Brown, 1978). وقد أثبتت البحوث أن المعرفـة والعمليات فوق المعرفية تساعد من يحلون المسائل ليصبحوا أكثر كفاية في تناول المسائـل من جوانب ثلاثة، هي: (أ) تحديد المسألـة وتكوين تمثيل عقلي لعناصرها، (ب) اختيار خطط وإستراتيجيات معرفية ملائمة لتحقيق الهدف، (ج) تحديد العوائق التي تعيق عمليـة التقدم والسيطرة عليهـا (Davidson & Sternberg, 1998). وتشتمل العملية فوق المعرفية لحل المسائل على عمليات تخطيط مسائل محددة ومراقبتها وتقويمها لا سيما في تكوين التمثيلات العقلية، واختيار الإستراتيجيات الملائمة (Flavell, 1992; Mccormick, 2003). يؤدي استخدام العمليات فوق المعرفية إلى دعم من يحلون المسائل في أثناء عملية الحـل، ويحسّن قدراتهم نحو تحقيق الهدف، إذ كلمـا زادت سيطرتهم على الإستراتيجيات التـي يستعملونهـا ومراقبتها، أصبحت قدرتهـم على حلها أفضـل (Furtunano, Hecht, Tittle, & Alvarez, 1991; Kapa, 1998; Swanson, 1990).

تُعـرَّف المسائـل غيـر الاعتيادية أنها تلـك المسائل التـي لا يكون الطـلاب فيها على معرفة بمواقف المسألة، ولا يتوقع أن يكونوا قد حلّوها في الماضي، أو صادفوها في المنهاج بانتظـام. وتستلـزم المسائل غير الاعتياديـة مرونة في التفكير وامتـداداً للمعرفة السابقة، ويمكـن أيضـاً أن تشتمل علـى مفاهيم وأساليـب ستُدرَّس بوضوح في مراحـل متأخرة، وقد تتضمن اكتشاف روابط بين الأفكار الرياضية. واكتشف الباحثون أن المسائل الأكثر صعوبة تحتـوي علـى إمكانـات تفعيل وتنشيـط الأداء فوق المعرفـي إلى حد يتمكن فيـه من يحلون المسائـل من تنظيـم عملياتهم المعرفية وضبطها علـى نحوٍ واعٍ. وإضافـة إلى ذلك، يحبذ الطـلاب الموهوبـون حل المسائل غيـر الاعتيادية؛ لما تحويه من صعـاب في التعامل معها.

وهكـذا، فمن المرجح أن تساعـد المسائل غير الاعتيادية على تنشيـط الطلاب الموهوبين لإظهار قدراتهم العالية في حل المسائل.

درس الباحثون كيفية حل طلاب الثانوية الموهوبين المسائل الرياضية غير الاعتيادية. وأشـارت النتائج التي توصلوا إليها إلى أن الطـلاب الموهوبين يقضون وقتاً أطول في قراءة مسائل الرياضيات، وإعادة صوغها بمفرداتهم الخاصة، حيث تعينهم قدرة إعادة الصياغة هـذه علـى فهم المسألة، وتشير أيضاً إلى إحدى السمات التي يتميزون فيها عن الآخرين في حـل المسائل؛ فهم أكثـر قدرة على التعبيـر اللفظي من غيرهم، وتـزداد قدرتهم هذه عند مواجهتهـم مسألة أكثر تعقيداً. إنهم يتذكـرون النظريات لتوليد معلومات جديدة، ويطبّقون أيضــاً المعرفة السابقة على المسألة، ويستعملونها بهـدف الوصول إلى معرفة إضافية ذات صلـة بالمسألـة (Lawson & Chinnappan, 1994; Sriraman, 2003). ويحدد الطلاب الموهوبـون فرضياتهـم في المسألة، وكثيـراً ما يضعون معادلة أو حلـولاً حسابية بعد قراءة المسألـة، وعادة ما يلجؤون إلى تقسيم المسألة إلى مسائـل فرعية. ويحددون أيضاً الهدف قبـل وضع خطة لحل المسألة، ويحلونها بطريقة منتظمـة، ويستعملون إستراتيجيات فاعلة. ويعيـدون أيضاً حل المسألة من خلال قراءتها كلهـا، ويعيدون عمليات الحساب، ويفحصون الخطوات والعمليات ويتحققونها.

وعلـى أي حال، فالمشاركـون في كتابة الدراسة هم من أصحـاب الثقافة الغربية التي تختلـف عن الثقافة الآسيويـة ولا سيما الثقافة التايلاندية، ويقولـون إن الطلاب الآسيويين يتعرضـون للرياضيـات فـي المدرسة والبيت على نحـوٍ يفوق ما يتعرض لـه طلاب الولايات المتحـدة (Geary, 1996)، ويـؤدي أيضاً الجانب الاجتماعي، مثـل الثقافة واللغة، دوراً في القـدرة على حـل المسألة، ولا سيما مـن حيث إدراكهـا وفهمها وتعريفها وتمثيلهـا. وارتأوا أيضــاً أن الجانـب الاجتماعي ربمـا يعين على تسهيل فهـم المسألة والتفكيـر التباعدي في الحلـول الممكنـة (Pretz, Naples, & Sternberg, 2003). ومـن المنطقي أن نفترض أن الاختلافات الثقافية قد تقود الطلاب إلى الأداء بطرق متباينة عند انهماكهم في حل مسألة رياضية.

وإذا نظرنـا إلى وضع تربية الموهوبين فـي تايلاند، فإننا نلاحظ عدم توافر معرفة أو مصادر كافية لتعزيز تطور قدرات النابغون ورعايتها. وينجم عن هذه المشكلات وجود نظام فاشـل وغير مجدٍ في رعاية الطلاب الموهوبيـن (Office of The National Education Commission– Onec, 2004). يُضـاف إلـى هـذه الصعـاب عدم إجراء عـددٍ كافٍ من البحوث تتعلق بحل المسائل الرياضية لدى الطلاب التايلانديين الموهوبين، حيث إن هناك دراستين فقط ركزتا على تطوير برنامج إثرائي، بدلاً من فهم عملية حل المسألة لدى هؤلاء الطلاب(Klaimongkol, 2002; Thipatdee, 1996). وبناءً على ذلك، فإننا نرى أن هناك حاجـة إلـى دراسة كيفية تفكير طـلاب الثانوية التايلانديين، ومعرفـة الإستراتيجيات التي يستخدمونهـا عنـد حل مسائل غير اعتيادية. أما هدف هـذه الدراسة فيتلخص في تفحص سؤالي الدراسة، وهما:

1. مـا طبيعة عمليات حـل المسألة التي يستخدمها الطـلاب التايلانديون عند حلهم مسائل رياضية غير اعتيادية؟
2. ما السلوكات فـوق المعرفية التي يظهرها الطلاب التايلانديون عند حلهم مسائل رياضية؟

خلفية البحث

من الطرق المستخدمة في تايلاند لتعزيز قدرات الطلاب الموهوبين في الرياضيات، مشاركتهم في أولمبياد الرياضيات الدولي (International Mathematical Olympiad, Imo). ويُعـدُّ هـذا الأولمبياد بطولـة عالمية في الرياضيـات تُعقد سنويّـاً لطلاب المرحلة الثانويـة. وينظر إلـى هذا الحدث بصفتـه إستراتيجية لتعزيز الموهبـة الرياضية وتقويتها (Wieczerkowski, Cropley, & Prado, 2000). وقـد خولـت الحكومـة التايلانديـة معهـد تعزيـز التدريس في العلـوم والتقانـة صلاحية اختيـار الممثليـن التايلانديين لهذه المسابقة السنوية منذ عام 1989. وفيما يتعلق بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات (Thai Mathematical Olympiad, Tmo)، يتعيّـن علـى طـلاب المرحلة الثانويـة النابغين في الرياضيـات مـن أنحاء البـلاد جميعها إتمـام جولتين من الاختبـارات كل سنـة للمشاركة

في المشروع. يركز الاختباران على المسائل الرياضية غير الاعتيادية التي يتضمنها كتاب الصف الحادي عشر وفقاً للمنهاج الوطني. وقد تقدم إلى مشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات في شهر يونيو عام 2005 ما مجموعه سبعة آلاف وتسعمئة واثنان وثمانون طالباً متفوقاً، تقدم منهم ما مجموعه ستة آلاف وثمانمئة وواحد وستون طالباً للجولة الأولى من الاختبار، الذي تضمّن فحص قدراتهم على حل المسائل الرياضية من خلال أسئلة من نوع اختيار من متعدد، وأسئلة ذات إجابات قصيرة. وقد وقع الاختيار على اثنين وأربعين منهم فقط من الجولة الأولى للاختبار ليتقدموا للجولة الثانية، وكانت أسئلة الرياضيات جميعها مفتوحة النهاية، حيث يطلب إلى المشاركين إظهار حلولهم المكتوبة خطيّاً. وأخيراً، اختير أربعة وعشرون طالباً ممن اجتازوا الاختبار الثاني ليشتركوا في مشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات. وأُلحق هؤلاء الطلاب بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات في المعسكر التدريبي في معهد تعزيز تدريس العلوم والتقانة (Institute For The Promotion Of Teaching In Science And Technology, Ipst). وفي أثناء التدريب، اختير ستة طلاب ليمثلوا تايلاند في أولمبياد الرياضيات الدولي. وقد أُجريت هذه الدراسة البحثية عندما كان أربعة وعشرون طالباً موهوباً يشاركون في المعسكر التدريبي لمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات.

المشاركون

استخدم الباحث العينة القصدية في اختيار المشاركين من مجموع الطلاب الموهوبين الأربعة والعشرين داخل المعسكر. وعلى الرغم من اختيارهم بموجب اختبار القبول، حيث كان محتوى المنهاج مخصوصاً بالصف الحادي عشر، فإن صفوفهم تفاوتت من الثامن حتى الثاني عشر. وهكذا، فقد تباينت مستويات الطلاب من حيث الخلفية الرياضية. وعلى الرغم من ذلك، فهم يمتلكون خبرات سابقة في حل المسائل الرياضية غير الاعتيادية عبر امتحان القبول الذي طلب إليهم في حينه أن يكتبوا حلولاً مكتوبة. وبالنظر إلى التعريف المستخدم للطلاب الموهوبين في هذه الدراسة، فقد اقتصرت مشاركة الطلاب على الصفوف الثامن والتاسع والعاشر، مع أن هؤلاء الطلاب كانوا قادرين على حل مسائل

رياضيــة كتلك التي يحلها عادة الطلاب الأكبر سنّــاً (Sowells, Et Al., 1990). واستخدم الباحــث أيضاً معايير أخرى في تحديد الطلاب ذوي الخلفية المماثلة في الرياضيات، حيث أُخــذ في الحسبان مــا يأتي: (أ) حصول الطــلاب على العلامات نفسها فــي الجولة الثانية مــن امتحان القبول بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيــات، (ب) عدم مشاركتهم بالمعسكر التدريبــي فــي العام السابق، و (ج) كونهــم في مستوى الصف العاشــر أو أقل. وبذلك، فقد اختيــر خمسة طلاب ممــن انطبقت عليهم المعايير من الطلاب السبعة مع ضمان التنوع في المدارس، والصفوف، والنوع الاجتماعي، والعمر. وكان المشاركون أربعة ذكور وفتاة واحدة، تراوحت أعمارهم حين مشاركتهم بين ثلاثة عشر عاماً وثلاثة شهور، وستة عشر عاماً وستة شهــور، وكانوا ملتحقين بأربــع مدارس وصفوف مختلفة (الثامــن والتاسع والعاشر). كانت ثــلاث مدارســ منها في العاصمة التايلاندية، بانكوك، في حيــن كانت مدرسة واحدة خارج العاصمــة. وقــد أُعطي المشاركون أسماءً مستعارة، مثل: براديــا، سيرا، وودي، نيبا وساكدا (Pradya, Sira, Wude, Nipa, Sakda) لغرض إعداد تقرير النتائج.

اختيار المسألة

تألفــت المسائــل الرياضية لهــذه الدراسة من ثــلاث مسائل غير اعتياديــة، اختيرت وعُدّلــت من مصــادر متعددة، منهــا: مجلات الرياضيــات، والكتب المدرسيــة، واختبارات المسابقات (Apssimon, 1991; Covington, 2005; Gardiner, 1987; Krantz, 1996; Posamenteir & Schulz, 1996; Posamenteir & Salkind, 1996; Schoenfeld, 1985). ودرســ الباحث أيضاً منهاج التدريب قبل وضع مجموعة من المسائل وفقاً للمعايير الآتية:

- تكــون المسائــل غير اعتيادية، أي لا تكون مألوفة لــدى الطلاب، ولم يسبق لهم أن حلّوها من قبل، ولم يسبق لهم أيضاً أن وجدوا مثلها في منهاج الرياضيات. تتطلب المسائــل غير الاعتيادية مرونة في التفكير، وتوسيعاً للمعرفة السابقة، وقد تشتمل أيضاً على مفاهيم وأساليب ستُدرّس صراحة في مرحلة لاحقة، إضافة إلى أنها قد تتضمن اكتشاف الروابط بين الأفكار الرياضية.

- تشمل المسألة مجالات المحتوى الرياضي فيما يتصل بنظرية الأعداد والتوافقيات (Combinatorics) والهندسة، التي تمثل الموضوعات الرئيسة لتدريب الطلاب على أولمبياد الرياضيات الدولي.
- تتحدى المسائل عمليات تفكير الطلاب، أي أنها يجب أن تختبر المستويات العليا لمجال المعرفة وفقاً لتصنيف بلوم المتمثل في: التحليل والتركيب والتقويم (Bloom, Et Al., 1956).
- لا تتطلب الحلول مهارات ومفاهيم رياضية لم يسبق للطلاب تعلمها بموجب المنهاج الوطني.

تألفت مجموعة المسائل من ثلاث عشرة مسألة: ست منها عن نظرية الأعداد، وثلاث منها عن التوافقيات، في حين كانت المسائل الأربع الأخرى عن الهندسة. اختبرت مجموعة المسائل من حيث الصدق من سبعة خبراء ضالعين في الرياضيات وفي تدريسها. اختار الخبراء مسألة في كل مجال، واقترحوا تغذية راجعة مهمة للدراسة. أما المسائل الثلاث التي استخدمت في الدراسة فهي موضحة في الشكل (1:8).

- **المسألة الأولى:** هل يأتي يوم الجمعة الثالث عشر Friday the 13th كل عام؟ وضح ذلك.
- **المسألة الثانية:** هناك 15 فريقاً يشاركون في بطولة ما. ويلعب كل فريق مع كل فريق من الفرق الأخرى مرة واحدة فقط. ويحصل الفريق على ثلاث نقاط للفوز، ونقطتين للتعادل، ونقطة واحدة للخسارة. وعند انتهاء المباراة، يحصل كل فريق على مجموع نقاط يختلف عن الآخر. وتكون مجموع نقاط الفريق الذي يحصل على أقل مجموع للنقاط 21 نقطة. اشرح لماذا يكون لدى الفريق صاحب أعلى مجموع نقاط تعادل واحد على الأقل.
- **المسألة الثالثة:** ABC مثلث متساوي الساقين، حيث الضلع AB = AC. والزاوية ABC تساوي 20 درجة. D نقطة على الساق AB، حيث الزاوية ACD تساوي 60 درجة. E نقطة على الساق BC، حيث الزاوية EAC تساوي 50 درجة. جد مجموع الزاوية CDE.

شكل 1:8 المسائل الثلاث المستخدمة في الدراسة

جمع البيانات

جُمعت البيانات على أساس فردي بين المشاركين والباحث. وحدد كل مشارك موعداً لثلاثة لقاءات لحل واحدة من ثلاث مسائل باستخدام طريقة التفكير بصوت عالٍ، تبعها مقابلة شخصية. وكانت مواعيد المقابلات أسبوعية في أثناء عملية التدريب، وكانت هذه المقابلات تتم قبل التدريب أو بعده. وعرض الباحث في المقابلة الأولى صورة عامة للمشارك عن الإجراءات الواجب اتباعها ولا سيما طريقة التفكير بصوت عالٍ. حيث يتأمل كل طالب في التعليمات، ويطرح أي سؤال قبل البدء بحل عينة من المسائل. وتستغرق عملية التدرب على طريقة التفكير هذه مدة خمس عشرة دقيقة. وقد أعاد الباحث تشغيل شريط الفيديو، وناقش إستراتيجيات تطوير مهارات المشارك لإتقان هذا الأسلوب.

ومن ثم أُعطي المشاركون المسألة الأولى وبدؤوا بقراءتها بصوتٍ عالٍ، وطرحوا أسئلة ليتحققوا فهم الكلمات الواردة فيها قبل البدء بحلها. ولم يطرح الطلاب جميعهم أسئلة في هذه المرحلة. وتحدّث المشاركون بصوت عالٍ موضحين تفكيرهم وهم يكتبون الحل على الورقة، وقد أُعطوا الوقت الذي يريدون لحل كل مسألة. وكان معدل الوقت الذي استغرقه المشاركون نحو عشرين دقيقة لكل مسألة، تبعها مقابلة مدتها خمس عشرة دقيقة. ومع نهاية كل لقاء، كان الباحث يصرّ على كل مشارك عدم الإفصاح عن طبيعة المسائل للمشاركين الآخرين.

النتائج

حُللت البيانات المدونة لتكوّن في مجموعها نموذجاً لعملية حل المسألة لدى الطلاب التايلانديين. وقد اتُّخذ لهذه الغاية نموذج كاروفالو وليستر ونموذج مونتاغيو وأبلجيت مرجعين لتحليل الجوانب فوق المعرفية، حيث يركز النموذجان على السلوكات فوق المعرفية، إضافة إلى استعمالهما وصف عمليات حل المسألة في الدراسة لدى الطلاب النابغين. ولما كان تصنيف السلوكات بصفتها معرفية وفوق معرفية على نحوٍ دقيق، يُعدُّ أمراً صعباً، فقد استخدم بعض الباحثين مصطلح معرفي- ما وراء معرفي. ولأغراض هذه الدراسة، فقد ربطت هذه السلوكات بمراحل حل المسألة، وحددت على أنها عمليات فوق معرفية. وقد نجح

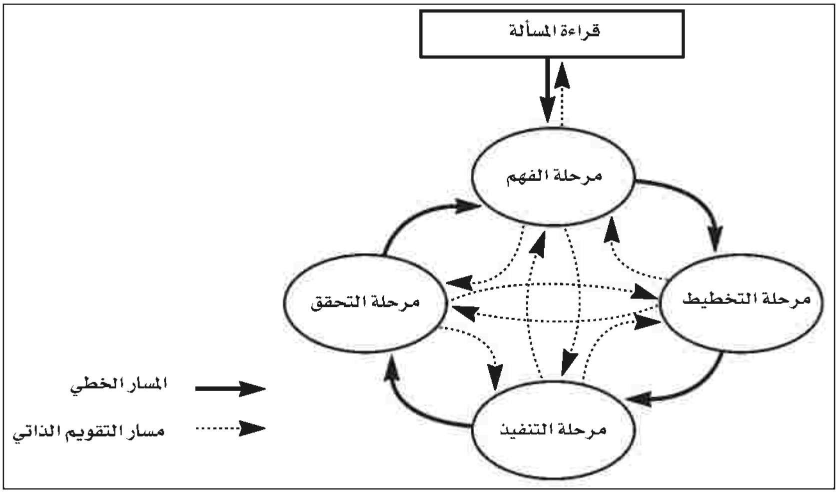
الطلاب النابغون فـي هذه الدراسة عموماً في عرض عملياتهم لحل المسائل الرياضية غير الاعتيادية، إذ قد حلوا المسألتين الأولى والثانية دون أدنى تردد، على الرغم من أن بعضهم لم يحل المسألة الأولى بصورة كاملة (حيث نسوا أن يأخذوا في الحسبان السنة الكبيسة في حلولهـم). ومع أن اثنين من الطلاب قد واجها صعوبة في التوصل إلى إجابة للمسألة الثالثة في بداية الأمر، فإنهما قد أفلحا في حلها في نهاية المطاف.

نموذج الطلاب التايلانديين لحل المسألة

جـرى تصوّر سلوكات الطلاب التايلانديين التي نوقشت ضمن نموذج من أربع مراحل موضحــة في شـكل (2:8)، أُطلق عليها اسـم: الفهم والتخطيط والتنفيـذ والتحقق، طُوّرت مــن دراســة غاروفالو وليستر. وكانــت مرحلة الفهم مــن أهم المراحل فــي توجيه الطلاب الموهوبين نحو النجاح في حل مجموعة المسائل. بعد قراءتهم المسألة قراءة جهرية، حدد الطـلاب الأسئلة التي ينبغي طرحها. وقد ذكـر الطلاب معطيات المسألة وفسروها ومثّلوها في صـور أو جداول، إضافة إلى تنظيمها تنظيماً منهجيّـاً. واستخدم الطلاب أسلوب إعادة قـراءة المسألة بهـدف تحقق صحة تمثيلاتهـم. ولوحظ أن معرفة الطــلاب المسبقة كانت ضروريــة عند تفسيرهم المعطيات، وعادوا إلــى أي مفهوم ذي صلة قبل تطوير خطة الحل، وتضمنت هذه المرحلة أيضاً التأمل في صعوبة المسألة ومألوفيتها.

كانت المرحلة الثانية هي مرحلة **التخطيط**، حيث توصل الطلاب إلى معطيات جديدة، ومثلوا المسائل بصور أو رموز أو جداول، إضافة إلى تنظيمها على صورة خطة، واستخدموا الإستراتيجيــات الفاعلــة، منهــا: رسم الصور، أو عمــل الجداول، أو البحــث عن أنماط عن طريق تطبيق المفاهيم الرياضية ذات الصلة بنظرية الأعداد وأساسيات العد والهندسة في حـل المسائل، وقد أُعيد تقويـم الخطط وتحقق صدقها، واشتقّت خطط جديدة عندما تبين عدم صدق الخطط الحالية.

أما المرحلة الثالثة فكانت مرحلة التنفيذ، حيث اقترح الطلاب جواباً نهائيّاً عن طريق إجـراء حساباتهم في هــذه المرحلة، وكتابة جمل رياضية منطقيــة تدعم خططهم، وأخيراً كتابة النتائج التي توصلوا إليها.



شكل 2:8 نموذج الطلاب التايلانديين لحل المسألة

كانت المرحلة الأخيرة هي مرحلة التحقق التي تشتمل على تحقق الطلاب إجاباتهم المكتوبة. وربما يكونون في هذه المرحلة قد أعادوا قراءة المسألة ليتحققوا حلولهم.

عندما كان الطلاب منهمكين في حل المسائل، لم تسر عملية تفكيرهم بترتيب خطي بدءاً من مرحلة الفهم وصولاً إلى مرحلة التحقق، حيث أظهرت أعمالهم أنهم، وهم ينفذون كل مرحلة من مراحل الحل، لم يكونوا يتقدمون بطريقة خطية من المرحلة الأولى إلى الأخيرة، ومن ثم، فقد كان من أهم ما توصلت إليه هذه الدراسة هو أن هذا النموذج ليس خطيّاً. وقد استخدم مصطلح التقويم الذاتي المقتبس من مونتاغو وأبلجيت في كل مرحلة؛ لمعرفة متى يراقب المشارك تفكيره وأعماله، ويظهر سلوكاً وجدانيّاً في أثناء حله المسألة. وبعبارة أخرى، فقد أثّر التقويم الذاتي في أفعال المشاركين في كل مرحلة من مراحل النموذج.

المرحلة: الفهم

1. تحديد المسألة
   - قراءة/إعادة قراءة/ إعادة كتابة المسألة والمعطيات والسؤال.
2. تحليل المسألة
   - تمثيل المسألة بصور أو جداول.
   - توضيح/تفسير/تنظيم المعطيات.
   - الربط بالخبرات السابقة.
   - التأمل في المسألة.
3. التقويم الذاتي

المرحلة: التخطيط

1. وضع خطة
   - معالجة المعطيات وتوليدها.
2. قياس الخطة
   - تطبيق المعرفة السابقة/المفاهيم الرياضية، والنظريات.
   - استخدام الإستراتيجيات (البحث عن الأنماط/عمل جداول).
   - التنبؤ بالإجابات الصحيحة/ استخدام التقديرات.
3. مراجعة الخطة
   - تحديد هل كانت الخطة ذات معنى.
   - تغيير الخطة إذا لم تنجح.
4. التقويم الذاتي

المرحلة: التنفيذ

- تنفيذ الحسابات
- بناء جمل رياضية منطقية
- كتابة النتائج/ الإجابة
- التقويم الذاتي

المرحلة: التحقق

- تفحص معقولية النتائج.
- أعد قراءة المسألة والحلول لكي تتحققها.
- انتقل إلى خطة جديدة بناءً على تحقق النتائج.
- التقويم الذاتي .

شكل 3:8 وصف مراحل حل الطلاب التايلانديين المسألة

وصف عمليات حل الطلاب التايلانديين المسألة

يظهــر الطلاب في أثناء مرحلة الفهم سلوكاً محدداً فــي محاولتهم لفهم المسألة بعد قراءتهــا بصــوت جهــوري. تشتمل أعمالهم علــى قراءة المسألــة، وكتابــة و/أو إعادة كتابة المعطيــات، وكتابة السؤال باستخدام بعض الكلمــات الواردة فيه، وإعادة كتابته. ولما كانت المسألــة الأولى على صيغــة سؤال قصير جدّاً، فقــد أعادوا كتابة الســؤال باستخدام بعض الكلمــات الواردة فيه. وعندما واجه المشاركون معلومات كثيرة في المسائل الطويلة، حاولوا كتابــة المعطيات من خــلال فهمهم المسألة. أما فــي المسألة الثانيــة، فاستعرض الطلاب معطيــات كل جــزء على حدة فــي أوقات مختلفــة. وأظهرت تصرفاتهم أنهم لــم يأخذوا في الحسبــان المعطيات جميعها في وقت واحد. وفكــر الطلاب أيضاً في المطلوب في المسألة، ولماذا طُرح.

وود (Wude): عمَّ تسأل المسألة؟ تسأل عن أعلى مجموع للنقاط.

ساكدا (Sakda): لماذا يحصل الفريق الأقــل نقاطاً على 21 نقطة؟ ولماذا يجــب أن يكون لدى الفريق الأعلى نقاطاً تعادل واحد على الأقل؟

وأمــا مــا يخص المسألــة الهندسيــة كالمسألة الثالثــة، فقد كتب الطــلاب المعطيات جميعهــا، في حين كانوا يرسمون صورة لتحقق حصولهم على كل شيء تعرضه المسألة قبل مواصلــة حلولهم. وفــي الوقت ذاته، أشارت الأشــكال التي رسمها الطــلاب إلى استعمالهم تمثيلاتهــم فــي عمليات الحل. ولــم يكن التمثيــل بالصورة مهمّــاً لفهم المسألــة الهندسية فحســب، بــل ساعدهم أيضــاً على وضع خطة للحــل. ورسم بعض الطــلاب أكثر من صورة، وكانــوا يكــررون رسم الصور إذا أخفقوا فــي التوصل إلى طريقة لحــل المسألة، إذ اعتقدوا أن الصــورة الكبيرة تزودهم بتصور أفضــل للمسألة وحلها. وأظهرت الدلائل أيضاً تمثيلات أخــرى استخدمها الطــلاب في عملياتهم لمساعدتهــم على فهم المسألــة، كعمل جداول أو كتابة تقويم (مفكرة).

نيبا (Nipa): أفكر في التقويم، هناك سبعة أيام في التقويم، أنا أكتب تقويماً الآن.

براديا (Pradya): أعمل أولاً جدولاً للسنة.

حاول الطلاب بعد كتابتهم المعطيات، توضيحها إلى أكبر قدر ممكن، وفي الواقع، كانت إيضاحاتهم مستندة إلى معرفتهم السابقة بالرياضيات. وعلى نحو ما هو الحال في المسألة الثانية، فقد فكروا جميعاً في عبارة «يلعب كل فريق مع الفريق الآخر مرة واحدة فقط». وأشارت تفسيراتهم إلى أنهم يمتلكون فكرة حول أساسيات العدّ.

براديا: حسناً يلعب كل فريق أربع عشرة مرة.

سيرا: خمسة عشر فريقاً يلعبون مع كل فريق آخر، مرةً واحدة. وهذا يعني أن الفريق الأول سيلاقي الأفرقاء الأربعة عشر الأخرى.

نيبا: يلعب كل فريق أربع عشرة مرة.

وودي: دعونا نرى الفريق الأول. يجب أن يلاقي الفريق الأول الفرق الأربع عشرة الأخرى.

ساكدا: أي أن كل فريق يلاقي الأفرقاء الأخرى أربع عشرة مرة. وبذلك، يلعب الفريق أربع عشرة مرة.

كتب الطلاب في المسألة الثالثة المعطيات جميعها، كل جزء على حدة، عندما كانوا يرسمون الصورة. وفي الوقت ذاته، دمجوا معرفتهم السابقة فيما يخص المثلث المتساوي الساقين بالمعطيات والحسابات لمعرفة الزوايا الأخرى وطول الضلعين في أثناء عملية الرسم.

ويلاحظ خلال مرحلة الفهم، أن الطلاب فكروا في المسائل من حيث مألوفية معرفتهم المسألة والصعاب التي واجهوها في أثناء عملهم لفهم المسألتين الأولى والثالثة.

ساكدا: أما ما يتعلق بهذه المسألة، فلم أر مثلها من قبل، الجمعة الثالثة عشرة.

سيرا: كيف نحل هذه المسألة؟ أنا مرتبكة. الجمعة الثالثة عشرة.
نيبا: لا أستطيع حلها.

التخطيـط: بحث الطــلاب التايلانديون في أثناء مرحلة التخطيط عن خطط حل عن طريق المعطيات، والإتيان بمعلومات جديدة. وعندما وضعوا خطتهم للمسألة الثانية، ركزوا على جملة معينة، ألا وهي: «يحصل الفريق على ثلاث نقاط للفوز، ونقطتين للتعادل، ونقطة واحــدة للخسارة.» ساعدتهم هــذه الجملة على الإتيان بالمعلومات نفسها، كل لعبة تنتج أربع نقاط.

ثــم انتقل الطلاب إلــى الجملة الآتية، وهي: (عنــد انتهاء المبــاراة، يحصل كل فريق علــى مجمــوع نقاط يختلف عــن الآخر. ويكون مجمــوع نقاط الفريق الــذي يحصل على أقل مجموع للنقاط 21 نقطة)، وكوّنت هذه الجملة قيداً على خططهم. وقادت عملية التلاعب في المعطيات، والمعلومات الجديدة، هؤلاء الطلاب نحو تحديد الخطط الآتية لمعرفة المجموع الكلــي للمباريات المنجــزة، ومجموع النقاط التي حصل عليها أعلى فريق قبل إثبات السؤال المطروح (أي، لماذا يجب أن يكون لدى الفريق الأعلى نقاطاً تعادل واحد على الأقل؟).

أوضــح الطلاب الأسباب الكامنة وراء خططهم للمسألة الأولى على النحو الآتي: بدأت خطة وودي بتحديد يوم الجمعة في الأول من يناير، وبحث بعد ذلك عن الجمعة الثالثة عشرة فــي العام نفسه. استمر في بحثة بتحريك الأول من يناير إلى السبت فالأحد وهلم جرّا، إلى أن حــدد سبــع حالات للسنة (السنــة التي يكون فيها عدد أيام شهــر فبراير ثمانية وعشرين يومــاً)، وعلــى نحوٍ مماثل للحالات السبع الأخرى للسنوات التــي يكون عدد أيام شهر فبراير فيها تسعة وعشرين يوماً. وخططت نيبا في البداية لحل هذه المسألة مستخدمة التناقضات كما قالت، «كيف سأحلها؟» أعتقد أن يوم الجمعة الثالث عشر يحدث سنويّاً، أو أفترض عدم حدوثــه سنويّاً، وعندئذٍ أجد التناقض. «بينما لم ينته بها الأمر إلى استخدام هذه الطريقة، فقد درست مجموعة متنوعة من المسائل الرياضية لتحديد طريقة حل المسألة، حيث قالت: «أتُعدّ هذه المسألة مسألة توافقيات أم مسألة نظرية أعداد؟» لقد وجدت الآن طريقة للحل.

واجـه بعض الطلاب صعوبة في وضـع خطط للمسألة الثالثة. وفي الوقت ذاته، أشارت الأدلـة إلـى محاولـة بحثهـم عن طرق متعـددة لحل هـذه المسألـة. إذ حاول ساكـدا حلها باستخـدام الهندسـة الإقليدية وعلم المثلثات. وقـد بحث عن طرق متعددة لحـل المسألة، كرسم خط ورسم دائرة واستعمال قانون الجيوب (Law of Sines). وقام أيضاً باستحضار ما تعلمه في اليوم السابق عندما توصل إلى خطة حل تستخدم الفرجار في رسم الدائرة التي تمـر بالنقطتيـن (G, D)، وتلتقي مع الساق (BC) عند النقطـة (F). وواجهت نيبا صعوبة وهـي تدرس كثيراً من الخطط للمسألة الثالثة، حيث رسمت خطّاً عموديّاً وخطّاً موازياً، لكن هذين الخطين لم يؤديا الغرض. وأخيراً، تمكنت من التوصل إلى طريقة لحل المسألة، حيث رسمت الخط (C, F) وحصلت على الجواب.

تنبأ الطلاب بالحل عندما وضعوا خطة للمسألة الأولى. مثلاً، اعتقد كل من نيبا وسيرا وبراديـا أن يوم الجمعة الثالث عشر يحـدث كل سنة، وكان سكادا يعرف من خبرته السابقة أن ذلك يحدث كل عام.

أشار الطلاب عندمـا وضعوا الخطط إلى المفاهيم الرياضية التي اعتقدوا أنها يمكن أن تستعمـل في خططهم، فقد فكّر سكادا في مبدأ برج الحمام، لكنه لم يستخدمه في خطة الحل، في حين استخدم وودي نظرية الباقي للعدد 7 للمسألة الأولى، وعلم المثلثات للمسألة الثالثـة. وأشارت هذه المناحـي إلى استخدام الطلاب معرفتهم الرياضيات في الحلول التي قدموها.

ساكدا: أو ربما نحتاج إلى استخدام مبدأ برج الحمام.
وودي: أخذت التاريخ في الحسبان باستخدام نظرية الباقي للعدد 7.
وودي: أفكر في كيفية استخدام علم المثلثات في حل هذه المسألة.

عند تقويم الطلاب لخطةٍ ما، طبّقوا معرفتهم السابقة بنظرية الأعداد وأساسيات العد والهندسـة، حيث استخدموا مفهوم الباقي في المسألة الأولى؛ ليظهروا أن يوم جمعة الثالث عشـر (Friday 13) يحدث كل عام، حيث وضـع وودي الأول من يناير بصفته يوم جمعة، ثم أخـذ يبحـث عن يوم جمعة الثالث عشر فـي العام نفسه، وأي جمع أخـرى في العام نفسه لا

يصــادف فيها يوم الجمعة الثالث عشــر، وواصل هذه العملية بنقله اليوم الأول من يناير إلى السبــت فالأحد وهلّم جــرّا، إلى أن حصل على سبع حالات للسنة التــي يكون عدد أيام شهر يناير فيها ثمانية وعشرين يوماً، وسبع حالات أخرى للسنوات التي يكون عدد أيام شهر يناير فيها تسعة وعشرين يوماً.

تمثّــل هدف الطلاب في المسألــة الثانية في محاولة إثبات، لمــاذا يجب أن يكون لدى الفريــق الحاصــل على أعلى عدد من النقاط تعادل واحد على الأقل. ومع أنهم أثبتوا حلولهم بطريقــة البرهان المستندة إلى التناقضات، فإن استدلالاتهم قد تباينت. وقد عدّ براديا أن الفريــق الحاصل علــى أعلى عدد من النقاط قــد لعب أربع عشرة مــرة، وحصل على خمس وثلاثيــن نقطة، وعلّل ذلك بقوله أنه إذا لم يحصل هذا الفريق على أي تعادل، فسيكون لدى الفريــق فوز وخسارة فقط، ومــن ثم، يجب أن يكون عدد النقاط فرديّــاً؛ لوجود ثلاث نقاط للفــوز أو نقطــة واحدة للخسارة. وعندما ضُرب العدد الزوجــي في العدد الفردي تبين له أن النــاتــج كان عــدداً زوجيّاً. ولمّا كان العــدد 14 هو عدداً زوجيّاً، فإن مجمــوع النقاط النهائي يجب أن يكون زوجيّاً، لكن العدد 35 عدد فردي.

فــي حيــن اعتقدت سيرا أنه إذا لــم يحصل هذا الفريق على أي تعــادل، فعندئذٍ يجب أن يفــوز الفريــق إحــدى عشرة مــرة، ويخسر ثلاث مــرات بحيث تكون النتيجــة على النحو الآتــي: 36=3+33 نقطة. وتعني هــذه النتيجة أن الفريق الحاصل علــى أعلى نقاط دون أي تعــادل يجــب أن يحصل على ســت وثلاثين نقطة علــى الأقل، لكن هذا الفريــق حصل على خمســ وثلاثين نقطة فقــط. أمّا نيبا، فقد افترضــت أن الفريق لم يحصــل على أي تعادل، فوضعــت المعادلة الآتية التي تمثل النقــاط عندما يلعب الفريق أربع عشرة مرة ويفوز بـ(x) مــن المــرات: $3x + (14 - x) = 14 + 2x = 2(7 + x)$ نقطة. ولاحظت أن $2(7+x)$ عدد زوجيّ، وأن 35 عدد فردي.

افترض وودي أن القيم x, y تشير إلى عدد مرات الفوز والتعادل. وبعد أن حل المعادلات تبيّــن لــه أن قيــم $y = 21 - 2x$، وأن $21-2x$ عدد فردي، وأن قيمة x كانت أكبر من صفر؛ وبذلــك، توصــل إلى أن $(y \geq 1)$. في حين عدّ سكادا أن مجموع نقاط الفريق الكلية ستكون

اثنتيـن وأربعين إذا فـاز في المباريات جميعها. وفي كل مرة يخسر فيها الفريق ينقص عدد نقاطه بواقع نقطتين من أصل اثنتين وأربعين نقطة، لكن مجموع نقاطه كان خمسة وثلاثين. وعلـى هذا، تكون هذه النتيجـة مستحيلة، أي حصول الفريق على خمسـ وثلاثين نقطة إذا نقص رصيده بواقع نقطتين من مجموع النقاط الاثنتين والأربعين مع كل خسارة.

طبّـق وودي قانـون الجيوب علـى المسألة الثالثة. وبهـذا التطبيق، توصـل إلى معادلة المثلثـات، وحاول معرفة قيمة الزاوية (CDE) ومع ذلـك، لم يحل هذه المعادلات. ولجأ إلى استخـدام طريقة التجربة والخطأ، بدلاً عن ذلك. وظل يغيّـر قيمة الزاوية في المعادلة إلى أن توصل إلى الحل.

يلاحـظ في مرحلة التخطيط، استعمال الطلاب إستراتيجيات ذات كفاية كبيرة، مثل: عمـل الجـداول، واستخدام الرمـوز، والبحث عن أنمـاط لتمثيل المعلومـات، حيث افترض براديـا في المسألـة الأولى اليوم الخاص بتاريخ 13 ينـاير واستخـدم المتغير x ليمثله، حيث مثل المتغير x الأحد أو الاثنين أو الثلاثاء أو الأربعاء أو الخميس أو الجمعة أو السبت، ووضع الباقي الذي وجده في الجدول. أما سكادا، فرسم جدولاً يحتوي على الشهور وعدد الأيام في ذلك الشهر، والباقي لحل المسألة الأولى.

استخـدم ثلاثـة طلاب، هم: سيـرا، وودي ونيبا الرمـوز عند وضع معـادلات للمسألة الثانيـة، واستخدم الطلاب أيضاً متغيرات لتمثيـل قيمة الزاوية التي كانوا يحاولون معرفتها في المسألة الثالثة. وعندئذٍ بدؤوا بمقارنة هذه الزاوية بغيرها من الزوايا، وبحثوا أيضاً عن أنمـاط عندمـا حلوا المسألة الأولى. مثلاً، بحث وودي عن نمط يوم الجمعة الثالث عشر بعد أن وضع الأول من ينـاير بصفته يوم جمعة، وبحث عن أيام الجمع الأخرى في شهر ينـاير بِعَدّ الأيـام يوماً يومـاً، وأوضح الأربع عشرة حالة التي يقع فيهـا الأول من ينـاير في يوم الجمعة، السبت، الأحد........ الخميس، وذلك للسنوات التي يكون فيها عدد أيام شهر فبراير ثمانية وعشرين يوماً، والسنوات التي يكون عدد أيام شهر ينـاير فيها تسعة وعشرين يوماً.

وتبيّن وجود أدلة تثبت أن الطلاب قد تحققوا جدوى خططهم، وأنهم بحثوا عن خطط فاعلة، وأنهم كانوا يغيرون من خططهم في أثناء هذه المرحلة.

ساكدا: أربـع عشـرة حالة فقط. هل مـن المفيد كتابة مفكـرة؟ ليس بالأمر الجيد فعل ذلك.

وودي: ثمة طرق أخرى أسهل من هذه الطريقة؟

براديا: فـي الخطوط يتعيّن عليّ أن أمدّها؟ هل هو الخط الممدود الذي يُعدُّ الأكثـر فائدة للحصول على الإجابة؟ أي الخطوط أفضل؟ حسناً، قد يكون هذا الخط جيداً.

التنفيـذ: نفّـذ الطـلاب فـي أثنـاء هـذه المرحلـة العمليـات الحسابيـة عـن طريق تطبيـق الصيـغ الرياضيـة للوصـول إلـى الجـواب النهائـي. وكما هو الحـال فـي المسألة الثانيـة، فقـد كتـب ثلاثـة طـلاب «جمـع 15 و 2» عندمـا حسبـوا عـدد المباريـات فـي هـذه المسابقـة. وتشيـر هـذه الجملـة إلـى معرفتهـم المعادلـة ذات الحديـن $C_{(15,2)}$. ويلاحـظ أن نيبـا لـم تذكـر هـذه الكلمـات، لكنهـا حسبـت النتيجـة بالطريقـة ذاتهـا. فيمـا حسـب سيـرا النتيجة عـن طريق إيجـاد مجمـوع تسلسـل المباريـات التـي أقيمت، وهـو $105=2/(15\times14) = 1+2+3+....+12+13+14$ = مـرات». واستخـدم الطلاب كافـة مجموع صيغـة التسلسل الحسابي لحسـاب مجموع التسلسـل $21, 22, 23,....,35$ في حلهم هذه المسألة. وحل بعض الطلاب معادلات للتوصل إلى متغير غير معروف كما فعل كلّ من وودي وسيرا في المسألة الثانية.

وودي: نحصل من هاتين المعادلتين على: $2x + y = 21$

سيرا: نطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى فنحصل على:

$2a + b \geq 21$. آه...لحظة من فضلك، إذا افترضنا أن الفريق صاحب أعلى نقاط ليس لديـه أي تعـادل، فهذا يعني أن $B=0$. وعندئذٍ نحصل على: $3a + c \geq 35$ و $a+c=14$. ولما كانت $2a \geq 21$، فإذن $a \geq 10.5$.

عادةً ما استخدم الطـلاب عبارات رياضية منطقية تدعم خططهم قبل كتابة النتيجة أو الجواب النهائي.

نيبا: إنهـا تحدث كل عـام، لأنني أعتقد أن الثالث عشـر من يناير يصادف يـوم الجمعة، في حين يقـع الثالث عشر من الأشهـر الأخرى في بقية الأيـام الستة. وبناءً عليه، هناك يوم جمعة يقع في الثالث عشر في كل سنة.

سيرا: إذا لم يحصل هذا الفريق على أي تعادل، يجب أن يفوز إحدى عشرة مرة ويخسر ثلاث مرات كي يحصل على النتيجة 36 = 3+33 نقطة. وهـذا يعنـي، أن الفريق الحاصـل على أعلى النقـاط دون أي تعادل، يجـب أن يحصل على مجموع نقاط يسـاوي 36 في حده الأدنى، لكنه حصل على 35 فقط، وهذا تناقض واضح. وبناءً عليه، يجب أن يكون لدى الفريق صاحب أعلى نقاط تعادل واحد على الأقل.

التحقق: فحص الطلاب التايلانديون في أثناء المرحلة الأخيرة وهي مرحلة التحقق، عملياتهـم ونتائجهم أحيانـاً، للتحقق أن الحل ذو معنى. وكانوا عـادة يراجعون خطط الحل عندمـا لا تنجح هذه الخطط، وأعادوا فحص ما عملوه، وكانـوا قادرين على توضيح أسباب الحلول التي قدموها. وعندمـا تحققوا صحة الحلول، أعادوا قراءة المسألة، وتحققوا صحة الحلول المكتوبة باستخدام عمليات دورية للتثبت من الخطة الموضوعة من حيث فائدتها في حـل المسائل. وكانت نيبا الطالبة الوحيدة التي أولت اهتماماً بتحقق إجابة المسألة الثانية. وقد توقفت عن الكلام في أثناء هذه المرحلة ثلاث دقائق إلى أربع. لذا، طلبت إليها الباحثة أن تتحدث بصوتٍ عالٍ بما كانت تفكر فيه.

الباحثة: بمَ تفكرين؟

نيبا: أتفحصـ إجابتـي، أتفحصـ ما كتبت، أهـو صحيح أم خطـأ؟ عاودت قراءة السؤال، ثم قرأت إجابتي مرة أخرى، والآن انتهيت من كل ذلك.

ومـع أن الطلاب الآخرين لـم يظهروا أنهم تحققوا إجاباتهم على نحوٍ مباشر، فإن من الواضح أن نيبا قد فعلت ذلك، وتحقق الطلاب أيضاً ما فعلوه في الخطة قبل تأكيد إجاباتهم.

وودي: لقد سبق لي أن تحققت الحالات كلها، أربع عشرة حالة، تحدث الجمعة الثالثة عشرة في الحالات جميعها، وبناءً عليه، فهي تحدث كل عام.

براديا: حصلنا عليها جميعاً، لدينا اثنا عشر شهراً في السنة.

وتثبّت وودي أيضاً من عملياته الحسابية مرة أخرى بعد حصوله على النتيجة باستخدام صيغة المعامل ذي الحدين لمعرفة مجموع المباريات التي أُقيمت، ثم أعاد كتابة النتيجة لتحقق صحتها.

وودي: هل هي صحيحة؟ صحيحة. هل هي مجموع المباريات البالغ عددها 105 مباريات؟

بعد تنفيذ سكادا حساباته لمعرفة عدد المباريات التي أُقيمت، لاحظ أن النتيجة أكبر كثيراً مما قاله: «إنها كبيرة جداً، هل أخطأت في مكان ما؟ هناك 105 مباريات لخمسة عشر فريقاً». عند هذه النقطة، تحقق الأمر ليتأكد أن إجابته ذات معنى. ومع ذلك، لم يظهر أي طريقة محددة لتحقق الإجابة.

التقويم الذاتي: إضافة إلى المراحل آنفة الذكر جميعها، أظهر الطلاب مراراً عبارات تشير إلى التقويم الذاتي، تعينهم على مواصلة حل المسألة، إلى أن تمكنوا من إنجاز المهمة. لقد استخدم مصطلح «التقويم الذاتي» (Self-Evaluation) بصفته فئة للترميز في دراسة مونتاغ وأبليجيت عندما قوّم الطلاب أنفسهم بصفتهم قادرين على حل المسائل، أو عندما استخدموا جملة المتكلم عند الحديث عن أدائهم. ولأغراض هذه الدراسة، قُسّمت عبارات التقويم الذاتي إلى نوعين: أولاً، أظهر الطلاب المراقبة الذاتية لأعمالهم وهم يحلّون المسألة، إلى أن توصلوا إلى الحل كاملاً. وثانياً، استخدم الطلاب جملاً وجدانية عند تقويمهم أنفسهم بوصفهم قادرين على حل المسائل، من حيث مدى ثقتهم بأنفسهم والصعاب والإحباطات التي واجهوها، إضافة إلى ما يبذلونه من جهد في أثناء حلهم المسائل. يمثل جدول 8 :1 مجموعة من الأمثلة على عبارات التقويم الذاتي في كل فئة من الفئات.

جدول 8: 1 مقتطفات من عبارات التقويم الذاتي

التقويم الذاتي	مقتطفات من الأمثلة
المراقبة الذاتية	ماذا بعد؟ ما الذي أفعله الآن؟
	ساكدا: أين الطريق إلى الحل؟ كيف ستجد الإجابة؟
	ساكدا: استمر بالمحاولة، واصل العمل.
الوجدان	**نيبا:** آه... فهمت، وجدتها.
• الثقة	**وودي:** هل هي صحيحة؟
	براديا: لا أعرف إن كان بمقدوري حلها أم لا.
	براديا: لا أجد شيئاً غير صحيح مما قمت به كله.
	ساكدا: أعتقد أن بوسعي تخمينها.
الوجدان	**نيبا:** لا أعرف ماذا سأفعل، ليس بوسعي حلها.
• الصعوبة/ الإحباط	**سيرا:** كيف نحل هذه المسألة؟ أنا مرتبك.
	ساكدا: آه...لا أستطيع التفكير في كلمات لتفسير ذلك.
	نيبا: أرسم صورة جديدة. هذه الصورة صغيرة جدّاً. لقد أربكتني كثيراً. عندما أراها لا أستطيع التفكير البتة.
	ساكدا: لا أستطيع تخمين المسألة. أنا مرتبك ومتوتر جدّاً.
	ساكدا: لماذا لا أستطيع التفكير فيها؟ لا أستطيع التوصل إلى أي شيء.
الوجدان	**وودي:** يجب أن نفكر ببطء، فكر ببطء.
• الجهد	**وودي:** ام م م..يحتاج الأمر إلى تفكير كثير.
	ساكدا: آه...أنا كسول للتفكير في المجموع.
	براديا: أنا كسول جدّاً الآن.

مناقشة النتائج

تصف هذه الدراسة نموذجاً يستحوذ على عمليات الحل للطلاب التايلانديين النابغين. وأشارت النتائج إلى أن عمليات حل الطلاب كانت ترتكز على التحليل المنطقي والإستراتيجيات المنظمة. وقد أظهروا مقدرة عالية في التعبير لفظيّاً عن أفكارهم،

وتفسيــر استدلالاتهم للحلول. وقد أظهرت هذه المقدرة مدى فهمهم للبنى والإستراتيجيات الرياضيــة الشبيهة بتلك الموضحة في دراسة هينز (Heinz, 1993). وكانت نتائج الدراسة منسجمة مع الدراسات الأخرى، حيث كان المشاركون فيها من الثقافات الغربية. وقد كانت النتائـج منسجمــة ولا سيما ضمن سيــاق إستراتيجيـات المسألة التـي استخدمها الطلاب النابغـون مثـل؛ رسم الصور، وعمـل الجداول، أو البحـث عن أنماط بهـدف تسهيل فهمهم المسائـل (Gorodetsky & Klavir, 2003; Montague, 1991; Montague & Applegate, 2000; Sriraman, 2003). تبيّــن بحوث الثقافــة الغربية أن الطلاب التايلانديين النابغين طبقــوا معرفتهم السابقة على المسألة، أو الموقف غير المألوف. وقد استفادوا من المعرفة الرياضيــة المتنوعــة فــي استحضــار النظريــات، والاعتماد عليهــا بهدف إيجــاد معلومات إضافيــة ذات صلة بالمسألــة واستنباطهــا (Goro Detsky & Klavir, 2003; Lawson & Chinnappan, 1994; Overtoon-Corsmit, Dekker & Span, 1990). وقــد لوحــظ أن الطــلاب التايلانديين الموهوبين يكثرون من المحادثــة والحوار عند مواجهتهم بمسائل صعبة جدّاً. وتُعدُّ هذه النتيجة مماثلة لما قام به الطلاب الأمريكيون في دراسة سريرامان.

واستناداً إلى تحليل النتائج، برزت أدلة رئيسة ذات صلة بعمليات الطلاب لحل المسائل تتألــف من خمس فئات، هــي: المعرفة الرياضية المتقدمة، الرغبة فــي أخذ طرائق الحلول البديلــة المتعددة في الحسبان، تذكر المعرفة والخبــرات السابقة والرغبة في استخدامها، الاعتماد على الحالة الوجدانية، ودعم المعلمين والآباء. ففي الفئة الأولى، دمجت المفاهيم الرياضيــة المتقدمة في حلول الطلاب، منهــا: قانون الجيوب، وصيغة المعامل ذي الحدين، وصيغة مجموع التسلسل الحسابي. وكانت تلك المفاهيم جميعها تدرس في الصفين الحادي عشــر والثانــي عشر ضمن المنهــاج التايلاندي الوطنــي. ومع ذلك، فقــد اكتسب الطلاب، الذيــن ليسوا فــي هذين الصفين، المعرفــة السابقة بطريقة ما. وأشارت هــذه النتيجة إلى وجــود فهم لــدى هؤلاء الطــلاب للمفاهيــم الرياضية عاليــة المستوى، وهــي إحدى سمات الطــلاب الموهوبين. وأشارت النتائــج أيضاً إلى القدرة العالية على حــل المسائل، وتطبيق هذه المفاهيم المتقدمة للتوصل إلى حل صحيح للمسألة.

وفي الفئة الثانية، بحث الطلاب عن طرائق بديلة للحل في أثناء تفكيرهم في المسائل؛ إذ حاولـوا فهم المسألة وحلهـا باستخدام مجموعة متنوعة من الطرائق عند مواجهتهم لأي صعاب. وكما هو الحال في المسألة الثالثة، فقد أظهر كل من سكادا ونيبا في حلهما، رغبتهما وقدرتهمـا على دراسة مسارات مختلفة، بدلاً مـن الإصرار على المسارات التي لا خير فيها. ومـع ذلك، فقد اعتمدت الطـرق التي اتبعاها في البحث عن مسارات بديلة على معتقداتهما وخبراتهما السابقة المتصلة بالتعامل مع المسائل الرياضية.

أما الفئـة الثالثة، فتشير إلى وضوح تأثير معرفة الطلاب السابقة، حيث طبّق الطلاب أساليـب وإستراتيجيات كانوا قـد استخدموها في السابق، فقد أشـار وودي إلى استخدامه منحـى علم المثلثات في المسألة الهندسية؛ لأن هـذه الطريقة، وبحسب خبرته في حل هذا النـوع من المسائل، قد أوصلته إلى الحل في أكثر من 60% من الحالات. وكان متخوفاً أيضاً من إخفاقه في حل المسألة إذا استخدم الهندسة الإقليدية. ومع ذلك، فقد كان ينوي محاولة رسم بعض الخطوط إذا أخفق في التوصل إلى الإجابة باستخدام علم المثلثات. أما ما يتعلق بالمسألة الأولى، فقد اكتسب سكادا خبرة معرفة الجمعة الثالثة عشرة في التقويم السنوي، حيـث قال «فـي الحقيقة، أنا دائماً أبحث عن يوم الجمعة الثالـث عشر في كل تقويم سنوي. مثـلاً، سيكون في شهر ينايـر في العام القادم، يوم الجمعة هو الثالث عشر من يناير. وتبين لي أن هذا يحدث كل عام، وهذه مسألة رياضية، يجب أن تربط الجمعة الثالثة عشرة بنظرية الأعداد. واعتقد أن ثمة مسألة أخرى كنت قد قرأتها وهي تتعلق بيوم رأس السنة الجديدة».

ويلاحـظ أن السلـوك الوجدانـي (السلـوك المستند إلـى العاطفة أكثر مـن المعرفة والأفـكار والأفعـال) فـي الفئـة الرابعـة أدى دوراً مهمّـاً فـي عمليـة حـل المسائـل لـدى الطـلاب الخمسـة النابغيـن. وكانـت هـذه النتائـج منسجمـة مـع نتائـج كارلسـون وبلوم (2005 Carlson And Bloom) وديبيلـس (Debellis, 1998). وكمـا أوضـح جولـدن (Goldin, 2000) فقـد زاد القائمـون علـى حـل المسائل الرياضية من الطـرق التي يمكن استعمـال الوجـدان فيها لتوجيـه خطواتهـم، والتأثير فـي معرفتهم بطريقة بنّـاءة في حل المسائـل. ففي هذه الدراسة، كان الوجدان واضحاً جليّاً من حيث الثقة بالنفس، والإحباط،

والجهد. فقد اعتمد الطلاب على ثقتهم بأنفسهم لمراقبة إحباطهم وقلقهم، محوّلين هذه المشاعر إلى تحفيز قادهم في نهاية المطاف إلى التوصل إلى الحل. لقد حافظت دافعيتهم على الاهتمام الذي لديهم، وشجعتهم على مواصلة العمل لحل المسألة بفاعلية. وزيادة على هذا، فقد عبر الطلاب عن مشاعر إيجابية، وهم يحاولون حل المسألة. وأشار أحد الطلاب، مثلاً، إلى أنه كان متوتراً بسبب مستوى صعوبة إحدى المسائل المعطاة، مع أنه لم يكن تحت وطأة تحديد الوقت، كما قال سكادا: «شعرت بالتوتر. ومع ذلك، هذا ليس اختباراً، وبوسعي أن أستغرق الوقت الذي أريد. لذ، واصلت العمل».

أما الفئة الخامسة، فتتمثل في ملاحظة دعم المعلمين والآباء الواضح بحسب إجابة وودي لسؤال طرح في المقابلة. إذ يعتقد أن الدعم الكبير قد ساعده كي يصبح قادراً على حل المسائل.

الباحثة: ما الذي يجعل المرء قادراً على حل المسائل، في رأيك؟

وودي: كل شيء على ما أظن. أما أنا، فقد حظيت بدعم متميز من والديّ، وساعدني معلميّ كثيراً. وكانت أمي تبحث على الدوام عن مسألة رياضية هنا وهناك، وتطلب إليّ أن أحلها، وكنت أحب أيضاً قراءة الكتب الرياضية.

لا تظهر إجابة الطالب هذه مثالاً على دعم المعلمين والآباء للطلاب فحسب، بل إنها توضح جانباً من تأثير الثقافة التايلاندية. وينسجم هذا الدليل مع الدراسات في هذا المجال، إذ ينظر الآباء في الثقافة الآسيوية إلى تعليم الأبناء بصفته أعلى سلم أولويات التربية والتنشئة. وتؤكد هذه الثقافة على تعليم الأبناء، مع وجود أولوية لتعلم الرياضيات (Hatano, 1990; Geary, 1996)، وأظهرت هذه القيمة الثقافية للرياضيات أيضاً الاختلافات في استثمار الأبناء وأولياء الأمور والمعلمين تعلم الرياضيات (Geary, 194; Stevenson & Stigler, 1992). وربما يكون تركيز الثقافة التايلاندية على أهمية تعليم الأطفال عاملاً مهمّاً في نجاح هؤلاء الطلاب في عملية حل المسائل الرياضية.

محددات الدراسة

مع أن الطلاب لم يسبق لهم أن رأوا المسائل من ذي قبل، فإن هناك احتمالاً بانحراف النتائج بسبب المعرفة السابقة لدى الطلاب، إذ يمكن أن تكون خلفيتهم ومعرفتهم وخبراتهم في حل المسائل الرياضية السابقة قد أثرت بعض الشيء في طريقة تناولهم المسألة والحلول التي توصلوا إليها. وكان عدد المسائل الرياضية التي طرحت على الطلاب قليلة ومحدودة بمحتوى رياضي معيّن. وربما تكون الأنماط المحددة من المسائل قد أثرت في أدائهم إذا كانوا غير مرتاحين، أو غير متخصصين في هذا الجانب من المحتوى. ولم يواجه المشاركون أي معضلة في التعبير لفظيّاً عن عملية تفكيرهم، على الرغم من أنها كانت تجربتهم الأولى في ممارسة التفكير بصوت عالٍ. وربما تكون طريقة التفكير بصوت عالٍ قد طورت من عمليات تفكيرهم، وساعدت على تحسين طرائقهم مقارنة بطريقة التفكير التقليدية. وقد لا يكون المشاركون قد عبروا عن أفكارهم جميعها، بسبب الجهد الإضافي الذي يتعين عليهم القيام به نتيجة تطبيقهم أسلوب التفكير بصوت مرتفع. إضافة إلى ذلك، يفترض أن يكون الطلاب قد أجابوا عن أسئلة المقابلة كلها بعيداً عن التحيز أو الاهتمام باحترام الذات.

التداعيات المستقبلية للبحث

لقد أُجريت الدراسة في أثناء وجود المشاركين الخمسة في معسكر للتدريب. وربما تختلف النتائج لو أجريت على عدد أكبر من المشاركين مدة أطول من الوقت. وهناك حاجة إلى إجراء دراسة مستقبلية تراقب العمليات والسلوكات وتقارن بينها، عند التعامل مع الطلاب داخل بيئتهم المدرسية بدلاً من بيئة معسكرات التدريب. وقد ساعد غياب تحديد الوقت على التخفيف من عبء الضغط على الطلاب، وأعانهم أيضاً على تفعيل قدرتهم على حل المسائل. وهناك حاجة في الدراسة المستقبلية إلى أخذ عامل الوقت في الحسبان، عند قيام الطلاب بحل مسائل رياضية غير اعتيادية؛ من أجل تعزيز بحث الطلاب عن مسار حلهم. وتشير النتائج إلى استخدام الطلاب التايلانديين النابغين المعرفة السابقة على نحوٍ فاعل، مستعملين مجموعة متنوعة من المعرفة، وامتلاكهم القدرة العالية على التعبير

لفظيّاً، وتفسير تعليلاتهم للحلول التي توصلوا إليها. وأنهم قادرون أيضاً على دمج المفاهيم الرياضيــة المتقدمة في عملية حــل المسألة. ومن ثم، يجب أن تأخذ البحوث المستقبلية في الحسبان هذه العوامل، وتدرس مدى تأثيرها في العملية، وفي قدرة الطلاب الموهوبين على حــل المسائــل. تشير النتائج إلى استخــدام الطلاب الموهوبين عبــارات التقويم الذاتي في أثنــاء جلسات التفكير بصوت عالٍ لتساعدهــم على أن يصبحوا متضلعين من حل المسائل. ومن المنطقي أن يعمل الباحثون على استكشاف المتغيرات الأخرى المتصلة بهذه العمليات، وطرق تحسين هذه المتغيرات من أجل العمل بفاعلية أكبر في أثناء حل المسائل.

قائمة المراجع

Alexander, J. M., Carr, M., & Schwanenflugel, P. J. (1995). Development Of Meta–cognition In Gifted Children: Direction For Future Research. Developmen–tal Review, 15, 1–37.

Apsimon, H. (1991). Mathematical Byways In Ayling, Beeling, And Ceiling. Oxford, Ny: Oxford University Press.

Artzt, A. F., & Armour–Thomas, E. (1992). Development Of A Cognitive–Meta–cognitive Framework For Protocol Analysis Of Mathematical Problem Solv–ing In Small Group. Cognition And Instruction, 9, 137–175.

Bloom, B., Englehart, M. Furst, E., Hill, W., & Krathwohl, D. (1956). Taxonomy Of Educational Objectives: The Classification Of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain. New York: Longman.

Brown, A. (1978). Knowing When, Where And How To Remember: A Problem Of Metacognition. In R. Glaser (Ed.), Advances In Instructional Psychology (Pp. 77–165). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The Cyclic Nature Of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem Solving Framework. Educational Studies In Mathematics, 58, 45–75.

Covington, J. (2005). Solutions To January Calendar. Mathematics Teacher, 98, 334–336.

Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1998). Smart Problem Solving: How Metacogni–tion Helps. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), Metacogni–tion In Educational Theory And Practice (Pp. 47–68). Mahwah, Nj: Erlbaum.

Debellis, V. A. (1998). Mathematical Intimacy: Local Affect In Powerful Problem Solvers. Proceedings Of The 20Th Annual Meeting Of The North American

Group For The Psychology Of Mathematics Education (Pp. 435–440). Columbus, Oh: Eric Clearinghouse For Science, Mathematics, And Environmental Education.

Flavell, J. H. (1992). Metacognitive And Cognitive Monitoring: A New Area Of Cognitive Development Inquiry. In T. O. Nelson (Ed.), Metacognition–Core Readings, (Pp. 3–8). Library Of Congress.

Fortunanto, I., Hecht, D., Tittle, C. K., & Alvarez, L. (1991). Metacognition And Problem Solving. Arithmetic Teacher, 39, 38–40.

Gardiner, A. (1987). Mathematical Puzzling. Oxford, England: Oxford University Press.

Garofalo, J. (1992). Number–Consideration Strategies Students Use To Solve Wordproblems. Focus On Learning Problem In Mathematics, 14, 37–50.

Garofalo, J. (1993). Mathematical Problem Preferences Of Meaning–Oriented And Number–Oriented Problem Solvers. Journal For The Education Of The Gifted, 17, 26–40.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, And Mathematical Performance. Journal For Research In Mathematics Education, 16, 163–176.

Geary, D. C. (1994). Children's Mathematical Development: Research And Practical Applications. Washington, Dc: American Psychological Association.

Geary, D. C. (1996). Biology, Culture, And Cross–National Differences In Mathematical Ability. In R. J. Sternberg, & T. Ben–Zeev (Eds.), The Nature Of Mathematical Thinking, (Pp. 145–171). Mahwah, Nj: Erlbaum.

Goldin, G. A. (2000). Affective Pathways And Representation In Mathematical Problem Solving. Mathematical Thinking And Learning, 23, 209–219.

Gorodetsky, M., & Klavir, R. (2003). What Can We Learn From How Gifted/ Average Pupils Describe Their Processes Of Problem Solving? Learning And Instruction, 13, 305–325.

Hannah, C. (1990, April). Metacognitive Strategies Used By Learning–Disabled Gifted Students. Paper Presented At The Annual Meeting Of The American Association For Educational Research Association, Boston, MA.

Hatano, G. (1990). Toward The Cultural Psychology Of Mathematical Cognition. Monograph Of The Society For Research In Child Development, 55, 108–115.

Heinze, A. (2003, July). Mathematically Gifted Elementary Students' Problem Solving Strategies: Significant Differences To «Non–Gifted» Students. Paper

Presented At The Biennial Conference Of The World Council For Gifted And Talented Children. Adelaide, Australia.

Kapa, E. (1998). A Metacognitive Support During The Process Of Problem Solving In A Computerized Environment. Educational Studies In Mathematics, 29, 317–336.

Killen, R. (1996). Effective Teaching Strategies: Lesson From Research And Prac– tice, Sydney, Australia: Social Science Press.

Klaimongkol, Y. (2002). The Development Of An Instructional Process By Applying A Problembased Learning Approach To Enhance Mathematical Competen– cies Of Prathom Suksa Five Gifted Students In Mathematics. Unpublished Doctoral Dissertation, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand.

Krantz, S. G. (1996). Techniques Of Problem Solving. Providence, Ri: American Mathematical Society.

Lawson, M. J., & Chinnappan, M. (1994). Generative Activity During Geometry Problem Solving: Comparison Of The Performance Of High–Achieving And Lowachieving High School Student. Cognition And Instruction, 12, 61–93.

Mayer, R. E. (1992). Thinking, Problem Solving, Cognition. New York: Freeman.

Mccormick, B. C. (2003). Metacognition And Learning. In W. M. Reynolds, & G. E. Miller (Eds.), Handbook Of Psychology, (Pp. 79–102). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research And Case Study Applications In Edu– cation.San Francisco, Ca: Jossey–Bass Publishers.

Montague, M. (1991). Gifted And Learning Disabled Gifted Students' Knowledge And Use Of Mathematical Problem–Solving Strategies. Journal For The Ed– ucation Of The Gifted, 14, 393–411.

Montague, M., & Applegate, B. (1993). Middle School Students' Mathematical Problem Solving: An Analysis Of Think–Aloud Protocols. Learning Disabil– ities Quarterly, 16, 19–32.

Office Of The National Education Commission, Ministry Of Education, Thailand. (2004). Education In Thailand. Bangkok, Thailand: Author.

Overtoom–Corsmit, R., Dekker, R., & Span, P. (1990). Information Processing In Intellectually Highly Gifted Children By Solving Mathematical Tasks. Gifted Education International, 6, 143–148.

Polya, G. (1957). How To Solve It: A New Aspect Of Mathematical Method. Garden City, Ny: Doubleday & Company, Inc.

Posamenteir, A. S., & Salkind, C. T. (1996). Challenging Problems In Geometry. New York: Dover Publications.

Posamenteir, A. S., & Schulz, W. (1996). The Art Of Problem Solving: A Resource For Mathematics Teacher. Thousand Oaks, Ca: Corwin Press, Inc.

Pressley, M., Borkowski, J., & Schneider, W. (1989). Good Information Processing: What It Is And How Education Can Promote It. International Journal Of Educational Research, 13, 857–867.

Pretz, J. E., Naples, A. J., & Sternberg, R. J. (2003). Recognizing, Defining, And Representing Problems. J. E. Davidson, & R. J. Sternberg (Eds.), The Psychology Of Problem Solving, (Pp. 3–30). Cambridge, Ma: Cambridge University Press.

Pugalee, D. K. (2001). Writing, Mathematics, And Metacognition: Looking For Connections Through Students' Work In Mathematical Problem Solving. School Science And Mathematics, 101, 236–245.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando, Fl: Academic. Schoenfeld, A. H., Burkhardt, H., Daro, P., Ridgway, J.,Schwartz, J., & Wilcox, S. (1999). High School Assessment. White Plains, Ny: Dale Seymour Publications.

Sowell, E. J., Zeigler, A. J., Bergwell, L., & Cartwright, R. M. (1990). Identification And Description Of Mathematically Gifted Students: A Review Of Empirical Research. *Gıfted Child Quarterly,* 34, 147–154.

Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations. *The Journal Cf Secondary Gıfted Education, 14,* 151–165.

Sternberg, R. J. (1995). In Search Of Human Mind, Orlando, Fl: Harcourt Brace College Publishers.

Stevenson, H. W., & Stigler, J. W. (1992). The Learning Gap: Why Our Schools Are Failing And What Can We Learn From Japanese And Chinese Education. New York: Summit.

Swanson, L. H. (1990). Influence Of Metacognitive Knowledge And Aptitude On Problem Solving. Journal Of Educational Psychology, 82, 306–314.

Thipatdee, G. (1996). The Construction Of An Enrichment Curriculum Developing Complex Thinking Ability Of The Upper Secondary School Students With High Achievement. Unpublished Doctoral Dissertation, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand.

Wieczerkowski, W., Cropley, A. J., & Prado, T. M. (2000). Nurturing Talents/Gifts In Mathematics. In K. A. Heller, F. J. Monks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Eds.), International Handbook Of Giftedness And Talent Education, (Pp. 413–425). Oxford, Uk: Pergamon.

Yimer, A. (2004). Metacognitive And Cognitive Functioning Of College Students During Mathematical Problem Solving. Unpublished Doctoral Dissertation, Illinois State University.

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research Design And Methods,* Newbury Park, Ca: Sage.