الباب الأول

مــادة تمهـيدية

١-١ مقدمة في البراهين الرياضية

البراهين الرياضية

يتميز علم الرياضيات عن غيره من العلوم بعدم اعتماد صحة أية عبارة ما لم يتم إثباتها بشكل يقيني لا يقبل الشك أو التأويل. كما تتجلى روعة هذا العلم الأصيل في تعدد طرق البرهان واعتمادها بشكل رئيس على المنطق. لذا ارتأينا أن نبدأ هذا الكتاب بملخص لبعض الطرق الرئيسة للبراهين الرياضية، خاصة تلك التي ستتم الاستعانة بها في حل المسائل الرياضية لاحقاً.

❖ البرهان المباشر

نستخدم المعطيات في حسابات مباشرة، كما نستخدم قوانين أوصيغ أومبرهنات رياضية معروفة، إن لزم الأمر، لاستنتاج صحة العبارة المطلوب إثباتها.

ملاحظة: لإثبات أنّ العبارة ا تؤدي إلى العبارة ب ($\text{ا} \Leftarrow \text{ب}$)، نفترض أولاً صحة العبارة ا، ثم نستخدم هذا الفرض لاستنتاج أنّ العبارة **ب** صحيحة.

مثال: أثبت أنّه إذا كان ن عدداً فردياً، فإنّ $\text{ن}^{٢}$ عدد فردي.
البرهان: بما أنّ ن عدد فردي، فإنّه يمكن كتابته على الشكل $\text{ن} = ٢\text{ل}+١$، حيث ل عدد صحيح. نستنتج من ذلك أنّ

$$\text{ن}^{٢} = (٢\text{ل}+١)^{٢} = ٤\text{ل}^{٢}+٤\text{ل}+١ = ٢(٢\text{ل}^{٢}+٢\text{ل})+١$$

إذن، $\text{ن}^{٢}$ عدد فردي.

ملاحظة: لا يعني الإثبات المباشر لصحة $\text{ا} \Leftarrow \text{ب}$ أنّه يمكن الحصول على النتيجة في خطوة واحدة، بل قد يتضمن الإثبات عدة خطوات حيث نقسم المسألة الرئيسة عادةً إلى مسائل جزئية أسهل

$$\text{ا} \Leftarrow \text{ع}_{١}، \ldots، \text{ع}_{\text{ك}} \Leftarrow \text{ع}_{\text{ك}+١}، \ldots، \text{ع}_{\text{ن}} \Leftarrow \text{ب}$$

حيث $\text{ع}_{١}، \ldots، \text{ع}_{\text{ك}}، \text{ع}_{\text{ك}+١}، \ldots، \text{ع}_{\text{ن}}$ عبارات وسيطية يتم اللجوء إليها حسب الحاجة – وقد تختلف من إثبات إلى آخر – ثم نستخدم خاصية التعدي للتضمين "$\Leftarrow$" لنستنتج أنّ $\text{ا} \Leftarrow \text{ب}$.

❖ البرهان باستخدام التناقض

لإثبات العبارة **ب**، نبدأ بافتراض أنّ العبارة **ب** غير صحيحة، ثم نستخدم هذا الفرض للتوصل إلى تناقض ما. نستنتج – باستخدام المنطق الرياضي – أنّ افتراض عدم صحة العبارة **ب** كان خطأ؛ أي أنّ العبارة **ب** صحيحة.

مثال: أثبت أنّ $\sqrt{٢}$ غير نسبي (يسمى العدد نسبياً إذا أمكن كتابته على الصورة $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ حيث ك، ل عددان صحيحان وَ $\text{ل} \neq ٠$).

البرهان: افرض أنّ $\sqrt{٢}$ نسبي. بناءً على ذلك، يمكن كتابة $\sqrt{٢}$ على الصورة $\sqrt{٢} = \frac{\text{ك}}{\text{ل}}$، حيث ك، ل عددان صحيحان وَ $\text{ل} \neq ٠$. إذا كانت هناك قواسم مشتركة للعددين ك، ل غير ± ١، فإنّه يمكن اختصارها

وإعادة كتابة الكسر في أبسط صورة ممكنة لنحصل على $\sqrt{٢} = \frac{ك}{ل} = \frac{م}{ن}$، حيث م، ن عددان صحيحان ليس بينهما أية قواسم مشتركة غير ± ١ وَ $ن \neq ٠$. بتربيع الطرفين نحصل على $م^٢ = ٢ن^٢$، ونستنتج من ذلك أنّ م عدد زوجي، أي أنّ $م = ٢ل$، حيث ل عدد صحيح. إذن $م^٢ = (٢ل)^٢ = ٢ن^٢$، أي أنّ $٢ل^٢ = ن^٢$، وبذلك يكون ن عدداً زوجياً. وبما أن م زوجي، فإن ٢ قاسم مشترك للعددين م، ن، وهذا يتناقض مع افتراضنا عدم وجود قواسم مشتركة للعددين م، ن. إذن، افتراض أنّ $\sqrt{٢}$ نسبي كان خطأ لأنّه أدى إلى تناقض، والصحيح هو أنّ $\sqrt{٢}$ غير نسبي.

❖ البرهان غير المباشر

لإثبات $أ \Leftarrow ب$، نبدأ بافتراض أنّ العبارة أ صحيحة، وأنّ العبارة ب غير صحيحة، ثم نستخدم هذا الفرض للتوصل إلى أنّ العبارة أ غير صحيحة، وهذا تناقض مع المعطى (وهو صحة العبارة أ). نستنتج – باستخدام المنطق الرياضي – أنّ افتراض عدم صحة العبارة ب كان خطأ؛ أي أنّ $أ \Leftarrow ب$.

مثال: أثبت أنّه إذا كان $ن^٢$ عدداً فردياً، فإنّ ن عدد فردي.

البرهان: ليكن $ن^٢$ عدداً فردياً. افرض أنّ العبارة "ن عدد فردي" خطأ، أي أنّ ن عدد زوجي. في هذه الحالة يمكن كتابته على الصورة $ن = ٢ل$، حيث ل عدد صحيح. نستنتج من ذلك أنّ

$$ن^٢ = (٢ل)^٢ = ٤ل^٢ = ٢(٢ل^٢)$$

أي أنّ $ن^٢$ عدد زوجي، وهذا يتناقض مع الفرض.

❖ الاستقراء الرياضي

لإثبات أنّ العبارة ع(ن) صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة $ن \geq ل$، نطبق مبدأ الاستقراء الرياضي والذي يتكون من ثلاث خطوات:

(١) نثبت أنّ العبارة صحيحة لـ $ن = ل$؛ أي أنّ ع(ل) صحيحة.

(٢) نفرض أنّ العبارة صحيحة لـ $ن = م$، حيث $م \geq ل$؛ أي أنّ ع(م) صحيحة.

(٣) باستخدام صحة ع(م)، نثبت أنّ العبارة صحيحة لـ $ن = م + ١$؛ أي أنّ ع(م+١) صحيحة.

ملاحظة: توجد عدة صيغ مختلفة للاستقراء الرياضي لا يتسع المجال للتعرض لها بالتفصيل في هذا المقام. عادة ما يكون المطلوب هو إثبات صحة عبارة ع(ن) لجميع الأعداد الطبيعية $ن \geq ١$.

مثال: أثبت أنّه لأي عدد طبيعي ن:

$$١ + ٢ + \cdots + ن = \frac{ن(ن+١)}{٢} \quad (*)$$

البرهان: نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي. لاحظ أنّ ع(ن) معطاة في (*) أعلاه.

الخطوة الأولى: من الواضح أنّ (*) صحيحة عندما $ن=١$، حيث إنّ $١=\frac{١(١+١)}{٢}$.

الخطوة الثانية: نفرض أنّ (*) صحيحة لـِ $ن=م$؛ أي أنّ

$$١+٢+\cdots+م=\frac{م(م+١)}{٢}$$

الخطوة الثالثة: نثبت أنّ (*) صحيحة لـِ $ن=م+١$؛ أي أنّ

$$١+٢+\cdots+(م+١)=\frac{(م+١)(م+٢)}{٢}$$

لإثبات ذلك نستخدم الخطوة الثانية كما يلي

$$\begin{aligned}١+٢+\cdots+م+(م+١)&=(١+٢+\cdots+م)+(م+١)\\&=\frac{م(م+١)}{٢}+(م+١)\\&=\frac{(م+١)(م+٢)}{٢}\end{aligned}$$

حسب مبدأ الاستقراء الرياضي، نستنتج أنّ (*) صحيحة لجميع الأعداد الطبيعية $ن$؛ أي أنّ

$$١+٢+\cdots+ن=\frac{ن(ن+١)}{٢}\quad \forall ن\in ط$$

١-٢ مقدمة في الجبر

مجموعات الأعداد

❖ مقدمة

عرَّف الإنسان بشكل تدريجي عدة مجموعات من الأعداد التي يحتاجها في حياته اليومية، مثل

مجموعة الأعداد الطبيعية: ط $=\{١، ٢، ٣، ٤، \cdots\}$

مجموعة الأعداد الكلية: ك $=\{٠، ١، ٢، ٣، ٤، \cdots\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة: صـ $=\{\cdots، -٤، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، \cdots\}$

مجموعة الأعداد النسبية: ن $=\left\{\frac{ك}{ل} \;\middle|\; ك، ل \in صـ، ل \neq ٠\right\}$

لاحظ أن كثيراً من المعادلات ليس لها حلول في ن (س$^٢=٢$، مثلاً). لذلك تمت إضافة هذه الأعداد **غير النسبية** (مثل $\sqrt{٢}$، $\sqrt{٣}$، $\sqrt[٣]{٢}$، ط) لتكوِّن مع الأعداد النسبية **مجموعة الأعداد الحقيقية** ح.

لكن هذه المجموعة لا تشمل -على سبيل المثال- أي جذر للمعادلة س$^٢+١=٠$، ولذلك تمت توسعتها لنحصل على **مجموعة الأعداد المركبة**

$$م=\left\{ أ+ب ت \;\middle|\; أ، ب \in ح ، ت = \sqrt{-١}\right\}$$

ليكن م $=$ أ $+$ ب ت. يُسمّى أ **الجزء الحقيقي**، كما يُسمّى ب ت (أو ب فقط حسب بعض المصادر)، **الجزء التخيلي**. يعرف **مرافق** العدد المركب م $=$ أ $+$ ب ت على أنه العدد المركب $\bar{م}=$ أ $-$ ب ت، كما يعرف **مقاس** م على أنه العدد الحقيقي $|م|=\sqrt{أ^٢+ب^٢}=\sqrt{م\times\bar{م}}$، والذي يمثل هندسياً طول متجه يصل بين نقطة الأصل والنقطة (أ، ب).

ملاحظة: ت $=\sqrt{-١}$ عدد تخيلي (غير حقيقي) وهو أحد جذري المعادلة س$^٢+١=٠$ (الجذر الآخر هو $-$ت$=-\sqrt{-١}$). كل عدد حقيقي هو عدد مركب، أي أن ح $\subset$ م. يكون العدد المركب م حقيقياً إذا وفقط إذا م $=\bar{م}$.

العمليات على الأعداد المركبة: ليكن م$_١=$ أ$_١+$ب$_١$ت، م$_٢=$أ$_٢+$ب$_٢$ت عددين مركبين.

(١) $م_١+م_٢=(أ_١+أ_٢)+(ب_١+ب_٢)ت$

(٢) $م_١-م_٢=(أ_١-أ_٢)+(ب_١-ب_٢)ت$

(٣) $م_١\times م_٢=(أ_١أ_٢-ب_١ب_٢)+(أ_١ب_٢+ب_١أ_٢)ت$

(٤) $\frac{م_١}{م_٢}=\frac{١}{|م_٢|^٢}\times م_١\times\overline{م_٢}=\frac{أ_١أ_٢+ب_١ب_٢}{أ_٢^٢+ب_٢^٢}+\frac{ب_١أ_٢-أ_١ب_٢}{أ_٢^٢+ب_٢^٢}ت$

❖ القيمة المطلقة

تعتبر دالة القيمة المطلقة من أهم الدوال في الرياضيات وأكثرها استعمالاً، وقد تم تعميمها إلى فضاءات إقليدية وغير إقليدية.

تعريف: ليكن ا عدداً حقيقياً. تعرَّف **القيمة المطلقة** للعدد ا، ويرمز لها بالرمز $|ا|$، على النحو التالي:

$$|ا|=\begin{cases} ا \quad ، \quad ا\geq ٠ \\ -ا \quad ، \quad ا<٠ \end{cases}$$

تمثل $|ا|$ هندسياً بُعد النقطة التي تمثل العدد ا على خط الأعداد عن تلك التي تمثل الصفر.

خصائص القيم المطلقة: ليكن ا، ب وح عددين حقيقيين.

(١) $|ا|\geq ٠$
(٢) $|ا|=|-ا|$
(٣) $-|ا|\leq ا\leq |ا|$
(٤) $|ا ب|=|ا||ب|$
(٥) $\left|\frac{ا}{ب}\right|=\frac{|ا|}{|ب|}$، بشرط ب$\neq ٠$.
(٦) $|ا-ب|=|ب-ا|$
(٧) $|ا\pm ب|\leq |ا|+|ب|$

مبرهنة: ليكن ا، ب وح عددين حقيقيين، حيث ب≥ ٠.
(١) $|ا|\leq ب \Leftrightarrow -ب\leq ا\leq ب$
(٢) $|ا|\geq ب \Leftrightarrow ا\geq ب$ أو $ا\leq -ب$

❖ الجذور

تعريف: ليكن ن عدداً طبيعياً وَ ا عدداً حقيقياً. نُعرِّف

$$\sqrt[ن]{ا^{ن}}=\begin{cases} ا، \quad ن \text{ فردي} \\ |ا|، \quad ن \text{ زوجي} \end{cases}$$

تنويه: من الأخطاء الشائعة اعتبار $\sqrt{ا^{٢}}=\pm ا$، والصحيح أن $\sqrt{ا^{٢}}=|ا|$.

مثال: لحل المعادلة التربيعية $س^٢ - ٤ = ٠$ نتَّبع الخطوات التالية

$$س^٢ - ٤ = ٠ \Leftrightarrow س^٢ = ٤ \Leftrightarrow \sqrt{س^٢} = \sqrt{٤} \Leftrightarrow |س| = ٢ \Leftrightarrow س = \pm ٢$$

أما الآتي فهو خطأ:

$$س^٢ - ٤ = ٠ \Leftrightarrow س^٢ = ٤ \Leftrightarrow س = \sqrt{٤} \Leftrightarrow س = \pm ٢$$

❖ متباينات هامة

فيما يلي نورد بعض المتباينات الهامة التي نحتاجها لحل العديد من المسائل في مسابقات الرياضيات:

- **متباينة الوسط التوافقي – الوسط الحسابي –الوسط الهندسي – الوسط التربيعي** : إذا كان $أ، ب$ عددين حقيقيين موجبين، فإن

$$\textbf{أصغر}(أ،ب) \le \frac{٢أب}{أ+ب} \le \sqrt{أب} \le \frac{أ+ب}{٢} \le \sqrt{\frac{أ^٢+ب^٢}{٢}} \le \textbf{أكبر}(أ،ب)$$

حيث يرمز **أصغر** $(أ،ب)$ لأصغر العددين و **أكبر** $(أ،ب)$ لأكبرهما.

- **متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي:** إذا كانت $أ_١، أ_٢، \cdots، أ_ن$ أعداداً حقيقية غير سالبة، فإن

$$\sqrt[ن]{أ_١ \times \cdots \times أ_ن} \le \frac{أ_١ + \cdots + أ_ن}{ن}$$

- إذا كانت $أ، ب، جـ \in ح$، فإن

$$أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ \le أب + ب جـ + جـ أ$$

- إذا كانت $أ، ب، جـ، د$ أعداداً حقيقية غير سالبة، فإن

$$\sqrt{أب} + \sqrt{جـ د} \le \sqrt{(أ+جـ)(ب+د)}$$

- (**متباينة كوشي - شفارتس**) إذا كانت $أ_١، \cdots، أ_ن، ب_١، \cdots، ب_ن \in ح$، فإن

$$(أ_١ب_١ + \cdots + أ_ن ب_ن)^٢ \le (أ_١^٢ + \cdots + أ_ن^٢)(ب_١^٢ + \cdots + ب_ن^٢)$$

كثيرات الحدود

❖ مقدمة

تعتبر كثيرات الحدود من أفضل الدوال من ناحية سهولة التعامل معها ودراسة خصائصها.

تعريف: **كثيرة الحدود** في المتغير س **من الدرجة** $ن$ (حيث $ن \in$ ك عدد كلي) هي دالة:

$$د: ح \leftarrow ح،\ د(س) = أ_٠ + أ_١ س + \cdots + أ_{ن-١} س^{ن-١} + أ_ن س^ن$$

حيث $أ_٠، أ_١، \cdots، أ_{ن-١}، أ_ن \in ح$ وَ $أ_ن \neq ٠$. تُسمّى $أ_٠، أ_١، \cdots، أ_{ن-١}، أ_ن$ **معاملات** كثيرة الحدود، كما يُسمّى $أ_ن$ **المعامل الرئيس**، وَ يُسمّى $أ_٠$ **الحد الثابت**. نرمز لدرجة $د(س)$ بالرمز **درجة**$(د(س))$.

تعريف: كثيرة الحدود **الصفرية** هي الدالة $د(س) = ٠$ لجميع قيم $س \in ح$، ونعتبر درجتها $-\infty$.

تعريف: نعرّف مجموعة كثيرات الحدود على ح على أنها

$$ح[س] = \{أ_٠ + أ_١ س + \cdots + أ_{ن-١} س^{ن-١} + أ_ن س^ن \mid أ_٠، أ_١، \cdots، أ_{ن-١}، أ_ن \in ح، ن \in ك\}$$

بنفس الطريقة يمكن تعريف $ص[س]$ وَ $ن[س]$.

مبرهنة (القسمة مع باقي): لتكن $د(س)$ وَ $هـ(س)$ كثيرتي حدود. إذا كانت $هـ(س)$ غير صفرية، فإنه توجد كثيرتا حدود $ع(س)$ وَ $ب(س)$، بحيث

$$د(س) = ع(س) \times هـ(س) + ب(س) \text{ وَ } \textbf{درجة}(ب(س)) < \textbf{درجة}(هـ(س))$$

تعريف: في المبرهنة أعلاه، نسمي $د(س)$ **المقسوم**، وَ $هـ(س)$ **المقسوم عليه**، كما نسمي $ع(س)$ **خارج القسمة**، وَ $ب(س)$ **باقي القسمة**.

تعريف: لتكن الدالتان $د(س)$ وَ $هـ(س)$ كثيرتي حدود، حيث $هـ(س) \neq ٠$. نقول إن $هـ(س)$ تقسم $د(س)$، إذا كان باقي قسمة $د(س)$ على $هـ(س)$ كثيرة الحدود الصفرية، ونكتب $هـ(س) \mid د(س)$.

تعريف: نقول: إن كثيرة الحدود $هـ(س)$ عامل مشترك لكثيرات الحدود $د_١(س)، \cdots، د_ن(س)$، إذا كانت $هـ(س)$ تقسم كل واحدة من كثيرات الحدود هذه على حدة. ونقول: إن العامل المشترك $هـ(س)$ هو **القاسم المشترك الأكبر** لكثيرات الحدود $د_١(س)، \cdots، د_ن(س)$، ونرمز له بالرمز

$$ق.م.أ(د_١(س)، \cdots، د_ن(س))$$

إذا كان أي عامل مشترك آخر لكثيرات الحدود هذه من قواسم $هـ(س)$.

مثال: لتكن $د(س) = ٣س^٢$، وَ $ه(س) = ١٢س^٣ - ٢١س$، وَ $ل(س) = ٧س + ١$. من الواضح أن

$$ق.م.أ(د(س)، ه(س)) = ٣س \quad \text{وأن} \quad ق.م.أ(د(س)، ل(س)) = ١$$

❖ جذور كثيرات الحدود

تعريف: تُسمّى أية معادلة

$$د(س)=٠، \text{ حيث } د(س)\in ح[س] \text{ وَ درجة}(د(س))=ن، \text{ حيث } ن\in ط$$

معادلة حدودية نونية (أو **معادلة حدودية من الدرجة** ن).

تعريف: نقول: إن العدد المركب ا+ب ت **جذر لكثيرة الحدود** د(س) إذا كان د(ا+ب ت)=٠

مبرهنة: لتكن الدالتان د(س) وَهـ(س) كثيرتي حدود، حيث هـ(س) غير صفرية. إذا كانت كثيرة الحدود ب(س) هي باقي قسمة د(س) على هـ(س)، فإن د(جـ)=ب(جـ) لأي جذر جـ لكثيرة الحدود هـ(س).

نتيجة: لتكن الدالة د(س) كثيرة حدود، وليكن جـ عدداً حقيقياً.
(١) عند قسمة د(س) على هـ(س)=س−جـ، فإن ناتج القسمة يكون عدداً ثابتاً مساوياً لقيمة د(جـ).
(٢) د(جـ)=٠ إذا وفقط إذا (س−جـ)|د(س).

مبرهنة: إذا كان م=ا+ب ت جذراً لكثيرة الحدود د(س) ∈ ح[س]، فإن العدد المرافق $\bar{م}$=ا−ب ت هو أيضاً جذر لكثيرة الحدود د(س).

ملاحظة: تعني المبرهنة السابقة أن عدد الجذور غير الحقيقية لأية كثيرة حدود د(س) ∈ ح[س] زوجي.

نتيجة: يكون العدد المركب ا+ب ت جذراً لكثيرة الحدود د(س) إذا وفقط إذا كانت هـ(س) تقسم د(س)، حيث $هـ(س)=(س-ا)^{٢}+ب^{٢}=س^{٢}-٢اس+(ا^{٢}+ب^{٢})$.

مبرهنة: لتكن د(س) كثيرة حدود، وليكن ا ، ب عددين حقيقيين بحيث يكون ا<ب. إذا كان د(ا) ×د(ب)<٠، فإنه يوجد عدد حقيقي (واحد على الأقل) ا< جـ <ب يحقق د(جـ)=٠

مثال: لتكن $د(س)=س^{٥}-٤س^{٣}+٢س-١$. لاحظ أن

$$د(١)\times د(٢)=-٢\times ٣=-٦<٠$$

بتطبيق المبرهنة السابقة، نستنتج أن لكثيرة الحدود د(س) جذراً حقيقياً ١<جـ<٢ (لاحظ أنه ليس من السهل – في كثير من الأحيان – تحديد قيمة هذا الجذر).

المبرهنة الأساس للجبر: لأية كثيرة حدود د(س)∈ح[س]، درجتها ن≥١، ن من الجذور المركبة (باحتساب الجذور المكررة إن وجدت).

نتيجة: لتكن د(س) ∈ ح[س] كثيرة حدود من الدرجة ن≥١.
(١) إذا كان ن عدداً فردياً، فإن عدد الجذور الحقيقية لكثيرة الحدود د(س) فردي.

(٢) إذا كان $ن$ عدداً زوجياً، فإن عدد الجذور الحقيقية لكثيرة الحدود $د(س)$ زوجي.

ملاحظات: لتكن $د(س) \in ح[س]$ كثيرة حدود من الدرجة $ن$.
(١) إذا كان $ن$ عدداً فردياً، فإنه يوجد لكثيرة الحدود $د(س)$ جذر حقيقي واحد على الأقل.
(٢) إذا كان $ن$ عدداً زوجياً، فإن من المحتمل أن لا يكون لكثيرة الحدود $د(س)$ أية جذور حقيقية.

مبرهنة (الجذور الصحيحة والجذور النسبية): لتكن
$د(س) = ا_٠ + ا_١ س + \cdots + ا_{ن-١} س^{ن-١} + ا_ن س^ن$، حيث $ا_٠، ا_١، \ldots، ا_ن \in ص$
(١) **مجموعة الجذور النسبية المحتملة** لكثيرة الحدود $د(س)$ هي

$$\left\{ \frac{ك}{ل} : ك، ل \in ص، ل \neq ٠ \text{ (ليس لهما قواسم مشتركة)}، ك | ا_٠، ل | ا_ن \right\}$$

(٢) إذا كان $ا_ن = \pm ١$، فإن أي جذر نسبي لكثيرة الحدود $د(س)$ هو أحد قواسم الحد الثابت $ا_٠$، أي أنه عدد صحيح.

ملاحظات:
(١) لا تنطبق المبرهنة السابقة إذا كان أحد معاملات كثيرة الحدود عدداً غير صحيح.
(٢) الأعداد النسبية في المبرهنة أعلاه هي جذور محتملة قد تكون كلها أو بعضها جذوراً لكثيرة الحدود $د(س)$، وقد لا يكون أي منها جذراً لهذه الدالة.

مثال: ليس لكثيرة الحدود $د(س) = س^٢ - ٢ \in ص[س]$ أية جذور نسبية، حيث أن $\pm \sqrt{٢} \notin ن$.

❖ جذور المعادلات التربيعية

الشكل العام للمعادلة التربيعية هو

$$اس^٢ + ب س + جـ = ٠، \text{ حيث } ا، ب، جـ \in ح، ا \neq ٠ \quad (**)$$

القانون العام لحل المعادلة التربيعية: يوجد عددان مركبان يحققان المعادلة (**):

$$س = \frac{-ب \mp \sqrt{ب^٢ - ٤ا جـ}}{٢ا}$$

ملاحظة: ليكن $س_١$ وَ $س_٢$ جذري المعادلة التربيعية (**). من الواضح أن $س_١$ وَ $س_٢$ يحققان

$$س_١ + س_٢ = -\frac{ب}{ا} \quad \text{و} \quad س_١ \times س_٢ = \frac{جـ}{ا}$$

المميز: يُسمّى العدد الحقيقي $ب^٢ - ٤ا جـ$ **مميز** المعادلة التربيعية (**) لأن قيمته تميز بين ثلاث حالات:

(١) $ب^٢ - ٤ا جـ > ٠$: للمعادلة في هذه الحالة جذران حقيقيان مختلفان هما

$$س_١=\frac{-ب+\sqrt{ب^٢-٤أجـ}}{٢أ} \quad وَ \quad س_٢=\frac{-ب-\sqrt{ب^٢-٤أجـ}}{٢أ}$$

(٢) $ب^٢-٤أجـ=٠$: للمعادلة في هذه الحالة جذران حقيقيان متساويان (أو نقول جذر حقيقي واحد مكرر)

$$س_١=-\frac{ب}{٢أ}=س_٢$$

(٣) $ب^٢-٤أجـ<٠$: للمعادلة في هذه الحالة جذران مركبان غير حقيقيين

$$س_١=\frac{-ب+\sqrt{ب^٢-٤أجـ}}{٢أ}=\frac{-ب+\sqrt{٤أجـ-ب^٢}\,ت}{٢أ}$$

$$س_٢=\frac{-ب-\sqrt{ب^٢-٤أجـ}}{٢أ}=\frac{-ب-\sqrt{٤أجـ-ب^٢}\,ت}{٢أ}$$

مبرهنة: لتكن $أس^٢+ب س+جـ=٠$ معادلة تربيعية، حيث $أ،ب،جـ$ أعداد نسبية وَ $أ\neq٠$. إذا كان $ك+ل\sqrt{م}$ جذراً للمعادلة التربيعية، حيث $ك،ل،م$ أعداد نسبية وَ $\sqrt{م}$ غير نسبي، فإن $ك-ل\sqrt{م}$ هو الجذر الثاني للمعادلة التربيعية.

مثال: إذا كان $٥-٣\sqrt{٧}$ جذراً للمعادلة $س^٢+ب س+جـ=٠$، فأوجد ب وَ جـ.

الحل: باستخدام المبرهنة أعلاه، نعلم أن الجذر الآخر للمعادلة هو $٥+٣\sqrt{٧}$، وبذلك تكون المعادلة

$$(س-(٥-٣\sqrt{٧}))(س-(٥+٣\sqrt{٧}))=٠$$
$$س^٢-١٠س-٣٨=٠$$

نستنتج أن $ب=-١٠$ وَ $جـ=-٣٨$.

❖ **جذور المعادلات التكعيبية**

الشكل العام للمعادلة التكعيبية هو:

$$أس^٣+ب س^٢+جـ س+ر=٠، \text{ حيث } أ،ب،جـ،ر\in ح، أ\neq٠ \quad (***)$$

ملاحظة: لأية معادلة تكعيبية (***) ثلاثة جذور مركبة أحدها أو جميعها حقيقية. توجد صيغة عامة لإيجاد جذور المعادلة (***)، ولكننا لن نتطرق لها في هذا الكتاب.

مبرهنة: إذا كانت $س_١، س_٢، س_٣$ الجذور الثلاثة للمعادلة التكعيبية (***)، فإن

$$س_١ + س_٢ + س_٣ = -\frac{ب}{أ}$$

$$س_١ س_٢ + س_٢ س_٣ + س_٣ س_١ = \frac{جـ}{أ}$$

$$س_١ س_٢ س_٣ = -\frac{د}{أ}$$

ملاحظة: لتكن $س_١، س_٢، س_٣$ الجذور الثلاثة للمعادلة التكعيبية (***). إذا كان $س_١ × س_٢ × س_٣ ≠ ٠$، فإن

$$\frac{١}{س_١} + \frac{١}{س_٢} + \frac{١}{س_٣} = \frac{س_١ س_٢ + س_٢ س_٣ + س_٣ س_١}{س_١ س_٢ س_٣} = \frac{\frac{جـ}{أ}}{-\frac{د}{أ}} = -\frac{جـ}{د}$$

❖ **التحليل إلى العوامل الأولية**

تعريف: نقول: إن كثيرة الحدود $ر(س) \in ح[س]$، حيث **درجة** $(ر(س)) \geq ١$ **أولية** أو **غير قابلة للاختزال**، إذا كانت غير قابلة للتحليل كحاصل ضرب كثيرات حدود في $ح[س]$ ذات درجات أقل.

نتيجة: كثيرات الحدود الأولية في $ح[س]$ هي الدوال الخطية والدوال التربيعية ذات المميز السالب.

مبرهنة: يمكن تحليل أية كثيرة حدود غير أولية $ر(س) \in ح[س]$ بطريقة وحيدة كحاصل ضرب كثيرات حدود أولية:

$$ر(س) = ر_١(س) × \cdots × ر_ي(س)$$

تعريف: نسمي كثيرات الحدود $ر_١(س)، \cdots، ر_ي(س)$ في المبرهنة أعلاه **العوامل الأولية للدالة** $ر(س)$.

مثال: لتكن $ر(س) = س^٥ + ٢س^٤ - ٢س^٣ - ٧س + ٦$. بتعويض الجذور النسبية المحتملة وهي $\{±١، ±٢، ±٣، ±٦\}$، نجد أن $س_١ = ١$ وَ $س_٢ = -٣$ جذران لكثيرة الحدود $ر(س)$. بالقسمة على $هـ(س) = (س - ١)(س + ٣)$ نحصل على $ع(س) = س^٣ + س - ٢$. بتعويض الجذور النسبية المحتملة لكثيرة الحدود $ع(س)$ وهي $\{±١، ±٢\}$، نجد أن $س_٣ = ١$ جذر لكثيرة الحدود $ع(س)$. بالقسمة على $(س - ١)$، نجد أن $ع(س) = (س - ١)(س^٢ + س + ٢)$. حيث أن مميز $س^٢ + س + ٢ = ٠$ هو $-٧ < ٠$، فإنه لا يوجد لهذه المعادلة أية جذور حقيقية وبذلك تكون الدالة $ف(س) = س^٢ + س + ٢$ أولية. بذلك نحصل على التحليل التالي لكثيرة الحدود $ر(س)$ إلى عواملها الأولية

$$س^٥ + ٢س^٤ - ٢س^٣ - ٧س + ٦ = (س - ١)^٢(س + ٣)(س^٢ + س + ٢)$$

أمثلة: لأي عدد $أ \in ح$ نحصل على تحليل لكثيرات الحدود التالية إلى عواملها الأولية:

(١) $س^{٢} - أ^{٢} = (س+أ)(س-أ)$

(٢) $س^{٣} - أ^{٣} = (س-أ)(س^{٢} + أس + أ^{٢})$

(٣) $س^{٣} + أ^{٣} = (س+أ)(س^{٢} - أس + أ^{٢})$

مبرهنة (ذات الحدين): إذا كان $ن \in ط$، فإن

$$(س+ص)^{ن} = \sum_{ي=٠}^{ن} \binom{ن}{ي} س^{ي} ص^{ن-ي}، \quad حيث \quad \binom{ن}{ي} = \frac{ن!}{ي!(ن-ي)!}$$

ملاحظة: إذا كان $ن \in ط$، فإن $ن! = ن \times (ن-١) \times \cdots \times ١$. من المتفق عليه اعتبار $٠! = ١$.

حالات خاصة:

(١) $(س+ص)^{٢} = س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}$

(٢) $(س-ص)^{٢} = س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢}$

(٣) $(س+ص)^{٣} = س^{٣} + ٣س^{٢} ص + ٣س ص^{٢} + ص^{٣}$

(٤) $(س-ص)^{٣} = س^{٣} - ٣س^{٢} ص + ٣س ص^{٢} - ص^{٣}$

التحليل بالتجميع: يكون ذلك بتجميع الحدود التي تحتوي على قواسم مشتركة في التعبير الرياضي، ثم بإخراج هذه الحدود من كل تجمع على حدة. يمكن كذلك إعادة عملية التجميع هذه أكثر من مرة.

ملاحظات: لتحليل كثيرة حدود $د(س) \in ح[س]$ إلى عواملها الأولية يكون من المفيد مراعاة ما يلي:

(١) نبدأ عادة باختبار إذا ما كان $د(س)$ حالة خاصة تنطبق عليها نظرية ذات الحدين.

(٢) إخراج القاسم المشترك الأعظم لجميع حدود $د(س)$ كعامل مشترك.

(٣) إذا كان $جـ \in ح$ جذراً لكثيرة الحدود $د(س)$، فإن $هـ(س) = س - جـ$ عامل أولي لكثيرة الحدود $د(س)$.

(٤) إذا كان $أ + ب ت$ جذراً مركباً غير حقيقي لكثيرة الحدود $د(س)$، فإن $أ - ب ت$ جذر آخر، ويمكن كتابة $د(س)$ كحاصل ضرب كثيرتي حدود

$$د(س) = ع(س)\left(س^{٢} - ٢أس + (أ^{٢} - ب^{٢})\right)$$

مثال: لتحليل كثيرة الحدود $د(س) = ٦س^{٣} - ٢١س^{٢} - ٤س + ١٤$ إلى عواملها الأولية، نبدأ بالتجميع، ثم نخرج القواسم المشتركة لنحصل على

$$٦س^{٣} - ٤س - ٢١س^{٢} + ١٤ = ٦س^{٣} - ٢١س^{٢} - ٤س + ١٤$$
$$= (٦س^{٣} - ٢١س^{٢}) + (-٤س + ١٤)$$
$$= ٣س^{٢}(٢س - ٧) - ٢(٢س - ٧)$$
$$= (٢س - ٧)(٣س^{٢} - ٢)$$

١-٣ مقدمة في المتتابعات والمتسلسلات

المجاميع

❖ مقدمة

إذا أردنا أن نجمع الأعداد $\text{ع}_{١}$، $\text{ع}_{٢}$، ...، $\text{ع}_{\text{م}}$ فإننا نكتب $\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} + \cdots + \text{ع}_{\text{م}}$ (وهنا نستخدم النقاط الثلاث للدلالة على الاستمرار بنفس طريقة السرد. وغالباً ما نستخدم الرمز $\sum$ للدلالة على هذا المجموع. فمثلاً

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ع}_{\text{ر}} = \text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} + \cdots + \text{ع}_{\text{م}}$$

ونسمي $\text{ع}_{١}$ **الحد الأول**، ونسمي $\text{ع}_{٢}$ **الحد الثاني** وبشكل عام نسمي $\text{ع}_{\text{ر}}$ **الحد النوني** للمجموع. وقد يبدأ المجموع من أي عدد مثل ا، وفي هذه الحالة نكتب:

$$\sum_{\text{ر}=\text{ا}}^{\text{م}} \text{ع}_{\text{ر}} = \text{ع}_{\text{ا}} + \text{ع}_{\text{ا}+١} + \text{ع}_{\text{ا}+٢} + \cdots + \text{ع}_{\text{م}}$$

❖ قوانين مهمة

لنفرض أن ك أي عدد حقيقي ثابت وأن م أي عدد صحيح موجب.

(١) $$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ك} = \text{م}\,\text{ك}$$

(٢) $$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ر} = \frac{\text{م}(\text{م}+١)}{٢}$$

(٣) $$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ر}^{٢} = \frac{\text{م}(\text{م}+١)(٢\text{م}+١)}{٦}$$

(٤) $$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ر}^{٣} = \left(\frac{\text{م}(\text{م}+١)}{٢}\right)^{٢}$$

(٥) $$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ك}\,\text{ا}_{\text{ر}} = \text{ك} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ا}_{\text{ر}}$$

(٦) $$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} (\text{ا}_{\text{ر}} \mp \text{ب}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ا}_{\text{ر}} \mp \sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ر}}$$

المتتابعات

❖ مقدمة

تعريف: نسمي مجموعة الأعداد المرتبة $(أ_١، أ_٢، \cdots، أ_م)$ **متتابعة منتهية** وتحتوي على م من الحدود كما نسمي المجموعة المرتبة $(أ_١، أ_٢، أ_٣، \ldots)$ **متتابعة غير منتهية**. وهناك طرق أخرى لكتابة المتتابعات، فمثلاً يمكن كتابة المتتابعة المنتهية على صورة $\{أ_ن\}_{ن=١}^{م}$ وَ غيرالمنتهية على صورة $\{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$.

تعريف: نقول إن المتتابعتين $\{أ_ن\}$ وَ $\{ك_ن\}$ متساويتان إذا تحقق أحد الشرطين:

(١) إذا كانتا منتهيتين ولهما نفس العدد من العناصر وكان $أ_ن = ك_ن$ لجميع قيم $ن$.

(٢) إذا كانتا غير منتهيتين وكان $أ_ن = ك_ن$ لجميع قيم $ن$.

❖ المتتابعة الحسابية

تسمى المتتابعة $\{ك_ن\}$ **متتابعة حسابية** إذا وُجد عدد ثابت ث بحيث أن $ك_{ن+١} - ك_ن = ث$ لجميع قيم $ن$. يسمى هذا الفرق الثابت ث **أساس المتتابعة الحسابية** $\{ك_ن\}$. ونلاحظ أن المتتابعة الحسابية $\{ك_ن\}$ والتي حدها الأول أ والثابت فيها ث يكون حدها النوني: $ك_ن = أ + (ن - ١)ث$ ونستطيع كتابتها على صورة:

$$\left(أ، (أ+ث)، (أ+٢ث)، (أ+٣ث)، \ldots، (أ+(ن-١)ث)، \ldots\right)$$

❖ المتتابعة الهندسية

تسمى المتتابعة $\{ك_ن\}$ **متتابعة هندسية** إذا وُجد عدد ثابت مثل ر بحيث أن $ك_{ن+١} = ر ك_ن$ لجميع قيم $ن$. يسمى ر **أساس** المتتابعة الهندسية $\{ك_ن\}$. نلاحظ أن المتتابعة الهندسية $\{ك_ن\}$ التي حدها الأول أ وأساسها ر يكون حدها النوني: $ك_ن = أ ر^{ن-١}$ ونستطيع كتابتها على صورة:

$$\left(أ، أر، أر^٢، أر^٣، \cdots، أر^{ن-١}، \cdots\right)$$

المتسلسلات

❖ مقدمة

إذا كانت لدينا متتابعة منتهية $\{ك_ن\}_{ن=١}^{م}$ فإن المجموع $جـ_م = ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_م$ يسمى **متسلسلة منتهية**. نعرف كذلك **المتسلسلة (غير المنتهية)** على أنها مجموع المتوالية غير المنتهية $\{ك_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ ونكتبها على صورة

$$جـ = ك_١ + ك_٢ + \cdots$$

في حالة المتسلسلات غير المنتهية، قد يكون المجموع عدداً حقيقياً (وفي هذه الحالة تسمى المتسلسلة **تقاربية**). وقد لا يكون المجموع عدداً حقيقياً ، وفي هذه الحالة تسمى المتسلسلة **غير تقاربية**.

عادة ما نستخدم رمز المجموع للمتسلسلات. فمثلاً نكتب المتسلسلة المنتهية على النحو الآتي

$$جـ_م = ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_م = \sum_{ن=١}^{م} ك_ن$$

كذلك نكتب المتسلسلة غير المنتهية على الصورة

$$جـ = ك_١ + ك_٢ + \cdots = \sum_{ن=١}^{\infty} ك_ن$$

ملاحظة: مجموع المتتابعة الحسابية (أو الهندسية) يسمى **متسلسلة حسابية (أو هندسية)**.

إذا كان لدينا متتابعة حسابية منتهية $\{ك_ن\}_{ن=١}^{م}$ حدها الأول $أ$ وأساسها $ث$ فإننا وباستخدام تعريف المتتابعة الحسابية نستطيع كتابة مجموعها على صورة:

$$جـ_م = ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_م$$
$$= أ + (أ + ث) + (أ + ٢ث) + (أ + ٣ث) + \cdots + (أ + (م - ١)ث)$$

مبرهنة: إذا كانت $\{ك_ن\}_{ن=١}^{م}$ متتابعة حسابية حدها الأول $أ$ وأساسها $ث$ فإن مجموعها يساوي:

$$جـ_م = \frac{م}{٢}\left[ك_١ + ك_م\right]$$

إذا كان لدينا متتابعة هندسية منتهية $\{ك_ن\}_{ن=١}^{م}$ حدها الأول $أ$ وأساسها $ر$ فإننا وباستخدام تعريف المتتابعة الهندسية نستطيع كتابة مجموعها على الصورة

$$جـ_م = ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_م$$
$$= أ + أر + أر^٢ + أر^٣ + \cdots + أر^{م-١}$$

مبرهنة: إذا كانت $\{ك_ن\}_{ن=١}^{م}$ متتابعة هندسية حدها الأول $أ$ وأساسها $ر$ فإن مجموعها يساوي

$$جـ_م = \frac{أ\left(ر^م - ١\right)}{ر - ١}$$

٤-١ مقدمة في نظرية الأعداد

القسمة

❖ مقدمة

تعريف: ليكن $ك،ل$ عددين صحيحين، حيث $ك \neq ٠$. نقول: إن $ك$ **يقسم** $ل$ (أو أن $ل$ من **مضاعفات** $ك$، أو $ل$ **يقسم على** $ك$ **بدون باقي**)، ونكتب $ك|ل$ إذا وجد عدد صحيح $ن$، بحيث يكون $ل=نك$. نرمز لمجموعة قواسم $ل$ الطبيعية بالرمز $ق_{ل}$، ولمجموعة مضاعفات $ك$ الطبيعية بالرمز $م_{ك}$.

ملاحظة: $ك|٠$ لجميع الأعداد الصحيحة $ك \neq ٠$.

خصائص هامة: لتكن $أ،ب،جـ،د،هـ$ أعداداً صحيحة.

(١) $أ|ب$ وَ $ب|جـ \Leftarrow أ|جـ$.

(٢) $د|أ$ وَ $د|ب \Leftarrow د|(أجـ+بهـ)$. بشكل خاص $د|(أ+ب)$ وَ $د|(أ-ب)$.

(٣) $(أ-ب)\,|\,(أ^{ن}-ب^{ن})\ \forall\ ن \in ط$.

(٤) $(أ+ب)\,|\,(أ^{ن}+ب^{ن})$ حيث $ن$ أي عدد طبيعي فردي.

حقيقة (القسمة الإقليدية): إذا كان $م$ عدداً صحيحاً وَ $ع$ عدداً طبيعياً، فإنه يمكن كتابة $م$ بصورة وحيدة على الشكل

$$م=خع+ب،\ حيث\ خ،ب \in ص\ وَ\ ٠ \leq ب < ع$$

يسمى $م$ **المقسوم** وَ $ع$ **المقسوم عليه**، وَ $خ$ **خارج القسمة**، وَ $ب$ **باقي القسمة**.

تعريف: ليكن $ب$ عدداً طبيعياً. يوجد لأي عدد كلّي $أ$ تمثيل وحيد على الصورة

$$أ=(أ_{٠}أ_{١}\cdots أ_{ن})_{ب}=أ_{٠}+أ_{١}\times ب+أ_{٢}\times ب^{٢}+\cdots+أ_{ن}\times ب^{ن}$$

حيث $٠ \leq أ_{ي} < ب$ عدد كلي. يسمى هذا **تمثيل العدد** $أ$ **في النظام البائي**.

ملاحظة: من أهم الأنظمة العددية **النظام العشري** (في هذه الحالة لا داعي لكتابة الأساس $ب=١٠$)، و**النظام الثنائي**.

مثال:

$$\begin{aligned}(١٠١١٠١١)_{٢} &= ١\times٢^{٠}+١\times٢^{١}+٠\times٢^{٢}+١\times٢^{٣}+١\times٢^{٤}+٠\times٢^{٥}+١\times٢^{٦}\\ &=١+٢+٠+٨+١٦+٠+٦٤\\ &=٩١\end{aligned}$$

تعريف: ليكن $أ=أ_{٠}أ_{١}أ_{٢}\cdots أ_{ن}=أ_{٠}+أ_{١}\times١٠+أ_{٢}\times١٠^{٢}+\cdots+أ_{ن}\times١٠^{ن}$ تمثيل العدد الكلي $أ$ في النظام العشري. نرمز **لمجموع أرقام** العدد $أ$ بالرمز $م(أ)$، أي أن

$$م(أ)=أ_{٠}+أ_{١}+\cdots+أ_{ن}$$

❖ معايير القسمة

مبرهنة: ليكن $أ = أ_٠ أ_١ أ_٢ \cdots أ_ن = أ_٠ + أ_١ \times ١٠ + أ_٢ \times ١٠^٢ + \cdots + أ_ن \times ١٠^ن$ عدداً كلياً.

- تقسم ٢ العدد أ إذا وفقط إذا كان $أ_٠$ زوجياً
- تقسم ٣ العدد أ إذا وفقط إذا كانت $٣ \mid م(أ)$
- تقسم ٤ العدد أ إذا وفقط إذا كانت $٤ \mid (أ_٠ + أ_١ \times ١٠)$
- تقسم ٥ العدد أ إذا وفقط إذا كان $أ_٠ = ٠$ أو $أ_٠ = ٥$
- تقسم ٦ العدد أ إذا وفقط إذا كانت $٢ \mid أ$ وَ $٣ \mid أ$
- تقسم ٧ العدد أ إذا وفقط إذا كانت
$$٧ \mid (أ_١ + أ_٢ \times ١٠ + \cdots + أ_ن \times ١٠^{ن-١} - ٢أ_٠).$$
- تقسم ٨ العدد أ إذا وفقط إذا كانت
$$٨ \mid (أ_٠ + أ_١ \times ١٠ + أ_٢ \times ١٠^٢)$$
- تقسم ٩ العدد أ إذا وفقط إذا كانت $٩ \mid م(أ)$
- تقسم ١٠ العدد أ إذا وفقط إذا كان $أ_٠ = ٠$
- يقسم العدد ١١ العدد أ إذا وفقط إذا كانت
$$١١ \mid (أ_٠ - أ_١ + أ_٢ - أ_٣ + \cdots + (-١)^ن أ_ن)$$
- يقسم ١٢ العدد أ إذا وفقط إذا كانت $٣ \mid أ$ وَ $٤ \mid أ$

مثال: ليكن أ=٤٧٨٩٩٦. بتطبيق معيار قابلية القسمة على ٧ أعلاه بشكل متتالٍ نحصل على

$$ب = ٤٧٨٩٩ - ٢ \times ٦ = ٤٧٨٨٧، \quad جـ = ٤٧٨٨ - ٢ \times ٧ = ٤٧٧٤$$
$$د = ٤٧٧ - ٢ \times ٤ = ٤٦٩، \quad هـ = ٤٦ - ٢ \times ٩ = ٢٨$$

بما أن $٧ \mid هـ$، فإن $٧ \mid ٤٧٨٩٩٦$. يمكن التأكد من ذلك، حيث أن $٤٧٨٩٩٦ = ٦٨٤٢٨ \times ٧$.

مثال: ليكن أ=٣٥٤٦. لاحظ أن $م(٣٥٤٦) = ٦ + ٤ + ٥ + ٣ = ١٨$

- تقسم ٢ العدد أ، لأن $أ_٠ = ٦$ عدد زوجي
- تقسم ٣ العدد أ، لأن $م(٣٥٤٦) = ١٨$ من مضاعفات ٣
- لا تقسم ٤ العدد أ، لأن $أ_٠ + أ_١ \times ١٠ = ٤٦$ ليس من مضاعفات ٤
- لا تقسم ٥ العدد أ، لأن $أ_٠ \neq ٠$ وَ $أ_٠ \neq ٥$
- تقسم ٦ العدد أ، لأن $٢ \mid أ$ وَ $٣ \mid أ$
- لتحديد إذا كانت ٧ تقسم العدد أ، نطبق القاعدة مرتين ونعرِّف العددين
$ب = ٣٥٤ - ٢ \times ٦ = ٣٤٢$ وَ $جـ = ٣٤ - ٢ \times ٢ = ٣٠$

بما أن ٧ لا تقسم ٣٠، نستنتج أن ٧ لا تقسم ا

- لا تقسم ٨ العدد ا، لأن باقي قسمة ٥٤٦ على ٨ لا يساوي ٠
- تقسم ٩ العدد ا، لأن م(٣٥٤٦)=١٨ من مضاعفات ٩
- تقسم ١٠ العدد ا، لأن $ا_٠ = ٦ \neq ٠$
- لا يقسم ١١ العدد ا، لأن

$$ا_٠ - ا_١ + ا_٢ - ا_٣ = ٦ - ٤ + ٥ - ٣ = ٤$$

ليس من مضاعفات ١١

- لا يقسم العدد ١٢ العدد ا لأنه ليس من مضاعفات ٤

❖ الأعداد الأولية

يمكننا بلا شك اعتبار مفهوم الأعداد الأولية المحور الرئيس الذي تدور حوله باقي المفاهيم في نظرية الأعداد، ويرجع الفضل في ذلك إلى المبرهنة الأساس للحساب.

ما هي الأعداد الأولية، وما أهميتها، وكم عددها؟ سنحاول الإجابة عن هذه الأسئلة باختصار.

تعريف: ليكن $ا \geq ٢$ عدداً طبيعياً. نقول: إن ا **عدد أولي** إذا لم يكن له أية قواسم طبيعية عدا ١ وَ ا. إذا لم يكن العدد ا أولياً، فإننا نقول: إنه **عدد مؤلف**.

ملاحظة: حسب التعريف، العدد الطبيعي ١ ليس أولياً وليس مؤلفاً.

تنويه: يمكن أيضاً تعريف مجموعة **الأعداد الصحيحة الأولية** بنفس الطريقة. مثلاً: $\pm ٢، \pm ٣، \pm ٥، \ldots$ أعداد صحيحة أولية. في هذا الكتاب، وفي حالة عدم ذكر غير ذلك بشكل صريح، نعني بالأعداد الأولية الأعداد الأولية الطبيعية فقط.

توطئة إقليدس: لتكن $ا، ب_١، \ldots، ب_ن$ أعداداً صحيحة. إذا كان ا عدداً أولياً فإن

$$ا \mid (ب_١ \times \cdots \times ب_ن) \Rightarrow ا \mid ب_ي \text{ لأحد قيم } ي=١، \ldots، ن \text{ (على الأقل).}$$

مبرهنة (المبرهنة الأساس للحساب): ليكن $جـ \geq ٢$ عدداً صحيحاً موجباً. يمكن تحليل جـ بصورة وحيدة كحاصل ضرب أعداد أولية. بشكل مفصل، نقول: إنه يمكن تحليل جـ على الشكل التالي

$$جـ = ا_١^{ن_١} \times \cdots \times ا_م^{ن_م}،$$

حيث $ا_١، \ldots، ا_م$ أعداد أولية وَ $ن_١، \ldots، ن_م \in ط$. هذا التحليل وحيد، بمعنى أنه إذا كان هناك تحليل آخر

$$جـ = ب_١^{ل_١} \times \cdots \times ب_ك^{ل_ك}،$$

حيث $ب_١، \ldots، ب_ك$ أعداد أولية وَ $ل_١، \ldots، ل_ك \in ط$، فإن $م = ك$ ويمكن إعادة ترتيب المعاملات الأولية بحيث نحصل على

$$ا_ي = ب_ي \text{ وَ } ن_ي = ل_ي، \quad \forall \; ي = ١، \ldots، م$$

حقائق:

(١) إذا كان $ا \geq ٥$ عدداً أولياً، فإنه يوجد عدد طبيعي $ن$ يحقق

$$ا = ٦ن + ١ \quad \text{أو} \quad ا = ٦ن - ١$$

(٢) إذا كان $ن$ عدداً طبيعياً، وكان $ا \leq ن$ عدداً أولياً، فإن $ا \nmid (ن! + ١)$.

(٣) لأي عدد صحيح موجب $ن \geq ٢$، توجد $ن - ١$ من الأعداد المتتابعة القابلة للتحليل

$$ن! + ٢، ن! + ٣، \cdots، ن! + ن$$

ملاحظة: عكس الحقيقة (١) أعلاه غير صحيح. مثلاً: $٢٥ = ٦ \times ٤ + ١$ وَ $٩٥ = ٦ \times ١٦ - ١$ ليسا أوليين.

مبرهنة (إقليدس): يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

مبرهنة: ليكن $ب \geq ٢$ عدداً طبيعياً. إذا كان $ب$ غير أولي، فإن أصغر عامل أولي $ا$ للعدد $ب$ يحقق $ا \leq \sqrt{ب}$.

نتيجة: إذا لم يكن للعدد الطبيعي $ب \geq ٢$ أية قواسم أولية $ا$، حيث $ا \leq \sqrt{ب}$، فإن $ب$ أولي.

مثال: لا يوجد أي عدد أولي أقل من $\sqrt{٩٧} < ١٠$ ضمن قواسم العدد ٩٧، حيث لا يوجد أي من الأعداد الأولية التي تقل عن $\sqrt{٩٧}$، وهي ٢، ٣، ٥، ٧، ضمن قواسم ٩٧. بتطبيق النتيجة السابقة نستنتج أن ٩٧ عدد أولي.

مبرهنة: ليكن $جـ \geq ٢$ عدداً صحيحاً موجباً، وليكن $جـ = ا_١^{ن_١} \times \cdots \times ا_م^{ن_م}$ تحليله إلى العوامل الأولية. عدد قواسم العدد $جـ$ هو

$$ق(جـ) = (ن_١ + ١) \times \cdots \times (ن_م + ١)$$

❖ القاسم المشترك الأكبر

تعريف: لتكن $ا_١، \cdots، ا_ن$ أعداداً كلية، بحيث يكون أحدها – على الأقل - لا يساوي ٠. نقول: إن العدد الطبيعي $ق$ هو **القاسم المشترك الأكبر** لهذه الأعداد، إذا كان $ق$ أكبر عدد كلي يقسم كل عدد من هذه الأعداد. نرمز لهذا العدد بالرمز $ق.م.أ.(ا_١، \cdots، ا_ن)$.

ملاحظات:

(١) $ق.م.أ.(ك، ٠) = ك$، لأي عدد طبيعي $ك$.

(٢) إذا كانت $ا_١، \cdots، ا_{ن-١}، ا_ن$ أعداداً طبيعية، حيث $ن \geq ٣$، فإن

$$ق.م.أ.(ا_١، ا_٢، \cdots، ا_ن) = ق.م.أ.(ا_١، ق.م.أ.(ا_٢، \cdots، ا_ن))$$

(٣) إذا كان $جـ$ قاسماً مشتركاً للعددين الطبيعيين $ا، ب$، فإن $جـ | ق.م.أ.(ا، ب)$

(٤) لأي عددين طبيعيين $ا \neq ب$:

$$ق.م.أ.(ا، ب) \leq \textbf{أصغر}(ا، ب) \quad \text{وَ} \quad ق.م.أ.(ا، ب) \leq |ا - ب|$$

تعريف: ليكن ك وَ ل عددين طبيعيين. نقول: إن ك **عدد أولي بالنسبة للعدد** ل (أو أن ك وَ ل **أوليان فيما بينهما**)، إذا كان ق.م.أ (ك، ل)=١.

مبرهنة: ليكن ك وَ ل عددين كليين أحدهما (على الأقل) لا يساوي ٠. يوجد عددان صحيحان جـ وَ ر، بحيث يمكن كتابة القاسم المشترك الأكبر للعددين ك وَ ل على الشكل التالي:

ق.م.أ (ك،ل)= جـك + رل

توطئة: ليكن ك وَ ل عددين طبيعيين، وليكن ك ≤ ل.

ق.م.أ (ك،ل)= ق.م.أ (ب،ل) حيث ب هو باقي قسمة ك على ل.

حقيقة: إذا كان

$\text{ك}=\text{أ}_1^{\text{ك}_1}\times\cdots\times\text{أ}_\text{م}^{\text{ك}_\text{م}}$ وَ $\text{ل}=\text{أ}_1^{\text{ل}_1}\times\cdots\times\text{أ}_\text{م}^{\text{ل}_\text{م}}$

حيث $\text{أ}_1،\ldots،\text{أ}_\text{م}$ أعداد أولية، وَ $\text{ك}_1،\ldots،\text{ك}_\text{م}،\text{ل}_1،\ldots،\text{ل}_\text{م}\in$ ك، فإن

ق.م.أ (ك،ل) $=\text{أ}_1^{\text{ن}_1}\times\ldots\times\text{أ}_\text{م}^{\text{ن}_\text{م}}$

حيث $\text{ن}_\text{ي}$ = **أصغر** $(\text{ك}_\text{ي}،\text{ل}_\text{ي})$، $\forall$ ي=١،...،م.

مثال: يمكن إيجاد ق.م.أ (٢٠٥٢،٥٠٤) بعدة طرق:

(١) بتكرار تطبيق التوطئة أعلاه نحصل على

ق.م.أ (٢٠٥٢،٥٠٤) = ق.م.أ (٣٦،٥٠٤) = ق.م.أ (٣٦،٠)=٣٦

(٢) بالتحليل إلى العوامل الأولية، نحصل على

$٢٠٥٢=٢^٢\times٣^٣\times١٩$ وَ $٥٠٤=٢^٣\times٣^٢\times٧$

بتطبيق الحقيقة أعلاه نحصل على

ق.م.أ (٢٠٥٢،٥٠٤) $=٢^٢\times٣^٢\times٧^٠\times١٩^٠=٣٦$

❖ المضاعف المشترك الأصغر

تعريف: لتكن $\text{أ}_1،\ldots،\text{أ}_\text{ن}$ أعداداً كلية، بحيث يكون أحدها – على الأقل - لا يساوي ٠. نقول: إن العدد الكلي م هو **المضاعف المشترك الأصغر** لهذه الأعداد، إذا كان م أصغر عدد كلي يقسمه كل عدد من هذه الأعداد. نرمز لهذا العدد بالرمز م.م.أ $(\text{أ}_1،\ldots،\text{أ}_\text{ن})$.

ملاحظات:

(١) م.م.أ (ك،٠)=٠، لأي عدد طبيعي ك

(٢) إذا كانت $\text{أ}_1،\ldots،\text{أ}_\text{ن}$ أعداداً طبيعية، حيث ن≥٣، فإن

م.م.أ $(\text{أ}_1،\text{أ}_2،\ldots،\text{أ}_\text{ن})$ = م.م.أ $(\text{أ}_1،$ م.م.أ $(\text{أ}_2،\ldots،\text{أ}_\text{ن}))$

(٣) إذا كان جـ مضاعفاً مشتركاً للعددين الكليين أ،ب، فإن م.م.أ (أ،ب) | جـ

(٤) لأي عددين طبيعيين أ،ب:

م.م.أ (أ،ب) ≥ **أكبر** (أ، ب) وَ م.م.أ (أ،ب) ≥ |أ – ب|

مبرهنة: إذا كان ك،ل عددين طبيعيين، فإن

$$\text{م.م.أ}(ك،ل)=\frac{ك ل}{\text{ق.م.أ}(ك،ل)}$$

حقيقة: إذا كان

$$ك=أ_{١}^{ك_{١}}\times\cdots\times أ_{م}^{ك_{م}} \quad \text{وَ} \quad ل=أ_{١}^{ل_{١}}\times\ldots\times أ_{م}^{ل_{م}}$$

عددين طبيعيين حيث $أ_{١}،\ldots،أ_{م}$ أعداد أولية وَ $ك_{١}،\ldots،ك_{م}،ل_{١}،\ldots،ل_{م}\in ک$، فإن

$$\text{م.م.أ}(ك،ل)=أ_{١}^{ن_{١}}\times\cdots\times أ_{م}^{ن_{م}}$$

حيث $ن_{ي}=$ **أكبر** $(ك_{ي}،ل_{ي})$، $\forall\, ي=١،\ldots،م$.

مثال: يمكن إيجاد م.م.أ(٤٨،٣٦) بطريقتين:

(١) $\text{م.م.أ}(٤٨،٣٦)=\dfrac{٤٨\times٣٦}{\text{ق.م.أ}(٤٨،٣٦)}=\dfrac{٤٨\times٣٦}{١٢}=١٤٤$

(٢) بالتحليل إلى العوامل الأولية، نحصل على

$$٤٨=٢^{٤}\times٣ \quad \text{وَ} \quad ٣٦=٢^{٢}\times٣^{٢}$$

$$\therefore \quad \text{م.م.أ}(٤٨،٣٦)=٢^{٤}\times٣^{٢}=١٤٤$$

مبرهنة: إذا كانت ك،ل،ن أعداداً صحيحة موجبة، فإن

$$\text{م.م.أ}(ك ل،ل ن،ن ك)=\frac{ك ل ن}{\text{ق.م.أ}(ك،ل،ن)}$$

مثال: يمكن إيجاد م.م.أ(٢٤،٧٢،٤٨) بطريقتين:

(١) $\text{م.م.أ}(٢٤،٧٢،٤٨)=\text{م.م.أ}(\text{م.م.أ}(٢٤،٧٢)،٤٨)=\text{م.م.أ}(٧٢،٤٨)=١٤٤$

(٢) لاحظ أن $٢٤=٤\times٦$ وَ $٧٢=٦\times١٢$ وَ $٤٨=١٢\times٤$. بتطبيق المبرهنة أعلاه نحصل على

$$\text{م.م.أ}(٤\times٦،٦\times١٢،١٢\times٤)=\frac{٤\times٦\times١٢}{\text{ق.م.أ}(٤،٦،١٢)}=١٤٤$$

التطابق بمقاس

❖ مقدمة

يلعب مفهوم التطابق بمقاس دوراً رئيساً في نظرية الأعداد وفي حل العديد من المسائل التي يكون المهم فيها باقي قسمة عدد ما على عدد آخر.

تعريف: ليكن ا،ب عددين صحيحين وَ م عدداً طبيعياً. نقول: إن العدد ا **مطابق للعدد ب بمقاس** م، ونكتب $ا \equiv ب \ \|م\|$ ، إذا وجد ن ∋ ص بحيث يكون $ا - ب = ن \times م$ (أي أن ا−ب من مضاعفات م).

ملاحظة: ليكن ا عدداً صحيحاً وَ م عدداً طبيعياً. يكون $ا \equiv ٠ \ \|م\|$ إذا وفقط إذا كان ا من مضاعفات م.

مبرهنة: لتكن ا،ب،جـ،م أعداداً صحيحة، حيث م≥١. إذا كان $ا \equiv ب \ \|م\|$، فإن:

(١) $ا + جـ \equiv ب + جـ \ \|م\|$

(٢) $ا - جـ \equiv ب - جـ \ \|م\|$

(٣) $ا \times جـ \equiv ب \times جـ \ \|م\|$

(٤) $ا^{جـ} \equiv ب^{جـ} \ \|م\|$، بشرط جـ≥٠

حقيقة: لتكن ا،ب،جـ،د،م أعداداً صحيحة، حيث م≥١، وَ $ا \equiv ب \ \|م\|$، وَ $جـ \equiv د \ \|م\|$.

(١) $ا + جـ \equiv ب + د \ \|م\|$

(٢) $ا \times جـ \equiv ب \times د \ \|م\|$

(٣) إذا كانت د(س) ∋ ص[س] فإن $د(ا) \equiv د(ب) \ \|م\|$

حقيقة: ليكن م عدداً صحيحاً موجباً. العلاقة

$$[-]_م = \{(ا، ب) \in ص \times ص : ا \equiv ب \ \|م\|\}$$

هي علاقة تكافؤ. نرمز **لصف التكافؤ** الذي ينتمي له العدد ب ∋ ص بالرمز $[ب]_م$، أي أن

$$[ب]_م = \{ ا \in ص \mid ا \equiv ب \ \|م\| \}$$

ملاحظة: ليكن م عدداً صحيحاً موجباً. عدد صفوف التكافؤ للعلاقة $[-]_م$ هو م.

مبرهنة: ليكن م عدداً صحيحاً موجباً. تشكل مجموعة صفوف التكافؤ

$$ص_م = \{[ب]_م \mid ب \in ص\}$$

زمرة تحت العملية الثنائية

$$+_م : ص_م \times ص_م \rightarrow ص_م ، \ [ا]_م +_م [ب]_م = [ا+ب]_م$$

العنصر المحايد لهذه العملية هو صف التكافؤ $[\text{٠}]_{\text{م}}$، ونظير صف التكافؤ $[\text{ب}]_{\text{م}}$ هو صف التكافؤ $[\text{م}-\text{ب}]_{\text{م}}$.

مبرهنة (خاصية الاختزال): لتكن أ،ب،جـ أعداداً صحيحة وليكن م عدداً طبيعياً. إذا كان د = ق.م.أ.(جـ، م)، فإن

$$\text{أجـ} \equiv \text{ب جـ} \left\|\frac{\text{م}}{\text{د}}\right\| \Rightarrow \text{أ} \equiv \text{ب} \left\|\frac{\text{م}}{\text{د}}\right\|$$

نتيجة: لتكن أ،ب،جـ أعداداً صحيحة، وليكن م عدداً طبيعياً. إذا كان ق.م.أ.(جـ،م)=١، فإن

$$\text{أجـ} \equiv \text{ب جـ} \|\text{م}\| \Rightarrow \text{أ} \equiv \text{ب} \|\text{م}\|$$

ملاحظة: الشرط ق.م.أ.(جـ،م)=١ في النتيجة السابقة ضروري. مثلاً:

$\text{٤}\times\text{٣} \equiv \text{٢}\times\text{٣} \|\text{٦}\|$، لكن $\text{٤} \not\equiv \text{٢} \|\text{٦}\|$

لاحظ أن ق.م.أ.(٣،٦)=٣≠١.

مبرهنة (خاصية الاختزال): ليكن أ،ب عددين صحيحين، وَ لتكن $\text{م}_{\text{١}}،\dots،\text{م}_{\text{ر}}$ أعداداً طبيعية. إذا كان م = م.م.أ.$(\text{م}_{\text{١}}،\dots،\text{م}_{\text{ر}})$، فإن

$$\text{أ} \equiv \text{ب} \|\text{م}_{\text{١}}\|،\dots،\text{أ} \equiv \text{ب} \|\text{م}_{\text{ر}}\| \Rightarrow \text{أ} \equiv \text{ب} \|\text{م}\|$$

❖ معادلات التطابق الخطية

تعريف: معادلة التطابق الخطية هي معادلة لها الصيغة التالية

$$\text{أس} \equiv \text{جـ} \|\text{م}\|، \text{ حيث أ،جـ} \in \text{ص وَ م} \in \text{ط}$$

مبرهنة: لتكن لدينا معادلة التطابق الخطية

$$\text{أس} \equiv \text{جـ} \|\text{م}\|، \text{ حيث أ،جـ} \in \text{ص وَ م} \in \text{ط}$$

ولنفرض أن د = ق.م.أ.(أ، م).

(١) إذا كانت د ∤ جـ، فليس لمعادلة التطابق أعلاه أية حلول.

(٢) إذا كانت د | جـ، فإنه يوجد لمعادلة التطابق أعلاه عدد لانهائي من الحلول يمكن تقسيمها إلى د من صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة $[-]_{\text{م}}$ هي

$$\left\{ \left[\text{س}_{\text{٠}} + \text{ك} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right]_{\text{م}} \;\middle|\; \text{ك} = \text{٠،١،}\dots\text{،د}-\text{١}، \text{أس}_{\text{٠}} \equiv \text{جـ} \|\text{م}\| \right\}$$

مثال: أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\text{٩س} \equiv \text{١٢} \|\text{١٥}\|$.

الحل: لاحظ أن ن = ق.م.أ(٩، ١٥) = ٣. بما أن ٣|١٢، نستنتج أن هناك عدداً لا نهائياً من حلول هذه المعادلة تنقسم إلى ثلاثة صفوف تكافؤ بالنسبة للعلاقة $[-]_{١٥}$. لاحظ أن ٩×٣≡١٢ ‖١٥‖، وبذلك تكون صفوف التكافؤ الثلاثة:

$$\left\{ \left[٣+ك\times\frac{١٥}{٣} \right]_{م} \mid ك=٠،١،٢ \right\} = \left\{ [٣]_{١٥}، [٨]_{١٥}، [١٣]_{١٥} \right\}$$

نتيجة: لتكن لدينا معادلة التطابق الخطية

أس≡ج ‖م‖، حيث أ، ج ∈ ص و م ∈ ط

إذا كان ق.م.أ(أ، م)=١، فإنه يوجد لهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول الصحيحة توجد جميعها في صف تكافؤ واحد بالنسبة للعلاقة $[-]_{م}$.

مثال: لتكن لدينا المعادلة ٧س≡٣ ‖١٢‖. لاحظ أن ق.م.أ(٧، ١٢)=١. بتطبيق النتيجة أعلاه، نستنتج أن هناك عدداً لانهائياً من الحلول الصحيحة يحتويها صف تكافؤ واحد بالنسبة للعلاقة $[١٢]_{م}$. لإيجاد صف التكافؤ هذا، نلاحظ أن ٧×٩=٦٣≡٣ ‖١٢‖. نستنتج من ذلك أن صف التكافؤ الذي يحوي جميع الحلول هو $[٩]_{١٢}$.

١-٥ مقدمة في نظرية التركيبات

الطرق الأساسية للعد

❖ مقدمة

هناك عدة مبادئ يمكن استخدامها للتعامل مع مسائل العد، وباستخدام هذه القوانين نستطيع تبسيط بعض المسائل المعقدة وتحويلها إلى حالات مجزأة سهلة المعالجة. سوف نستعرض بعضاً منها فيما يلي.

مبدأ المجموع

إذا كانت سـ وَ صـ مجموعتين منفصلتين (أي أن سـ $\cap$ صـ $= \varnothing$) فإن $|$سـ $\cup$ صـ$| = |$سـ$| + |$صـ$|$

مثال: مدرس لمادتي الرياضيات والفيزياء لديه ٢٠ طالباً في فصل الرياضيات و٣٠ طالباً في فصل الفيزياء. إذا كان ٥ من هؤلاء الطلاب يدرسون كلا المادتين فما هو عدد الطلاب عند المدرس؟

الحل: لاحظ أنه يوجد ١٥ طالباً يدرسون الرياضيات فقط، وَ ٢٥ طالباً يدرسون الفيزياء فقط، وَ ٥ طلاب يدرسون المادتين معاً. فيكون المجموع: ١٥+٢٥+٥=٤٥ طالباً

مبدأ الضرب: لأي مجموعتين سـ وَ صـ فإن $|$سـ $\times$ صـ$| = |$سـ$|\,|$صـ$|$

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار وفد مكون من ولد وبنت من بين ١٠ أولاد وَ ٧ بنات؟

الجواب: ١٠×٧=٧٠

نستطيع تعميم هذه القوانين لأي عدد من المجموعات كما يلي.

قانون المجموع العام: إذا كانت سـ$_١$، سـ$_٢$، ...، سـ$_ن$ مجموعات منفصلة عن بعضها بعضاً فإن

$$|\text{سـ}_١ \cup \text{سـ}_٢ \cup \cdots \cup \text{سـ}_ن| = |\text{سـ}_١| + |\text{سـ}_٢| + \cdots + |\text{سـ}_ن|$$

قانون الضرب العام: إذا كانت سـ$_١$، سـ$_٢$، ...، سـ$_ن$ مجموعات منتهية فإن

$$|\text{سـ}_١ \times \text{سـ}_٢ \times \cdots \times \text{سـ}_ن| = |\text{سـ}_١|\,|\text{سـ}_٢| \cdots |\text{سـ}_ن|$$

غالباً ما نستخدم صيغة أخرى مكافئة لمبدأ الضرب في حل المسائل: إذا كان إنجاز عمل مشروع ما يتطلب إنجاز مجموعة من المهمات المتتالية جـ$_١$، جـ$_٢$، ...، جـ$_ن$ (جـ$_١$ أولاً ثم جـ$_٢$ وهكذا) وإذا كان عدد طرق إنجاز المهمة جـ$_١$ هو م$_١$ وعدد طرق إنجاز المهمة جـ$_٢$ هو م$_٢$ (ولا يعتمد على الكيفية التي يتم بها إنجاز المهمة الأولى) وهكذا، فإن عدد طرق إنجاز المشروع هو

$$\text{م}_١ \times \text{م}_٢ \times \cdots \times \text{م}_ن$$

مثال: ما هو عدد كلمات السر المكونة من خمسة أحرف عربية؟ علماً بأن عدد حروف اللغة العربية ٢٨ حرفاً.

الحل: أي كلمة سر تتكون من ٥ أحرف وهناك ٢٨ خياراً لكل حرف، وبذلك يكون المجموع ٢٨×٢٨×٢٨×٢٨×٢٨=$٢٨^٥$ كلمة سر.

لإيجاد عدد قواسم العدد ن نكتب العدد كالآتي

$$ن = أ_{١}^{ع_{١}} \times أ_{٢}^{ع_{٢}} \times \cdots \times أ_{ى}^{ع_{ى}}$$

حيث $أ_{١}، أ_{٢}، \ldots، أ_{ى}$ تمثل العوامل الأولية للعدد ن وَ $ع_{١}، ع_{٢}، \ldots، ع_{ى}$ أعداد طبيعية. أي قاسم للعدد ن يتكون من حاصل ضرب بعض هذه العوامل

$$هـ = أ_{١}^{م_{١}} \times أ_{٢}^{م_{٢}} \times \cdots \times أ_{ى}^{م_{ى}}$$

حيث $م_{١}، م_{٢}، \ldots، م_{ى}$ أعداد كلية تحقق $٠ \le م_{١} \le ع_{١}، \ldots، ٠ \le م_{ى} \le ع_{ى}$.

نلاحظ أنه يوجد $(ع_{١}+١)$ طريقة لاختيار العدد $م_{١}$. وكذلك $(ع_{٢}+١)$ طريقة لاختيار العدد $م_{٢}$ وهكذا.

ومن هنا نرى أن عدد طرق تكوين قاسم مثل هـ يساوي

$$(ع_{١}+١) \times (ع_{٢}+١) \times \cdots \times (ع_{ى}+١)$$

ومنها يكون عدد القواسم $(ع_{١}+١)(ع_{٢}+١)\cdots(ع_{ى}+١)$.

مبدأ التقابل:

إذا كان د : س ← ص تقابلا من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن $|س| = |ص|$.

تعريف: نسمي أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي ن **أرضية العدد** ن ونستخدم الرمز $\lfloor ن \rfloor$ للدلالة على هذا العدد. كذلك نسمي أصغر عدد صحيح أكبر من أو يساوي ن **سقف العدد** ن ونستخدم الرمز $\lceil ن \rceil$ للدلالة على هذا العدد.

فمثلاً $\lfloor ٢,١ \rfloor = ٢$ وكذلك $\lceil ٢,١ \rceil = ٣$.

مبدأ برج الحمام: ينص هذا المبدأ على أنه إذا كان عدد الحمام أكثر من عدد الصناديق، فإن أحد هذه الصناديق سيحتوي على حمامتين أو أكثر.

ونستطيع تعميم هذا المبدأ كما يلي:

إذا وزعنا م من الرسائل على ن من الصناديق وكانت م > ن فإن أحد هذه الصناديق سوف يحتوي على الأقل $١ + \left\lfloor \frac{م-١}{ن} \right\rfloor$ من الرسائل.

مثال: أي مجموعة من الطلاب فيها أكثر من ١٢ طالباً يجب أن تحتوي على الأقل على طالبين مولودين في نفس الشهر.

❖ التباديل

تعريف: تبديل مجموعة غير خالية مثل س هو ترتيب معين لعناصرها. ويعني هذا أن التبديل للمجموعة س هو تقابل من س إلى نفسها. ونستطيع كذلك تعريف تبديل المجموعة س والتي تحتوي على ن من العناصر على أنه تقابل من $\{١، ٢، ٣، \ldots، ن\} \to س$ بحيث أن صورة ١ تكون العنصر

الأول في الترتيب وصورة ٢ تكون العنصر الثاني في الترتيب وهكذا. ويدل هذا على أن الترتيب مهم جداً في التباديل.

مبرهنة: إذا كانت سـ مجموعة غير خالية وتحتوي على ن من العناصر، فإن عدد تباديل سـ يساوي

$$ن! = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \cdots \times ٣ \times ٢ \times ١$$

ويُقرأ ن! **مضروب** ن (أو ن **عاملي**).

مثال:

(١) عدد تباديل المجموعة $\{س، ص، ع، ج، ح\}$ (يعني عدد ترتيب حروفها) يساوي $٥! = ١٢٠$.

(٢) عدد الطرق التي يمكن أن نُجلس بها ٢٠ شخصاً في سطر واحد من الكراسي يساوي ٢٠!

(٣) ما هو عدد الطرق التي يمكن أن نُجلس بها ٢٠ شخصاً حول طاولة مستديرة ؟

ملاحظة: نعرف مضروب الصفر على أنه يساوي ١ (أي أن $٠! = ١$).

حقيقة: لجميع قيم $ن \geq ١$ يكون $ن! = ن(ن-١)!$

والآن نريد أن نعرف التباديل على المجموعات الجزئية من مجموعة ما مثل سـ. لنفرض أن لدينا مجموعة غير خالية مثل سـ وتحتوي على ك $(ك > ٠)$ من العناصر. نسمي ترتيب أي مجموعة جزئية من سـ عدد عناصرها ر (هنا $ر \leq ك$) تبديلاً للمجموعة سـ طوله ر (أو عدد عناصره ر)، ونرمز لهذا العدد بالرمز $^{ك}ل_{ر}$.

مبرهنة: لأي عددين صحيحين ك وَ ر بحيث $ك \geq ر \geq ٠$ ، فإن:

$$^{ك}ل_{ر} = ك(ك-١)(ك-٢)\cdots(ك-ر+١) = \frac{ك!}{(ك-ر)!}$$

ملاحظة: $^{ك}ل_{ك} = ك!$ لأي عدد صحيح $ك \geq ١$.

تعريف مجموعة القوة: لنفرض أن لدينا مجموعة سـ وتحتوي على ك من العناصر. نعرف **مجموعة القوة للمجموعة** سـ، ونرمز لها بالرمز $ق(سـ)$، على أنها المجموعة التي عناصرها المجموعات الجزئية من سـ.

مبرهنة: إذا كان عدد عناصر المجموعة سـ يساوي ك فإن عدد مجموعاتها الجزئية يساوي $٢^{ك}$، أي أن

$$|ق(سـ)| = ٢^{ك}$$

مثال: عدد المجموعات الجزئية من المجموعة $سـ = \{١،٢،٣،٤،٥\}$ هو $|ق(سـ)| = ٢^{٥} = ٣٢$

❖ التوافيق (التراكيب)

تعريف: لنفرض أن لدينا مجموعة سـ تحتوي على ك من العناصر. أي مجموعة جزئية من المجموعة سـ وتحتوي على ر من العناصر تسمى توفيق ر. بمعنى آخر، توافيق ر للمجموعة سـ، هي المجموعات الجزئية التي تحتوي على ر من العناصر.

حقيقة: عدد توافيق ر للمجموعة سـ التي تحتوي على ك من العناصر يرمز له بالرمز $\binom{ك}{ر}$ ويساوي

$$\binom{ك}{ر}=\frac{{}^{ك}ل_{ر}}{ر!}=\frac{ك!}{(ك-ر)!ر!}$$

مثال: عدد المجموعات الجزئية من المجموعة سـ$=\{١،٢،٣،٤،٥\}$ والمكونة من ٣ عناصر هو $\frac{٥!}{٣!\,٢!}=١٠$ مجموعات.

مبرهنة: لأي عددين صحيحين ك وَ ر بحيث ك$\geq$ر$\geq$٠، فإن

(١) $\binom{ك}{ك}=١$

(٢) $\binom{ك}{٠}=١$

(٣) $\binom{ك}{١}=ك$

(٤) $\binom{ك}{ر}=\binom{ك}{ك-ر}$

تعريف: تسمى المجموعة الجزئية لمجموعة ما **مجموعة جزئية مضاعفة** إذا كان التكرار فيها مسموحاً.

مبرهنة: لنفرض أن لدينا مجموعة سـ تحتوي على ك من العناصر. عدد المجموعات الجزئية المضاعفة من سـ والتي تحتوي على ر من العناصر يساوي: $\binom{ك+ر-١}{ر}$

مثال: بكم طريقة تستطيع اختيار ثلاث علب حليب من بين أربعة أنواع ؟ (التكرار مسموح).

الحل: بتعويض ك$=٤$ وَ ر$=٣$ في المبرهنة أعلاه نحصل على

$$\binom{٤+٣-١}{٤}=\binom{٦}{٣}=٢٠$$

طرق متطورة للعد

❖ نماذج أخذ العينات

إذا كانت لدينا مجموعة سـ وتحتوي على ك من العناصر، بكم طريقة نستطيع أخذ عينة (يعني مجموعة جزئية) منها عدد عناصرها ر؟
هناك حالتان يجب التأكد منهما قبل الإجابة على هذا السؤال:

(١) هل ترتيب عناصر العينة مهم أم لا؟
(٢) هل تكرار أخذ العناصر مسموح أم لا؟

مثال: عدد طرق تشكيل لجنة من ٤ أعضاء من بين ١٠ مدرسين هو

$$\binom{١٠}{٤} = \frac{١٠!}{٤!\ ٦!} = ٢١٠$$

لكن إذا أردنا أن يكون الأول رئيساً للجنة، والثاني نائباً للرئيس، والثالث سكرتيراً، والرابع مقرراً للجنة، كان الترتيب مهماً هنا ويكون عدد الطرق لتشكيل اللجنة هو

$$^{١٠}ل_{٤} = \frac{١٠!}{٦!} = ٥٠٤٠$$

سؤال: كم عدداً يوجد بين ١٠٠ وَ ١٠٠٠؟ وكم عدداً يوجد بين ١٠٠ وَ ١٠٠٠ بحيث تكون أرقامه الثلاثة مختلفة؟

فيما يلي نلخص الحالات الأربعة السابقة لاختيار عينة (مجموعة جزئية) حجمها ر من مجموعة تحتوي على ك عنصر:

(١) التكرار مسموح والترتيب مهم: عدد الطرق يساوي $ك^{ر}$

(٢) التكرار غير مسموح والترتيب مهم: عدد الطرق يساوي $^{ك}ل_{ر} = \frac{ك!}{(ك-ر)!}$

(٣) التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم: عدد الطرق يساوي $\binom{ك}{ر} = \frac{ك!}{(ك-ر)!\,ر!}$

(٤) التكرار مسموح والترتيب غير مهم: عدد الطرق يساوي $\binom{ك+ر-١}{ر}$

والآن لنأخذ مثالاً على هذه الحالات الأربعة.

مثال: أوجد عدد الطرق لأخذ عينة ثنائية مكونة من عنصرين من المجموعة $\{أ، ب، جـ، د\}$.

(١) التكرار مسموح والترتيب مهم: عدد الطرق يساوي $ك^{ر} = ٤^{٢} = ١٦$ وهذه العينات هي

(أ،أ)، (ب،ب)، (جـ،جـ)، (د،د)، (أ،ب)، (أ،جـ)، (أ،د)، (ب،جـ)، (ب،د)، (جـ،د)، (ب،أ)، (جـ،أ)، (د،أ)، (جـ،ب)، (د،ب)، (د،جـ)

(٢) التكرار غير مسموح والترتيب مهم: عدد الطرق يساوي

$$\text{ل}^{\text{ك}}_{\text{ر}} = \frac{\text{ك}!}{(\text{ك}-\text{ر})!} = \frac{٤!}{٢!} = ١٢$$

وهذه العينات هي

(أ،ب)، (أ،جـ)، (أ،د)، (ب،جـ)، (ب،د)، (جـ،د)، (ب،أ)، (جـ،أ)، (د،أ)، (جـ،ب)، (د،ب)، (د،جـ)

(٣) التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم: عدد الطرق يساوي

$$\binom{\text{ك}}{\text{ر}} = \frac{\text{ك}!}{(\text{ك}-\text{ر})!\,\text{ر}!} = \frac{٤!}{٢!\ ٢!} = ٦$$

وهذه العينات هي: (أ،ب)، (أ،جـ)، (أ،د)، (ب،جـ)، (ب،د)، (جـ،د)

(٤) التكرار مسموح والترتيب غير مهم: عدد الطرق يساوي

$$\binom{٤+٢-١}{٢} = \frac{٥!}{٢!٣!} = ١٠$$

وهذه العينات هي: (أ،أ)، (ب،ب)، (جـ،جـ)، (د،د)، (أ،ب)، (أ،جـ)، (أ،د)، (ب،جـ)، (ب،د)، (جـ،د).

مبرهنة: إذا أخذنا ك من العناصر من أنواع مختلفة $\text{ع}_١، \text{ع}_٢، \text{ع}_٣، \cdots، \text{ع}_\text{ر}$ بحيث نأخذ $\text{م}_١$ من النوع الأول $\text{ع}_١$، وَ $\text{م}_٢$ من النوع الثاني $\text{ع}_٢$ وهكذا، بحيث تكون $\text{ك} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \cdots + \text{م}_\text{ر}$ فإن عدد تباديل هذه العناصر يساوي

$$\frac{\text{ك}!}{\text{م}_١!\,\text{م}_٢!\cdots\text{م}_\text{ر}!}$$

❖ نماذج توزيع الكرات

هناك مجموعة كبيرة من مسائل العد نستطيع صياغتها على صورة توزيع مجموعة من الكرات على مجموعة من الصناديق. لنفرض أن لدينا ر من الكرات ونريد أن نوزعها على ن من الصناديق. لإيجاد عدد الطرق هناك حالات مختلفة يجب تمييزها:

(١) هل الكرات متطابقة (متشابهه) تماماً أم مختلفة ؟
(٢) هل الصناديق متطابقة (متشابهة) تماماً أم مختلفة ؟

هناك أربع حالات مختلفة لتوزيع ر من الكرات على ن من الصناديق:

(١) الكرات مختلفة والصناديق مختلفة: عدد الطرق يساوي $\text{ن}^{\text{ر}}$

(٢) الكرات متطابقة والصناديق مختلفة: عدد الطرق يساوي $\binom{\text{ن}+\text{ر}-١}{\text{ر}}$

(٣) الكرات متطابقة والصناديق متطابقة (ولا يوجد صندوق فارغ):

$$ك(ر،ن)=\frac{١}{ن!}\sum_{هـ=٠}^{ن} ك(ر-ن،هـ)=ك(ر-١،ن-١)+ك(ر-ن،ن)$$

حيث $ك(ر،ن)=٠$ إذا كانت $ر<ن$ وَ $ك(ر،ر)=ك(ر،١)=١$

ويسمى هذا النوع من العلاقات بالعلاقات الارتدادية.

(٤) الكرات مختلفة والصناديق متطابقة (ولا صندوق فارغ):

$$س(ر،ن)=\frac{١}{ن!}\sum_{هـ=٠}^{ن}(-١)^{هـ}\binom{ن}{هـ}(ن-هـ)^{ر}$$

ويسمى هذا العدد **عدد ستيرلنج من النوع الثاني**.

الحالتان (١) و (٢) سهلتان والحالتان (٣) و (٤) صعبتان، ونحتاج إلى مجموعة من التعاريف قبل أن نبين عدد الطرق المناسبة لهما، ولكن قبل ذلك يجب التنويه إلى وجود قاعدتين تتعلقان بالحالتين الأولى والثانية، هما:

القاعدة الأولى: عدد طرق توزيع $ر$ من الكرات المختلفة على $ن$ $(ر\leq ن)$ من الصناديق المختلفة بحيث لا يزيد عدد الكرات في كل صندوق على واحد يساوي $^{ن}ل_{ر}=\frac{ن!}{(ن-ر)!}$

القاعدة الثانية: لأي عدد صحيح $ر\geq ٠$ فإن عدد الحلول الكلية للمعادلة $س_١+س_٢+\cdots+س_ن=ر$ يساوي

$$\binom{ن+ر-١}{ر}$$

مثال: هناك مجموعة من التمارين على هذه القاعدة تضع شروطاً على نوعية الحلول. فمثلاً: ما هو عدد الحلول الطبيعية للمعادلة $س_١+س_٢+س_٣=٢٥$ بحيث $س_١>٢$، $س_٢>٣$، $س_٣>٥$.

الحل: لاحظ الشروط الثلاثة هي نفس الشروط $س_١\geq ٣$، $س_٢\geq ٤$، $س_٣\geq ٦$. لنعرف الآن ثلاث متغيرات جديدة $ص_١=س_١-٣$، $ص_٢=س_٢-٤$، $ص_٣=س_٣-٦$، فيكون عدد الحلول الطبيعية للمعادلة $س_١+س_٢+س_٣=٢٥$ بحيث $س_١>٢،س_٢>٣،س_٣>٥$ مساوياً لعدد الحلول الكلية للمعادلة $ص_١+ص_٢+ص_٣=١٢$. من القاعدة السابقة نستنتج أن عدد الطرق يساوي

$$\binom{١٢+٣-١}{١٢}=\binom{١٤}{١٢}=٩١$$

ملاحظات:

(١) في الحالة الأولى إن لم يكن فيها صندوق فارغ، يكون العدد الكلي

$$\sum_{هـ=٠}^{ن}(-١)^{هـ}\binom{ن}{هـ}(ن-هـ)^{ر}$$

(٢) في الحالة الثانية إن لم يكن فيها صندوق فارغ، يكون العدد الكلي يساوي $\binom{ر-١}{ن-١}$

(٣) في الحالة الثالثة إذا كان بعض الصناديق فارغاً؛ فإن العدد يساوي: $ك(ر+ن، ن)$

(٤) **عدد ستيرلنج من النوع الثاني** هو نفسه عدد تجزئة مجموعة فيها $ر$ من العناصر إلى $ن$ من المجموعات الجزئية غير الفارغة.

نظرية ذات الحدين

لأي عددين حقيقيين $س$ وَ $ص$ وأي عدد كلي $ن$ نحصل على:

$$(س+ص)^{ن} = \binom{ن}{٠}س^{ن} + \binom{ن}{١}س^{ن-١}ص + \cdots + \binom{ن}{ن-١}س\,ص^{ن-١} + \binom{ن}{ن}ص^{ن}$$

$$= \sum_{ا=١}^{ن}\binom{ن}{ا}س^{ن-ا}ص^{ا}$$

مثال: أثبت أن $\binom{ن}{٠}+\binom{ن}{١}+\binom{ن}{٢}+\cdots+\binom{ن}{ن-١}+\binom{ن}{ن}=٢^{ن}$.

الحل: عوض $س=ص=١$ في نظرية ذات الحدين لتحصل على النتيجة.

ملاحظات:

(١) نلاحظ أن معامل $س^{ا}$ في مفكوك نظرية ذات الحدين هو $\binom{ن}{ن-ا}$.

(٢) إذا كان $ن$ عدداً زوجياً فإن عدد حدود المفكوك يكون فردياً، وفي هذه الحالة يوجد حد أوسط واحد للمفكوك وترتيبه هو $\left(\frac{ن}{٢}+١\right)$. أما إذا كان $ن$ عدداً فردياً؛ فإن عدد حدود المفكوك يكون زوجياً، وفي هذه الحالة يوجد حدان أوسطان للمفكوك ترتيبهما

$$\frac{(ن+١)}{٢} \quad وَ \quad \frac{(ن+٣)}{٢}$$

يمكن تعميم نظرية ذات الحدين إلى $ن$ من الحدود $س_{١}، س_{٢}، \ldots، س_{م}$ بدلاً من الحدين $س$ وَ $ص$.

لنفرض أن $ا_{١}، ا_{٢}، \ldots، ا_{م}$ أعداداً كلية بحيث $ا_{١}+ا_{٢}+\cdots+ا_{م}=ن$. في مفكوك

$$(س_{١}+س_{٢}+\cdots+س_{م})^{ن}$$

يكون معامل الحد الذي يحتوي على $س_{١}^{ا_{١}}\times س_{٢}^{ا_{٢}}\times\cdots\times س_{م}^{ا_{م}}$ هو $\frac{ن!}{ا_{١}!\,ا_{٢}!\cdots ا_{م}!}$ ويرمز له عادة بالرمز $\binom{ن}{ا_{١}، ا_{٢}، \ldots، ا_{م}}$.

لاحظ أن هذا العدد هو نفس عدد التباديل لعدد $ن$ من العناصر اختيرت من أنواع مختلفة بحيث نأخذ $أ_١$ من النوع الأول، ونأخذ $أ_٢$ من النوع الثاني، وهكذا بحيث يكون $ن = أ_١ + أ_٢ + \cdots + أ_م$. عدد تباديل هذه العناصر يعطي نفس العدد $\dfrac{ن!}{أ_١!\,أ_٢!\cdots أ_م!}$

سؤال: أوجد معامل $س^٣ ص^٤ ع^٢$ في مفكوك $(س+ص+ع)^٩$.

الجواب: $\dfrac{٩!}{٣!\,٤!\,٢!}$

مبدأ التضمين والإقصاء

لاحظنا في السابق أنه اذا كانت $\text{سـ}_1, \text{سـ}_2, \ldots, \text{سـ}_n$ مجموعات منفصلة عن بعضها بعضاً فإن

$$|\text{سـ}_1 \cup \text{سـ}_2 \cup \cdots \cup \text{سـ}_n| = |\text{سـ}_1| + |\text{سـ}_2| + \cdots + |\text{سـ}_n|$$

ولكن ماذا لو كانت بعض هذه المجموعات $\text{سـ}_1, \text{سـ}_2, \ldots, \text{سـ}_n$ تحتوي على عناصر مشتركة؟ في هذه الحالة نستخدم مبدأ التضمين والإقصاء لحساب عدد العناصر الموجودة في $\text{سـ}_1 \cup \text{سـ}_2 \cup \cdots \cup \text{سـ}_n$. وسنقتصر هنا على الحالتين $n = ٢$ وَ $n = ٣$ فقط.

الحالة الأولى: إذا كانت سـ وَ ك مجموعتين منتهيتين فإن

$$|\text{سـ} \cup \text{ك}| = |\text{سـ}| + |\text{ك}| - |\text{سـ} \cap \text{ك}|$$

الحالة الثانية: إذا كانت سـ، ك وَ ع ثلاث مجموعات منتهية فإن

$$|\text{سـ} \cup \text{ك} \cup \text{ع}| = |\text{سـ}| + |\text{ك}| + |\text{ع}| - |\text{سـ} \cap \text{ك}| - |\text{سـ} \cap \text{ع}| - |\text{ك} \cap \text{ع}| + |\text{سـ} \cap \text{ك} \cap \text{ع}|$$

ونستطيع أن نعمم هذا المبدأ بنفس الطريقة إلى أكثر من ثلاث مجموعات.

الحالة الأولى: إذا كانت سـ مجموعة جزئية من المجموعة شـ تحتوي على العناصر ذات الخاصية ح_1 وكانت ك مجموعة جزئية أخرى وتحتوي على العناصر ذات الخاصية ح_2، فإن عدد العناصر ذات الخاصيتين ح_1 وَ ح_2 معاً يساوي: $|\text{سـ} \cap \text{ك}|$. ونلاحظ أيضاً أن عدد العناصر التي لا تحتوي على أي من الخاصيتين ح_1 وَ ح_2 يساوي:

$$|\text{شـ}| - |\text{سـ} \cup \text{ك}| = |\text{شـ}| - \left[\, |\text{سـ}| + |\text{ك}| - |\text{سـ} \cap \text{ك}| \,\right]$$
$$= |\text{شـ}| - |\text{سـ}| - |\text{ك}| + |\text{سـ} \cap \text{ك}|$$

الحالة الثانية: إذا كانت $\text{سـ}, \text{ك}, \text{صـ}$ ثلاث مجموعات جزئية للمجموعة شـ تحتوي على العناصر ذات الخواص $\text{ح}_1, \text{ح}_2, \text{ح}_3$ على الترتيب، فإن عدد العناصر التي تحقق الخواص الثلاث معاً يساوي: $|\text{سـ} \cap \text{ك} \cap \text{صـ}|$. كما نلاحظ أن عدد العناصر التي لا تحقق أي من الخواص الثلاث يساوي:

$$|\text{شـ}| - |\text{سـ} \cup \text{ك} \cup \text{صـ}| =$$
$$= |\text{شـ}| - \left[\, |\text{سـ}| + |\text{ك}| + |\text{صـ}| - |\text{سـ} \cap \text{ك}| - |\text{سـ} \cap \text{صـ}| - |\text{ك} \cap \text{صـ}| + |\text{سـ} \cap \text{ك} \cap \text{صـ}| \,\right]$$

مثال: عدد طلاب السنة الأولى في جامعة الملك فهد هو ٢٠٠٠ طالب. كل طالب مسجل في مادة واحدة على الأقل من بين المواد الثلاثة: فيزياء وكيمياء ورياضيات. لنفرض أن ٧٠٠ من الطلاب مسجلين في مادة الفيزياء، وَ ٦٠٠ طالب مسجلين في مادة الكيمياء، و ١٠٠٠ طالب مسجلين في مادة الرياضيات، وَ ١٥٠ طالباً مسجلين في مادتي الفيزياء والكيمياء و ٢٠٠ طالب مسجلين في مادتي الفيزياء والرياضيات، و ٣٠٠ مسجلين في مادتي الكيمياء والرياضيات. ما هو عدد الطلاب المسجلين في المواد الثلاث؟

الحل:

لنفرض أن س مجموعة الطلاب المسجلين في مادة الفيزياء، وأن ك مجموعة الطلاب المسجلين في مادة الكيمياء، وأن ص مجموعة الطلاب المسجلين في مادة الرياضيات. فإن

$$|\text{س} \cup \text{ك} \cup \text{ص}| = \text{٢٠٠٠}،\ |\text{س}| = \text{٧٠٠}،\ |\text{ك}| = \text{٦٠٠}،\ |\text{ص}| = \text{١٠٠٠}$$

كما أن $|\text{س} \cap \text{ك}| = \text{١٥٠}،\ |\text{س} \cap \text{ص}| = \text{٢٠٠}،\ |\text{ك} \cap \text{ص}| = \text{٣٠٠}$

ونريد أن نجد $|\text{س} \cap \text{ك} \cap \text{ص}|$. باستخدام مبدأ التضمين والإقصاء نجد أن

$$|\text{س} \cup \text{ك} \cup \text{ص}| = |\text{س}| + |\text{ك}| + |\text{ص}| - |\text{س} \cap \text{ك}| - |\text{س} \cap \text{ص}| - |\text{ك} \cap \text{ص}| + |\text{س} \cap \text{ك} \cap \text{ص}|$$

بالتعويض نحصل على:

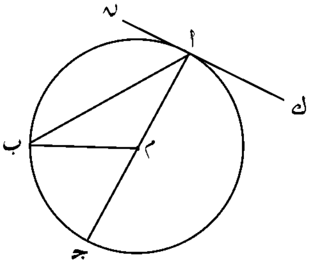
$$\text{٢٠٠٠} = \text{٧٠٠} + \text{٦٠٠} + \text{١٠٠٠} - \text{١٥٠} - \text{٢٠٠} - \text{٣٠٠} + |\text{س} \cap \text{ك} \cap \text{ع}|$$

يعني هذا أن هناك $|\text{س} \cap \text{ك} \cap \text{ص}| = \text{٣٥٠}$ من الطلاب مسجلين في المواد الثلاث.

١ -٦ مقدمة في الهندسة

الدائـــــرة

❖ مقدمة



شكل (١)

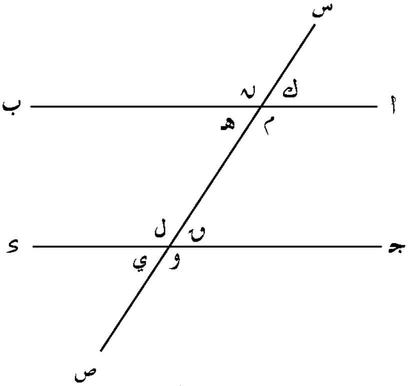
الدائرة: مجموعة النقاط التي تبعد نفس المسافة (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (مركز الدائرة).
الوتر: كل قطعة مستقيمة طرفاها نقطتان من الدائرة.
القطر: وتر يمر بمركز الدائرة (أطول وتر).
القوس: جزء من منحنى الدائرة.
القطاع الزاوي: الجزء المحدود بنصفي قطرين وقوس.
القطعة الزاوية: الجزء المحدود بقوس ووتر.
المماس: المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة.
الزاوية المركزية: زاوية رأسها مركز الدائرة.
الزاوية المحيطية: زاوية ضلعاها وتران ورأسها يقع على الدائرة.
زاوية القوس: الزاوية المركزية التي يكون القوس محدوداً بين ضلعيها.

في الشكل (١): القطعة المستقيمة أب وتر في دائرة مركزها م ويقسمها إلى القوسين $\overset{\frown}{أب}$ الصغير و $\overset{\frown}{أب}$ الكبير، أجـ قطر، كن مماس للدائرة عند أ، $\widehat{أمب}$ زاوية مركزية وهي زاوية القوس $\overset{\frown}{أب}$، $\widehat{جـأب}$ زاوية محيطية. المنطقة المحصورة بين القوس الصغير $\overset{\frown}{أب}$ والقطعتين المستقيمتين أم وَ مب تسمى قطاعاً زاوياً، بينما تسمى المنطقة المحصورة بين القوس الصغير $\overset{\frown}{أب}$ والوتر أب قطعة زاوية.

❖ علاقات أساسية

- نسبة محيط أي دائرة إلى قطرها ثابتة. هذه النسبة يرمز لها بالحرف ط أو بالحرف اليوناني π وتساوي تقريباً ٣,١٤.
- محيط الدائرة = ق ط = ٢ نق ط (حيث ق قطر الدائرة وَ نق نصف قطرها).
- مساحة الدائرة = ط نق^{٢}.

- كل زاوية مركزية تحد قوساً على الدائرة، وعندما نقول قياس زاوية القوس فإننا نعني بذلك قياس الزاوية المركزية التي يكون القوس محدوداً بين ضلعيها.
- العلاقة بين قياس الزاوية بالتقدير الستيني وقياس الزاوية بالتقدير الدائري: ١٨٠° ≡ ط راديان.
- الزاوية الحادة قياسها أكبر من الصفر وأقل من ٩٠°، الزاوية القائمة قياسها ٩٠°، الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من ٩٠° وأقل من ١٨٠°، الزاوية المستقيمة قياسها ١٨٠°.
- تكون الزاويتان متتامتين إذا كان مجموعهما يساوي ٩٠°.
- تكون الزاويتان متكاملتين إذا كان مجموعهما يساوي ١٨٠°.



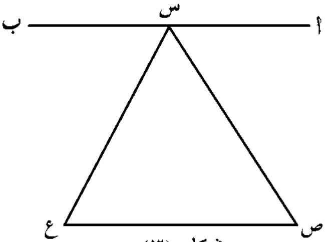
شكل (٢)

- كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان.
- كل زاويتين متبادلتين متساويتان.
- كل زاويتين متناظرتين متساويتان.

في الشكل (٢):
اب // جـء وَ س ص قاطع لهما.
الزاويتان م̂ وَ ن̂ متساويتان لأنهما متقابلتان بالرأس، وكذلك كل من الأزواج ك̂ وَ هـ̂، ن̂ وَ ي̂، و̂ وَ ل̂.
الزاويتان م̂ وَ ل̂ متساويتان لأنهما متبادلتان، وكذلك الزاويتان هـ̂ وَ ن̂.
الزاويتان ك̂ وَ ن̂ متساويتان لأنهما متناظرتان، وكذلك كل من الأزواج ن̂ وَ ل̂، م̂ وَ و̂، هـ̂ وَ ي̂.

- مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°.

في الشكل (٣):
∵ اب // ص ع
∴ ا س ص = ص̂ بالتبادل،
ب س ع = ع̂ بالتبادل.
∵ ا س ص + ب س ع + ص س ع = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)
∴ ص̂ + ع̂ + ص س ع = ١٨٠°



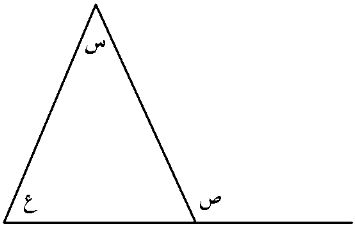
شكل (٣)

- قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها.

في الشكل (٤):

الزاوية $\widehat{ص}$ زاوية خارجية وتحقق

$\widehat{ص} = \widehat{س} + \hat{ع}$



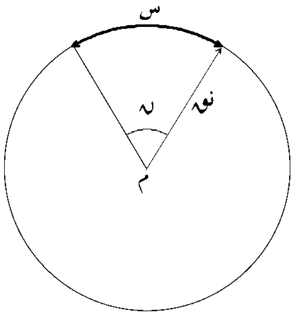
شكل (٤)

- نسبة طول قوس (س) إلى محيط الدائرة تساوي نسبة قياس زاوية القوس (بالراديان) إلى قياس زاوية الدائرة (٢ط).

في الشكل (٥):

$$\frac{س}{٢ط نه} = \frac{ه}{٢ط}$$

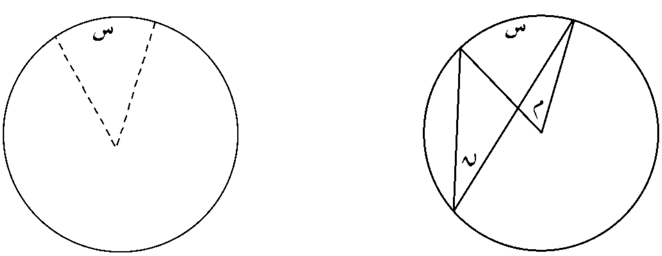
$$\Leftarrow ه = \frac{س}{نه}$$



شكل (٥)

❖ الزوايا الناتجة عن تقاطع مستقيمات ودائرة

- قياس الزاوية المحيطية ($\hat{ه}$ في الشكل (٦–أ)) يساوي نصف قياس الزاوية المركزية ($\hat{م}$) المشتركة معها في القوس ($\overset{\frown}{س}$). إذا كتبنا $\widehat{\widehat{س}}$ فإننا نعني بذلك الزاوية المركزية التي يحد ضلعاها القوس $\overset{\frown}{س}$ (أي الزاوية المركزية $\hat{م}$). ولذلك فإننا في كثير من الأحيان لسنا بحاجة لرسم الزاوية المركزية التي ضلعاها يحدان القوس كما في الشكل (٦ – ب) ونستعيض عن ذلك بكتابة $\widehat{\widehat{س}}$ ونقرؤها: الزاوية المركزية التي ضلعاها يحدان القوس $\overset{\frown}{س}$. (لاحظ أن: $\widehat{\widehat{س}} = ٢\hat{ه}$).

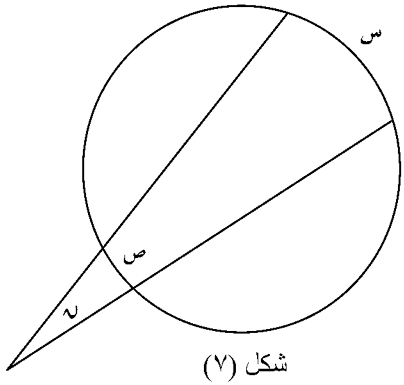


(ب) (أ)

شكل (٦)

- قياس الزاوية الناتجة عن تقاطع قاطعين لدائرة في نقطة خارجها ($\hat{ن}$ في الشكل (٧)) يساوي نصف حاصل طرح الزاويتين المركزيتين المقابلتين للقوسين المحصورين بين القاطعين.

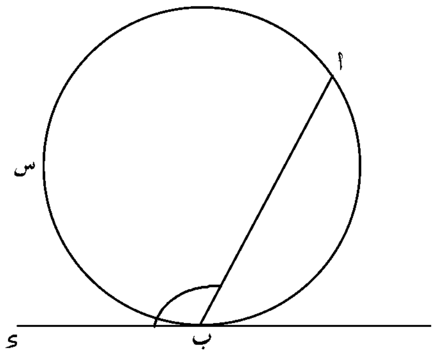
(أي أن: $\hat{ن} = \frac{\widehat{س} - \widehat{ص}}{٢}$)



شكل (٧)

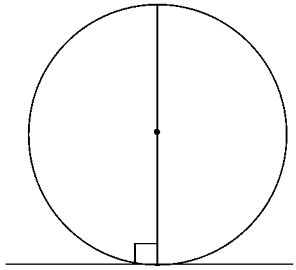
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المقابلة للقوس المحدود بضلعيها

(أي أن: $\widehat{ا ب د} = \frac{\widehat{س}}{٢}$)



شكل (٨)

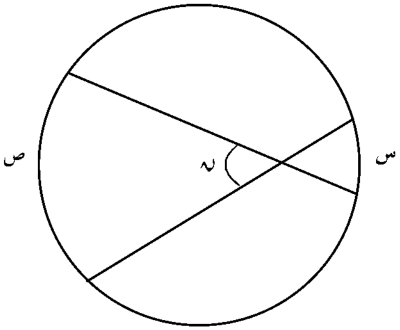
ومن الطبيعي الاستنتاج أن أي قطر مرسوم من نقطة التماس يكون عمودياً على المماس.



شكل (٩)

- قياس الزاوية المتكونة من تقاطع وترين، يساوي نصف مجموع قياسي الزاويتين المركزيتين المقابلتين للقوسين المحدودين بالوترين.

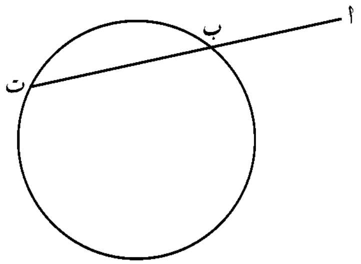
(في الشكل (١٠): $\hat{\text{ن}} = \dfrac{\overset{\frown}{\text{س}} + \overset{\frown}{\text{ص}}}{٢}$)



شكل (١٠)

❖ مبرهنة قوة النقطة

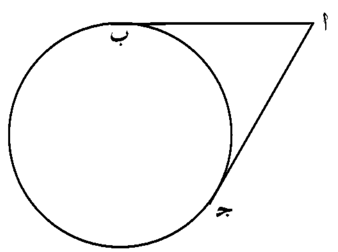
إذا رسمنا قطعة مستقيمة من نقطة ثابتة أ بحيث تقطع دائرة ما في نقطتين ب وَ ت، فإن المقدار |أب|×|أت| ثابت ولا يعتمد على اختيار النقطتين ب وَ ت.



شكل (١١)

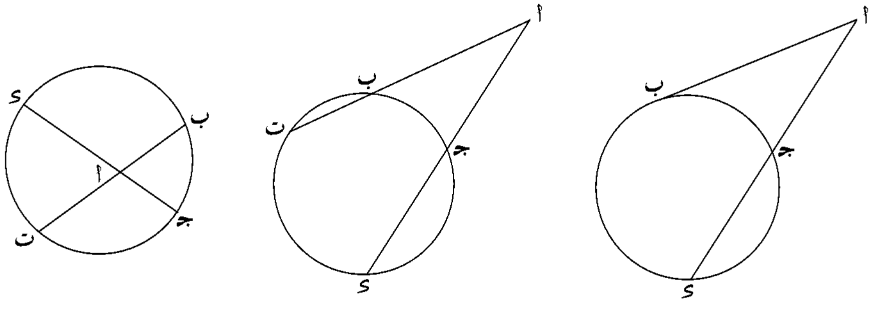
المبرهنة هامة في عدة حالات خاصة، منها مثلاً أن المبرهنة تقود إلى أن المماسين المرسومين من نقطة خارج دائرة متطابقان. ففي الشكل (١٢)، النقطتان ب وَ ت هما نفس النقطة. ولذلك، وباستخدام المبرهنة، فإن

|أب|×|أب|=|أب|٢= ثابت = |أجـ|×|أجـ| = |أجـ|٢، أي أن |أب|=|أجـ|



شكل (١٢)

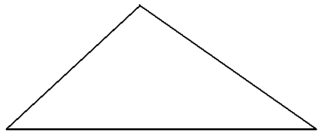
في الشكل (١٣-أ)، نستنتج أن $|\text{أب}|^{2}=|\text{أجـ}|\times|\text{أد}|$، وفي الشكل (١٣-ب) حيث هناك قاطعان للدائرة من النقطة أ، نستنتج أن $|\text{أب}|\times|\text{أت}|=|\text{أجـ}|\times|\text{أد}|$. المبرهنة أيضاً صحيحة إذا كانت النقطة داخل الدائرة كما في الشكل (١٣- ج) حيث يمكننا كتابة $|\text{أب}|\times|\text{أت}|=|\text{أجـ}|\times|\text{أد}|$.



(ج) (ب) (أ)

شكل (١٣)

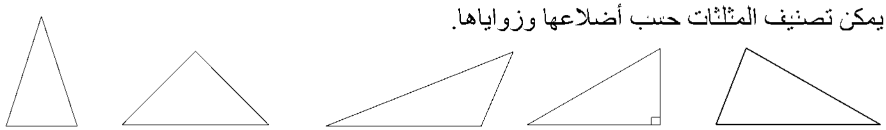
المثـلث



شكل (١٤)

❖ تصنيف المثلثات

يمكن تصنيف المثلثات حسب أضلاعها وزواياها.



شكل (١٥)

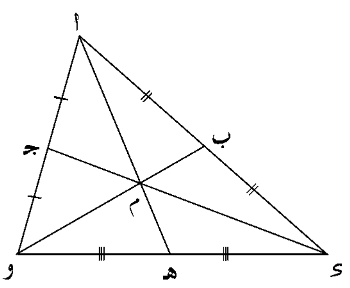
المثلث الحاد: مثلث جميع زواياه حادة، (شكل (١٥- أ)).
المثلث القائم: مثلث إحدى زواياه قائمة وتكون الزاويتان الأخريان حادتين (تذكر: مجموع زوايا المثلث =١٨٠° وبذلك تكون الزاويتان الأخريان متتامتين). في المثلث القائم، نسمي الضلع المقابل للزاوية القائمة "**وتر**"، (شكل (١٥-ب)).
المثلث المنفرج: مثلث إحدى زواياه منفرجة، (شكل (١٥- ج)).
المثلث المتطابق الأضلاع: مثلث جميع أضلاعه متطابقة، وتكون جميع زواياه متساوية (قياس كل زاوية =٦٠°)، (شكل (١٥- د)).
المثلث المتطابق الضلعين: في هذا المثلث يكون ضلعان من أضلاعه متطابقين، وتكون الزاويتان المواجهتان للضلعين المتطابقين متساويتين، (شكل (١٥- هـ)).

هناك بعض المستقيمات الخاصة والهامة والتي يمكن رسمها في المثلثات، ومنها:

❖ المتوسط

هو كل مستقيم يمر في أحد رؤوس المثلث وفي منتصف الضلع المواجه لذلك الرأس، (شكل (١٦)).
المتوسطات الثلاث تلتقي في نقطة واحدة، وهذه النقطة تقسم كل متوسط بنسبة ٢:١، أي:

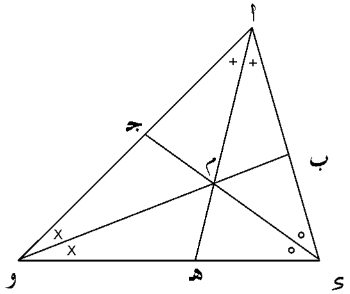
$$\frac{|أم|}{|مهـ|}=\frac{|وم|}{|مب|}=\frac{|ءم|}{|مجـ|}=\frac{٢}{١}$$



شكل (١٦)

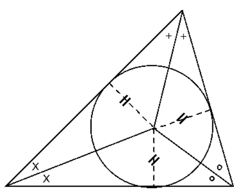
❖ منصف الزاوية

هو كل مستقيم يمر في أحد رؤوس المثلث وينصف زاوية ذلك الرأس. كل نقطة على أي منصف تقع على نفس البعد من ضلعي زاوية الرأس المنصَّفة، كما أن المنصفات الثلاث تلتقي في نقطة واحدة، (شكل (١٧)).



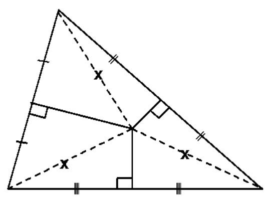
شكل (١٧)

ملاحظة: بما أن المنصفات الثلاث تلتقي في نقطة واحدة وتكون هذه النقطة على نفس البعد من أضلاع المثلث، فإنه يمكننا أن نرسم دائرة داخل المثلث تمس أضلاع المثلث من الداخل. نسمي هذه الدائرة "الدائرة الداخلية".
(تنبيه: الخطوط المتقطعة في شكل (١٨) ليست امتدادات منصفات الزوايا، بل هي المسافات العمودية من نقطة التقاء منصفات الزوايا إلى أضلاع المثلث، وطول كل منها يساوي نصف قطر الدائرة الداخلية).



شكل (١٨)

❖ العمود المنصف لضلع المثلث

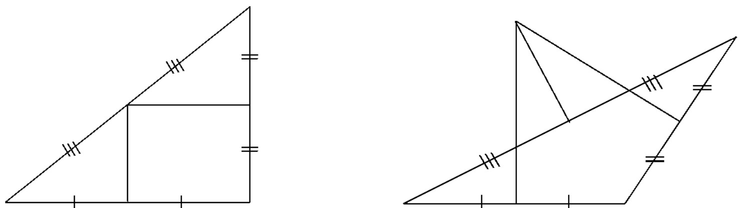


شكل (١٩)

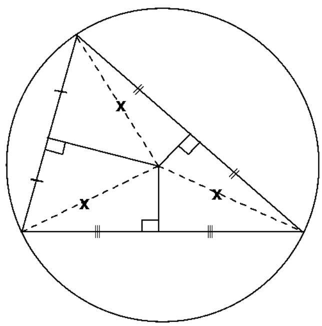
هو كل مستقيم عمودي على ضلع من أضلاع المثلث وينصفه. الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث تلتقي في نقطة واحدة، وتقع هذه النقطة على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث. في الشكل (١٩)، نقطة التقاء

الأعمدة المنصفة تقع داخل المثلث. هذه النقطة تقع خارج المثلث المنفرج، وتقع على المثلث القائم كما في الشكل (٢٠).

ملاحظة: بما أن الأعمدة المنصفة الثلاث تلتقي في نقطة واحدة وتكون هذه النقطة على نفس البعد من رؤوس المثلث، فإنه يمكننا أن نرسم دائرة خارج المثلث وتمر برؤوس المثلث الثلاثة. نسمي هذه الدائرة "الدائرة الخارجية"، (شكل (٢١)).



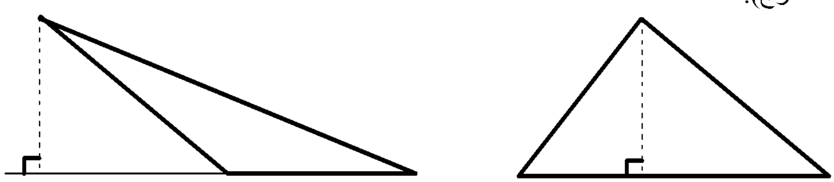
شكل (٢٠)



شكل (٢١)

❖ **ارتفاع المثلث**

هو كل قطعة مستقيمة عمودية من رأس المثلث إلى الضلع المقابل (أو امتداد الضلع المقابل كما في المثلث المنفرج).

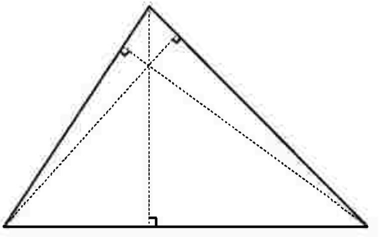


شكل (٢٢)

الارتفاعات الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة كما في الشكل (٢٣).

❖ المتباينة المثلثية

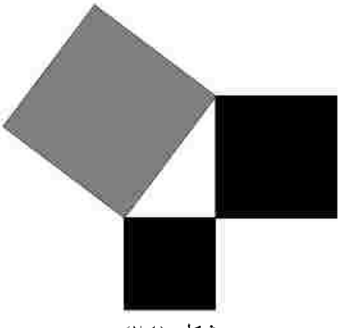
مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث. فمثلاً لا يوجد مثلث أطوال أضلاعه ١، ٣، ٥ بما أن ١+٣<٥.



شكل (٢٣)

❖ مبرهنة فيثاغورس

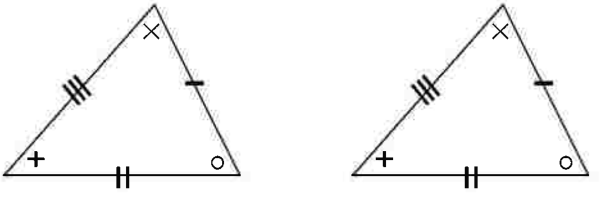
في المثلث القائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين. الشكل (٢٤) يوضح مبرهنة فيثاغورس هندسياً حيث مساحة المربع الفاتح (مربع الوتر) تساوي مجموع مساحتي المربعين القاتمين (مجموع مربعي الضلعين الآخرين).



شكل (٢٤)

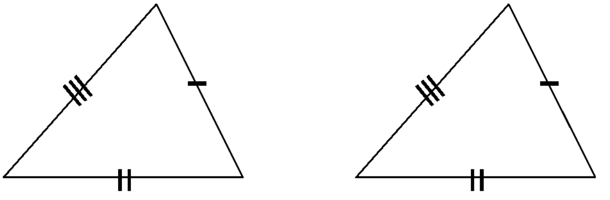
❖ تطابق المثلثات

يتطابق المثلثان إذا تساوت الزوايا المتناظرة وتطابقت فيهما الأضلاع المتناظرة. نحن لسنا بحاجة لإثبات تساوي ثلاث زوايا متناظرة وتطابق ثلاثة أضلاع متناظرة، بل يكفي لإثبات تطابق مثلثين أيٌ مما يلي:



شكل (٢٥)

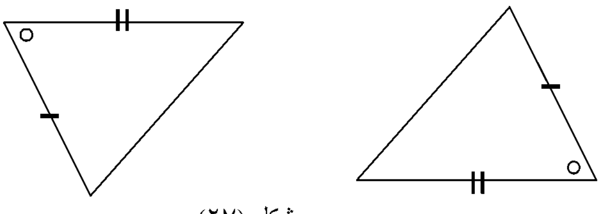
- يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع في مثلث مع نظيره في المثلث الآخر.



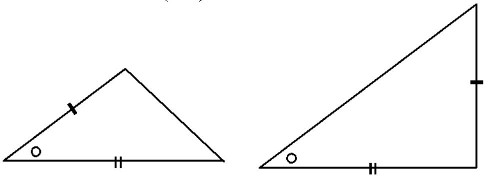
شكل (٢٦)

- يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.

تنبيه: كلمة "نظائرها" في العبارة السابقة هامة جداً (قارن بين الشكل (٢٧) الذي يحوي مثلثين متطابقين وبين الشكل (٢٨) حيث لا يوجد تطابق).

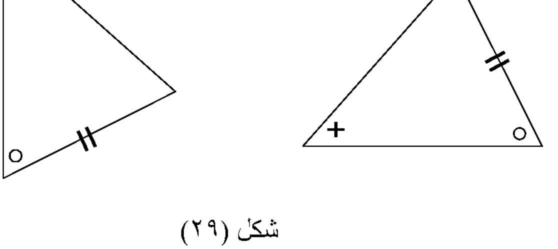


شكل (٢٧)



شكل (٢٨)

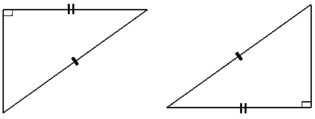
- يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلع وزاويتان في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.



شكل (٢٩)

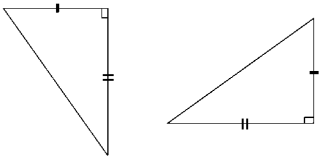
وفي **المثلثات القائمة،** يتطابق المثلثان إذا:

- تساوى وتر وضلع في مثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر. هذه الحالة مكافئة للحالة الأولى من تطابق المثلثات نظراً لأن طول الضلع الثالث في أي من المثلثين يساوي طول الضلع الثالث في المثلث الآخر (باستخدام مبرهنة فيثاغورس).



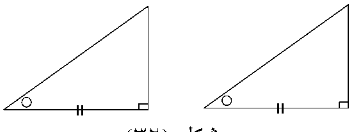
شكل (٣٠)

- تساوى ضلعا الزاوية القائمة في مثلث مع ضلعي الزاوية القائمة في المثلث الآخر. هذه الحالة مكافئة للحالة الثانية من تطابق المثلثات حيث الزاوية المحصورة هي الزاوية القائمة.



شكل (٣١)

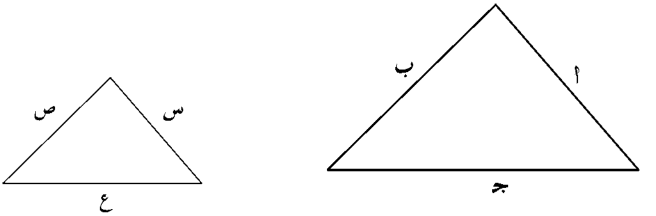
- تساوت زاوية حادة وأحد ضلعيها في مثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر. هذه الحالة مكافئة للحالة الثالثة من تطابق المثلثات نظراً لمعرفتنا لزاوية أخرى وهي الزاوية القائمة.



شكل (٣٢)

❖ **تشابه المثلثات**

يتشابه مثلثان إذا كان أحدهما صورة مكبرة عن الآخر، وتكون نسبة طولي أي ضلعين متناظرين ثابتة. فمثلاً في الشكل (٣٣)، $\frac{\text{أ}}{\text{س}}=\frac{\text{ب}}{\text{ص}}=\frac{\text{جـ}}{\text{ع}}$.



شكل (٣٣)

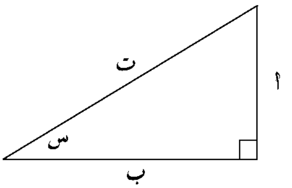
وبالإضافة للأضلاع، فإن تشابه مثلثين يعني أن الأطوال الأخرى كالارتفاعات والمتوسطات وغيرها متناسبة.

هنالك ثلاث طرق عامة لإثبات تشابه مثلثين:

- يتشابه مثلثان إذا تناسبت أضلاعهما المتناظرة.
- يتشابه مثلثان إذا تساوت زوايا أحدهما مع زوايا المثلث الآخر. هذه الطريقة هي الأكثر أهمية لإثبات تشابه مثلثين، ويكفي أن تلاحظ تساوي زاويتين في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر نظراً لأن الزاوية الثالثة هي المكملة للزاويتين الأخريين.
- يتشابه مثلثان إذا تساوت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر وتناسب ضلعا الزاوية مع نظيريهما في المثلث الآخر.

❖ حساب المثلثات

نورد هنا باختصار تعريف الدوال المثلثية وبعض علاقاتها لما تلعبه هذه الدوال من دور كبير. الدوال المثلثية إجمالاً تعبر عن علاقات الأضلاع في المثلث قائم الزاوية. الدوال المثلثية الأساسية لزاوية س تعرَّف كما يلي:



شكل (٣٤)

$$\text{جا س} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ}}{\text{ت}} \qquad \text{قتا س} = \frac{\text{١}}{\text{جا س}} = \frac{\text{ت}}{\text{أ}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب}}{\text{ت}} \qquad \text{قا س} = \frac{\text{١}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \qquad \text{ظتا س} = \frac{\text{١}}{\text{ظا س}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$$

يمكننا عن طريق تعريفات الدوال المثلثية الحصول على بعض العلاقات الهامة، ومنها:

$$\text{جا س} = \text{جتا}\left(\text{٩٠}^\circ - \text{س}\right)\text{،}\quad \text{جتا س} = \text{جا}\left(\text{٩٠}^\circ - \text{س}\right)\text{،}\quad \text{ظا س} = \text{ظتا}\left(\text{٩٠}^\circ - \text{س}\right)\text{، ... الخ.}$$

$$\text{جا}^{\text{٢}}\,\text{س} + \text{جتا}^{\text{٢}}\,\text{س} = \text{١}$$

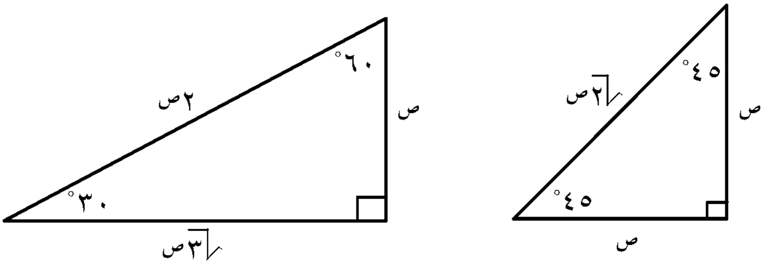
$$\text{ظا}^{\text{٢}}\,\text{س} + \text{١} = \text{قا}^{\text{٢}}\,\text{س}$$

ظتا ^{٢} س + ١ = قتا ^{٢} س

جا(س + ص) = جا س جتا ص + جتا س جا ص

جتا(س + ص) = جتا س جتا ص − جا س جا ص

هناك بعض الزوايا الهامة نظراً لحدوثها المتكرر، نتيجة لتنصيف زاوية قائمة مثلاً، أو لأنها زاوية في مثلث متطابق الأضلاع، أو غيرها. ومن هذه الزوايا الهامة ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°. الجدول التالي يوضح قيم الدوال المثلثية لهذه الزوايا بالإضافة للزاوية القائمة والصفر.

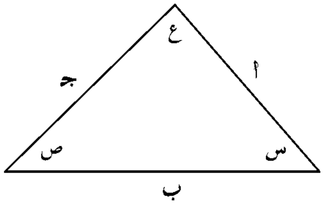


شكل (٣٥)

الدالة المثلثية	صفر°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°
جا س	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١
جتا س	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠
ظا س	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرف
قا س	١	$\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$	$\sqrt{٢}$	٢	غير معرف
قتا س	غير معرف	٢	$\sqrt{٢}$	$\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$	١
ظتا س	غير معرف	$\sqrt{٣}$	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	٠

ليس ضرورياً حفظ قيم الدوال المثلثية في الجدول، إذ يمكننا الحصول عليها عن طريق الرجوع لتعريف كل من هذه الدوال بالإضافة إلى رسم المثلث القائم الثلاثيني الستيني والمثلث القائم المتطابق الضلعين، كما في الشكل (٣٥). لاحظ أن طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف الوتر.

❖ قانون الجيب



شكل (٣٦)

في المثلث أب جـ في الشكل (٣٦)،

$$\frac{\text{أ}}{\widehat{\text{ص}}}=\frac{\text{ب}}{\widehat{\text{ع}}}=\frac{\text{جـ}}{\widehat{\text{س}}}$$

❖ قانون جيب التمام

في المثلث أب جـ في الشكل (٣٦)،

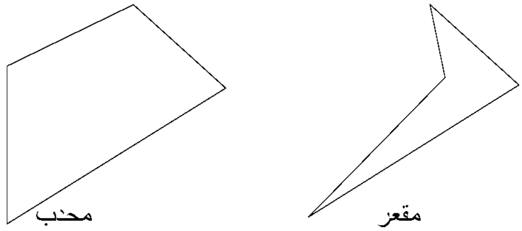
$$\text{جـ}^{٢}=\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}-٢\times\text{أ}\times\text{ب}\times\text{جتا}\,\widehat{\text{س}}$$

❖ مساحة المثلث

هناك عدة صيغ لحساب مساحة المثلث ذي الأضلاع أ، ب، وَ جـ ، منها:

- مساحة المثلث $=\frac{١}{٢}\times\text{ه}\times\text{ع}$، حيث ه هي قاعدة المثلث وَ ع ارتفاعه.
- مساحة المثلث $=\frac{١}{٢}\times\text{أ}\times\text{ب}\times\text{جاس}$، حيث $\widehat{\text{س}}$ هي الزاوية المحصورة بين الضلعين أ وَ ب.
- مساحة المثلث = $\text{ح}\times\text{نق}_{\text{د}}$ ، حيث ح نصف محيط المثلث وَ $\text{نق}_{\text{د}}$ نصف قطر الدائرة الداخلية.
- مساحة المثلث = $\sqrt{\text{ح}\,(\text{ح}-\text{أ})(\text{ح}-\text{ب})(\text{ح}-\text{جـ})}$ وتسمى هذه الصيغة صيغة "هيرون".
- مساحة المثلث = $\frac{\text{أ ب جـ}}{٤\,\text{نق}_{\text{خ}}}$، حيث $\text{نق}_{\text{خ}}$ نصف قطر الدائرة الخارجية.

الأشكـــال الرباعـــية



شكل (٣٦)

❖ مقدمة

الشكل الرباعي: هو شكل هندسي ذو أربعة أضلاع، ومحيطه هو مجموع أطوال هذه الأضلاع.

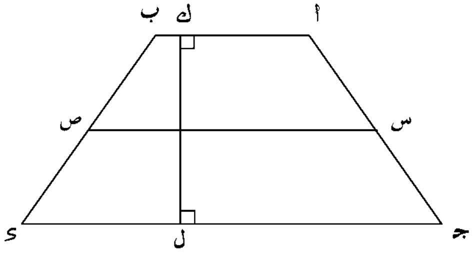
يكون الشكل الرباعي إما محدباً إذا كانت جميع زواياه الداخلية أقل من ١٨٠°، أو مقعراً إذا كانت إحدى زواياه أكبر من ١٨٠°.

القطعة المستقيمة الواصلة من أحد رؤوس الشكل الرباعي إلى أي رأس آخر غير مجاور تسمى القطر.

يقسم القطر الشكل الرباعي إلى مثلثين، وبذلك نستنتج أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية في الشكل الرباعي يساوي ٣٦٠°.

نستعرض فيما يأتي أهم الأشكال الرباعية.

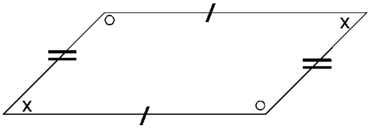
❖ شبه المنحرف



شكل (٣٧)

هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط. الضلعان المتوازيان هما قاعدتا شبه المنحرف. القطعة المستقيمة كل في الشكل (٣٧) تمثل ارتفاع شبه المنحرف، والقطعة المستقيمة س ص التي تصل بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين تسمى القاعدة المتوسطة. القاعدة المتوسطة موازية لقاعدتي شبه المنحرف وطولها يساوي متوسط طوليهما (أي أن: $|\text{س ص}| = \frac{|\text{أب}| + |\text{جد}|}{٢}$). نحث القارئ على إثبات ذلك عن طريق إسقاط عمودين من أ وَ ب إلى القاعدة جد ومن ثم استخدام تشابه المثلثات الناتجة. وبنفس الطريقة يمكننا إثبات أن مساحة شبه المنحرف تساوي حاصل ضرب الارتفاع بطول القاعدة المتوسطة (أي أن: مساحة شبه المنحرف $|\text{س ص}| \times |\text{ك ل}|$).

❖ متوازي الأضلاع

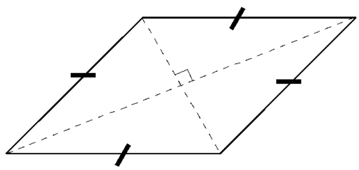


شكل (٣٨)

هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ونتيجة لذلك فإن كل زاويتين متقابلتين متساويتان، وكل زاويتين غير متساويتين متكاملتان. كما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان (اثبت ذلك عن طريق رسم القطرين وإيجاد مثلثات متطابقة). وبطريقة إيجاد المثلثات المتطابقة نستطيع أن نثبت أن القطرين في متوازي الأضلاع ينصفان بعضيهما.

وبالنظر لمتوازي الأضلاع على أنه شبه منحرف نجد أن مساحته تساوي حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع (لاحظ أن طول القاعدة المتوسطة يساوي طول أي من القاعدتين المتساويتين).

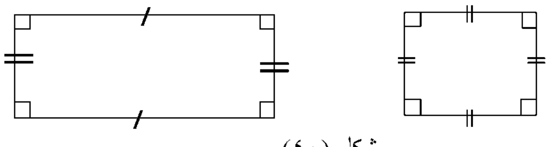
❖ المعيّن



شكل (٣٩)

هو شكل رباعي جميع أضلاعه متطابقة. يمكننا بسهولة (كيف؟) أن نثبت أن كل معين هو متوازي أضلاع. ويتميز المعين بتعامد قطريه، مما يمكننا من استخدامهما لحساب مساحته. فمساحة المعين تساوي نصف حاصل ضرب القطرين. وبالطبع يمكننا حساب مساحة المعين كشبه منحرف أو متوازي أضلاع.

❖ المستطيل والمربع

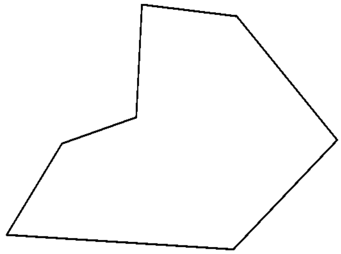


شكل (٤٠)

المستطيل: هو شكل رباعي جميع زواياه متساوية (قياس كل زاوية ٩٠ °). كل مستطيل هو متوازي أضلاع. يطلق على الضلع الأطول في المستطيل اسم الطول (ل) بينما يسمى الضلع الأصغر العرض (ع)، ومساحة المستطيل هي حاصل ضرب الطول في العرض (ع×ل). قطرا المستطيل متطابقان (طول كل منهما يساوي $\sqrt{\text{ع}^2 + \text{ل}^2}$). إذا تساوى الطول والعرض في مستطيل فإننا نسميه مربع.

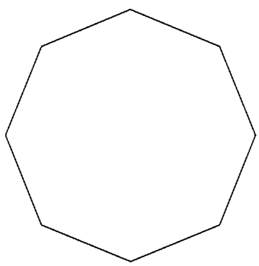
إذن المربع: هو شكل رباعي جميع زواياه متساوية، وجميع أضلاعه متطابقة، وكل مربع هو في نفس الوقت مستطيل ومعين ومتوازي أضلاع.

المضـــلع



شكل (٤١)

هو شكل مستوي مغلق محدود بثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، تلتقي أزواجاً في نفس الرؤوس، ولا تتقاطع إلا في رؤوسها. ومن المضلعات الشهيرة المثلث وهو مكون من ثلاثة أضلاع، والشكل الرباعي المكون من أربعة أضلاع.



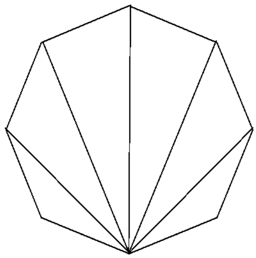
شكل (٤٢)

يسمى المضلع منتظماً (شكل (٤٢)) إذا تطابقت جميع أضلاعه وتساوت جميع زواياه. ولا يكفي أن تتساوى زواياه فقط ليكون منتظماً (المستطيل مثلاً)، كما أن تطابق الأضلاع فقط لا يكفي.

القطعة المستقيمة الواصلة من رأس من رؤوس المضلع إلى أي رأس آخر غير مجاور تسمى القطر. عدد الأقطار في مضلع مكون من ن من القطع المستقيمة يساوي $\frac{ن(ن-٣)}{٢}$. لاحظ أنه يمكننا رسم قطعة مستقيمة من رأس ما، لأي من الرؤوس المتبقية وعددها $ن-١$ باستثناء الرأسين المجاورين، أي أنه يمكننا أن نرسم $ن-٣$ قطراً من كل رأس من الرؤوس البالغ عددها ن (شكل (٤٣))، أي ما مجموعه $ن(ن-١)$. نقسم العدد الكلي على ٢ لأن القطر من نقطة أ إلى نقطة ب هو نفسه من نقطة ب إلى نقطة أ.

يمكننا ملاحظة أن الأقطار المرسومة من رأس في المضلع وعددها $ن-٣$ تقسم المضلع إلى $ن-٢$ مثلثاً. نستنتج من ذلك أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع مكون من ن ضلعاً يساوي $(ن-٢)\times١٨٠^\circ$. فعلى سبيل المثال،

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي (٣−٢)×١٨٠°=١٨٠°، ومجموع قياسات زوايا المضلع الثماني يساوي (٨−٢)×١٨٠°=١٠٨٠° (بمعدل ١٣٥° لكل زاوية في حالة كون المضلع منتظماً).



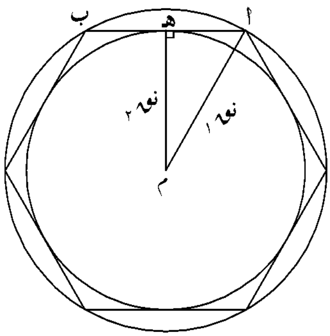
شكل (٤٣)

تلتقي المنصفات العمودية لأضلاع المضلع المنتظم في نقطة واحدة (أثبت ذلك باستخدام تطابق المثلثات). نقطة التقاء المنصفات العمودية هي أيضاً نقطة التقاء منصفات الزوايا الداخلية للمضلع المنتظم. ولذلك يمكننا أن نرسم من هذه النقطة دائرتين، إحداهما تمر بجميع رؤوس المضلع، والأخرى تمس جميع أضلاعه، (شكل (٤٤)). يمكننا إيجاد نصفي قطري هاتين الدائرتين إذا قسمنا المضلع، والذي طول ضلعه ل، إلى مثلثات قائمة كما في الشكل (٤٤). باستخدام الدوال المثلثية نجد أن:

$$نق_{١} = \frac{\frac{ل}{٢}}{جا\widehat{أمهـ}} \quad وَ \quad نق_{٢} = \frac{\frac{ل}{٢}}{ظا\widehat{أمهـ}}$$

قياس الزاوية $\widehat{أمهـ} = \frac{٣٦٠^\circ}{٢ن}$ حيث ن عدد أضلاع المضلع (لماذا؟). (لاحظ أن: في المضلع السداسي $\widehat{أمهـ} = ٣٠^\circ$ والمثلث أمب متطابق الأضلاع).

وبالتالي فإن مساحة المضلع $= ٢ن \times \left(\frac{١}{٢} \times \frac{ل}{٢} \times نق_{٢}\right) = \frac{ن\,ل\,نق_{٢}}{٢}$

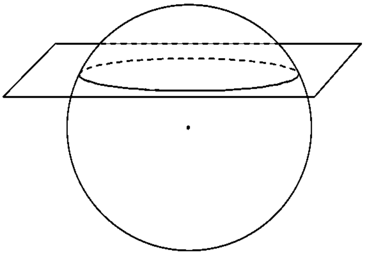


شكل (٤٤)

ثلاثيـــــات الأبعـــــاد

نستعرض فيما يلي باختصار بعض الأجسام ثلاثية الأبعاد.

❖ الكرة



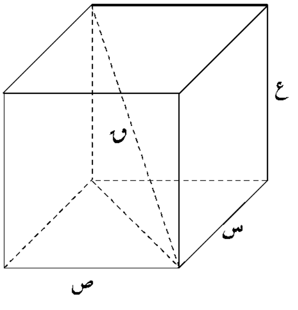
شكل (٤٥)

هي مجموعة النقاط في الفضاء والتي تقع على بعد متساوٍ وثابت من نقطة معلومة. النقطة المعلومة هي مركز الكرة، والبعد الثابت هو نصف قطرها.

المساحة السطحية للكرة تساوي ٤ط نق^٢ وحجمها يساوي $\frac{٤}{٣}$ط نق^٣ .

إذا قطع مستوى كرة فإن التقاطع يكون على شكل دائرة يتراوح قطرها من قطر الكرة نفسها (إذا كان التقاطع ماراً بمركز الكرة) إلى صفر (وفي هذه الحالة يمس المستوى الكرة فقط).

❖ متوازي المستطيلات (الصندوق)



شكل (٤٦)

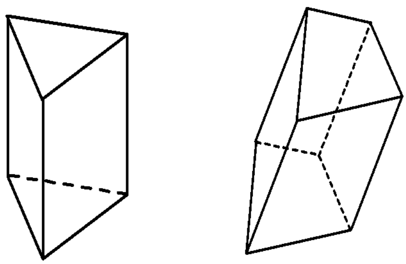
هو مجسم من ستة أوجه، وأوجهه المتقابلة مستطيلات متطابقة. القطع المستقيمة المكونة للأسطح المستطيلة تسمى أحرفاً، وتلتقي الأحرف في نقاط تسمى الرؤوس. القطر في متوازي المستطيلات هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس ما إلى الرأس المقابل.

المساحة السطحية لمتوازي مستطيلات ذي الأبعاد طول (س) وعرض (ص) وارتفاع (ع) تساوي مجموع مساحات المستطيلات الستة، أي أن ٢(س×ص+س×ع+ص×ع). إذا تساوى الطول والعرض والارتفاع يسمى متوازي المستطيلات مكعباً. وبذلك فإن المساحة السطحية للمكعب تساوي ٦س^{٢} حيث س هو طول الحرف.

حجم متوازي المستطيلات يساوي س×ص×ع، وحجم المكعب يساوي س^{٣}.

طول قطر متوازي المستطيلات (يمكن حسابه باستخدام مبرهنة فيثاغورس، شكل (٤٦)) يساوي $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}+\text{ع}^{٢}}$.

❖ المنشور

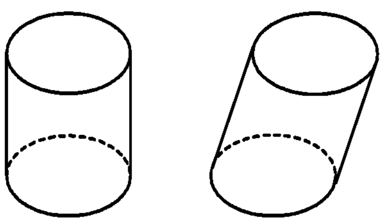


شكل (٤٧)

هو مجسم له قاعدتان مضلعتان متطابقتان ومتوازيتان، وأوجهه الجانبية عبارة عن متوازيات أضلاع تنتج من توصيل رؤوس القاعدتين المتقابلتين. في المنشور المنتظم تكون القاعدتان مضلعات منتظمة، وفي المنشور القائم تكون الأحرف الجانبية عمودية على القاعدتين (كمتوازي المستطيلات والمكعب).

المساحة السطحية للمنشور هي مجموع مساحات القاعدتين والأوجه الجانبية، وحجم المنشور هو حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع (الارتفاع هو المسافة بين القاعدتين).

❖ الاسطوانة

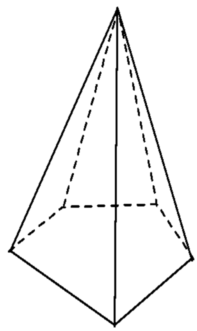


شكل (٤٨)

هو منشور قاعدتاه منحنيان عوضاً عن كونهما مضلعان. الاسطوانة الدائرية لها قاعدتان على شكل دائرتين. وقد تكون الاسطوانة الدائرية قائمة، وفي هذه الحالة فإن مساحتها السطحية مكونة من المساحة

الجانبية بالإضافة إلى مساحتي القاعدتين، أي ٢ط نق ع+٢ط نق^{٢}، حيث نق نصف قطر القاعدة وَ ع الارتفاع. وحجم الاسطوانة الدائرية القائمة يساوي ط نق^{٢} ع.

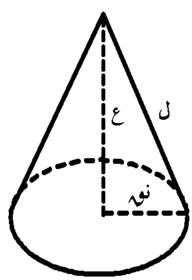
❖ الهرم



شكل (٤٩)

هو مجسم فيه وجه واحد على شكل مضلع (يسمى قاعدة الهرم وقد يكون مثلثاً) والباقي مثلثات تلتقي في رأس واحد (يسمى رأس الهرم). يسمى الهرم منتظماً إذا كانت قاعدته مضلعاً منتظماً وجميع الأوجه الجانبية لها نفس الزاوية مع رأس الهرم.
ارتفاع الهرم هو المسافة العمودية من رأس الهرم إلى القاعدة. حجم الهرم يساوي ثلث مساحة القاعدة في الارتفاع، ومساحته السطحية تساوي مجموع مساحات الأوجه الجانبية ومساحة القاعدة.

❖ المخروط



شكل (٥٠)

هو هرم قاعدته منحنى عوضاً عن كونها مضلعاً. إذا كانت القاعدة دائرة فإن المخروط يسمى مخروطاً دائرياً. المخروط الدائري القائم هو هرم منتظم قاعدته دائرية وحجمه يساوي $\frac{١}{٣}$ط نق^{٢} ع حيث نق

نصف قطر القاعدة وَ ع الارتفاع. المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم تساوي ط نق ل حيث ل طول "الراسم"، (شكل (٥٠)).

❖ متعدد السطوح

هو مجسم سطحه محدود بوساطة أربعة وجوه مضلعة أو أكثر بحيث تتلاقى أزواج الأوجه على طول الأحرف، وبحيث يتلاقى ثلاثة أحرف أو أكثر عند كل رأس. يتكون متعدد السطوح المنتظم من مضلعات منتظمة متطابقة تصنع مع بعضها زوايا متساوية. توجد خمسة متعددات سطوح منتظمة فقط. تسمى بعض متعددات السطوح تبعاً لعدد وجوهها مثل رباعي الوجوه وسداسي الوجوه ،... الخ. العلاقة التالية تربط بين عدد الرؤوس وعدد الوجوه وعدد الأحرف في أي متعدد سطوح سواءً أكان منتظماً أو غير منتظم:

عدد الرؤوس + عدد الوجوه - عدد الأحرف = ٢

شكل (٥١)