الباب الثالث

الحــــلول

٣-١ أسئلة وحلول في الجبر

السـؤال الأول:

عدد الأزواج المرتبة (أ، ب) المكونة من عددين حقيقيين يحققان

$$\frac{١}{أ + ب} = \frac{١}{أ} + \frac{١}{ب}$$

هو:

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٣
هـ) لانهائي

الحـل:

إن أول ما قد يخطر ببالك عند النظر للمعادلة المعطاة هو توحيد المقامات. لننفذ هذا الاقتراح ونرى ما نحصل عليه. بعد توحيد المقامات نحصل على $\frac{١}{أ + ب} = \frac{أ + ب}{أ ب}$، وبناءً على ذلك

$$أ^{٢} + أ ب + ب^{٢} = ٠$$

لاشك أن هذا جيد، فلديك ولا شك معرفة جيدة عن حلول المعادلات التربيعية. يعني هذا أن أ حل للمعادلة $س^{٢} + ب س + ب^{٢} = ٠$. لكن مميز هذه المعادلة التربيعية هو $ب^{٢} - ٤ ب^{٢} = - ٣ ب^{٢} < ٠$، أي أنه لا يوجد لهذه المعادلة أية حلول حقيقية. نستنتج أنه لا يوجد أي عددين حقيقيين يحققان المعادلة المعطاة.

السـؤال الثاني:

$$١^{٣} + ٣^{٣} + \cdots + (٢ن - ١)^{٣} =$$

أ) $ن^{٢} (٢ ن^{٢} - ١)$
ب) $ن^{٢} (ن^{٢} + ١)$
ج) $\frac{ن^{٢} (٢ن^{٢} - ١)}{٢}$
د) $\frac{ن^{٣} (٢ن^{٣} - ١)}{٨}$
هـ) $٢ ن^{٢} (ن^{٢} - ١)$

الحـــــل:

من المعلوم أن

$$\sum_{ك=١}^{ل} ك^٣ = \frac{ل^٢ (ل+١)^٢}{٤}$$

كما ورد في مقدمة هذا الكتاب، وهي صيغة يمكنك إثباتها باستخدام الاستقراء الرياضي. لاحظ أن

$$\begin{aligned} ١^٣ + ٣^٣ + \cdots + (٢ن-١)^٣ &= (١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \cdots + (٢ن)^٣) - (٢^٣ + \cdots + (٢ن)^٣) \\ &= (١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \cdots + (٢ن)^٣) - ٢^٣ (١^٣ + \cdots + ن^٣) \\ &= \sum_{ك=١}^{٢ن} ك^٣ - ٨ \sum_{ك=١}^{ن} ك^٣ \\ &= \frac{(٢ن)^٢ (٢ن+١)^٢}{٤} - ٨ \times \frac{ن^٢ (ن+١)^٢}{٤} \\ &= ن^٢ \left[(٤ن^٢ + ٤ن + ١) - ٢ (ن^٢ + ٢ن + ١) \right] \\ &= ن^٢ (٢ن^٢ - ١) \end{aligned}$$

الســــــؤال الثالث:

إذا كانت جميع جذور المعادلة التكعيبية

$$س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ر = ٠$$

حقيقية وتقع في الفترة (–٢ ، ٠)، فإن

أ) $٢٦ < ب + جـ + ر < ٤٠$

ب) $٠ < ب + جـ + ر < ٢٦$

ج) $-٢ < ب + جـ + ر < ٠$

د) $-٢٣ < ب + جـ + ر < -٢$

هـ) $-٤٠ < ب + جـ + ر < -٢٣$

الحـــــل:

لتكن $س_١$ ، $س_٢$ ،$س_٣$ الجذور الحقيقية للمعادلة التكعيبية المعطاة. إذن

$$س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ر = (س - س_١)(س - س_٢)(س - س_٣)$$

بتعويض س = ١، نحصل على

$$١ + ب + جـ + ر = (١ - س_١)(١ - س_٢)(١ - س_٣)$$

بالفرض $-٢ < س_ن < ٠$، ومن ذلك $١ < ١ - س_ن < ٣$ لجميع قيم $ن = ١، ٢، ٣$.
نستنتج من ذلك أن

$$١ < (١-س_١)(١-س_٢)(١-س_٣) < ٢٧$$

$$١ < ١ + ب + جـ + د < ٢٧$$

$$٠ < ب + جـ + د < ٢٦$$

السـؤال الرابع:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من عددين صحيحين س و ص يحققان المعادلة

$$س ص + ٣ س - ٧ ص = -٥$$

هو

أ) ٢
ب) ٤
ج) ٦
د) ٨
هـ) ١٠

الحـل:

حيث أن س و ص عددان صحيحان، فمن حقك تمني أن يكون الطرف الأيمن حاصل ضرب عددين صحيحين. كيف يمكن تحقيق هذه الأمنية؟ بإضافة -٢١ لطرفي المعادلة نحصل على

$$س ص + ٣ س - ٧ ص - ٢١ = -٢٦$$

أي أن

$$(س - ٧)(ص + ٣) = -٢٦$$

حيث إن $-٢٦ = -٢ \times ١٣ = ٢ \times (-١٣)$، وحيث إن ٢ وَ ١٣ عددان أوليان، نستنتج من النظرية الأساس للحساب أن لدينا الاحتمالات التالية

$$س - ٧ = ٢ \text{ ، } ص + ٣ = -١٣ \text{، } (س،ص) = (٩، -١٦)$$
$$س - ٧ = -٢ \text{ ، } ص + ٣ = ١٣ \text{، } (س،ص) = (٥، ١٠)$$
$$س - ٧ = ١٣ \text{ ، } ص + ٣ = -٢ \text{، } (س،ص) = (٢٠، -٥)$$
$$س - ٧ = -١٣ \text{ ، } ص + ٣ = ٢ \text{، } (س،ص) = (-٦، -١)$$

السـؤال الخامس:

عدد الثلاثيات (س،ص،ع) المكونة من أعداد حقيقية س ، ص ، ع تحقق

س(١ − ص^{٢})(١ − ع^{٢}) + ص(١ − س^{٢})(١ − ع^{٢}) + ع(١ − س^{٢})(١ − ص^{٢}) = ٤س ص ع

= ٤(س + ص + ع)

هو

أ) ١
ب) ٢
ج) ٣
د) ٤
هـ) لانهائي

الحـل:

كم معادلة يجب على الثلاثيات (س،ص،ع) تحقيقها؟ معادلة واحدة أم معادلتان؟

لتكن

أ = س(١ − ص^{٢})(١ − ع^{٢}) + ص(١ − س^{٢})(١ − ع^{٢}) + ع(١ − س^{٢})(١ − ص^{٢})

ب = س ص ع = س + ص + ع   وَ   جـ = س ص + ص ع + ع س

لاحظ أن

أ = س(١ − ص^{٢})(١ − ع^{٢}) + ص(١ − س^{٢})(١ − ع^{٢}) + ع(١ − س^{٢})(١ − ص^{٢})

= س − س ص^{٢} − س ع^{٢} + س ص^{٢} ع^{٢} + ص − ص س^{٢} − ص ع^{٢} + ص س^{٢} ع^{٢} + ع − ع س^{٢} − ع ص^{٢} + ع س^{٢} ص^{٢}

= (س + ص + ع) − س (س ص + س ع) − ص (س ص + ص ع) − ع (س ع + ص ع) + س ص ع (س ص + ص ع + س ع)

= (س + ص + ع) − س (س ص + س ع + ص ع) − ص (س ص + ص ع + ع س) − ع (س ع + ص ع + س ص)
+ س ص ع (س ص + ص ع + س ع) + ٣ س ص ع

= (س + ص + ع) − (س + ص + ع) (س ص + س ع + ص ع) + س ص ع (س ص + ص ع + س ع) + ٣ س ص ع

= ب − ب جـ + ب جـ + ٣ب

= ٤ب

يعني هذا أن المساواة الأولى متحققة دائماً، وبالتالي فهي زائدة ولا تضيف أية معلومات عن (س، ص،ع).

نستنتج أن الشرط الفعلي الوحيد الذي يجب أن تحققه الثلاثيات (س، ص،ع) هو:

س ص ع = س + ص + ع، أي أن ع = $\frac{\text{س + ص}}{\text{س ص − ١}}$، ص ≠ $\frac{١}{\text{س}}$

نستنتج أن مجموعة الحل هي

{(س، ص،ع) | ع = $\frac{\text{س + ص}}{\text{س ص − ١}}$، س ، ص ∈ ح ، ص ≠ $\frac{١}{\text{س}}$}

كم عدد عناصر هذه المجموعة؟ نعم، لقد حزرت: إن عدد الثلاثيات التي تحقق المعادلتين لانهائي.

السـؤال السادس:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من عددين صحيحين س وَص يحققان المتباينة

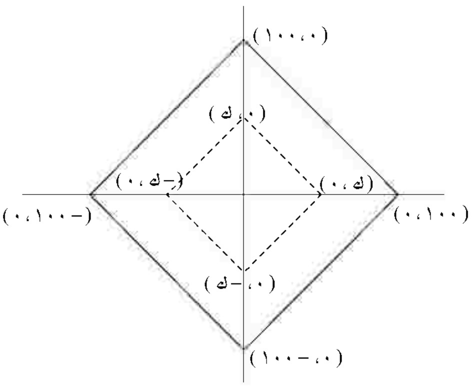
|س|+|ص|≤١٠٠

هو

أ) ١٩٨٠١
ب) ٢٠٢٠١
ج) ٤٠١
د) ١٠١
هـ) ٥١

الحـل:

ابدأ بتمثيل بعض هذه الأزواج المرتبة في المستوى الديكارتي. ماذا تلاحظ؟ تنحصر هذه الأزواج المرتبة داخل وعلى حدود المربع الوضح في الشكل المرفق.



لاحظ أن هناك زوجاً مرتباً مميزاً يحقق المتباينة المعطاة، وهو (س،ص)=(٠،٠). لاحظ أيضاً أن هذا الزوج المرتب هو الحل الوحيد للمعادلة |س|+|ص|=٠ هو (س،ص)=(٠،٠).

يمكنك الآن البدء بعد الأزواج المرتبة التي تحقق المطلوب ولكنك ستدرك بعد قليل أنها كثيرة!! لنجرب فكرة أخرى. لاحظ أن أي زوج من الأزواج المرتبة المطلوبة يقع على محيط مربع أصغر توازي أضلاعه أضلاع المربع الأكبر، كما هو موضح في الشكل المرفق.

هل يوحي لك ذلك بشيء؟ نعم، يمكنك تحويل المتباينة المعطاة إلى مجموعة من المعادلات.

ندرس الآن المعادلات

|س|+|ص|=ك، حيث ١≤ك≤١٠٠ (*)

الحالة الأولى: ك فردي.
في هذه الحالة، تتحقق المعادلة (*) لكل زوج من الأزواج التالية
(ل،ك−ل)، (ل،ل−ك)، (ك−ل،ل)، (ل−ك،ل)، حيث ٠≤ل<ك (**)
كما يمكن التحقق بسهولة أن جميع هذه الأزواج مختلفة. من الواضح أنه لا توجد حلول أخرى للمعادلة (*). نستنتج أن عدد حلول المعادلة (*) هو ٤ك إذا كان ك فردياً.

الحالة الثانية: ك زوجي، وليكن ك=٢م.
في هذه الحالة، تتحقق المعادلة (*) لكل زوج من الأزواج في (**). ولكن عند التحقق فيما إذا كانت هذه الأزواج مختلفة، نجد أن الزوجين الأول والثالث يتساويان عندما ل=م (لاحظ أن (ل،ك−ل)=(ك−ل،ل)⟺ك=٢ل⟺ل=م). في هذه الحالة نحصل من (**) على ثلاثة أزواج مختلفة هي (م،م)، (م، −م)، (−م،م)، يضاف إليها زوج رابع هو (−م، −م). من الواضح أنه لا توجد حلول أخرى للمعادلة (*). إذن، عدد حلول المعادلة (*) هو ٤ك إذا كان ك زوجياً.

نستنتج أن عدد الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينة |س|+|ص|≤١٠٠ هو

$$١+\sum_{ك=١}^{١٠٠}٤ك=١+٤\sum_{ك=١}^{١٠٠}ك$$
$$=١+٤\left(\frac{١٠٠(١٠٠+١)}{٢}\right)$$
$$=٢٠٢٠١$$

السؤال السابع:

إذا كان أ≠٠ عدداً حقيقياً، فإن عدد الثلاثيات (س، ص،ع)المكونة من أعداد حقيقية س، ص،ع تحقق المعادلات

$$س^٢+ص^٢-٢ع^٢ = ٢أ^٢$$
$$س+ص+٢ع = ٤(أ^٢+١)$$
$$ع^٢-س ص = أ^٢$$

هو

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٣
هـ) لانهائي

الحل:

بضرب المعادلة الثالثة في ٢ وإضافتها إلى المعادلة الأولى، نحصل على

$$س^٢ + ص^٢ - ٢ س ص = ٤ أ^٢$$

أي أن $(س - ص)^٢ = ٤ أ^٢$، ومن ذلك

$$س - ص = ٢ أ \quad \text{أو} \quad س - ص = -٢ أ \qquad (*)$$

بضرب المعادلة الثالثة في ٢ وطرحها من المعادلة الأولى نحصل على

$$س^٢ + ص^٢ - ٤ ع^٢ + ٢ س ص = ٠$$

أي أن $(س + ص)^٢ = ٤ ع^٢$، ومن ذلك نحصل على احتمالين

$$س + ص = ٢ ع \quad \text{أو} \quad س + ص = -٢ ع.$$

لاحظ أن $س + ص \neq -٢ ع$، لأن $س + ص + ٢ ع = ٤(أ^٢ + ١) \geq ٤$، أي أن

$$س + ص = ٢ ع \qquad (**)$$

بتعويض قيمة $س + ص$ من (**) في المعادلة الثانية نحصل على

$$ع = أ^٢ + ١ \quad \text{وَ} \quad س + ص = ٢(أ^٢ + ١)$$

الحالة الأولى: $س - ص = ٢ أ$. في هذه الحالة $س = أ^٢ + أ + ١$ وَ $ص = أ^٢ - أ + ١$.

الحالة الثانية: $س - ص = -٢ أ$. في هذه الحالة $س = أ^٢ - أ + ١$ وَ $ص = أ^٢ + أ + ١$.

نستنتج أن مجموعة الحل هي

$$\{(أ^٢ + أ + ١، أ^٢ - أ + ١، أ^٢ + ١)، (أ^٢ - أ + ١، أ^٢ + أ + ١، أ^٢ + ١)\}$$

أي أن هناك حلين لهذا النظام من المعادلات.

السؤال الثامن:

$$\sqrt{٣٤ - ٢٤\sqrt{٢}} =$$

أ) $٥ - \sqrt{٢}$
ب) $٥ + \sqrt{٢}$
ج) $-٤ + ٣\sqrt{٢}$
د) $٤ - ٣\sqrt{٢}$
هـ) ٣

الحـــــل:

ما مغزى وجود العدد ٢ في المسألة؟ ماذا لو استبدلنا العدد ٣ بالعدد ٢؟ ماذا لو استبدلنا العدد ٦ بالعدد ٢؟

حيث أن ٢ عدد أولي، نعلم أن الحل يجب أن يكون على الصورة $أ+ب\sqrt{٢}$، حيث أ وَ ب عددان صحيحان، وهذه المعلومة هي – ولا شك – مفتاح الحل. بتربيع طرفي المعادلة

$$\sqrt{٣٤-٢٤\sqrt{٢}}=أ+ب\sqrt{٢}$$

نحصل على

$$٣٤-٢٤\sqrt{٢}=\left(أ^{٢}+٢ب^{٢}\right)+٢أب\sqrt{٢}$$

بمساواة المعاملات على طرفي المعادلة نحصل على

$$أ^{٢}+٢ب^{٢}=٣٤$$

$$٢أب=-٢٤$$

لاحظ أن $أ\neq٠$. بتعويض قيمة $ب=-\frac{١٢}{أ}$ من المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نحصل على

$$أ^{٢}+٢\left(-\frac{١٢}{أ}\right)^{٢}=٣٤$$

$$أ^{٤}-٣٤أ^{٢}+٢٨٨=٠$$

بتعويض $ج=أ^{٢}$، نحصل على

$$ج^{٢}-٣٤ج+٢٨٨=٠$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلات التربيعية لنحصل على

$$ج=\frac{-(-٣٤)\mp\sqrt{(٣٤)^{٢}-٤\times١\times٢٨٨}}{٢\times١}=\frac{٣٤\mp\sqrt{٤}}{٢\times١}=١٨\ \text{أو}\ ١٦.$$

بما أن $ج=أ^{٢}$ وَ أ عدد صحيح، نستبعد $ج=١٨$، ونبقي $ج=١٦$ لنستنتج أن

$$أ=٤،ب=-٣\ \text{أو}\ أ=-٤،ب=٣$$

نعلم أن $\sqrt{٢}>\frac{٤}{٣}$، ومن ذلك $٤-٣\sqrt{٢}<٠$. بما أن ناتج الجذر التربيعي هو عدد موجب دائماً، نستنتج أن

$$\sqrt{٣٤-٢٤\sqrt{٢}}=-٤+٣\sqrt{٢}$$

السـؤال التاسع:

عند صف جميع الأعداد الصحيحة الموجبة كما يلي

١٢٣٤٥٦٧٨٩٠١١١٢١٣١٤١٥١...

فإن الرقم الذي يحتل الخانة ٢٠٦٧٨٨ من اليمين هو

أ) ٣
ب) ٤
ج) ٥
د) ٦
هـ) ٧

الحـــــل:

اكتب العدد كما يلي

١···٩ ١٠···٩٩ ١٠٠···٩٩٩ ١٠٠٠···٩٩٩٩ ١٠٠٠٠···٩٩٩٩٩ ···

ما هو مفتاح حل هذه المسألة؟ هل فكرت مثلاً في عدد الخانات التي يتكون منها الرقم المنشود؟ لاحظ أن عدد الخانات حتى ٩٩٩٩ هو

١×٩+٢×٩٠+٣×٩٠٠+٤×٩٠٠٠=٣٨٨٨٩

وأن مجموع الخانات حتى ٩٩٩٩٩ هو

١×٩+٢×٩٠+٣×٩٠٠+٤×٩٠٠٠+٥×٩٠٠٠٠=٤٨٨٨٨٩

بما أن ٣٨٨٨٩ < ٢٠٦٧٨٨ < ٤٨٨٨٨٩، نستنتج أن الرقم المطلوب موجود في عدد مكون من ٥ خانات بين ١٠٠٠٠ وَ ٩٩٩٩٩. نستطيع أن نكون أكثر تحديداً، ونحسب ترتيب هذا العدد بين الأعداد ذات الخمس منازل كما يلي:

حاصل قسمة ٢٠٦٧٨٨−٣٨٨٨٩=١٦٧٨٩٩ على ٥ هو ٣٣٥٧٩ والباقي ٤. يعني هذا أن الرقم المطلوب يحتل الخانة الرابعة في العدد ذي الترتيب ٣٣٥٧٩ بين الأعداد ذات الخمس منازل. حيث أن كل عدد من هذه الأعداد يزيد ٩٩٩٩ عن ترتيبه ضمن مجموعة الأعداد الطبيعية، نستنتج أن الرقم المطلوب يحتل الخانة الرابعة في العدد ٣٣٥٧٩+٩٩٩٩=٤٣٥٧٨ وهو الرقم ٣.

الســـــؤال العاشر:

عدد الثلاثيات (أ، ب، جـ) المكونة من أعداد صحيحة موجبة تحقق

$$(١+\frac{١}{أ})(١+\frac{١}{ب})(١+\frac{١}{جـ})=٢$$

هو

أ) ٣
ب) ٥
ج) ٢٧
د) ٣٠
هـ) لا نهائي

الحـــــل:

يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على الصيغة

$$(\text{أ}+1)(\text{ب}+1)(\text{ج}+1)=2\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{ج} \qquad (*)$$

هل لاحظت التناظر بين أ و ب و جـ. ولكن ما فائدة هذه الملاحظة عن التناظر؟

افرض بدون فقدان التعميم أن $\text{أ}\le\text{ب}\le\text{ج}$. بناءً على هذا الفرض نحصل على المتباينة

$$2=\left(1+\frac{1}{\text{أ}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ب}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ج}}\right)\le\left(1+\frac{1}{\text{أ}}\right)^{3}$$

بالتجربة يتبين لنا أن قيم أ التي تحقق المتباينة هي $\text{أ}=1،2،3$ (لاحظ أن $\left(1+\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{125}{64}<2$).

الحالة الأولى: $\text{أ}=1$. بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على $1=\left(1+\frac{1}{\text{ب}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ج}}\right)>1$ (تناقض).

الحالة الثانية: $\text{أ}=2$. بالتعويض في (*) نحصل على

$$3(\text{ب}+1)(\text{ج}+1)=4\,\text{ب}\,\text{ج}$$
$$\text{ب}\,\text{ج}-3\,\text{ب}-3\,\text{ج}=3$$
$$(\text{ب}-3)(\text{ج}-3)=12$$

بحساب جميع الاحتمالات المبنية على قواسم ١٢، نجد أن

$$(\text{أ}،\text{ب}،\text{ج})\in\{(2,4,15),(2,5,9),(2,6,7)\}$$

بإسقاط الشرط $\text{أ}\le\text{ب}\le\text{ج}$، نحصل على مجموعة الحل الجزئية

$$\left\{\begin{array}{l}(2,4,15),(2,15,4),(4,2,15),(4,15,2),(15,2,4),(15,4,2),\\(2,5,9),(2,9,5),(5,2,9),(5,9,2),(9,2,5),(9,5,2),\\(2,6,7),(2,7,6),(6,2,7),(6,7,2),(7,2,6),(7,6,2)\end{array}\right\}$$

الحالة الثالثة: $\text{أ}=3$. بالتعويض بالتعويض في (*) نحصل على

$$2(\text{ب}+1)(\text{ج}+1)=3\,\text{ب}\,\text{ج}$$
$$\text{ب}\,\text{ج}-2\,\text{ب}-2\,\text{ج}=2$$
$$(\text{ب}-2)(\text{ج}-2)=6$$

بحساب جميع الاحتمالات المبنية على قواسم ٦، نجد أن

$$(\text{أ}،\text{ب}،\text{ج})\in\{(3,3,8),(3,4,5)\}$$

بإسقاط الشرط $\text{أ}\le\text{ب}\le\text{ج}$، نحصل على مجموعة الحل الجزئية

$$\{(٣،٣،٨)،(٣،٨،٣)،(٨،٣،٣)،(٣،٤،٥)،(٣،٥،٤)،(٤،٣،٥)،(٤،٥،٣)،(٥،٣،٤)،(٥،٤،٣)\}$$

إذن، هناك ٢٧ ثلاثية تحقق المعادلة المعطاة.

الســــــؤال الحادي عشر:

عدد كثيرات الحدود ك(س) التي تحقق

$$ك(س+ص)-ك(س-ص)=٤س ص$$

لجميع قيم س،ص ∈ ح، وتحقق الشرط ك(٠)=١ هو

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٣
هـ) لانهائي

الحــــــل:

لاحظ أن ٤س ص$=$(س+ص)^٢ − (س−ص)^٢، وبذلك يمكن إعادة كتابة المعادلة أعلاه على الشكل

$$ك(س+ص)-ك(س-ص)=(س+ص)^٢-(س-ص)^٢$$

$$ك(س+ص)-(س+ص)^٢=ك(س-ص)-(س-ص)^٢$$

ليكن ع$=$س+ص، وَ ر$=$س−ص. نحصل من ذلك على

$$ك(ع)-ع^٢=ك(ر)-ر^٢ \text{ لجميع قيم ع، ر ∈ ح}$$

بتعويض ر$=$٠، نحصل على ك(ع)$-$ع$^٢=$١ لجميع قيم ع∈ح، أي أن

$$ك(س)=س^٢+١$$

نستنتج من ذلك أن هناك كثيرة حدود واحدة تحقق الشرط المطلوب.

الســــــؤال الثاني عشر:

عدد الخماسيات المرتبة (أ،ب،جـ،د،هـ) المكونة من أعداد حقيقية موجبة تحقق المعادلات

$$أ+ب=جـ^٢ ،\ ب+جـ=د^٢ ،\ جـ+د=هـ^٢ ،\ د+هـ=أ^٢ ،\ هـ+أ=ب^٢$$

هو

أ) ٠
ب) ١

ج) ١٢٠
د) ٢٤٠
هـ) لا نهائي

الحـــــل:

هل لاحظت التناظر بين أ وَ ب وَ جـ وَد وَ هـ؟ ماذا يعني وجود هذا التناظر؟

ليكن س أكبر الأعداد في المجموعة $\{$أ، ب، جـ، د، هـ$\}$، وليكن ص أصغرها.

من المعادلات المعطاة، $س^٢$ هو مجموع عددين كل منهما أقل من أو يساوي س، أي أن

$$س^٢ \leq ٢س$$
$$س(س-٢) \leq ٠$$
$$س - ٢ \leq ٠$$
$$س \leq ٢$$

كذلك، $ص^٢$ هو مجموع عددين كل منهما أكبر من أو يساوي ص، أي أن

$$ص^٢ \geq ٢ص$$
$$ص(ص-٢) \geq ٠$$
$$ص \geq ٢$$

من ذلك نحصل على

$$٢ \leq ص \leq س \leq ٢$$
$$س = ص = ٢$$

$$\therefore \ (أ، ب، جـ، د، هـ) = (٢، ٢، ٢، ٢، ٢)$$

الســـــؤال الثالث عشر:

أكبر قيمة للدالة

$$ق(س، ص) = س^٢ ص - ص^٢ س \text{، حيث } ٠ \leq س \leq ١ \text{ وَ } ٠ \leq ص \leq ١$$

هي:

أ) $\frac{١}{٦}$

ب) $\frac{١}{٤}$

ج) $\frac{١}{٣}$

د) $\frac{١}{٢}$

هـ) $\frac{٢}{٣}$

الحــــــل:

لاحظ أن المعادلة

$$س^{٢}ص - ص^{٢}س = س(س ص - ص^{٢}) = س\left[ص(س - ص)\right]$$

متناظرة. لذا، وبدون فقدان التعميم، يمكننا افتراض أن $س \leq ص$.

حيث أن المطلوب هو إيجاد أكبر قيمة للدالة ه$(س،ص)$ ، فلا شك أنك ستبدأ باستعراض المتباينات التي سبق ذكرها في الباب الأول من هذا الكتاب.

باستخدام متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي، نعلم أن

$$\sqrt{ص(س - ص)} \leq \frac{ص + (س - ص)}{٢} = \frac{س}{٢}\text{، أي أن } ص(س - ص) \leq \frac{س^{٢}}{٤}$$

نستنتج من ذلك أن

$$س^{٢}ص - ص^{٢}س \leq \frac{س^{٣}}{٤} \leq \frac{١}{٤}$$

هل يعني هذا أن $\frac{١}{٤}$ هي القيمة العظمى المنشودة؟ ليس بالضرورة!! كل ما توصلنا له حتى الآن هو أن $\frac{١}{٤}$ حد أعلى لقيم ه$(س،ص)$ في المنطقة المعطاة. ليكون $\frac{١}{٤}$ قيمة عظمى للدالة يجب أن نجد زوجاً مرتباً $(س،ص)$ بحيث يكون ه$(س،ص) = \frac{١}{٤}$. من الواضح أن هذا هو واقع الحال حيث أن

$$ه(١،\frac{١}{٢}) = (١)^{٢} \times \frac{١}{٢} - ١ \times (\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$$

الســــــؤال الرابع عشر:

عدد الأزواج المرتبة $(س،ص)$ المكونة من عددين صحيحين س وَ ص يحققان المعادلة

$$(٣س^{٢} + ص^{٢} - ٤ص - ١٧)^{٣} - (٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٤ص - ٦)^{٣} = (س^{٢} - ص^{٢} - ١١)^{٣}$$

هو

أ) ٤
ب) ٦
ج) ٨
د) ١٠
هـ) ١٢

الحـــــل:

لاحظ أن

$$(3\text{س}^2+\text{ص}^2-4\text{ص}-17)-(2\text{س}^2+2\text{ص}^2-4\text{ص}-6)=\text{س}^2-\text{ص}^2-11$$

بتعويض

$$\text{ك}=3\text{س}^2+\text{ص}^2-4\text{ص}-17 \quad \text{و} \quad \text{ل}=2\text{س}^2+2\text{ص}^2-4\text{ص}-6 \qquad (*)$$

نحصل على

$$\begin{aligned}\text{ك}^3-\text{ل}^3&=(\text{ك}-\text{ل})^3\\ (\text{ك}-\text{ل})(\text{ك}^2+\text{ك}\text{ل}+\text{ل}^2)&=(\text{ك}-\text{ل})(\text{ك}-\text{ل})^2\\ (\text{ك}-\text{ل})\left[(\text{ك}^2+\text{ك}\text{ل}+\text{ل}^2)-(\text{ك}-\text{ل})^2\right]&=0\\ (\text{ك}-\text{ل})\left[3\text{ك}\text{ل}\right]&=0\end{aligned}$$

أي أن $\text{ك}=\text{ل}$ أو $\text{ك}=0$ أو $\text{ل}=0$.

الحالة الأولى: $\text{ك}=\text{ل}$. في هذه الحالة

$$\text{س}^2-\text{ص}^2-11=0$$

لاحظ أن ١١ عدد أولي، ومن ذلك نستنتج أن

$$(\text{س}-\text{ص})(\text{س}+\text{ص})=11$$

تعطينا القيم التالية فقط:

$\text{س}-\text{ص}=11$ وَ $\text{س}+\text{ص}=1$، أي أن $(\text{س},\text{ص})=(6,-5)$

$\text{س}-\text{ص}=1$ وَ $\text{س}+\text{ص}=11$، أي أن $(\text{س},\text{ص})=(6,5)$

$\text{س}-\text{ص}=-11$ وَ $\text{س}+\text{ص}=-1$، أي أن $(\text{س},\text{ص})=(-6,5)$

$\text{س}-\text{ص}=-1$ وَ $\text{س}+\text{ص}=-11$، أي أن $(\text{س},\text{ص})=(-6,-5)$

الحالة الثانية: $\text{ك}=0$. في هذه الحالة

$$\begin{aligned}3\text{س}^2+\text{ص}^2-4\text{ص}-17&=0\\ 3\text{س}^2+(\text{ص}-2)^2&=21\end{aligned}$$

حيث أن $\text{س}^2\le 7$، نستنتج أن قيم س المحتملة هي $\text{س}=0,\mp1,\mp2$. لاحظ أن $\text{س}=0,\mp1$ لا يمكن أن تعطي قيماً صحيحة للمتغير ص، بينما نحصل من قيم $\text{س}=\mp2$ على مجموعة الحل الجزئية

$$\{(2,5),(2,-1),(-2,5),(-2,-1)\}$$

الحالة الثالثة: ل$=$٠. في هذه الحالة

$$٢س^{٢}+٢ص^{٢}-٤ص-٦=٠$$
$$س^{٢}+(ص-١)^{٢}=٤$$

حيث أن $س^{٢}\leq ٤$، فإن قيم س المحتملة هي س$=$٠، $\mp$١، $\mp$٢. لاحظ أن س$=\mp$١ لا يمكن أن تعطي قيماً صحيحة للمتغير ص، بينما نحصل من قيم س$=$٠، $\mp$٢ على مجموعة الحل الجزئية

$$\{(٠،٣)،(٠،-١)،(٢،١)،(-٢،١)\}$$

بتجميع الحلول التي حصلنا عليها في الحالات الثلاث، نحصل على ١٢ زوجاً مرتباً تشكل مجموعة الحل

$$\left\{\begin{matrix}(٦،٥)،(٦،-٥)،(-٦،٥)،(-٦،-٥)،(٢،٥)،(٢،-١)، \\ (-٢،٥)،(-٢،-١)،(٠،٣)،(٠،-١)،(٢،١)،(-٢،١)\end{matrix}\right\}$$

السـؤال الخامس عشر:

عرف المتتابعة $\{س_{ن} \mid ن\geq ١\}$ كما يلي:

$$س_{١}=١٦ \text{ وَ } س_{ن+١}=س_{ن}+٨ن+١٢،\ \forall ن\geq ٢$$

إذا كان $\sum_{ن=١}^{\infty}\frac{١}{ن^{٢}}=\frac{ط^{٢}}{٦}$، فإن $\sum_{ن=٠}^{\infty}\frac{١}{س_{ن+١}}=$

أ) $\frac{ط^{٢}}{٢}$

ب) $\frac{ط^{٢}}{٣}$

ج) $\frac{ط^{٢}-١}{٣}$

د) $\frac{ط^{٢}-٦}{٢٤}$

هـ) $\frac{ط^{٢}-٢}{١٢}$

الحـــل:

هل تتمنى أن تعرف صيغة مغلقة لهذه المتتابعة؟ كيف يمكن اكتشاف هذه الصيغة إن وجدت؟ لا شك أن معرفة بعض عناصرها لا يعني أن بإمكاننا معرفة هذه الصيغة المغلقة، ولكن لم لا نبدأ بدراسة سلوك المتتابعة؟ لنبدأ بالجدول التالي:

$ن$	$س_ن$
١	١٦
٢	٣٦
٣	٦٤
٤	١٠٠

من الواضح أن $س_ن = ٤(ن+١)^٢$، حيث $١ \le ن \le ٤$. ولكن هل هذه الصيغة صحيحة لجميع قيم $ن \ge ١$؟ نحاول إثبات ذلك باستخدام الاستقراء الرياضي.

لاحظ أن الصيغة صحيحة عندما $ن=١$. افرض أن الصيغة صحيحة عندما $ن=ك$، أي أن $س_ك = ٤(ك+١)^٢$. من خلال تعريف المتتابعة المعطى، نحصل على

$$س_{ك+١} = س_ك + ٨ك + ١٢ = ٤(ك+١)^٢ + ٨ك + ١٢ = ٤ك^٢ + ١٦ك + ١٦ = ٤(ك+٢)^٢$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $ن=ك+١$. بتطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج أن العبارة صحيحة لجميع قيم $ن \ge ١$. من ذلك نحصل على

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{س_{ن+١}} = \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{س_ن} = \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٤(ن+١)^٢}$$

$$= \frac{١}{٤} \sum_{ن=٢}^{\infty} \frac{١}{ن^٢} = \frac{١}{٤}\left(\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن^٢} - ١\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\left(\frac{ط^٢}{٦} - ١\right) = \frac{ط^٢ - ٦}{٢٤}$$

السؤال السادس عشر:

عرف المتتابعة $\{س_ن \mid ن \ge ١\}$ كما يلي:

$$س_١ = ٢ \quad \text{و} \quad س_{ن+١} = \frac{س_ن^٤ + ٩}{١٠ س_ن}، \ \forall ن \ge ١$$

إذا كانت $ن \ge ٢$، فإن

أ) $٠,٩ \le س_ن \le ١$

ب) $٠,٩ < س_ن \le ١,٢٥$

ج) $٠,٩٥ < س_ن \le ١,٢٥$

د) $٠,٩ < س_ن \le ١,٢$

هـ) $١ \le س_ن \le ٢$

الحــــــل:

نحسب

$$س_١=٢، \quad وَ \quad س_٢=\frac{٥}{٤}، وَ \quad س_٣=\frac{٢٩٢٩}{٣٢٠٠}\approx ٠,٩١٥<١ \quad (*)$$

لاحظ أنه يمكننا، بالاعتماد على (*)، استثناء جميع الخيارات المطروحة باستثناء (ب). ولكن هل هذا الخيار صحيح؟ هل يمكنك إثبات أن المؤلف لم يخطىء في اعتبار (ب) الإجابة الصحيحة؟ إذن، لا بد من التحقق من صحة (ب)!!

لاحظ أولاً أن جميع عناصر المتتابعة موجبة. باستخدام متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي نحصل على

$$س_{ن+١}=\frac{س_ن^٤+٩}{١٠س_ن} = \frac{س_ن^٣}{١٠}+\frac{٩}{١٠س_ن}$$

$$= \frac{س_ن^٣}{١٠}+\frac{٣}{١٠س_ن}+\frac{٣}{١٠س_ن}+\frac{٣}{١٠س_ن}$$

$$\geq ٤\sqrt[٤]{\frac{س_ن^٣}{١٠}\times\frac{٣}{١٠س_ن}\times\frac{٣}{١٠س_ن}\times\frac{٣}{١٠س_ن}}$$

$$= \frac{٤}{١٠}\sqrt[٤]{٢٧}$$

$$> \frac{٤}{١٠}\times\frac{٩}{٤}=\frac{٩}{١٠}$$

نستخدم الآن الاستقراء الرياضي لإثبات أن

$$س_ن \leq \frac{٥}{٤}، \ \forall\ ن\geq ٢ \quad (**)$$

لاحظ أن $س_٢=\frac{٥}{٤}$ تحقق (**). افرض أن (**) متحققة عنما $ن=ك\geq ٢$، أي أن $س_ك\leq\frac{٥}{٤}$.

الحالة الأولى: $١\leq س_ك\leq\frac{٥}{٤}$. في هذه الحالة

$$س_{ك+١}-س_ك=\frac{س_ك^٤+٩}{١٠س_ك}-س_ك=\frac{س_ك^٤-١٠س_ك^٢+٩}{١٠س_ك}=\frac{(س_ك^٢-٥)^٢-١٦}{١٠س_ك}\leq ٠.$$

أي أن

$$س_{ك+١}\leq س_ك\leq\frac{٥}{٤}$$

الحالة الثانية: $\frac{٩}{١٠} < \text{س}_{\text{ك}} \leq ١$. في هذه الحالة

$$\text{س}_{\text{ك}+١} - \text{س}_{\text{ك}} = \frac{\text{س}_{\text{ك}}^{٤} + ٩}{١٠\,\text{س}_{\text{ك}}} \leq \frac{١^{٤} + ٩}{١٠\,\text{س}_{\text{ك}}} = \frac{١}{\text{س}_{\text{ك}}} < \frac{١}{\frac{٩}{١٠}} = \frac{١٠}{٩} < \frac{٥}{٤}$$

نستنتج مما تقدم أن

$$\frac{٩}{١٠} < \text{س}_{\text{ن}} \leq \frac{٥}{٤}،\ \forall\ \text{ن} \geq ٢$$

السـؤال السابع عشر:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من عددين حقيقيين س وَ ص يحققان

$$\text{س} + \text{ص} = ١$$
$$\text{س}^{٥} + \text{ص}^{٥} = ٣١$$

هو

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٤
هـ) ٦

الحـل:

لاحظ أن

$$\text{س}^{٥} + \text{ص}^{٥} = (\text{س}+\text{ص})^{٥} - ٥\,\text{س}\,\text{ص}(\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢}\,\text{ص} + ٢\,\text{س}\,\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٣})$$

$$= (\text{س}+\text{ص})^{٥} - ٥\,\text{س}\,\text{ص}(\text{س}+\text{ص})^{٣} + ٥(\text{س}\,\text{ص})^{٢}(\text{س}+\text{ص})$$

بتعويض $\text{س}+\text{ص}=١$ في المعادلة الثانية نحصل على

$$١ - ٥\,\text{س}\,\text{ص} + ٥(\text{س}\,\text{ص})^{٢} = ٣١$$
$$(\text{س}\,\text{ص})^{٢} - \text{س}\,\text{ص} - ٦ = ٠$$
$$(\text{س}\,\text{ص} - ٣)(\text{س}\,\text{ص} + ٢) = ٠$$

الحالة الأولى: $\text{س}\,\text{ص} = ٣$. في هذه الحالة

$$\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}}$$
$$\text{س} + \frac{٣}{\text{س}} = ١$$
$$\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣ = ٠$$

بما أن مميز هذه المعادلة التربيعية هو $-١١ < ٠$، فإنه لا يوجد لها أية جذور حقيقية.

الحالة الثانية: $\text{س ص} = -٢$. في هذه الحالة

$$\text{ص} = -\frac{٢}{\text{س}}$$
$$\text{س} - \frac{٢}{\text{س}} = ١$$
$$\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = ٠$$
$$(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠$$

أي أن $(\text{س}،\text{ص}) = (٢،-١)$، أو $(\text{س}،\text{ص}) = (-١،٢)$.

السـؤال الثامن عشر:

لتكن $\text{د}(\text{س})$ دالة تحقق

$$\text{د}(\text{ن}+١) = (-١)^{\text{ن}+١}\,\text{ن} - ٢\,\text{د}(\text{ن})،\ \forall\ \text{ن} \geq ١$$

إذا كانت $\text{د}(١٠١) = \text{د}(١)$، فإن $\sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \left(\text{ن} + ٣٠٠\,\text{د}(\text{ن})\right) =$

الحـــل:

هل فكرت في دراسة سلوك هذه المتتابعة؟ من المعطيات

$$\begin{aligned}
\text{د}(٢) &= ١ - ٢\,\text{د}(١) \\
\text{د}(٣) &= -٢ - ٢\,\text{د}(٢) \\
\\
\text{د}(٤) &= ٣ - ٢\,\text{د}(٣) \\
\text{د}(٥) &= -٤ - ٢\,\text{د}(٤) \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

$$\text{د}(١٠٠) = ٩٩ - ٢\,\text{د}(٩٩)$$
$$\text{د}(١٠١) = -١٠٠ - ٢\,\text{د}(١٠٠)$$

بإضافة الأعمدة نحصل على

$$\sum_{\text{ن}=٢}^{١٠١} \text{د}(\text{ن}) = \left(\sum_{\text{ك}=١}^{٥٠} -١\right) - ٢ \times \sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{د}(\text{ن})$$
$$= -٥٠ - ٢ \times \sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{د}(\text{ن})$$

بما أن $\text{د}(١٠١) = \text{د}(١)$، فإننا نحصل على

$$\sum_{\text{ن}=٢}^{١٠١} \text{د}(\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{د}(\text{ن}) \text{، أي أن } \sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{د}(\text{ن}) = -\frac{٥٠}{٣}$$

من ذلك

$$\sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \left(\text{ن} + ٣٠٠\,\text{د}(\text{ن})\right) = \sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{ن} + ٣٠٠ \times \sum_{\text{ن}=١}^{١٠٠} \text{د}(\text{ن})$$
$$= \frac{١٠٠(١٠٠+١)}{٢} + ٣٠٠ \times \left(-\frac{٥٠}{٣}\right)$$
$$= ٥٠ \times (١٠١ - ١٠٠) = ٥٠$$

السؤال التاسع عشر:

إذا كان $\text{ن} = \text{ل}^٢$ مربعاً كاملاً مكوناً من أربع خانات، بحيث يكون الرقمان في الخانتين الأولى والثانية متساويين، والرقمان في الخانتين الثالثة والرابعة متساويين، فإن $\text{ل} =$

الحل:

ليكن هذا العدد $\text{ن} = \text{أأبب}$.

ما الخطوة الأولى لفهم طبيعة أي عدد صحيح موجب؟ لا شك أنه تحليل هذا العدد كحاصل ضرب عوامله الأولية. ولكن ما هي القواسم الأولية لهذا العدد؟ لا شك أن شكل هذا العدد يوحي لك أنه من مضاعفات العدد ١١، وبالتالي يمكن كتابته على الصورة $١١ \times \text{أ٠ب}$. حيث إن هذا العدد مربع كامل، يتوجب أن يكون العدد أ٠ب على الصورة $\text{أ٠ب} = ١١ \times \text{جـ}^٢$ حيث يتكون $\text{جـ}^٢$ من خانتين. نقوم باختبار جميع الاحتمالات:

جـ=١، أ.ب=١١×جـ^{٢}=١١ (احتمال مرفوض)
جـ=٢، أ.ب=١١×جـ^{٢}=٤٤ (احتمال مرفوض)
جـ=٣، أ.ب=١١×جـ^{٢}=٩٩ (احتمال مرفوض)
جـ=٤، أ.ب=١١×جـ^{٢}=١٧٦ (احتمال مرفوض)
جـ=٥، أ.ب=١١×جـ^{٢}=٢٧٥ (احتمال مرفوض)
جـ=٦، أ.ب=١١×جـ^{٢}=٣٩٦ (احتمال مرفوض)
جـ=٧، أ.ب=١١×جـ^{٢}=٥٣٩ (احتمال مرفوض)
جـ=٨، أ.ب=١١×جـ^{٢}=٧٠٦ (احتمال مقبول، لاحظ وجود الصفر في الخانة الوسطى)
جـ=٩، أ.ب=١١×جـ^{٢}=١٠٨٩ (احتمال مرفوض)

نستنتج أن ن=١١^{٢}×٨^{٢}=٧٧٤٤، وَ ل=١١×٨=٨٨

السؤال العشرون:

لتكن د:ط ← ط دالة تحقق الشروط التالية:

١) د(ن+١)>د(ن)، ∀ن∈ط.

٢) د(ن+د(م))=د(ن)+م+١، ∀م،ن∈ط.

أوجد د(٩٩٨).

الحل:

ليكن ك=د(٠).
بتعويض م=ن=٠ في الشرط الثاني نحصل على
د(ك)=ك+١

بتعويض م=٠ وَ ن=ك في الشرط الثاني نحصل على
د(٢ك)=د(ك)+١=ك+٢

من الشرط الأول نحصل على
([د(٢ك)−د(٢ك−١)]+[د(٢ك−١)−د(٢ك−٢)]+⋯+[د(ك+١)−د(ك)])≥ك

لاحظ أن طرف المتباينة الأيمن هو

$$\text{د}(2\text{ك})-\text{د}(\text{ك})=1$$

ونستنتج من ذلك أن $\text{ك}\leq 1$.

الحالة الأولى: $\text{ك}=0$. في هذه الحالة نحصل على $\text{ك}=\text{د}(0)=1$، وهذا تناقض.

الحالة الثانية: $\text{ك}=1$. في هذه الحالة، وبتعويض $\text{م}=0$ في الشرط الثاني نحصل على

$$\text{د}(\text{ن}+1)=\text{د}(\text{ن})+1،\ \forall\,\text{ن}\in\text{ك}$$

أي أن

$$\text{د}(\text{ن})=\text{د}(\text{ن}-1)+1=\text{د}(\text{ن}-2)+2=\cdots=\text{د}(0)+\text{ن}،\ \forall\,\text{ن}\in\text{ط}$$

إذن

$$\text{د}(998)=\text{د}(0)+998=1+998=999$$

السؤال الواحد والعشرون:

عدد الأعداد الصحيحة ك بحيث توجد دالة $\text{د}:\text{ط}\rightarrow\text{ص}$ تحقق $\text{د}(2)\neq 0$ والشرط التالي

$$\text{د}(\text{م}\,\text{ن})=\text{د}(\text{م})+\text{د}(\text{ن})+\text{ك}\,\text{د}(\text{و.م.أ.}(\text{م}،\text{ن}))$$

هو

الحل:

هل تجدي دراسة بعض القيم الخاصة؟ بتعويض $\text{م}=\text{ن}$، نحصل على

$$\text{د}(\text{ن}^2)=(\text{ك}+2)\,\text{د}(\text{ن})$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned}\text{د}(\text{ن}^3) &= \text{د}(\text{ن}^2\times\text{ن})\\ &= \text{د}(\text{ن}^2)+(\text{ك}+1)\,\text{د}(\text{ن})\\ &= (2\text{ك}+3)\,\text{د}(\text{ن})\end{aligned}$$

بذلك نحصل على

$$\begin{aligned}\text{د}(\text{ن}^4) &= \text{د}(\text{ن}^2\times\text{ن}^2)\\ &= (\text{ك}+2)\,\text{د}(\text{ن}^2)\\ &= (\text{ك}+2)(\text{ك}+2)\,\text{د}(\text{ن})\\ &= (\text{ك}+2)^2\,\text{د}(\text{ن})\end{aligned}$$

يمكننا حساب $\text{د}(\text{ن}^4)$ بطريقة أخرى:

$$\begin{aligned}
\text{د}(\text{ن}^4) &= \text{د}(\text{ن}^3 \times \text{ن})\\
&= \text{د}(\text{ن}^3) + (\text{ك}+1)\,\text{د}(\text{ن})\\
&= (2\text{ك}+3)\,\text{د}(\text{ن}) + (\text{ك}+1)\,\text{د}(\text{ن})\\
&= (3\text{ك}+4)\,\text{د}(\text{ن})
\end{aligned}$$

من ذلك نحصل على

$$(\text{ك}+2)^2\,\text{د}(\text{ن}) = (3\text{ك}+4)\,\text{د}(\text{ن})$$

بتعويض $\text{ن}=2$، وحيث أن $\text{د}(2)\neq 0$، نحصل على

$$\begin{aligned}
(\text{ك}+2)^2 &= (3\text{ك}+4)\\
\text{ك}^2+\text{ك} &= 0\\
\text{ك}(\text{ك}+1) &= 0\\
\text{ك}=0 \quad \text{أو} &\quad \text{ك}=-1
\end{aligned}$$

الحالة الأولى: $\text{ك}=0$.

في هذه الحالة يمكننا تعريف

$$\text{د}(\text{ن})=\text{ل}\text{، حيث }\ \text{ن}=2^{\text{ل}}\times\text{ب}\ \text{ وَ }\ 2 \nmid \text{ب}$$

الحالة الثانية: $\text{ك}=-1$.

في هذه الحالة يمكننا تعريف

$$\text{د}(\text{ن}) = \begin{cases} 1 \text{ ، } & 2 \mid \text{ن} \\ 0 \text{ ، } & 2 \nmid \text{ن} \end{cases}$$

نستنتج من ذلك أن العدد المطلوب هو ٢.

السـؤال الثاني والعشرون:

إذا كانت أ،ب،جـ جذور المعادلة $\text{س}^3-\text{س}-1=0$، فإن

$$\frac{1-\text{أ}}{1+\text{أ}}+\frac{1-\text{ب}}{1+\text{ب}}+\frac{1-\text{جـ}}{1+\text{جـ}}=$$

الحـل:

هل حاولت إيجاد هذه الجذور؟ قد يكون ذلك صعباً جداً. في الحقيقة يوجد لهذه المعادلة جذر حقيقي وحيد وهو – على وجه التقريب – ١,٣٢٤٧، أما الجذران الآخران فهما غير حقيقيين.

ماذا عن العلاقات بين معاملات كثيرات الحدود ومعاملاتها؟ هل تتذكر تلك الخاصة بالمعادلات التكعيبية؟

من المعلوم أنه إذا كان $أ_{.} \neq ٠$، فإن مجموع معكوسات جذور المعادلة التكعيبية $أ_{٣}س^{٣}+أ_{٢}س^{٢}+أ_{١}س+أ_{.}=٠$ هو $-\frac{أ_{١}}{أ_{.}}$.

لاحظ أن $أ+١$، $ب+١$، $ج+١$ جذور لكثيرة الحدود

$$ك(س)=(س-١)^{٣}-(س-١)-١=س^{٣}-٣س^{٢}+٢س-١$$

من ذلك نحصل على

$$\frac{١}{أ+١}+\frac{١}{ب+١}+\frac{١}{ج+١}=\frac{-٢}{-١}=٢$$

لاحظ أن

$$\frac{١-أ}{١+أ}+\frac{١-ب}{١+ب}+\frac{١-ج}{١+ج} = \frac{(١+أ)-٢أ}{١+أ}+\frac{(١+ب)-٢ب}{١+ب}+\frac{(١+ج)-٢ج}{١+ج}$$

$$=٣-٢\times\left(\frac{أ}{١+أ}+\frac{ب}{١+ب}+\frac{ج}{١+ج}\right)$$

ليكن $ر=\frac{أ}{١+أ}+\frac{ب}{١+ب}+\frac{ج}{١+ج}$. من ذلك نحصل على

$$\left(\frac{١}{١+أ}+\frac{١}{١+ب}+\frac{١}{١+ج}\right)-ر=٣-٢ر$$

$$٢+ر=٣$$

$$ر=١$$

نستنتج أن

$$\frac{١-أ}{١+أ}+\frac{١-ب}{١+ب}+\frac{١-ج}{١+ج}=\left(\frac{١}{أ+١}+\frac{١}{ب+١}+\frac{١}{ج+١}\right)-\left(\frac{أ}{١+أ}+\frac{ب}{١+ب}+\frac{ج}{١+ج}\right)$$

$$=٢-١$$

$$=١$$

السؤال الثالث والعشرون:

إذا كانت الأعداد الحقيقية الموجبة أ، ب، ج، ر تحقق المعادلتين:

$$أ+ب+ج+ر=١٢$$

$$أبجر=٢٧+أب+أج+أر+بج+بر+جر$$

فإن أبجر=

الحــــــل:

ما الذي يوحيه لك وجود $ا ب جـ د$ وَ $ا+ب+جـ+د$؟ لاحظ أن كلا الحدين يظهران في متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي، ولكن ظاهر السؤال ليس عن متباينة ولكن عن معادلتين!! وليكن، لا تنس أن أية مساواة $ك=ل$ تكافئ في الحقيقة المتباينة $ك \leq ل \leq ك$.

بتطبيق متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي على $ا، ب، جـ، د$، نحصل على

$$\sqrt[4]{ا ب جـ د} \leq \frac{ا+ب+جـ+د}{٤}$$
$$\sqrt[4]{ا ب جـ د} \leq ٣$$
$$ا ب جـ د \leq ٨١$$

لاحظ أننا نحصل على مساواة عندما $(ا، ب، جـ، د)=(٣، ٣، ٣، ٣)$، وأن هذه الرباعية تحقق المعادلتين.

من المعادلة الثانية نحصل على
$$ا ب+ا جـ+ا د+ب جـ+ب د+جـ د=ا ب جـ د-٢٧$$

بتطبيق متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي على الأعداد $ا ب، ا جـ، ا د، ب جـ، ب د، جـ د$ نحصل على

$$\sqrt[6]{(ا ب)(ا جـ)(ا د)(ب جـ)(ب د)(جـ د)} \leq \frac{ا ب+ا جـ+ا د+ب جـ+ب د+جـ د}{٦}$$

$$\sqrt{ا ب جـ د} \leq \frac{ا ب جـ د-٢٧}{٦}$$

أي أن $س=\sqrt{ا ب جـ د}$ تحقق المتباينة $س^٢-٦س \geq ٢٧$، وهي متباينة مكافئة للمتباينة
$$(س-٣)^٢=س^٢-٦س+٩ \geq ٣٦$$

حيث إن هذه المتباينة تتحقق إذا وفقط إذا كانت $س \leq -٣$ أو $س \geq ٩$، وحيث أن $\sqrt{ا ب جـ د} \geq ٠$، نستنتج أن $\sqrt{ا ب جـ د} \geq ٩$، أي أن $ا ب جـ د \geq ٨١$.

من المتباينة $٨١ \geq ا ب جـ د \geq ٨١$، نحصل على $ا ب جـ د=٨١$.

الســــــؤال الرابع والعشرون:

عرِّف
$$د(س)=\lfloor س \rfloor+\lfloor ١٠ \times س \rfloor+\lfloor ١٠٠ \times س \rfloor$$

أوجد عدداً صحيحاً موجباً $ن$ بحيث

١) لا يوجد لأي من للمعادلتين $د(س)=ن$ وَ $د(س)=ن+١$ أي حل

٢) يوجد للمعادلتين $د(س)=ن-١$ وَ $د(س)=ن+٢$، كل على حدة، حل واحد على الأقل.

الحـــــل:

يمكن كتابة أي عدد حقيقي موجب ع على الشكل ع=م,أب جـ... حيث يمثل م الجزء الصحيح لهذا العدد. لاحظ أن

$$د(ع)=\lfloor ع \rfloor+\lfloor ع\times ١٠ \rfloor+\lfloor ع\times ١٠٠ \rfloor$$

$$=\lfloor م,أب جـ\cdots \rfloor+\lfloor مأ,ب جـ\cdots \rfloor+\lfloor مأب,جـ\cdots \rfloor$$

$$=م+مأ+مأب$$

إذا كانت م=٠، فإن

$$د(ع)=أ+أب\leq ٩+٩٩=١٠٨$$

لاحظ أن $د(٠,٩٩)=٠+٩+٩٩=١٠٨$.

أما إذا كانت م≥١، فإن

$$د(ع)\geq م+١٠م+١٠٠م\geq ١١١$$

لاحظ أن $د(١)=١+١٠+١٠٠=١١١$.

بالتالي فإنه لا يوجد للمعادلة د(س)=١٠٩ أو للمعادلة د(س)=١١٠ أية حلول.

من الواضح أن ن=١٠٩ يحقق الشروط المطلوبة.

السـؤال الخامس والعشرون:

أثبت أنه لأية أعداد حقيقية موجبة $أ_١،\cdots،أ_ن،ب_١،\cdots،ب_ن$:

$$(أ_١\times\cdots\times أ_ن)^{\frac{١}{ن}}+(ب_١\times\cdots\times ب_ن)^{\frac{١}{ن}}\leq \left((أ_١+ب_١)\times\cdots\times(أ_ن+ب_ن)\right)^{\frac{١}{ن}}$$

الحـــــل:

ليكن

$$س_ك=\frac{أ_ك}{أ_ك+ب_ك}\quad وَ\quad ص_ك=\frac{ب_ك}{أ_ك+ب_ك}$$

لجميع قيم ك=١،...،ن. لاحظ أن

$$س_ك+ص_ك=١$$

باستخدام متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي نحصل على

$$\left(\text{س}_1\times\cdots\times\text{س}_{\text{ن}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}+\left(\text{ص}_1\times\cdots\times\text{ص}_{\text{ن}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}\le\frac{\left(\text{س}_1+\text{ص}_1\right)+\cdots+\left(\text{س}_{\text{ن}}+\text{ص}_{\text{ن}}\right)}{\text{ن}}$$

$$=\frac{1+\cdots+1}{\text{ن}}$$

$$=\frac{\text{ن}}{\text{ن}}=1$$

من ذلك نحصل على

$$\left(\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_1+\text{ب}_1}\times\cdots\times\frac{\text{أ}_{\text{ن}}}{\text{أ}_{\text{ن}}+\text{ب}_{\text{ن}}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}+\left(\frac{\text{ب}_1}{\text{أ}_1+\text{ب}_1}\times\cdots\times\frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{أ}_{\text{ن}}+\text{ب}_{\text{ن}}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}\le 1$$

$$\left(\text{أ}_1\times\cdots\times\text{أ}_{\text{ن}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}+\left(\text{ب}_1\times\cdots\times\text{ب}_{\text{ن}}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}\le\Big(\left(\text{أ}_1+\text{ب}_1\right)\times\cdots\times\left(\text{أ}_{\text{ن}}+\text{ب}_{\text{ن}}\right)\Big)^{\frac{1}{\text{ن}}}$$

السـؤال السادس والعشرون:

لتكن $\{\text{س}_1،\cdots،\text{س}_{\text{ن}}\}$، حيث $\text{ن}\ge 2$، مجموعة من الأعداد الحقيقية الموجبة. أثبت أن

$$\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}\text{ك}\,\text{س}_{\text{ك}}\le\binom{\text{ن}}{2}+\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}\text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}$$

الحـــل:

حيث أن حدين من أصل ثلاثة في المتباينة على شكل مجموع منتهٍ، لا بد أنك قد توقعت أن تكون بداية الحل إعادة كتابة الحد المتبقي، أي $\binom{\text{ن}}{2}$، على شكل مجموع منتهٍ. هل يمكنك ذلك؟ لاحظ أن

$$\binom{\text{ن}}{2}=\frac{\text{ن}!}{2!(\text{ن}-2)!}=\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}=\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}-\text{ن}=\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}}(\text{ك}-1)$$

بتطبيق متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي على الأعداد

$$\underbrace{1،\cdots،1}_{\text{ك}-1}،\text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}$$

نحصل على

$$\text{س}_{\text{ك}}=\sqrt[\text{ك}]{1\times\cdots\times1\times\text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}}\le\frac{(\text{ك}-1)+\text{س}_{\text{ك}}^{\text{ك}}}{\text{ك}}$$

أي أن

$$\sum_{ك=1}^{ن} ك\,س_ك \geq \sum_{ك=1}^{ن} (ك-1) + \sum_{ك=1}^{ن} س_ك^{ك} = \binom{ن}{2} + \sum_{ك=1}^{ن} س_ك^{ك}$$

السـؤال السابع والعشرون:

ليكن $ن$ عدداً صحيحاً موجباً، ولتبدأ بالمتتابعة $1، \frac{1}{2}، \dots، \frac{1}{ن}$، لتكوّن متتابعة جديدة عدد عناصرها $ن-1$ تحسب حدودها كما يلي:

الحد الأول هو الوسط الحسابي للحدين الأول والثاني في المتتابعة أعلاه، والحد الثاني هو الوسط الحسابي للحدين الثاني والثالث في المتتابعة أعلاه، وهكذا لتحصل على المتتابعة

$$\frac{3}{4}، \frac{5}{12}، \dots، \frac{2ن-1}{2ن(ن-1)}$$

استمر بتكوين متتابعات جديدة بحيث يكون الحد العام ذو الترتيب **ل** في أية متتابعة جديدة مساوياً للوسط الحسابي للحد ذي الترتيب **ل**، والحد ذي الترتيب **ل+١** في المتتابعة التي سبقتها مباشرة.

أثبت أن العدد $أ$ الذي نحصل عليه بعد تكرار هذه العملية $ن-1$ من المرات أقل من $\frac{2}{ن}$.

الحـــــل:

لا بد أنك تفضل البدء بتجربة بعض قيم $ن$ وهذا جيد لفهم أفضل للسؤال.

لأية متتابعة $\{س_ل\}$ عرِّف

$$و_0(س_ل) = س_ل$$

$$و_1(س_ل) = \frac{س_ل + س_{ل+1}}{2}$$

$$و_{م+1}(س_ل) = و(و_م(س_ل))$$

وذلك لجميع قيم $م=1،\dots،ن-1$ وَ $ل=1،\dots،م-1$.

باستخدام الاستقراء الرياضي، نثبت أنه إذا كانت $ل$ ثابتة، فإن

$$و_م(س_ل) = \frac{\sum_{ك=0}^{م} \binom{م}{ك} س_{ل+ك}}{2^م} \qquad (*)$$

إذا كانت $م=1$، فإن المعادلة (*) صحيحة. افترض أن المعادلة (*) صحيحة عندما $م=ر\geq 1$. نستنتج من ذلك أن

$$ق_{ر+١}(س_ل) = ق(ق_ر(س_ل))$$

$$= \frac{ق_ر(س_ل) + ق_ر(س_{ل+١})}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \left(\frac{\sum_{ك=٠}^{ر} \binom{ر}{ك} س_{ل+ك}}{٢^{ر}} + \frac{\sum_{ك=٠}^{ر} \binom{ر}{ك} س_{ل+١+ك}}{٢^{ر}} \right)$$

$$= \frac{س_ل + \sum_{ك=١}^{ر} \binom{ر}{ك} س_{ل+ك} + \sum_{ك=٠}^{ر-١} \binom{ر}{ك} س_{ل+١+ك} + س_{ر+١+ك}}{٢^{ر+١}}$$

$$= \frac{س_ل + \sum_{ك=١}^{ر} \left[\binom{ر}{ك} + \binom{ر}{ك-١} \right] س_{ل+ك} + س_{ر+١+ك}}{٢^{ر+١}}$$

$$= \frac{س_ل + \sum_{ك=١}^{ر} \binom{ر+١}{ك} س_{ل+ك} + س_{ر+١+ك}}{٢^{ر+١}}$$

$$= \frac{\sum_{ك=٠}^{ر+١} \binom{ر+١}{ك} س_{ل+ك}}{٢^{ر+١}}$$

إذن المعادلة (*) صحيحة عندما $م = ر+١$. يعني هذا أن المعادلة (*) صحيحة لجميع قيم $م = ١، \ldots، ن-١$ وَ $ل = ١، \ldots، م-١$.

نحصل من المعادلة (*) على

$$أ = ق_{ن-١}(س_١) = \frac{\sum_{ك=٠}^{ن-١} \binom{ن-١}{ك} س_{١+ك}}{٢^{ن-١}}$$

لكن

$$\binom{\text{ن}-1}{\text{ك}}\text{س}_{\text{ك}+1} = \binom{\text{ن}-1}{\text{ك}}\frac{1}{\text{ك}+1}$$

$$= \frac{(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-1-\text{ك})!\,\text{ك}!\,(\text{ك}+1)}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-1-\text{ك})!\,\text{ك}!\,(\text{ك}+1)}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}}\binom{\text{ن}}{\text{ك}+1}$$

نستنتج من ذلك أن

$$\text{أ} = \frac{\sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}-1}\frac{1}{\text{ن}}\binom{\text{ن}}{\text{ك}+1}}{2^{\text{ن}-1}}$$

$$= \frac{\sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}-1}\frac{1}{\text{ن}}\binom{\text{ن}}{\text{ك}+1}}{2^{\text{ن}-1}}$$

$$< \frac{1}{\text{ن}\times 2^{\text{ن}-1}}\sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}}\binom{\text{ن}}{\text{ك}}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}\times 2^{\text{ن}-1}}\times 2^{\text{ن}}$$

$$= \frac{2}{\text{ن}}$$

السـؤال الثامن والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٨١):

لتكن د(س،ص) دالة معرفة لجميع الأعداد الكلية س،ص، وتحقق المعادلات التالية

$$\text{د}(0،\text{ص}) = \text{ص}+1$$
$$\text{د}(\text{س}+1،0) = \text{د}(\text{س}،1)$$
$$\text{د}(\text{س}+1،\text{ص}+1) = \text{د}(\text{س}،\text{د}(\text{س}+1،\text{ص}))$$

أوجد د(٤،١٩٨١).

الحـــــل:

حيث أن المطلوب هو د(١٩٨١،٤)، فإن فكرة تعويض بعض قيم س وَ ص الخاصة لا تبدو فكرة سيئة.
بتعويض ص=٠ في المعادلة الأولى، ثم س=٠ في المعادلة الثانية، نجد أن

د(٠،١)=١+١=٢ وَ د(١،٠)=د(٠،١)=٢

بتعويض س=٠ في المعادلة الثالثة، ثم باستخدام المعادلة الأولى، نحصل على

د(١،ص+١)=د(٠،د(١،ص))=د(١،ص)+١

هل توصلت إلى صيغة محتملة لقيم د(١،ص) ؟ هل يمكنك إثبات صحتها؟ من السهل الآن – باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي – إثبات أن

د(١،ص)=ص+٢، لجميع قيم ص≥٠ (*)

بتعويض س=١ في المعادلة الثانية، ثم باستخدام (*)، نجد أن

د(٢،٠)=د(١،١)=١+٢=٣

وبتعويض س=١ في المعادلة الثالثة، ثم باستخدام (*)، نجد أن

د(٢،ص+١)=د(١،د(٢،ص))
=د(٢،ص)+٢

هل توصلت إلى صيغة محتملة لقيم د(٢،ص) ؟ هل يمكنك إثبات صحتها؟ من السهل الآن – باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي – إثبات أن

د(٢،ص)=٢ص+٣، لجميع قيم ص≥٠ (**)

نستنتج أن د(٢،٢)=٧ وَ د(٣،٠)=د(٢،١)=٥. بتعويض س=٢ في المعادلة الثالثة، ثم باستخدام (**)، نجد أن

د(٣،ص+١)=د(٢،د(٣،ص))=٢د(٣،ص)+٣

هل توصلت إلى صيغة محتملة لقيم د(٣،ص) ؟ هل يمكنك إثبات صحتها؟ من السهل الآن – باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي – إثبات أن

د(٣،ص)=$٢^{ص+٣}$ – ٣، لجميع قيم ص≥٠ (***)

نستنتج أن د(٣،٣)=٦١. بتعويض س=٣ في المعادلة الثانية، نجد أن د(٤،٠)=د(٣،١)=١٣.
بتعويض س=٣ في المعادلة الثالثة، ثم باستخدام (***)، نجد أن

د(٤،ص+١)=د(٣،د(٤،ص))
=$٢^{د(٤،ص)+٣}$ – ٣

هل توصلت إلى صيغة محتملة لقيم د(٤،ص) ؟ هل يمكنك إثبات صحتها؟ باستخدام الاستقراء الرياضي، يمكننا إثبات أن

د(٤،ص)=$\underbrace{٢^{٢^{\cdot^{\cdot^{٢}}}}}_{ص+٣}$ – ٣، لجميع قيم ص≥٠ (****)

بتعويض ص=١٩٨١ في (****)، نحصل على

$$د(٤،١٩٨١)=\underbrace{٢^{٢^{\cdot^{\cdot^{٢}}}}}_{١٩٨٤}-٣$$

السـؤال التاسع والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ٢٠٠٤):

أوجد جميع كثيرات الحدود $ك(س)$ التي معاملاتها أعداد حقيقية وتحقق

$$ك(أ-ب)+ك(ب-ج)+ك(ج-أ)=٢ك(أ+ب+ج)$$

لجميع الثلاثيات المرتبة $(أ،ب،ج)$ التي تحقق

$$أب+بج+جأ=٠$$

الحـل:

لتكن

$$ك(س)=أ_٠+أ_١س+أ_٢س^٢+\cdots+أ_م س^م+\cdots+أ_ن س^ن$$

كيف نبدأ؟ هل تعرف ثلاثيات مرتبة $(أ،ب،ج)$ تحقق $أب+بج+جأ=٠$. لنحاول إيجاد بعضها. لاحظ أن جميع الثلاثيات

$$(أ،ب،ج)=(٦ل،٣ل،-٢ل)،\ \text{حيث}\ ل\in ح$$

تحقق

$$أب+بج+أج=(٦ل)(٣ل)+(٣ل)(-٢ل)+(-٢ل)(٦ل)=٠$$

من ذلك نحصل على

$$ك(٣ل)+ك(٥ل)+ك(-٨ل)=٢ك(٧ل)\quad(*)$$

بمساواة معاملات $ل^م$ على طرفي المعادلة (*)، لجميع قيم $٠\le م\le ن$، نحصل على $أ_م=٠$ أو (في حالة $أ_م\ne ٠$):

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times٨^م-٢\times٧^م=٠$$

الحالة الأولى: $م=٠$. في هذه الحالة

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times٨^م-٢\times٧^م=١>٠$$

الحالة الثانية: $م$ فردي. في هذه الحالة

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times٨^م-٢\times٧^م=(٣^م-٨^م)+(٥^م-٢\times٧^م)<٠$$

الحالة الثالثة: $م=٢$ أو $م=٤$. في هذه الحالة

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times٨^م-٢\times٧^م=٠$$

الحالة الرابعة: $م\ge٦$ عدد زوجي: في هذه الحالة

$$٣^م+٥^م+(-١)^م\times٨^م-٢\times٧^م=٣^م+٥^م+٨^م-٢\times٧^م>٠.$$

نستنتج من ذلك أن

$$\text{ك}(\text{س})=\text{أ}_{٢}\text{س}^{٢}+\text{أ}_{٤}\text{س}^{٤}\text{، حيث }\text{أ}_{٢}\text{،}\text{أ}_{٤}\in\text{ح}$$

بالتعويض نتأكد أن قيم $\text{ك}(\text{س})$ أعلاه تحقق الشرط المطلوب.

السؤال الثلاثون (أولمبياد الرياضيات العالمي ٤٢، الولايات المتحدة ٢٠٠١):

أثبت أنه لأية ثلاثة أعداد موجبة $\text{أ}\text{،}\text{ب}\text{،}\text{جـ}>٠$:

$$\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢}+٨\text{ب}\text{جـ}}}+\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ب}^{٢}+٨\text{أ}\text{جـ}}}+\frac{\text{جـ}}{\sqrt{\text{جـ}^{٢}+٨\text{أ}\text{ب}}}\geq ١$$

الحـــــل:

كما هي الحال في مثل هذه المسائل، لنبدأ بتدوين بعض الملاحظات. لاحظ أن

$$\frac{\text{أ}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}}}+\frac{\text{ب}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}}}+\frac{\text{جـ}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}}}=\frac{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}}}$$
$$=١$$

لاحظ أيضاً أن الطرف الأيمن متناظر في $\text{أ}\text{،}\text{ب}\text{،}\text{جـ}$، وبذلك يكفينا إيجاد عدد ك بحيث يكون

$$\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢}+٨\text{ب}\text{جـ}}}\geq\frac{\text{أ}^{\text{ك}}}{\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}}}\qquad (*)$$

بتربيع طرفي المتباينة (*) وإعادة الترتيب نحصل على المتباينة المكافئة

$$\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{أ}^{٢}+٨\text{ب}\text{جـ}}\geq\frac{\text{أ}^{٢\text{ك}}}{(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}})^{٢}}$$

$$\text{أ}^{٢}(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}})^{٢}\geq\text{أ}^{٢\text{ك}}(\text{أ}^{٢}+٨\text{ب}\text{جـ})$$

$$(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}})^{٢}\geq\text{أ}^{٢\text{ك}-٢}(\text{أ}^{٢}+٨\text{ب}\text{جـ})$$

$$(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}})^{٢}-\text{أ}^{٢\text{ك}}\geq ٨\text{أ}^{٢\text{ك}-٢}\text{ب}\text{جـ}$$

بإعادة كتابة الطرف الأيمن من المتباينة الجديدة كفرق بين مربعين، نحصل على

$$(\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}})^{٢}-\text{أ}^{٢\text{ك}} = (\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}})^{٢}-(\text{أ}^{\text{ك}})^{٢}$$

$$= (\text{أ}^{\text{ك}}+\text{أ}^{\text{ك}}+\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}})(\text{ب}^{\text{ك}}+\text{جـ}^{\text{ك}})$$

بتطبيق متباينة المتوسط الحسابي – الوسط الهندسي على مجموعتي الأعداد $\{أ^ك، أ^ك، ب^ك، ج^ك\}$ وَ $\{ب^ك، ج^ك\}$، نحصل على المتباينتين

$$\frac{أ^ك+أ^ك+ب^ك+ج^ك}{٤}\geq أ^{\frac{ك}{٤}}\times أ^{\frac{ك}{٤}}\times ب^{\frac{ك}{٤}}\times ج^{\frac{ك}{٤}} \qquad (**)$$

$$\frac{ب^ك+ج^ك}{٢}\geq ب^{\frac{ك}{٢}}\times ج^{\frac{ك}{٢}} \qquad (***)$$

من المتباينتين (**) وَ (***)، نحصل على

$$(أ^ك+ب^ك+ج^ك)^٢-أ^{٢ك} = (٢أ^ك+ب^ك+ج^ك)(ب^ك+ج^ك)$$

$$\geq (٤أ^{\frac{ك}{٢}}ب^{\frac{ك}{٤}}ج^{\frac{ك}{٤}})(٢ب^{\frac{ك}{٢}}ج^{\frac{ك}{٢}})$$

$$= ٨أ^{\frac{ك}{٢}}ب^{\frac{٣ك}{٤}}ج^{\frac{٣ك}{٤}}$$

يجب أن نختار العدد **ك** بحيث يكون

$$٨أ^{\frac{ك}{٢}}ب^{\frac{٣ك}{٤}}ج^{\frac{٣ك}{٤}}\geq ٨أ^{٢ك-٢}ب ج$$

ولكن، كيف يمكنك إيجاد مثل هذا العدد؟ يمكن أن نحصل على أحد هذه الأعداد من خلال المساواة

$$٨أ^{\frac{ك}{٢}}ب^{\frac{٣ك}{٤}}ج^{\frac{٣ك}{٤}} = ٨أ^{٢ك-٢}ب ج$$

$$ك=\frac{٤}{٣}$$

من ذلك نحصل على

$$\frac{أ}{\sqrt{أ^٢+٨ب ج}}\geq \frac{أ^{\frac{٤}{٣}}}{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+ج^{\frac{٤}{٣}}}$$

$$\frac{ب}{\sqrt{ب^٢+٨أ ج}}\geq \frac{ب^{\frac{٤}{٣}}}{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+ج^{\frac{٤}{٣}}}$$

$$\frac{ج}{\sqrt{ج^٢+٨أ ب}}\geq \frac{ج^{\frac{٤}{٣}}}{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+ج^{\frac{٤}{٣}}}$$

أي أن

$$\frac{أ}{\sqrt{أ^٢+٨ب ج}}+\frac{ب}{\sqrt{ب^٢+٨أ ج}}+\frac{ج}{\sqrt{ج^٢+٨أ ب}}\geq \frac{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+ج^{\frac{٤}{٣}}}{أ^{\frac{٤}{٣}}+ب^{\frac{٤}{٣}}+ج^{\frac{٤}{٣}}}=١$$

٣-٢ أسئلة وحلول في نظرية الأعداد

السـؤال الأول:

عدد القواسم الموجبة للعدد ١٩٦٠٠٠ هو

أ) ٦٠
ب) ٨٥
ج) ٧٠
د) ٨٠
هـ) ٧٢

الحـل:

لا بد أنك قد سألت نفسك: هل توجد صيغة تعطينا عدد القواسم المنشود؟ ما هي هذه الصيغة؟

للحصول على عدد القواسم الموجبة، نحلل العدد إلى عوامله الأولية: $١٩٦٠٠٠ = ٢^{٥} \times ٥^{٣} \times ٧^{٢}$. أي قاسم للعدد ١٩٦٠٠٠ سيكون على صورة $٢^{م} \times ٥^{ن} \times ٧^{هـ}$ حيث م، ن، هـ أعداد صحيحة تحقق $٥ \geq م \geq ٠$، $٣ \geq ن \geq ٠$، $٢ \geq هـ \geq ٠$. بذلك يكون عدد القواسم الموجبة للعدد ١٩٦٠٠٠ هو

$$(٥+١)(٣+١)(٢+١) = ٧٢$$

السـؤال الثاني:

رقم الآحاد للعدد $٢١٣٧^{٢٠٠٩}$ يساوي

أ) ١
ب) ٣
ج) ٥
د) ٧
هـ) ٩

الحـل:

ما هو رقم الآحاد لحاصل ضرب ن من الأعداد؟ هل هو حاصل ضرب الأرقام في خانات الآحاد؟ ماذا لو كان هذا الناتج أكثر من ١٠؟ هل يكفي، في هذه الحالة، أن نأخذ باقي قسمة حاصل الضرب على ١٠؟

لاحظ أولاً أن رقم الآحاد للعدد $٢١٣٧^{ن}$ هو نفس رقم الآحاد للعدد $٧^{ن}$ أي أنه يساوي ١ إذا كانت ن = ٠، ويساوي ٧ إذا كانت ن = ١، ويساوي ٩ إذا كانت ن = ٢، ويساوي ٣ إذا كانت ن = ٣، ويعود إلى ١ عندما تكون ن = ٤ أو مضاعفاتها، وهكذا تتكرر الأعداد ١-٧-٩-٣ في خانة الآحاد في دورة رباعية (١-٧-٩-٣).

لاحظ الآن أن

$$٢١٣٧^{٢٠٠٩} = ٢١٣٧^{٢٠٠٨+١} = \left[٢١٣٧^{٤}\right]^{٥٠٢} \times ٢١٣٧$$

لاحظ أيضاً أن رقم الآحاد للعدد $\left[٢١٣٧^{٤}\right]^{٥٠٢}$ هو ١ (لأن الأس من مضاعفات ٤)، وأن رقم الآحاد للعدد ٢١٣٧ هو ٧. إذن آحاد العدد $٢١٣٧^{٢٠٠٩}$ هو آحاد العدد الناتج من ضرب آحاد العدد $\left[٢١٣٧^{٤}\right]^{٥٠٢}$ في آحاد العدد ٢١٣٧، وهذا يعني أن رقم الآحاد للعدد $(٢١٣٧)^{٢٠٠٩}$ هو $١ \times ٧ = ٧$.

السـؤال الثالث:

عدد الأعداد الأولية التي يمكن كتابتها على الصورة ١٠١٠١...١٠٠ هو

أ) لانهائي
ب) ٣
ج) ٢
د) ١
هـ) ٠

الحـل:

ما عدد مرات تكرار الرقم ١ في العدد المعطى؟ ليكن $س_{ن}$ =١٠١٠١...١٠٠ (الرقم ١ يتكرر ن مرة).

لاحظ أن $س_{١}$ =١ غير أولي، وأن $س_{٢}$ =١٠١ أولي.

افرض أن $ن \geq ٣$.

الحالة الأولى: ن عدد فردي. في هذه الحالة

$$س_{ن} = ١١٠٠...١ \times ١٩٠٩٠...٠٠٩$$

حيث يتكرر الرقم ١ عدد ن من المرات في العدد الأول، ويتكرر الرقم ٩ عدد $\frac{ن-١}{٢}$ من المرات في العدد الثاني. في هذه الحالة لا يمكن أن يكون $س_{ن}$ أولياً.

الحالة الثانية: ن عدد زوجي. في هذه الحالة يكون $س_{ن}$ من مضاعفات ١٠١.

نستنتج أن ١٠١ هو العدد الأولي الوحيد الذي يمكن كتابته على الصورة المعطاة.

السـؤال الرابع:

الرقم في خانة آحاد العدد $٧^{٧^{٧}}$ هو

أ) ١
ب) ٣
ج) ٥
د) ٧
هـ) ٩

الحـل:

لا شك أن الرقم المطلوب هو ب، حيث $٧^{٧^{٧}} \equiv ب \;\|١٠\|$.

نلاحظ أولاً أن $٧^{٢} = ٤٩ \equiv ١ \;\|٤\|$ وأن $٧^{٢} = ٤٩ \equiv -١ \;\|١٠\|$.

بذلك نحصل على

$$٧^{٧} = (٧^{٢})^{٣} \times ٧ \equiv \left((١)^{٣} \times ٧\right) \;\|٤\| \equiv ٣ \;\|٤\|$$

أي أن $٧^{٧} = ٤ك + ٣$، حيث ك عدد صحيح موجب.

نستنتج من ذلك أن

$$\begin{aligned} ٧^{٧^{٧}} &\equiv ٧^{٤ك+٣} \;\|١٠\| \\ &\equiv \left((٧^{٢})^{٢}\right)^{ك} \times (٧^{٢}) \times ٧ \;\|١٠\| \\ &\equiv \left((-١)^{٢}\right)^{ك} \times (-١) \times ٧ \;\|١٠\| \\ &\equiv -٧ \;\|١٠\| \\ &\equiv ٣ \;\|١٠\| \end{aligned}$$

إذن، العدد المطلوب هو ٣.

السـؤال الخامس:

عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ن بحيث يكون $ن^{٤} + ٤^{ن}$ عدداً أولياً هو

أ) لانهائي
ب) ٤
ج) ٣
د) ٢
هـ) ١

الحـــــل:

هل بدأت بتجريب بعض قيم $ن$؟ لاحظ أنه عندما تكون $ن=١$، فإننا نحصل على العدد الأولي ٥. هل وجدت قيما أخرى للعدد $ن$ تعطيك عدداً أولياً؟ ماذا يعني هذا؟

الحالة الأولى: $ن$ عدد زوجي. في هذه الحالة $ن^{٤}+٤^{ن}$ عدد زوجي أكبر من ٢، وبالتالي ليس عدداً أولياً.

الحالة الثانية: $ن$ عدد فردي. كما لاحظنا سابقا، إذا كانت $ن=١$، فإننا نحصل على العدد الأولي ٥.

ليكن $ن=٢ل+١$، حيث $ل\geq ١$. في هذه الحالة

$$ن^{٤}+٤^{ن}=(ن^{٢}+٢^{ن})^{٢}-٢ن^{٢}٢^{ن}$$

$$=(ن^{٢}+٢^{ن})^{٢}-(٢^{ل+١}ن)^{٢}$$

$$=(ن^{٢}+٢^{ن}-٢^{ل+١}ن)(ن^{٢}+٢^{ن}+٢^{ل+١}ن)$$

لاحظ أن

$$ن^{٢}+٢^{ن}-٢^{ل+١}ن=ن^{٢}+٢^{ل}(٢^{ل+١}-٢ن)>١$$

من الواضح أن $ن^{٢}+٢^{ن}+٢^{ل}ن>١$، أي أن $ن^{٤}+٤^{ن}$ ليس عدداً أولياً. إذن، نحصل على عدد أولي فقط عندما $ن=١$.

السـؤال السادس:

عدد الأعداد الصحيحة الموجبة $ن$ بحيث يقبل العدد $أ=٢٩٠٣^{ن}-٨٠٣^{ن}-٤٦٤^{ن}+٢٦١^{ن}$ القسمة على ٧بدون باقي هو

أ) ١
ب) ٢
ج) ٧
د) ٢٧١
هـ) لانهائي

الحـــــل:

ما العلاقة بين الأعداد

٢٩٠٣، ٨٠٣، ٤٦٤، ٢٦١، ٧؟

هل لاحظت أن $٢٩٠٣-٨٠٣=٢١٠٠$ وَ $٤٦٤-٢٦١=٢٠٣$ من مضاعفات ٧؟

باستخدام المتطابقة

$$(س^ن - ص^ن) = (س - ص)(س^{ن-1} + س^{ن-2}ص + \cdots + س ص^{ن-2} + ص^{ن-1})$$

نلاحظ أن س − ص يقسم $س^ن - ص^ن$ لجميع الأعداد الطبيعية ن. الآن نكتب أ على صورة

$$\begin{aligned} أ &= ٢٩٠٣^ن - ٨٠٣^ن - ٤٦٤^ن + ٢٦١^ن \\ &= (٢٩٠٣^ن - ٨٠٣^ن) - (٤٦٤^ن - ٢٦١^ن) \\ &= (٢٩٠٣ - ٨٠٣)ك - (٤٦٤ - ٢٦١)ل \\ &= ٢١٠٠ك - ٢٠٣ل \\ &= ٧ \times ٣٠٠ك + ٧ \times ٢٩ل \\ &= ٧ \times (٣٠٠ك + ٢٩ل) \end{aligned}$$

حيث ك وَ ل عددان صحيحان موجبان، أي أن ٧ تقسم أ لجميع الأعداد الطبيعية ن.

السـؤال السابع:

عدد كثيرات الحدود د(س) ∈ ص[س] التي تحقق الشرطين: د(٧) = ١١ وَ د(١١) = ١٣ يساوي

أ) ٠
ب) ١
ج) ٢
د) ٥
هـ) لانهائي

الحـل:

لنفرض أن $د(س) = \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر \cdot س^ر$ حيث $أ_ر$ عدد صحيح لجميع قيم ر. ما العلاقة بين الأعداد ٧، ١١، ١٣ (عدا عن كونها أعداداً أولية)؟ لاحظ أن س − ص قاسم لـ

$$\begin{aligned} د(س) - د(ص) &= \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر \cdot س^ر - \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر \cdot ص^ر \\ &= \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر \left(س^ر - ص^ر\right) \end{aligned}$$

لأن س − ص هو أحد عوامل $س^ر - ص^ر$ لجميع قيم ر ≥ ٠، وبناءً على ذلك فإن د(١١) − د(٧) من مضاعفات ١١ − ٧ = ٤، وهذا مستحيل لأن د(١١) − د(٧) = ١٣ − ١١ = ٢.

إذن لا توجد أية كثيرة حدود تحقق هذه الشروط.

السـؤال الثامن:

القاسم المشترك الأعظم للعددين $\underbrace{\text{١١١...١١}}_{\text{٤٠}}$ (بتكرار الرقم واحد ٤٠ مرة)، والعدد $\underbrace{\text{١١...١}}_{\text{١٢}}$ (بتكرار الرقم واحد ١٢ مرة) هو

أ) ١١
ب) ١١١
ج) ١١١١
د) ١١١١١
هـ) ١١١١١١

الحـل:

ليكن $\text{س}_{\text{ن}} = \underbrace{\text{١١١...١١}}_{\text{ن}}$ (بتكرار الرقم واحد ن مرة). لاحظ أن

$$\text{س}_{\text{ن}-\text{ل}} = \text{س}_{\text{ن}} - \text{١٠}^{\text{ن}-\text{ل}} \times \text{س}_{\text{ل}} \quad \text{لجميع قيم } \text{١} \le \text{ل} < \text{ن}$$

إذن، المطلوب هو $\text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{٤٠}}،\text{س}_{\text{١٢}})$. هل تتذكر كيفية الحصول على القاسم المشترك الأكبر لعددين؟

باستخدام خوارزمية إقليدس كما يلي:

$$\text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{٤٠}}،\text{س}_{\text{١٢}}) = \text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{٤٠}} - \text{١٠}^{\text{٢٨}} \times \text{س}_{\text{١٢}}،\text{س}_{\text{١٢}})$$

$$= \text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{٢٨}}،\text{س}_{\text{١٢}})$$

$$= \text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{٢٨}} - \text{١٠}^{\text{١٦}} \times \text{س}_{\text{١٢}}،\text{س}_{\text{١٢}})$$

$$= \text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{١٦}}،\text{س}_{\text{١٢}})$$

$$= \text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{١٦}} - \text{١٠}^{\text{٤}} \times \text{س}_{\text{١٢}}،\text{س}_{\text{١٢}})$$

$$= \text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{٤}}،\text{س}_{\text{١٢}})$$

$$= \text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{٤}}،\text{س}_{\text{١٢}} - \text{١٠}^{\text{٨}} \times \text{س}_{\text{٤}})$$

$$= \text{ق.م.أ}(\text{س}_{\text{٤}}،\text{س}_{\text{٨}})$$

$$= \text{ق.م.أ}(س_{٤}، س_{٨} - ١٠^{٤} \times س_{٤})$$

$$= \text{ق.م.أ}(س_{٤}، س_{٤})$$

$$= س_{٤} = ١١١١$$

السـؤال التاسع:

لنفرض أن $ن = ٢^{هـ-١}(٢^{هـ} - ١)$ وأن $٢^{هـ} - ١$ عدد أولي. مجموع القواسم الموجبة للعدد $ن$ يساوي

أ) $ن$
ب) $٢ن$
ج) $ن^{٢}$
د) $ن + ١$
هـ) $ن^{ن}$

الحـل:

ما هي قواسم العدد $ن$؟

إذا فرضنا أن $م = ٢^{هـ} - ١$ فإن $ن = ٢^{هـ-١} م$، وبذلك تكون قواسم العدد $ن$ هي:

$$١، ٢، ٢^{٢}، \cdots، ٢^{هـ-٢}، ٢^{هـ-١}$$
$$م، ٢م، ٢^{٢}م، \cdots، ٢^{هـ-١}م$$

مجموع المتتالية الأولى يساوي

$$١ + ٢ + ٢^{٢} + \cdots + ٢^{هـ-٢} + ٢^{هـ-١} = \frac{٢^{هـ} - ١}{٢ - ١} = ٢^{هـ} - ١ = م$$

أما مجموع المتتالية الثانية فيساوي

$$(١ + ٢ + ٢^{٢} + \cdots + ٢^{هـ-١})م = م \cdot م = م^{٢}$$

وبذلك يكون مجموع قواسم العدد $ن$

$$م + م^{٢} = م(م + ١) = م(٢^{هـ} - ١ + ١) = م \times ٢^{هـ} = ٢ن$$

السـؤال العاشر:

عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكوَّنة من عددين صحيحين س،ص يحققان

$$١٥س^{٢} - ٧ص^{٢} = ٩$$

هو

أ) ٠
ب) ٦
ج) ١٢
د) ١٨
هـ) لانهائي

الحـل:

ليكن (س،ص) زوجاً مرتباً يحقق المطلوب. حيث أن $٧ص^{٢} = ١٥س^{٢} - ٩ \equiv ٠ \,\|٣\|$، وحيث أن $٣ \nmid ٧$، نستنتج أن $٣ | ص$، أي أن $ص = ٣ص_{١}$ حيث $ص_{١}$ عدد صحيح. نستنتج من ذلك أن $١٥س^{٢} = ٦٣ص_{١}^{٢} + ٩$، أي أن

$$٥س^{٢} = ٢١ص_{١}^{٢} + ٣ \equiv ٠ \,\|٣\| \qquad (*)$$

حيث أن $٣ \nmid ٥$، فإن $٣ | س$، أي أن $س = ٣س_{١}$ حيث $س_{١}$ عدد صحيح. بالتعويض في (*)، نحصل على $٤٥س_{١}^{٢} - ٢١ص_{١}^{٢} = ٣$، أي أن $١٥س_{١}^{٢} - ٧ص_{١}^{٢} = ١$.

نستنتج أن $٧ص_{١}^{٢} = ١٥س_{١}^{٢} - ١$، ومن ذلك $ص_{١}^{٢} \equiv -١ \,\|٣\|$، وهذا تناقض لأنه لا يوجد أي عدد صحيح يحقق هذا التطابق: لاحظ أن

$$ص_{١} \equiv ٠ \,\|٣\| \Leftarrow ص_{١}^{٢} \equiv ٠ \,\|٣\|،\ وَ\ ص_{١} \equiv ١ \,\|٣\| \Leftarrow ص_{١}^{٢} \equiv ١ \,\|٣\|،\ وَ\ ص_{١} \equiv ٢ \,\|٣\| \Leftarrow ص_{١}^{٢} \equiv ١ \,\|٣\|$$

نستنتج أنه لا يوجد أي زوج مرتب يحقق المطلوب.

السـؤال الحادي عشر:

عدد الأزواج المرتبة (ا، ب) المكونة من عددين أوليين يحققان $ا^{٢} - ٢ب^{٢} = ١$ هو

أ) ١
ب) ٢
ج) ٣
د) ٤
هـ) لانهائي

الحـــــل:

هل يمكن أن يكون أ زوجياً؟ بالطبع لا (لماذا؟)!. لاحظ أيضاً أن الزوج المرتب (أ،ب)=(٣،٢) يحقق المعادلة المعطاة، بينما لا يحقق الزوج المرتب (٣،٣) المعادلة المعطاة.

افرض الآن أن أ، ب≤٥. من المعلوم أنه في هذه الحالة أ≡١ ‖٦‖ أو أ≡−١ ‖٦‖، وكذلك ب≡١ ‖٦‖ أو ب≡−١ ‖٦‖. نستنتج من ذلك أن

$$أ^{٢}-٢ب^{٢}\equiv\left((\pm١)^{٢}-٢\times(\pm١)^{٢}\right)\|٦\|\equiv-١\|٦\|\not\equiv١\|٦\|$$

بذلك يكون (٣،٢) الزوج المرتب الوحيد الذي يحقق المطلوب.

الســـــؤال الثاني عشر:

رقم الآحاد للعدد ں =١!+٢!+٣!+ ... +٩٩! يساوي

أ) ٩
ب) ٨
ج) ٥
د) ٣
هـ) ٠

الحـــــل:

ما هو رقم الآحاد لحاصل جمع عدة أعداد؟ لا شك أنك قد عرفت الإجابة، وهي أنه باقي قسمة مجموع الأرقام في خانات آحاد كل عدد من هذه الأعداد على ١٠.

لاحظ أن

$$ں=١!+٢!+٣!+٤!+٥!\cdots+٩٩!$$
$$=١+(١\times٢)+(١\times٢\times٣)+(١\times٢\times٣\times٤)+(١\times٢\times٣\times٤\times٥)+\cdots+٩٩!$$
$$=١+٢+٦+٢٤+١٠هـ$$

حيث هـ عدد صحيح موجب، لأن كل حد من الحدود ٥!، ٦!، ٧!، ...،٩٩! يحتوي على العاملين ٢ وَ ٥، وبذلك يكون من مضاعفات ١٠.

إذن رقم الآحاد للعدد ں يساوي رقم الآحاد للعدد ١+٢+٦+٢٤=٣٣ أي ٣.

السـؤال الثالث عشر:

أوجد أصغر عدد صحيح $ن$ بحيث لو قُسم على ١٠ لكان الباقي ٩، ولو قُسم على ٩ لكان الباقي ٨، ولو قُسم على ٨ لكان الباقي ٧، وهكذا نزولاً إلى قسمته على ٢ ليكون الباقي ١.

أ) ٥٩
ب) ٤١٩
ج) ١٢٥٩
د) ٢٥١٩
هـ) ١٥٩

الحـل:

ليكن

$$ن = ١٠أ_٩ + ٩ = ٩أ_٨ + ٨ = ٨أ_٧ + ٧ = \cdots = ٢أ_١ + ١$$

حيث $أ_ي$ هو خارج قسمة $ن$ على $ي+١$، حيث $١ \le ي \le ٩$. إذن، يمكننا كتابة

$$ن+١ = ١٠(أ_٩+١) = ٩(أ_٨+١) = ٨(أ_٧+١) = \cdots = ٢(أ_١+١)$$

وعليه فإن الأعداد ٢، ٣، ...، ١٠ هي عوامل للعدد $ن+١$. حيث أن المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد هو

$$٢^٣ \times ٣^٢ \times ٥ \times ٧ = ٢٥٢٠$$

فإن $ن = ٢٥٢٠ - ١ = ٢٥١٩$ هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق المطلوب.

السـؤال الرابع عشر:

ليكن أ عدداً أولياً. عدد الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من أعداد صحيحة موجبة تحقق

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{١}{أ}$$

هو

أ) ١
ب) ٣
ج) أ−١
د) أ
هـ) أ+١

الحـــــل:

ما العلاقة بين الأعداد س ، ص، أ. لاحظ أن س>أ وَ ص>أ. لتكن ب=س−أ وَ جـ=ص−أ. من ذلك نحصل على

$$\frac{١}{أ+ب}+\frac{١}{أ+جـ}=\frac{١}{أ}$$

أي أن

$$أ^٢+أ(ب+جـ)+ب جـ=٢أ^٢+أ(ب+جـ)$$
$$أ^٢=ب جـ$$

إذا كانت ب=١، فإن جـ=أ^٢، ونحصل بذلك على (س،ص) = (أ+١،أ^٢+أ).

إذا كانت جـ=١، فإن ب=أ^٢، ونحصل بذلك على (س،ص) = (أ^٢+أ،أ+١).

إذا كانت ب≠١ وَ جـ≠١، فإن ب=جـ=أ حيث أن أ هو العدد الأولي الوحيد الذي يمكن أن يظهر في تحليل كل من ب وَ جـ إلى عواملهما الأولية، وبالتالي فكلا العددين من مضاعفات أ. في هذه الحالة نحصل على (س،ص) = (٢أ،٢أ).

توجد إذن ثلاثة أزواج مرتبة فقط تحقق المطلوب.

ملاحظة: إذا لم يكن أ عدداً أولياً، فإن عدد هذه الأزواج المرتبة أكبر من ٣، وذلك لأن هناك أكثر من زوج مرتب يحقق المعادلة ب جـ=أ^٢ أعلاه.

السـؤال الخامس عشر:

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة ن بحيث يكون ٢^ن قاسماً للعدد ٣^ن +١

أ) ٣
ب) ١
ج) ٦
د) ١٦
هـ) لانهائي

الحـــــل:

لاحظ أولاً أن باقي قسمة مربع أي عدد فردي على ٨ هو ١: إذا كان هـ=٢م+١ عدداً فردياً فإن

هـ^٢ = (٢م+١)^٢ = ٤م(م+١)+١ ، وبما أن م أو (م+١) زوجي فإن ٤م(م+١) من مضاعفات ٨.

إذن، هـ^٢ ≡ ١ ||٨||.

الحالة الأولى: إذا كان $ن = ٢س$ عدداً زوجياً، فإن

$$٣^{ن} + ١ = ٣^{٢س} + ١ = \left(٣^{س}\right)^{٢} + ١ \equiv (١+١) \;\|٨\| \equiv ٢ \;\|٨\|$$

بينما $٢^{ن} \equiv ٠ \;\|٤\|$ (لاحظ أن $ن > ١$). نستنتج أنه إذا كان $ن$ زوجياً، فإن $٢^{ن}$ ليس قاسماً للعدد $٣^{ن} + ١$.

الحالة الثانية: إذا كان العدد $ن = ٢س + ١$ عدداً فردياً، فإن

$$٣^{ن} + ١ = ٣^{٢س+١} + ١ = \left(٣^{س}\right)^{٢} \times ٣ + ١ \equiv (١ \times ٣ + ١) \;\|٨\| \equiv ٤ \;\|٨\|$$

إذا كان $ن = ١$، فإن $٢^{ن} = ٢$ يقسم $٣^{ن} + ١ = ٤$.

أما إذا كان $ن > ١$، فإن $٢^{ن} \equiv ٠ \;\|٤\|$ وفي هذه الحالة لا يمكن أن يكون $٢^{ن}$ قاسماً للعدد $٣^{ن} + ١$.

نستنتج أن العدد $٢^{ن}$ يقسم العدد $٣^{ن} + ١$ فقط إذا كانت $ن = ١$، وبذلك يكون المجموع المطلوب يساوي ١.

السـؤال السادس عشر:

عدد الثلاثيات المرتبة (أ،ب،جـ) المكوّنة من أعداد صحيحة موجبة أ،ب،جـ، بحيث تشكل هذه الأعداد متوالية هندسية، ويكون مجموعها ١١١، هو

أ) ١
ب) ٢
ج) ٣
د) ٤
هـ) ٥

الحـل:

ما هي العلاقة بين عناصر المتتالية الهندسية؟ ليكن $ب = ر أ$ وَ $جـ = ر^{٢} أ$، حيث $ر = \frac{ل}{م}$ ولنفرض أن ق.م.أ (ل، م) = ١.

لاحظ أن $جـ = ر^{٢} أ = \frac{ل^{٢}}{م^{٢}} أ$ عدد صحيح، وبذلك يكون أ من مضاعفات $م^{٢}$، أي أن $أ = ك م^{٢}$ حيث ك عدد صحيح موجب. بذلك نحصل على

$$ك \left(م^{٢} + ل م + ل^{٢}\right) = ١١١ = ٣ \times ٣٧$$

حيث أن ٣ وَ ٣٧ أعداد أولية، نستنتج أن $م^{٢} + ل م + ل^{٢} = ٣$ أو ٣٧ أو ١١١.

يوضح الجدول التالي قيم $م^{٢} + ل\,م + ل^{٢}$ بعد حذف النواتج التي تزيد عن ١١١ :

الحالة الأولى: م ≥ ل.

م \ ل	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
١	٣	٧	١٣	٢١	٣١	٤٣	٥٧	٧٣	٩١	١١١
٢			١٩	٢٨	٣٩	٥٢	٦٧	٨٤	١٠٣	
٣				٣٧	٤٩	٦٣	٧٩	٩٧		
٤					٦١	٧٦	٩٣			
٥						٩١				

نحصل من الجدول أعلاه على الاحتمالات التالية:

(م، ل) = (١، ١)، وبناءً على ذلك ك= ٣٧ وَ ر = $\frac{ل}{م}$ = ١. أي أن
(أ،ب،جـ) = (٣٧،٣٧،٣٧)

(م، ل) = (١،١٠)، وبناءً على ذلك ك= ١ وَ ر = $\frac{ل}{م}$ = ١٠. أي أن
(أ،ب،جـ) = (١،١٠،١٠٠)

(م، ل) = (٣،٤)، وبناءً على ذلك ك = ٣ وَ ر = $\frac{ل}{م} = \frac{٤}{٣}$. أي أن
(أ،ب،جـ) = (٢٧،٣٦، ٤٨)

الحالة الثانية: م>ل.

بملاحظة التناظر بين ل وَ م نحصل على

(م، ل) = (١٠،١)، وبناءً على ذلك ك= ١ وَ ر = $\frac{ل}{م} = \frac{١}{١٠}$. أي أن
(أ،ب،جـ) = (١٠٠،١٠،١)

(م، ل) = (٤، ٣)، وبناءً على ذلك ك= ٣ وَ ر = $\frac{ل}{م} = \frac{٣}{٤}$. أي أن
(أ،ب،جـ) = (٤٨،٣٦، ٢٧)

بذلك يكون عدد الثلاثيات التي تحقق الشروط المعطاة ٥.

الســــؤال السابع عشر:

عدد الحلول الحقيقية للمعادلة

$$\left\lfloor \frac{س}{٢} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{س}{٣} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{س}{٥} \right\rfloor = س$$

هو

أ) ١٠
ب) ٢٠
ج) ٣٠
د) ٤٠
هـ) لانهائي

الحـــــــل:

هل يمكن أن يكون العدد الحقيقي $\text{س}=\text{أ}$ الذي يحقق المعادلة غير صحيح؟ لاحظ أن الطرف الأيمن عدد صحيح وبالتالي يجب أن يكون س عدداً صحيحاً. لاحظ أن $٢\times٣\times٥=٣٠$، وأنه يوجد عددان صحيحان ع وَ ب، حيث $٠\le \text{ب}<٣٠$، وَ $\text{أ}=٣٠\text{ع}+\text{ب}$. من ذلك نحصل على

$$\left\lfloor\frac{\text{أ}}{٢}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\text{أ}}{٣}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\text{أ}}{٥}\right\rfloor=\text{أ}\Leftrightarrow\left\lfloor\frac{٣٠\text{ع}+\text{ب}}{٢}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{٣٠\text{ع}+\text{ب}}{٣}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{٣٠\text{ع}+\text{ب}}{٥}\right\rfloor=٣٠\text{ع}+\text{ب}$$

$$\Leftrightarrow ٣١\text{ع}+\left\lfloor\frac{\text{ب}}{٢}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\text{ب}}{٣}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\text{ب}}{٥}\right\rfloor=٣٠\text{ع}+\text{ب}\Leftrightarrow \text{ع}=\text{ب}-\left\lfloor\frac{\text{ب}}{٢}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\text{ب}}{٣}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\text{ب}}{٥}\right\rfloor$$

نستنتج من ذلك أنه لكل قيمة من قيم $\text{ب}\in\{٠،١،...،٢٩\}$ توجد قيمة وحيدة من قيم ع، وبالتالي قيمة وحيدة من قيم أ التي تحقق المعادلة المعطاة. بذلك يكون هناك ٣٠ حلاً للمعادلة المعطاة.

الســـــؤال الثامن عشر:

لنفرض أن ن وَ م عددان فرديان موجبان وأن $\text{ن}>\text{م}$. أكبر عدد صحيح يقسم جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\text{ن}^٢-\text{م}^٢$ هو

الحـــــــل:

ليكن $\text{ن}=٢\text{ر}+١$ وَ $\text{م}=٢\text{هـ}+١$ حيث ر وَ هـ عددان كليان وَ $\text{ر}>\text{هـ}$. إذن

$$\text{ن}^٢-\text{م}^٢=(٢\text{ر}+١)^٢-(٢\text{هـ}+١)^٢=٤(\text{ر}-\text{هـ})(\text{ر}+\text{هـ}+١)$$

ماذا تلاحظ على العدد $(\text{ر}-\text{هـ})(\text{ر}+\text{هـ}+١)$؟ إذا كان $\text{ر}-\text{هـ}$ عدداً فردياً فإن $\text{ر}+\text{هـ}+١$ عدد زوجي، أما إذا كان $\text{ر}-\text{هـ}$ عدداً زوجياً فإن $\text{ر}+\text{هـ}+١$ عدد فردي؛ أي أن $(\text{ر}-\text{هـ})(\text{ر}+\text{هـ}+١)$ عدد زوجي في كلتا الحالتين. نستنتج من ذلك أن $\text{ن}^٢-\text{م}^٢=٤(\text{ر}-\text{هـ})(\text{ر}+\text{هـ}+١)$ يقبل القسمة على $٤\times٢=٨$ بدون باقي.
لاحظ هنا أن ٨ هو أكبر عدد صحيح يقسم جميع الأعداد $\text{ن}^٢-\text{م}^٢$، لأنه إذا أخذنا $\text{ن}=٣$ وَ $\text{م}=١$ فإن $\text{ن}^٢-\text{م}^٢=٨$.

السؤال التاسع عشر:

ما هو عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن ١٠٠٠ وليست من مضاعفات أي من العددين ٥ وَ ٧؟

الحل:

ما هو عدد مضاعفات أي عدد صحيح موجب م في المتتابعة ١،٢،...،ن؟ بإمكانك التحقق أن هذا العدد هو

$$\left\lfloor \frac{\text{ن}}{\text{م}} \right\rfloor$$ ، حيث $\lfloor \text{س} \rfloor$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي س

إذن، عدد مضاعفات العدد ٥ التي تقل عن ١٠٠٠ هو $\left\lfloor \frac{٩٩٩}{٥} \right\rfloor$=١٩٩، وعدد مضاعفات العدد ٧ التي تقل عن ١٠٠٠ هو $\left\lfloor \frac{٩٩٩}{٧} \right\rfloor$=١٤٢.

لاحظ أن مضاعفات العدد ٣٥ =٥×٧ التي تقل عن ١٠٠٠، وعددها $\left\lfloor \frac{٩٩٩}{٣٥} \right\rfloor$=٢٨، قد تكررت مرة ضمن مضاعفات ٥ ومرة أخرى ضمن مضاعفات ٧.

بذلك يكون عدد مضاعفات ٥ أو ٧ التي تقل عن ١٠٠٠ هو

١٩٩+١٤٢−٢٨=٣١٣

أي أن العدد المطلوب هو

٩٩٩−٣١٣=٦٨٦

السؤال العشرون:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب ن بحيث يكون مجموع الأرقام في خانات العدد ٧ن أقل ما يمكن.

الحل:

لكل عدد صحيح موجب ك نعرِّف م(ك) كمجموع الأرقام في خانات العدد ك.

هل يمكن أن يكون م(٧ن)=١؟ هل يمكن أن يكون م(٧ن)=٢؟

لاحظ أنه إذا كان م(٧ن)=١، فإن ٧ن=١٠^ل=٢^ل×٥^ل، ل≥٠، ولكن هذا مستحيل لأن ٧ عدد أولي وَ ٧ ∤ ٢^ل، ٧ ∤ ٥^ل ∀ل≥٠.

إذا كان $م(٧ن)=٢$، فهناك احتمالان

الاحتمال الأول: $٧ن = ٢\times ١٠^{ل} = ٢^{ل+١}\times ٥^{ل}$، $ل \geq ٠$، وهذا مستحيل كما بينا أعلاه.

الاحتمال الثاني: $٧ن = ١٠^{ك} + ١٠^{ل} = ١٠^{ك}\left(١+١٠^{ل-ك}\right) = \left(٢^{ك}\times ٥^{ك}\right)\left(١+١٠^{ل-ك}\right)$، $٠ \leq ك < ل$. في هذه الحالة، وحيث أن $٢ \nmid ٧$ وَ $٥ \nmid ٧$، فإن $ن = ١٠^{ك}\times ب$، حيث **ب** عدد صحيح موجب. بذلك نحصل على

$$٧\times ١٠^{ك}\times ب = ١٠^{ك}\left(١+١٠^{ل-ك}\right)$$
$$٧ب = ١+١٠^{ل-ك}$$

لاحظ أن $١١ = ١+١٠^{١}$ وَ $١٠١ = ١+١٠^{٢}$ ليسا من مضاعفات ٧، بينما

$$١+١٠^{٣} = ١٠٠١ = ٧\times ١٤٣$$

نستنتج أن $ن = ١٤٣$ هو العدد المطلوب (لاحظ أن $ل = ٣$ وَ $ك = ٠$).

السـؤال الحادي والعشرون:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب $ن \geq ٦$ بحيث توجد مثلثات قائمة، باقي قسمة أطوال أضلاعها على $ن$ يساوي ٤ وَ ٥ وَ ٦.

الحـل:

ليكن عندنا مثلث قائم تحقق أطوال أضلاعه $س، ص، ع$ الشرط المطلوب، أي أن

$$س = كن + ٤$$
$$ص = لن + ٥$$
$$ع = من + ٦$$

حيث $ك، ل، م$ أعداد صحيحة موجبة.

الحالة الأولى: $س$ هو طول الوتر. في هذه الحالة

$$س^{٢} = ص^{٢} + ع^{٢}$$
$$(كن+٤)^{٢} = (لن+٥)^{٢} + (من+٦)^{٢}$$
$$(ك^{٢}-ل^{٢}-م^{٢})ن^{٢} + (٨ك-١٠ل-١٢م)ن = ٤٥$$

إذن، $ن \mid ٤٥$، وبما أن $ن \geq ٦$، فإن $ن \in \{٩، ١٥، ٤٥\}$.

الحالة الثانية: $ص$ هو طول الوتر. في هذه الحالة

$$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}$$
$$(\text{ل ن} + ٥)^{٢} = (\text{ك ن} + ٤)^{٢} + (\text{م ن} + ٦)^{٢}$$
$$(\text{ل}^{٢} - \text{ك}^{٢} - \text{م}^{٢})\text{ن}^{٢} + (١٠\text{ل} - ٨\text{ك} - ١٢\text{م})\text{ن} = ٢٧$$

إذن، $\text{ن} \mid ٢٧$، وبما أن $\text{ن} \geq ٦$، فإن $\text{ن} \in \{٩، ٢٧\}$.

الحالة الثالثة: ع هو طول الوتر. في هذه الحالة

$$\text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$
$$(\text{م ن} + ٦)^{٢} = (\text{ك ن} + ٤)^{٢} + (\text{ل ن} + ٥)^{٢}$$
$$(\text{م}^{٢} - \text{ك}^{٢} - \text{ل}^{٢})\text{ن}^{٢} + (١٢\text{م} - ٨\text{ك} - ١٠\text{ل})\text{ن} = ٥$$

إذن، $\text{ن} \mid ٥$، ولكن هذا مستحيل لأن $\text{ن} \geq ٦$.

بذلك تكون لدينا ٤ قيم محتملة للعدد ن وهي عناصر المجموعة $\{٩، ١٥، ٢٧، ٤٥\}$.
العدد المطلوب هو أصغر هذه الأعداد أي $\text{ن} = ٩$.

هل يمكنك الجزم أن $\text{ن} = ٩$ هو العدد المنشود؟ لاحظ أنه لا بد من أن نتأكد من وجود مثلث قائم تحقق أطوال أضلاعه الشروط المطلوبة:

بما أن $\text{س} \equiv ٤ \,\|٩\|$، $\text{ص} \equiv ٥ \,\|٩\|$، $\text{ع} \equiv ٦ \,\|٩\|$، فإن أحد الاحتمالات الممكنة هي
$$\text{س} = ٤٠،\ \text{ص} = ٣٢،\ \text{ع} = ٢٤$$
لاحظ أن
$$(٤٠)^{٢} = (٣٢)^{٢} + (٢٤)^{٢}$$

السـؤال الثاني والعشرون:

لتكن $\text{سـ} = \{١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، \ldots\}$ مجموعة مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة. أوجد العنصر هـ في هذه المجوعة بحيث يكون هـ + ٤٣ أيضاً عنصراً في سـ.

الحـل:

ماذا يعني كون هـ وَ هـ + ٤٣ في سـ؟ بشكل مبسط، يعني هذا أن ٤٣ فرق بين مربعين.

ليكن $\text{هـ} = \text{س}^{٢}$ و $\text{هـ} + ٤٣ = \text{ص}^{٢}$، حيث س، ص عددان صحيحان موجبان. بما أن
$$٤٣ = \text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢} = (\text{ص} - \text{س})(\text{ص} + \text{س})$$

وحيث أن ٤٣ عدد أولي، فإننا نستنتج أن ص – س = ١ وَ ص + س = ٤٣. بحل المعادلتين

$$ص - س = ١$$
$$ص + س = ٤٣$$

نحصل على ص = ٢٢ وَ س = ٢١. وللتحقق من ذلك نلاحظ أن $٢١^{٢} + ٤٣ = ٢٢^{٢}$، أي أن

$$هـ = ٢١^{٢} = ٤٤١$$

الســـــؤال الثالث والعشرون:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب بحيث لو حذفنا أول رقم منه على اليسار ينتج عدد يساوي حاصل قسمة العدد الأصلي على ٢٩.

الحـــــل:

لنفرض أن س تمثل الرقم الأول من اليسار للعدد ولنفرض أيضاً أن ص هو العدد المتبقي بعد حذف س. نستطيع كتابة العدد الأصلي على صورة $س \times ١٠^{ن} + ص$ حيث ن عدد صحيح موجب. الآن

$$س \times ١٠^{ن} + ص = ٢٩ص$$
$$س \times ١٠^{ن} = ٢٨ص$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر يقبل القسمة على ٧ بدون باقي. إذن الطرف الأيمن يقبل القسمة على ٧ بدون باقي. لكن ١٠ لا تقبل القسمة على ٧ بدون باقي. إذن العدد س من مضاعفات ٧ ، وبما أن س < ١٠ فإن س = ٧.

بقسمة الطرفين على ٧ نحصل على $١٠^{ن} = ٤ص$، أي أن

$$ص = \frac{١٠^{ن}}{٤} = ٢٥ \times ١٠^{ن-٢}، \text{ حيث } ن = ٢، ٣، ٤، \dots$$

من هنا نستنتج أن العدد يجب أن يكون على صورة

$$س \times ١٠^{ن} + ص = ٧ \times ١٠^{ن} + ٢٥ \times ١٠^{ن-٢} = ٧٢٥ \times ١٠^{ن-٢}، \text{ حيث } ن = ٢، ٣، ٤، \dots \quad (*)$$

أصغر هذه الأعداد عندما تكون ن = ٢، أي ٧٢٥. لاحظ هنا أن $\frac{٧٢٥}{٢٩} = ٢٥$ وهو العدد المتبقي بعد حذف الرقم الأيسر ٧.

ملاحظة: يمكن الحصول على بقية الأعداد في (*) التي تحقق نفس الخاصية بإضافة أصفار إلى يمين العدد ٧٢٥.

الســـــؤال الرابع والعشرون:

أوجد أصغر عدد ن يحقق الشروط التالية:

(١) توجد ٣ قواسم أولية فقط للعدد ن

(٢) $٣٠ | ن$
(٣) عدد قواسم $ن$ هو ٢٤
(٤) عدد قواسم $ن^٢$ هو ١٠٥
(٥) عدد قواسم $ن^٣$ هو ٢٨٠

الحـــــل:

ما هي القواسم الأولية الثلاثة للعدد $ن$؟ ليكن $ن = أ_١^{س} \times أ_٢^{ص} \times أ_٣^{ع}$، حيث $\{أ_١، أ_٢، أ_٣\}$ مجموعة القواسم الأولية للعدد $ن$. لاحظ أن $٣٠ = ٢ \times ٣ \times ٥$ ، أي أن $\{أ_١، أ_٢، أ_٣\} = \{٢، ٣، ٥\}$.

من الشروط (٣) – (٥) نحصل على المعادلات

$$(س+١)(ص+١)(ع+١) = ٢٤$$
$$(٢س+١)(٢ص+١)(٢ع+١) = ١٠٥$$
$$(٣س+١)(٣ص+١)(٣ع+١) = ٢٨٠$$

بعد فك الأقواس نحصل على

$$(س+ص+ع)+(س ص+ص ع+س ع)+س ص ع = ٢٣$$
$$٢(س+ص+ع)+٤(س ص+ص ع+س ع)+٨س ص ع = ١٠٤$$
$$٣(س+ص+ع)+٩(س ص+ص ع+س ع)+٢٧س ص ع = ٢٧٩$$

بتعويض

$$ك = س+ص+ع \text{ ، } ل = س ص+ص ع+س ع \text{ ، } م = س ص ع$$

نحصل على

$$ك+ل+م = ٢٣$$
$$٢ك+٤ل+٨م = ١٠٤$$
$$٣ك+٩ل+٢٧م = ٢٧٩$$

بضرب المعادلة الأولى في -٢ وإضافتها للمعادلة الثانية، ثم ضرب المعادلة الأولى في -٣ وإضافتها للمعادلة الثالثة نحصل على المعادلتين

$$٢ل+٦م = ٥٨$$

$$٦ل+٢٤م = ٢١٠$$

نجد حلول هاتين المعادلتين بضرب المعادلة الأولى في -٣ وإضافتها للمعادلة الثانية لنحصل على

$$م=٦، ل=١١، ك=٦$$

لاحظ أنه توجد ستة ثلاثيات تحقق المعادلة

$$س+ص+ع=٦$$

وهي

$$(س،ص،ع)=(١،٢،٣)،\ ن=٢^{١}\times٣^{٢}\times٥^{٣}=٢٢٥٠$$
$$(س،ص،ع)=(١،٣،٢)،\ ن=٢^{١}\times٣^{٣}\times٥^{٢}=١٣٥٠$$

$$(س،ص،ع)=(٢،١،٣)،\ ن=٢^{٢}\times٣^{١}\times٥^{٣}=١٥٠٠$$
$$(س،ص،ع)=(٢،٣،١)،\ ن=٢^{٢}\times٣^{٣}\times٥^{١}=٥٤٠$$

$$(س،ص،ع)=(٣،١،٢)،\ ن=٢^{٣}\times٣^{١}\times٥^{٢}=٦٠٠$$
$$(س،ص،ع)=(٣،٢،١)،\ ن=٢^{٣}\times٣^{٢}\times٥^{١}=٣٦٠$$

بذلك يكون $ن=٣٦٠$ هو العدد المطلوب.

السـؤال الخامس والعشرون:

لأي عدد طبيعي $ن$ نعرف الدالة

$$د(ن)=\left\lfloor\frac{ن+١}{٢}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{ن+٢}{٤}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{ن+٤}{٨}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{ن+٢^{ر}}{٢^{ر+١}}\right\rfloor+\cdots \qquad (*)$$

حيث $\lfloor م\rfloor$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي $م$. أوجد $د(٩٩٩)$.

الحـل:

لاحظ أولاً أنه لأي عدد حقيقي $س$ فإن

$$\left\lfloor س+\frac{١}{٢}\right\rfloor=\lfloor٢س\rfloor-\lfloor س\rfloor \qquad (**)$$

هل يمكنك إثبات ذلك؟

لإثبات ذلك نكتب $س$ على صورة كسر عشري مقرب إلى خانة عشرية واحدة: $س=أ,ب$ حيث تمثل $ب$ الجزء العشري وتمثل $أ$ الجزء الصحيح للعدد $س$. إذا كان $ب\geq٥$ فان الطرف الأيمن للمعادلة (**) يساوي $\lfloor س\rfloor+١$ ويكون الطرف الأيسر

$$\lfloor٢س\rfloor-\lfloor س\rfloor=٢(\lfloor س\rfloor+١)-\lfloor س\rfloor=\lfloor س\rfloor+١$$

وهو نفس قيمة الطرف الأيمن.

أما إذا كان $ب<٥$ فان الطرف الأيمن للمعادلة (**) يساوي $\lfloor س\rfloor$ ويكون الطرف الأيسر

$$\lfloor٢س\rfloor-\lfloor س\rfloor=٢\lfloor س\rfloor-\lfloor س\rfloor=\lfloor س\rfloor$$

وهو نفس قيمة الطرف الأيمن.

الآن

$$د(ن)=\left\lfloor \frac{ن+١}{٢} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{ن+٢}{٤} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{ن+٤}{٨} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{ن+٢^{ن-١}}{٢^{ن}} \right\rfloor$$

$$=\left\lfloor \frac{ن}{٢}+\frac{١}{٢} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{ن}{٤}+\frac{١}{٢} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{ن}{٨}+\frac{١}{٢} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{ن}{٢^{ن}}+\frac{١}{٢} \right\rfloor$$

$$=\left(\lfloor ن \rfloor-\left\lfloor \frac{ن}{٢} \right\rfloor\right)+\left(\left\lfloor \frac{ن}{٢} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{ن}{٤} \right\rfloor\right)+\left(\left\lfloor \frac{ن}{٤} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{ن}{٨} \right\rfloor\right)+\cdots+\left(\left\lfloor \frac{ن}{٢^{ن-١}} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{ن}{٢^{ن}} \right\rfloor\right)$$

$$=\lfloor ن \rfloor-\left\lfloor \frac{ن}{٢^{ن}} \right\rfloor$$

من هنا نستنتج أن

$$د(٩٩٩)=\lfloor ٩٩٩ \rfloor-\left\lfloor \frac{٩٩٩}{٢^{٩٩٩}} \right\rfloor=٩٩٩$$

السـؤال السادس والعشرون:

أوجد جميع الأعداد الأولية على صورة $ن^{ن}+١$ والتي تقل عن $١٠^{١٩}$.

الحـل:

هل يمكنك الحصول على بعض هذه الأعداد الأولية؟

لاحظ أولاً أنه عندما $ن=١$ أو $ن=٢$، فإننا نحصل على العددين الأوليين ٢ وَ ٥ على الترتيب. أما إذا كانت $ن=١$، فإننا نحصل على $٣^{٣}+١=٢٨$ وهو عدد غير أولي. هل توجد أعداد أولية عدا ٢ وَ ٥ يمكن كتابتها على صورة $ن^{ن}+١$؟

لاحظ أنه لكل عدد فردي $ل \geq ٣$:

$$\begin{aligned} س^{ل}+١ &= (س+١)(س^{ل-١}-س^{ل-٢}+س^{ل-٣}-س^{ل-٤}+\cdots+١) \\ &= (س+١)\left((س^{ل-١}-س^{ل-٢})+\cdots+(س^{٢}-س)+١\right) \end{aligned} \qquad (*)$$

ليكن $ن^{ن}+١$ عدداً أولياً حيث $ن \geq ٣$. نلاحظ أنه ليس لـِ $ن$ أي قاسم فردي لأن ذلك سيجعل العدد $ن^{ن}+١$ قابلاً للتحليل كما هو مبين في (*)، أي أن $ن=٢^{ر}$. ملاحظة أخيرة هنا أن الأس $ر$ أيضاً ليس له قاسم فردي، لأنه إذا كانت $ر=٤م$ حيث $م$ عدد فردي فإن $ن^{ن}=\left(٢^{ر}\right)^{٢^{ر}}=(٢^{٤م})^{٢^{٤م}}=٢^{٤م\times٢^{٤م}}=\left(٢^{٤\times٢^{٤م}}\right)^{م}$. ومن ذلك يكون $ن^{ن}+١$ عدداً قابلاً للتحليل كما هو

مبين في (*). إذن، يجب أن تكون $م$ على صورة $٢^{هـ}$. إذن العدد $ن$ يجب أن يكون على صورة $ن=٢^{٢^{هـ}}$ أي أن

$$ن^{ن}+١=\left(٢^{٢^{هـ}}\right)^{(٢^{٢^{هـ}})}+١،\ \text{حيث}\ هـ\geq ٠$$

إذا كانت $هـ=٠،١،٢$ فإنها تعطي الأعداد الأولية ٥، ٢٥٧، $١٦^{١٦}+١$ على التوالي. ولكن العدد

$$\begin{aligned} ١٦^{١٦}+١ &= ٢^{٦٤}+١\\ &= ٢^{٤}\times ٢^{٦٠}+١\\ &= ١٦\times(٢^{١٠})^{٦}+١\\ &= ١٦\times(١٠٢٤)^{٦}+١\\ &> ١٠\times(١٠٠٠)^{٦}+١\\ &> ١٠^{١٩} \end{aligned}$$

إذن الأعداد المطلوبة هي ٢، ٥، ٢٥٧.

السـؤال السابع والعشرون:

أثبت أنه لا توجد أية ثلاثة أعداد صحيحة، بحيث يساوي باقي قسمة مجموع مربعاتها على ٨ العدد ٧.

الحـــل:

هل يمكنك إعادة صياغة المطلوب؟

المطلوب هو إثبات العبارة التالية:

لا توجد حلول مكونة من أعداد صحيحة للمعادلة

$$س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}=٨ل+٧ \qquad (*)$$

حيث $ل$ عدد صحيح. من الواضح أنه لا توجد حلول صحيحة للمعادلة (*) إذا كانت $ل\leq ٠$. لذلك نفرض أن $ل\geq ١$.

الحالة الأولى: يوجد عدد زوجي واحد فقط بين الأعداد $س،ص،ع$. افرض دون فقدان التعميم أن

$$س=٢أ،\ ص=٢ب+١،\ ع=٢جـ+١،\ \text{حيث}\ أ،ب،جـ\in \mathbb{Z}$$

نحصل في هذه الحالة على

$$\begin{aligned} ٨ل+٧ &= س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}\\ &= (٢أ)^{٢}+(٢ب+١)^{٢}+(٢جـ+١)^{٢}\\ &= ٤\ (أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+ب+جـ)+٢ \end{aligned}$$

وهذا تناقض، لأن $٨ك+٧\equiv ٣\ \|٤\|$، بينما $٤\ (أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+ب+جـ)+٢\equiv ٢\ \|٤\|$.

الحالة الثانية: يوجد عددان زوجيان فقط بين الأعداد $س،ص،ع$. افرض دون فقدان التعميم أن

س = ٢أ، ص = ٢ب، ع = ٢جـ + ١، حيث أ، ب، جـ ∋ صـ

نحصل في هذه الحالة على

٨ل + ٧ = س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}

= (٢أ)^{٢} + (٢ب)^{٢} + (٢جـ + ١)^{٢}

= ٤(أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} + جـ) + ١

وهذا تناقض، لأن ٨ل + ٧ ≡ ٣ ‖٤‖، بينما ٤(أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} + جـ) + ١ ≡ ١ ‖٤‖.

الحالة الثالثة: جميع الأعداد س، ص، ع زوجية، ولنفرض أن

س = ٢أ، ص = ٢ب، ع = ٢جـ، حيث أ، ب، جـ ∋ صـ

نحصل في هذه الحالة على

٨ل + ٧ = س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}

= (٢أ)^{٢} + (٢ب)^{٢} + (٢جـ)^{٢}

= ٤(أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢})

وهذا تناقض، لأن ٨ك + ٧ ≡ ٣ ‖٤‖، بينما ٤(أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}) ≡ ٠ ‖٤‖.

الســــؤال الثامن والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٧١):

أثبت أن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي يمكن كتابتها على صورة ٢^{ن} − ٣، حيث ن = ٢، ٣، ... تحتوي على مجموعة جزئية لانهائية كل عنصرين من عناصرها أوليان فيما بينهما.

الحــــــل:

لاحظ أنه إذا كانت ن = ٣، ٤، ٥ فإن ٢^{ن} − ٣ تساوي ٥، ١٣، ٢٩ على التوالي، وهي أعداد أولية.
لاحظ أيضاً أنه إذا كانت ن = ٧ فإن ٢^{٧} − ٣ = ١٢٥ وهو عدد مؤلف له قاسم مشترك مع العدد ٥.

لنفرض أننا وجدنا الأعداد الفردية أ$_{١}$، أ$_{٢}$، ...، أ$_{ك}$ والتي تحقق الشرط المطلوب. نعرِّف العدد

هـ = أ$_{١}$ × أ$_{٢}$ × ... × أ$_{ك}$

ونأخذ الأعداد ٢^{٠}، ٢^{١}، ٢^{٢}، ...، ٢^{هـ}. بما أن عددها هـ + ١، فعند قسمتها على العدد هـ يكون هناك على الأقل عددان منها لهما نفس الباقي (حسب مبدأ برج الحمام). ليكن هذان العددان ٢^{م} وَ ٢^{ر} حيث م > ر. الآن العدد

٢^{م} − ٢^{ر} = ٢^{ر} (٢$^{م−ر}$ − ١)

يقسم على هـ بدون باقي، وبما أن العدد هـ فردي لأنه حاصل ضرب أعداد فردية، فإن العدد هـ لا يقسم العدد ٢^{ر} بل يقسم العدد ٢$^{م−ر}$ − ١؛ وهذا يعني أنه يوجد عدد صحيح ل حيث ٢$^{م−ر}$ − ١ = لهـ. الآن نأخذ العدد الجديد

أ$_{ك+١}$ = ٤لهـ + ١ = ٤(٢$^{م−ر}$ − ١) + ١ = ٢$^{م−ر+٢}$ − ٣

وهذا العدد أولاً على صورة $٢^{٧} - ٣$، وثانياَ ليس له أي قاسم مشترك (أكبر من ١) مع أيٍّ من الأعداد $أ_{١}، أ_{٢}، \cdots، أ_{ك}$، لأنه لو كان هناك قاسم مشترك مع أيٍّ منها ولنقل مع $أ_{و}$ حيث $(و \leq ك)$ فإن هذا القاسم المشترك سيقسم هـ لأن $هـ = أ_{١} \times أ_{٢} \times \cdots \times أ_{ك}$ ويقسم $٤هـ^{٢} + ١$ لأن $أ_{ك+١} = ٤هـ^{٢} + ١$ وهذا مستحيل لأنه سوف يقسم عندئذ العدد ١. كما نلاحظ أيضاَ أن هذا العدد أكبر من الأعداد $أ_{١}، أ_{٢}، \cdots، أ_{ك}$ لأنه أكبر من حاصل ضربها مجتمعة. بهذه الطريقة نستطيع ايجاد عدد لانهائي من هذه الأعداد والتي لها نفس الخاصية.

السـؤال التاسع والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٩٨):

أوجد جميع الأزواج المرتبة $(أ، ب)$ المكوّنة من عددين صحيحين موجبين أ وَ ب بحيث يقسم العدد $أب^{٢} + ب + ٧$ العدد $أ^{٢}ب + أ + ب$.

الحـل:

ليكن

$$أ^{٢}ب + أ + ب = ك(أب^{٢} + ب + ٧)$$، حيث ك عدد صحيح موجب.

من ذلك نحصل على

$$ب(أ^{٢}ب + أ + ب) - أ(أب^{٢} + ب + ٧) = بك(أب^{٢} + ب + ٧) - أ(أب^{٢} + ب + ٧)$$

$$ب^{٢} - ٧أ = (بك - أ)(أب^{٢} + ب + ٧)$$

أي أن $ب^{٢} - ٧أ$ من مضاعفات $أب^{٢} + ب + ٧$.

لاحظ أن $ب^{٢} - ٧أ < أب^{٢} + ب + ٧$، وبالتالي فلا يمكن أن يكون $ب^{٢} - ٧أ$ عدداً موجباً.

الحالة الأولى: $ب^{٢} - ٧أ = ٠$، أي أن $ب^{٢} = ٧أ$. حيث أن ٧ عدد أولي، نستنتج أن $٧ \mid ب^{٢}$، ونستنج من ذلك أن $٧ \mid ب$، أي أن $ب = ٧ل$ حيث ل عدد صحيح موجب. من ذلك نحصل على

$$ب^{٢} = ٧أ، ٤٩ل^{٢} = ٧أ، أ = ٧ل^{٢}$$

بالتعويض نجد أن

$$\begin{aligned} أ^{٢}ب + أ + ب &= ٧ل^{٢} \times ٧ل^{٢} \times ٧ل + ٧ل^{٢} + ٧ل \\ &= ل(٧ل^{٢} \times ٧ل \times ٧ل + ٧ل + ٧) \\ &= ل(أب^{٢} + ب + ٧) \end{aligned}$$

أي أن الأزواج المرتبة التالية تحقق الشرط المطلوب

$(أ، ب) = (٧ل^{٢}، ٧ل)$، حيث ل عدد صحيح موجب.

الحالـة الثانيـة: $ب^٢-١٧>٠$، أي أن العدد الصحيح الموجب $١٧-ب^٢$ من مضاعفات $أب^٢+ب+٧$.
نستنتج من ذلك أنه يوجد عدد صحيح موجب $م$ يحقق المعادلة

$$١٧-ب^٢=م(أب^٢+ب+٧) \quad (*)$$

إذا كانت $ب=١$، فإننا نحصل من (*) على $١٧-١=م(أ+٨)$، أي أن

$$أ=\frac{٨م+١}{٧-م}$$

نستنتج من ذلك أن $١\le م\le ٦$، لأن $م<٧ \Leftarrow أ>٠$.
بتعويض قيم $م$، نجد أن قيم $م$ التي تعطي قيماً صحيحة هي $م=٤$، ومن ذلك $(أ،ب)=(١١،١)$، أو $م=٦$، أي أن $(أ،ب)=(٤٩،١)$.

إذا كانت $ب=٢$، فإننا نحصل من (*) على $١٧-٤=م(٤أ+٩)$.

إذا كانت $م=١$، فإننا نحصل على $٤أ=١٣$، وهذا تناقض لأنه لا يوجد عدد صحيح يحقق هذا الشرط.
إذا كانت $م\ge ٢$، فإننا نحصل على $أ=-\frac{(٤+٩م)}{(٧-٤م)}>٠$، وهذا تناقض.

إذا كانت $ب\ge ٣$، فإن $١٧-ب^٢<٩أ<أب^٢+ب+٧$، وهذا تناقض.

نستنتج أن مجموعة الحل هي

$$\{(١١،١)،(٤٩،١)،(٧ل^٢،٧ل) \mid ل \in ط\}$$

السـؤال الثلاثون (أولمبياد الرياضيات العالمي ٢٠٠٦):

أوجد جميع الأزواج المرتبة (س،ص) المكونة من عددين صحيحين س،ص يحققان المعادلة

$$ص^٢=١+٢^س+٢^{(٢س+١)}$$

الحـل:

في البداية، نستثني ما يمكن استثناؤه من المجموعة الكلية التي تنتمي إليها الحلول. في المسألة المعطاة، من الواضح انه يجب استبعاد إمكانية $س<٠$، حيث أن $س<-١$ تجعل العدد في الطرف الأيسر غير صحيح، وبالتالي يتعذر على ص أن تكون عدداً صحيحاً، أما إذا كانت $س=-١$، فإننا نحصل على $ص^٢=٢$ ولا يمكن أن تكون ص عدداً صحيحاً. إذن، يمكننا افتراض أن $س\ge ٠$. كما يمكننا استبعاد $ص=١$ وَ $ص=-١$ لأن قيمة الطرف الأيسر أكبر من ١ لجميع قيم س.

ندرس أي تناظر محتمل في المعادلة المعطاة. بالرغم من أن وجود تناظر في المسألة هو أمر غير وارد في كثير من الأحيان، إلا أن وجود أي نوع من أنواع التناظر في مسألة ما يوفر غالباً الجهد والوقت المبذول في حل المسألة. نلاحظ في المسألة أعلاه أن ثمة تناظراً مصدره المتغير $ص$ الموجود على شكل مربع كامل فقط، أي أن استبدال $-ص$ بـ $ص$ لا يغير المعادلة، وبالتالي إذا حقق زوج مرتب $(س،ص)$ المعادلة، فإن الزوج المرتب $(س،-ص)$ يحقق المعادلة أيضاً.

نعامل الحالات الخاصة والتي غالباً ما تمكننا من إيجاد حلول جزئية بشكل سهل نسبياً. في المعادلة أعلاه، تعتبر الحالة $س=٠$ حالة خاصة تعطينا $ص^٢=٤$ أي أن $ص=\mp٢$. لاحظ أننا اعتبرنا $٢^٠=١$، وهو أمر متفق عليه رياضياً.

نستثني الحالات الخاصة التي سبق التعامل معها. في المسألة قيد الحل، يمكننا الآن اعتبار $س\leq١$ و (بدون فقدان التعميم) $ص \leq ٣$. (لاحظ أننا استثنينا $ص=١$، كما أنه يمكننا الحصول على الحلول التي فيها $ص$ سالبة من خلال التناظر الذي تقدم ذكره).

من المفيد أحيانا إعادة ترتيب المعادلات الواردة في المسألة مما قد يسهل التعامل معها. في المسألة المعطاة نعيد ترتيب المعادلة لتصبح

$$ص^٢-١=٢^س\,(١+٢^{س+١}) \qquad (*)$$

بتحليل الطرف الأيمن كفرق بين مربعين نحصل على

$$(ص-١)(ص+١)=٢^س\,(١+٢^{س+١}) \qquad (**)$$

نستعمل الآن مهاراتنا الرياضية المكتسبة (وأية قوانين يمكن تطبيقها) لإيجاد صيغة عامة للحل. نلاحظ أن العدد في الطرف الأيسر زوجي مما يعني أن $ص$ عدد فردي، وبالتالي فإنه بإمكاننا كتابته على النحو التالي: $ص=٢ن+١$، حيث $ن$ عدد صحيح موجب (لاحظ الفرض $ص>١$).
حيث أن ٤ تقسم طرفي المعادلة (**)، فإن $س\leq٢$، وبما أن $س=٢$ لا تعطي أية حلول فيمكننا الافتراض أن $س\leq٣$.

الحالة الأولى: $ن$ عدد زوجي. نلاحظ في هذه الحالة أن $٤\mid ص-١$ بينما $٤\nmid ص+١$. نستنتج أيضاً أن $ص-١$ يمكنه أن يكون مضاعفاً للعدد $٢^{س-١}$ ولكن ليس للعدد $٢^س$: إذا كان $ص-١=ك٢^س$، حيث $ك$ عدد صحيح موجب، فإننا نحصل من (**) على

$$ك٢^س\,(ص+١)=٢^س\,(١+٢^{س+١})$$
$$ك(ص+١)=١+٢^{س+١}$$

وهذا تناقض، لأن $ص+١$ عدد زوجي بينما $١+٢^{س+١}$ عدد فردي.

الحالة الثانية: $ن$ عدد فردي. نلاحظ في هذه الحالة أن $٤\mid ص+١$ بينما $٤\nmid ص-١$. نستنتج أيضاً أن $ص+١$ يمكنه أن يكون مضاعفاً للعدد $٢^{س-١}$ ولكن ليس للعدد $٢^س$ (الإثبات مشابه للإثبات في الحالة الأولى ولذلك لا داعي لإعادته).

يمكننا الآن أن نجد صيغة عامة للعدد $ص$:

$$ص=ل\,٢^{س-١}+م،\ \text{حيث } ل \text{ عدد صحيح موجب فردي و } م=\pm١$$

نعوض الصيغة العامة للمتغير ص في المعادلة (*) لنحصل على

$$٢^{س}\,(١+٢^{س+١}) = ص^{٢}-١$$
$$= (ل\,٢^{س-١}+م)^{٢}-١$$
$$= ل^{٢}\times ٢^{٢س-٢}+ل\,م\,٢^{س}+(م^{٢}-١)$$
$$= ٢^{س}\,(ل^{٢}\,٢^{س-٢}+ل\,م)$$

باختصار $٢^{س}$ وإعادة ترتيب المعادلة نحصل على

$$(ل^{٢}-٨)\times ٢^{س-٢} = ١-ل\,م \qquad (***)$$

نقسم الحل إلى حلول جزئية إن أمكن، مع ملاحظة ضرورة رفض أية نتائج غير منطقية أو تلك التي تسبب تناقضاً.

الحالة الأولى: $م=١$. بالتعويض في (***) نجد (مع ملاحظة افتراضنا أن ل عدد صحيح موجب فردي) أن

$$(ل^{٢}-٨)\times ٢^{س-٢} = ١-ل \leq ٠$$
$$ل^{٢}-٨ \leq ٠$$
$$ل=١$$
$$-٧\times ٢^{س-٢}=٠$$

وهذا تناقض.

الحالة الثانية: $م=-١$. بالتعويض في (***)، نجد (مع ملاحظة افتراضنا أن ل عدد صحيح موجب فردي) أن

$$ل^{٢}-٨ \leq (ل^{٢}-٨)\times ٢^{س-٢} = ١+ل$$
$$ل(ل-١) \leq ٩$$

من ذلك نستنتج أن $ل=١$، وهي قيمة مرفوضة لأنها تؤدي إلى التناقض $٢=-٧\times ٢^{س-٢}$، أو $ل=٣$ التي نحصل بتعويضها في (***) على $٤=٢^{س-٢}$، أي أن $س=٤$.

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على $ص^{٢}=٥٢٩$، أي أن $ص=٢٣$ (لاحظ الفرض $ص \geq ٣$).

نوضح الحل الكامل بتجميع الحلول الجزئية، مع الحرص على عدم التكرار، وعدم نسيان الحلول الناتجة من الحالات الخاصة، وعدم إغفال الحلول الناتجة عن وجود تناظر ما. نستنتج أن مجموعة الحل هي

$$\{(٠،٢)،(٠،-٢)،(٤،٢٣)،(٤،-٢٣)\}$$

ملاحظة: قد يدور في ذهن البعض أن بالإمكان إيجاد مجموعة الحل هذه بالتجريب فقط، لاسيما أن أقصى قيمة للإحداثي الأول س هي ٤ كما هو واضح من مجموعة الحل.

إن مما يجب فهمه للرد على هذا التساؤل (المشروع) هو أن تجربة بعض الأرقام فقط قد تؤدي إلى إيجاد بعض الحلول أو حتى كامل مجموعة الحل (بالصدفة)، ولكن لا يمكن لمن قام بتجربة الأرقام فقط أن يزعم أن ما حصل عليه يمثل مجموعة الحل الكاملة دون إثبات.

٣-٣ أسئلة وحلول في التركيبات

السـؤال الأول:

عائلة مكونة من أب وأم وثلاثة أولاد ذكور وأربع بنات، تريد أن تصطف في صف واحد لأخذ صورة تذكارية، بحيث يقف الوالدان بجانب بعضهما بعضاً ولا تقف ابنتان بجانب بعضهما بعضاً. عدد الطرق الممكنة هو

أ) ٥٧٦٠
ب) ٢٨٨٠
ج) ١٤٤٠
د) ١١٥٢
هـ) ٢٤٠

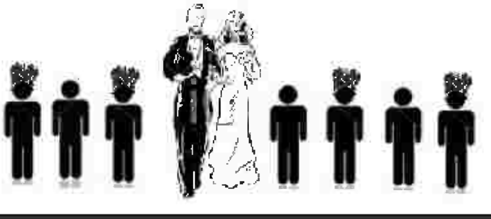
الحـل:

أولاً نعامل الأب والأم على أنهما وحدة واحدة ليصطفوا مع الثلاثة أبناء بـ ٤! طريقة. هناك خمسة أماكن (ثلاثة بين الأربعة ومكانين على الطرفين) لتقف فيها الأربع بنات، لذلك نختار أربعة أماكن منها وحيث أن الترتيب مهم فان البنات يستطعن الاصطفاف بـ

$$ل^{٥}_{٤} = \frac{٥!}{(٥-٤)!} = ١٢٠$$

طريقة. وبما أن الأم تستطيع الوقوف على يمين الأب أو على يساره يكون عدد الطرق الكلي

$$٢ \times ٤! \times ٥! = ٢ \times ٢٤ \times ١٢٠ = ٥٧٦٠$$



السـؤال الثاني:

يحتوي كيس على مجموعة من الكرات مرقمة بالأعداد من ١ إلى ٢٠، بحيث يوجد كرة واحدة مرقمة بالعدد ١، وكرتان مرقمتان بالعدد ٢، ثلاث كرات مرقمة بالعدد ٣، وهكذا إلى عشرين كرة مرقمة بالعدد ٢٠. بدأنا بأخذ الكرات من الكيس بشكل عشوائي الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع أي منها. أقل عدد للكرات يمكن أخذه من الكيس لضمان الحصول على عشرة كرات تحمل نفس الرقم هو

أ) ٢٠٠
ب) ١٥٠
ج) ١٤٥

د) ١٦٠
هـ) ١٢٥

الحـــــل:

لحل هذه المسألة نفكر أولاً في عدد الكرات التي يمكن أخذها بدون أن يتحقق الشرط (وهو وجود ١٠ كرات مرقمة بنفس العدد). لاحظ أنه يمكن أخذ جميع الكرات المرقمة من ١ إلى ٩ بدون أن يتحقق الشرط. بالنسبة لبقية الكرات المرقمة بالأعداد ١٠ إلى ٢٠ نستطيع أخذ ٩ كرات من كل مجموعة دون أن يتحقق الشرط، يعني نستطيع أن نأخذ ٩ كرات مرقمة بالعدد ١٠، وَ ٩ كرات مرقمة بالرقم ١١، وهكذا بدون أن يتحقق الشرط. الآن أي كرة إضافية تؤخذ من الكيس تحقق الشرط. إذن عدد الكرات الواجب أخذها من الكيس ليتحقق الشرط هو

$$(١+٢+٣+\cdots+٩)+٩\times١١+١=١٤٥$$

الســـــؤال الثالث:

لدينا ١٠ حبات من الخرز مرقمة بالأعداد $\{١، ٢، ٣، \ldots، ١٠\}$. عدد العقود الدائرية المختلفة التي يمكن عملها باستخدام ٥ من هذه الخرزات يساوي:

أ) ٣٠٢٤
ب) ١٥١٢٠
ج) $\frac{١٠!}{٢}$
د) $\frac{١٠!}{٥}$
هـ) ٦٠٤٨

الحـــــل:

لاحظ الفرق بين ترتيب الخرزات في صف واحد أو على شكل دائرة. لنأخذ أولاً طرق ترتيب ٥ من هذه الخرزات في صف واحد، أي عدد تباديل ١٠ أشياء مأخوذة خمسةً خمسةً. هناك

$$ل^{١٠}_{٥}=\frac{١٠!}{(١٠-٥)!}=١٠\times٩\times٨\times٧\times٦=٣٠٢٤٠$$

طريقة. وبما أن العقد دائري فإننا نحتاج إلى القسمة على ٥ نتيجة الطبيعة الدورانية للعقد (لأنه في حالة العقد يمكن اعتبار أي خرزة الأولى). كما أننا نحتاج القسمة على ٢ وذلك بسبب التناظر عند قلب العقد. وبذلك يكون عدد الطرق المطلوب

$$\frac{ل^{١٠}_{٥}}{٥\times٢}=\frac{٦\times٧\times٨\times٩\times١٠}{١٠}=٣٠٢٤$$

الســـــؤال الرابع:

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ثلاثة أعداد من المجموعة {١، ٢، ٣، ...، ١٠٠} بحيث يقبل مجموع الأعداد الثلاثة القسمة على ٣ هو

أ) ٥٣٩٢٢
ب) ٥٣٣٩٤
ج) ٥٢٣٠٥
د) ٥٣٣٩٠
هـ) ٢٧٢٨٠

الحـــــل:

الفكرة هنا هي تقسيم الأعداد في المجموعة {١، ٢، ٣، ...، ١٠٠} إلى ثلاث مجموعات حسب الباقي عند قسمتها على ٣. لتكن سـ = {٣، ٦، ٩، ...، ٩٩} مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ (يعني عند قسمتها على ٣ يكون الباقي صفراً)، ولتكن صـ = {١، ٤، ٧، ...، ١٠٠} مجموعة الأعداد التي عند قسمتها على ثلاث يكون الباقي ١، ولتكن ع = {٢، ٥، ٨، ...، ٩٨} مجموعة الأعداد التي عند قسمتها على ٣ يكون الباقي ٢.
لاحظ أنه عند اختيار ثلاثة أعداد من مجموعة جزئية واحدة يقسم مجموعها على ٣. وكذلك إذا اخترنا عدداً واحداً من كل مجموعة فإن مجموعها يقسم على ٣. أما إذا أخذنا عنصراً من مجموعة وعنصرين من مجموعة أخرى فإن مجموع الثلاثة أعداد لا يقسم على ٣. لاحظ أيضاً أن عدد عناصر كلٍ من المجموعة الجزئية سـ والمجموعة الجزئية ع هو ٣٣، بينما عدد عناصر المجموعة الجزئية صـ هو ٣٤. لذلك يكون العدد الكلي هو

$$\binom{٣٣}{٣}+\binom{٣٣}{٣}+\binom{٣٤}{٣}+٣٣\times٣٣\times٣٤=٥٣٩٢٢$$

الســـــؤال الخامس:

لنأخذ ١٠٠ خط مختلفٍ خ$_{١}$، خ$_{٢}$، خ$_{٣}$، ...، خ$_{١٠٠}$ في المستوى. جميع الخطوط التي على صورة خ$_{٤ن}$ (أي خ$_{٤}$، خ$_{٨}$، خ$_{١٢}$، ...، خ$_{١٠٠}$) يوازي بعضها بعضاً، وجميع الخطوط التي على صورة خ$_{٤ن-٣}$ تمر بنقطة معينة أ. أكبر عدد ممكن لنقاط التقاطع بين أزواج الخطوط من المجموعة {خ$_{١}$، خ$_{٢}$، خ$_{٣}$، ...، خ$_{١٠٠}$} هو

أ) ٤٣٥١
ب) ٤٩٥٠
ج) ٢٧٧٥
د) ٤٩٠١
هـ) ٩٨٥١

الحـــــل:

العدد الأقصى لتقاطع الخطوط هو

$$\binom{١٠٠}{٢} = \frac{١٠٠\times ٩٩}{٢} = ٤٩٥٠؛$$

ولكن من بينها ٢٥ خطاً متوازيةً مما يفقدها

$$\binom{٢٥}{٢} = \frac{٢٥\times ٢٤}{٢} = ٣٠٠$$

نقطة تقاطع. كما أن هنالك ٢٥ خطاً $\{ ع_١، ع_٥، ع_٩، \cdots، ع_{٩٧} \}$ تتقاطع في نقطة واحدة فقط، مما يفقدها

$\binom{٢٥}{٢} - ١ = ٢٩٩$ نقطة تقاطع. وبذلك يكون أقصى عدد لنقاط التقاطع هو

$$٤٩٥٠ - ٣٠٠ - ٢٩٩ = ٤٣٥١$$

السـؤال السادس:

قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $أ(١،١)$ وَ $ب(٤٥١،١٢١)$. عدد النقاط على القطعة المستقيمة التي تصل بين أ وَ ب والتي إحداثياتها أعداد صحيحة يساوي

أ) ٢٩
ب) ٢٠
ج) ٢٥
د) ٤٠
هـ) ٣٠

الحـــــل:

لندرس المسألة بشكل عام أولاً. خذ أي نقطتين $أ(أ_١، أ_٢)$ وَ $ب(ب_١، ب_٢)$، ولنفرض أن القاسم المشترك الأعظم للعددين $ب_١ - أ_١$ وَ $ب_٢ - أ_٢$ هو $ى$، ولنفرض أيضاً أن

$$م = \frac{ب_١ - أ_١}{ى} \quad وَ \quad ن = \frac{ب_٢ - أ_٢}{ى}.$$

بذلك تكون إحداثيات النقاط على شكل $(س ، ص) = (أ_١ + رم ، أ_٢ + رن)$ أعداد صحيحة لجميع قيم $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، \cdots ، ه$ وتقع جميعها على القطعة المستقيمة الواصلة بين $أ(أ_١ ، أ_٢)$ وَ $ب(ب_١ ، ب_٢)$ لأنها تحقق المعادلة

$$\frac{ص - أ_٢}{س - أ_١} = \frac{ب_٢ - أ_٢}{ب_١ - أ_١}.$$

لكن إذا كانت $ر = ٠$ فإنها تعطي نقطة البداية $أ(أ_١ ، أ_٢)$ وإذا كانت $ر = ه$ فإنها تعطي نقطة النهاية $ب(ب_١ ، ب_٢)$، وبذلك يكون عدد النقاط المطلوبة هو $ه - ١$.

وبالعودة إلى المسألة، فإن القاسم المشترك الأعظم للعددين $١٢١ - ١ = ١٢٠$ وَ $٤٥١ - ١ = ٤٥٠$ هو ٣٠، وبذلك يكون الجواب $ه - ١ = ٣٠ - ١ = ٢٩$ نقطة.

ملاحظة:

لاحظ أن عدد النقاط المطلوبة الواقعة بين $أ(١،١)$ وَ $ب(١٢١، ٤٥١)$ هو نفس عدد النقاط الواقعة بين النقطتين $(٠ ، ٠)$ وَ $(١٢٠ ، ٤٥٠)$ وهذا العدد يساوي القاسم المشترك الأعظم ه للعددين ١٢٠ وَ ٤٥٠ مطروحاً منه ١ بسبب النقطة الأخيرة؛ أي أن $ه - ١ = ٣٠ - ١ = ٢٩$ نقطة.

السـؤال السابع:

عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ٦ أرقام (أو خانات) كل خانة منها تحتوي على الرقم ١ أو ٢ أو ٣ بحيث يظهر كل واحد من هذه الأعداد الثلاثة مرة واحدة على الأقل هو

أ) ٥٤٠
ب) ٥٦٠
ج) ٥٣٧
د) ٥٣٤
هـ) ٥٥٠

الحـل:

تتلخص فكرة المسألة في حساب عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بالأعداد ١، ٢، ٣ مع التكرار، ونطرح من ذلك عدد الطرق التي نستطيع بها ملء الـ ٦ خانات بعددين فقط أو عدد واحد فقط.
نستطيع ملء ٦ خانات بالأعداد ١، ٢، ٣ مع التكرار بـ $م = ٣^٦$ طريقة، ونستطيع ملأها بعددين فقط مع التكرار بـ $ن = ٢^٦ - ٢$ طريقة، وكذلك نستطيع ملأها بعدد واحد فقط بـ $ر = ١^٦ = ١$ طريقة.
الآن من بين الأعداد ١ ، ٢، ٣ نستطيع اختيار الثلاثة أعداد بطريقة واحدة فقط، ونستطيع اختيار عددين منها بثلاث طرق، و نستطيع اختيار عدد واحد منها بثلاث طرق. بذلك يكون العدد الكلي المطلوب هو

$$\text{م} - ٣\text{ن} + ٣\text{ر} = ٣^{٦} - ٣(٢^{٦} - ٢) - ٣ \times ١^{٦}$$
$$= ٣^{٦} - ٣ \times ٢^{٦} + ٣ \times ١^{٦}$$
$$= ٧٢٩ - ١٩٢ + ٣$$
$$= ٥٤٠$$

حل آخر:

نستطيع حل المسألة بتطبيق مبدأ التضمين والإقصاء كالآتي: لنفرض أن

ن = عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بأحد الأعداد ١، ٢، ٣ مع التكرار يساوي $٣^{٦}$

$\text{ن}_{١}$ = عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بأحد الأعداد ٢، ٣ بدون العدد ١ يساوي $٢^{٦}$

$\text{ن}_{٢}$ = عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بأحد الأعداد ١، ٣ بدون العدد ٢ يساوي $٢^{٦}$

$\text{ن}_{٣}$ = عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بأحد الأعداد ١، ٢ بدون العدد ٣ يساوي $٢^{٦}$

$\text{ن}_{٢١}$ = عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بدون الأعداد ١ ، ٢ يساوي $١^{٦} = ١$

$\text{ن}_{٣١}$ = عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بدون الأعداد ١ ، ٣ يساوي $١^{٦} = ١$

$\text{ن}_{٣٢}$ = عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بدون الأعداد ٢ ، ٣ يساوي $١^{٦} = ١$

$\text{ن}_{٣٢١}$ = عدد الطرق التي نستطيع بها ملء ٦ خانات بدون الأعداد ١ ، ٢، ٣ يساوي ٠

حسب مبدأ التضمين والإقصاء يكون العدد الكلي المطلوب يساوي عدد الأعداد التي لا تحقق أي من الخواص في $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}$ ، $\text{ن}_{٣}$ ، $\text{ن}_{٢١}$ ، $\text{ن}_{٣١}$ ، $\text{ن}_{٣٢}$ ، $\text{ن}_{٣٢١}$ وهذا العدد يساوي:

$$\text{ن} - \text{ن}_{١} - \text{ن}_{٢} - \text{ن}_{٣} + \text{ن}_{٢١} + \text{ن}_{٣١} + \text{ن}_{٣٢} - \text{ن}_{٣٢١} = ٣^{٦} - ٣\,(٢^{٦}) + ٣\,(١) - ٠$$
$$= ٥٤٠$$

السـؤال الثامن:

لدينا ١٠٠ خروف كل واحد منها عليه علامة واحدة على الأقل: حمراء أو صفراء أو زرقاء. ٣٨ خروفاً عليها علامات حمراء وَ ٤٠ خروفاً عليها علامات صفراء وَ ١٧ خروفاً عليها على الأقل علامتان حمراء وصفراء وَ ١٠ خراف عليها على الأقل علامتان حمراء وزرقاء وَ ٢٣ خروفاً عليها على الأقل علامتان صفراء وزرقاء وَ ٧ خراف تحمل جميع العلامات. عدد الخراف التي تحمل علامة زرقاء يساوي

أ) ٣٩
ب) ٦٥
ج) ٦١
د) ٣١
هـ) ٤٠

الحـــــــل:

يفضل في مثل هذه المسألة أن نرسم شكلاً يوضح المعطيات ويعين على استيعاب المسألة. ففي الشكل أدناه لنبدأ من الوسط، فهنالك ٧ خراف عليها جميع العلامات. وبما أن هنالك ٢٣ خروفاً عليها علامتان صفراء وزرقاء، بطرح ٧ منها نجد أن هنالك ١٦ خروفاً مشتركاً تحمل العلامتين الصفراء والزرقاء.

كذلك بطرح ٧ من ١٧ نجد أن هنالك ١٠ خراف مشتركة تحمل العلامتين الحمراء والصفراء، وبطرح ٧ من ١٠ نجد أن هنالك ٣ خراف مشتركة تحمل العلامتين الحمراء والزرقاء.

لاحظ الآن أن عدد الخراف التي تحمل العلامة الحمراء فقط يساوي $٣٨ - (١٠ + ٧ + ٣) = ١٨$

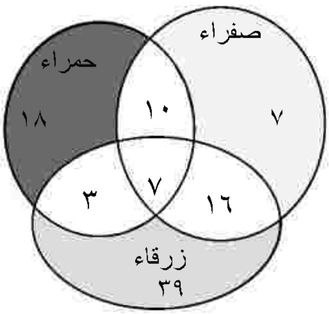
وعدد الخراف التي تحمل العلامة الصفراء فقط يساوي $٤٠ - (١٠ + ٧ + ١٦) = ٧$

وبذلك يكون عدد الخراف التي تحمل العلامة الزرقاء فقط يساوي

$$١٠٠ - (١٨ + ١٠ + ٧ + ٣ + ٧ + ١٦) = ٣٩$$

أي أن عدد الخراف التي تحمل العلامة الزرقاء يساوي

$١٦ + ٧ + ٣ + ٣٩ = ٦٥$ خروفاً.



السـؤال التاسع:

إذا كانت

$$ن = \left(١ + ٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)\left(١ + ٢^{-\frac{١}{١٦}}\right)\left(١ + ٢^{-\frac{١}{٨}}\right)\left(١ + ٢^{-\frac{١}{٤}}\right)\left(١ + ٢^{-\frac{١}{٢}}\right)$$

فإن ن تساوي

أ) $١ - ٢^{-\frac{١}{٣٢}}$

ب) $\left(١ - ٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)^{-١}$

ج) $\frac{١}{٢}\left(١ - ٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)$

د) $\frac{١}{٢}\left(١-٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)^{-١}$

هـ) $\frac{١}{٢}$

الحـــــل:

نلاحظ أولاً أن الأسس الموجودة هي قوى للعدد $\frac{١}{٢}$، وهي: $\frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}، \frac{١}{١٦}، \frac{١}{٣٢}$. وإذا عوضنا $س = ٢^{-\frac{١}{٣٢}}$ تصبح الأعداد الموجودة كما يلي: $س^{٢} = ٢^{-\frac{١}{١٦}}$، $س^{٤} = ٢^{-\frac{١}{٨}}$ ، $س^{٨} = ٢^{-\frac{١}{٤}}$, $س^{١٦} = ٢^{-\frac{١}{٢}}$.

وبذلك يصبح المقدار $ن = (١+س)(١+س^{٢})(١+س^{٤})(١+س^{٨})(١+س^{١٦})$. لكن ما هو الطرف الأيسر؟ لننظر أولا إلى المقدار:

$$(١-س^{٣٢}) = (١+س^{١٦})(١-س^{١٦})$$
$$= (١+س^{١٦})(١+س^{٨})(١-س^{٨})$$
$$= (١+س^{١٦})(١+س^{٨})(١+س^{٤})(١+س^{٢})(١+س)(١-س)$$

إذا بتعويض $س = ٢^{-\frac{١}{٣٢}}$ نحصل على:

$$\left(١-٢^{-١}\right) = \left(١+٢^{-\frac{١}{٢}}\right)\left(١+٢^{-\frac{١}{٤}}\right)\left(١+٢^{-\frac{١}{٨}}\right)\left(١+٢^{-\frac{١}{١٦}}\right)\left(١+٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)\left(١-٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)$$

وبقسمة الطرفين على $\left(١-٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)$ نحصل على

$$\frac{١}{٢\left(١-٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)} = \left(١+٢^{-\frac{١}{٢}}\right)\left(١+٢^{-\frac{١}{٤}}\right)\left(١+٢^{-\frac{١}{٨}}\right)\left(١+٢^{-\frac{١}{١٦}}\right)\left(١+٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)$$

أي أن $ن = \frac{١}{٢\left(١-٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)} = \frac{١}{٢}\left(١-٢^{-\frac{١}{٣٢}}\right)^{-١}$

السـؤال العاشر

عدد الطرق التي يمكن بها توزيع ١٨ قلماً على ثلاث أولاد بحيث لا يأخذ أي منهم أكثر من ٩ أقلام يساوي

أ) ٦
ب) ٧٣
ج) ٥٥
د) ٦٠
هـ) ٦٤

الحـل:

ذكرنا في مقدمة نظرية التركيبات أن عدد الطرق لتوزيع ر من الكرات المتطابقة على ن من الصناديق المختلفة يساوي $\binom{\text{ر}+\text{ن}-١}{\text{ر}}$. إذن عدد الطرق لتوزيع ١٨ قلماً على الأولاد الثلاثة بدون الشرط يساوي

$$\text{أ} = \binom{١٨+٣-١}{١٨} = \binom{٢٠}{١٨} = ١٩٠$$

الآن نطرح من هذا العدد عدد الطرق لتوزيع الأقلام حيث يحصل أحد الأولاد على الأقل على ١٠ أقلام أو أكثر. لنفرض أن الولد الأول حصل على ١٠ أقلام. نستطيع توزيع باقي الأقلام على الأولاد الثلاثة بـ

$$\text{أ}_{١} = \binom{٨+٣-١}{٨} = \binom{١٠}{٨} = ٤٥ \text{ طريقة،}$$

أي أن هناك ٤٥ طريقة لتوزيع الأقلام بحيث يحصل فيها الولد الأول على ١٠ أقلام على الأقل. كذلك يستطيع الولد الثاني الحصول على ١٠ أقلام على الأقل بـ $\text{أ}_{٢} = ٤٥$ طريقة والولد الثالث بـ $\text{أ}_{٣} = ٤٥$ طريقة. بذلك يكون عدد الطرق المطلوبة يساوي

$$\text{أ} - (\text{أ}_{١} + \text{أ}_{٢} + \text{أ}_{٣}) = ١٩٠ - \{٤٥+٤٥+٤٥\} = ٥٥$$

السـؤال الحادي عشر:

عدد الطرق المختلفة لاختيار ٤ مدرسين من بين ١٥ مدرساً يجلسون حول طاولة مستديرة بشرط ألا نختار مدرسيّن متجاوريّن يساوي

أ) ٦٥٠
ب) ٤٧٠
ج) ٤٥٠
د) ٥٦٠
هـ) ٣٦٤

الحـــــل:

نستخدم هنا إستراتيجية تقسيم المسألة إلى حالات. لنفرض أن الشخص ع هو أحد المدرسين حول الطاولة. فإما أن نختاره أو لا. لنفرض أننا اخترنا هذا المدرس ع، وبذلك لا نستطيع اختيار أي من المدرسين اللذين يجلسان بجانبه، وعلينا أن نختار الآن ٣ مدرسين من بين الإثني عشر مدرساً الباقين بحيث لا نختار مدرسين بجانب بعض، وهذا العدد يساوي عدد طرق ترتيب ٣ حروف خ (للدلالة على اختيار المدرس) وَ ٩ حروف ر (للدلالة على رفض اختيار المدرس) بحيث لا يوجد حرفين خ بجانب بعض. نستطيع ترتيب ذلك بوضع التسعة حروف ر أولاً وبذلك يكون هناك ١٠ أماكن لوضع ثلاث حروف خ. يعني هناك $\binom{١٠}{٣}$ طريقة لترتيب الحروف.

وإذا لم يتم اختيار ع فيبقى ١٤ شخصاً ونريد أن نختار ٤ منهم ، وكما فعلنا في الحالة الأولى فإن هذا العدد يساوي عدد الطرق لترتيب ٤ حروف خ (للدلالة على اختيار المدرس) وَ ١٠ حروف ر (للدلالة على رفض اختيار المدرس) بحيث لا يوجد حرفان خ بجانب بعض. نستطيع ترتيب ذلك بوضع عشرة حروف ر أولاً وبذلك يكون هناك ١١ مكاناً لوضع أربعة حروف خ. يعني هناك $\binom{١١}{٤}$ طريقة لترتيب الحروف.

وبذلك يكون العدد الكلي

$$\binom{١٠}{٣}+\binom{١١}{٤}=\frac{٨\times٩\times١٠}{!٣}+\frac{٨\times٩\times١٠\times١١}{!٤}=٤٥٠$$

الســـــؤال الثاني عشر:

كُتبت الأعداد الفردية الموجبة على صورة مثلث كما يلي

				١				
			٣	٥	٧			
		٩	١١	١٣	١٥	١٧		
	١٩	٢١	٢٣	٢٥	٢٧	٢٩	٣١	
٣٣	٣٥	٣٧	٣٩	٤١	٤٣	٤٥	٤٧	٤٩
...	...	...	...	...	...	...	...	...

بحيث يزيد عدد الأعداد في كل سطر عن سابقه بعددين، ويبدأ كل سطر بالعدد الفردي التالي للعدد الذي يحتل نهاية السطر الذي يسبقه مباشرة. العدد الأوسط في السطر العشرين هو

أ) ٦٥٩
ب) ٧٦١
ج) ٤٥٣
د) ٥٢٧
هـ) ٨٤٥

الحـــــل:

نعتمد إستراتيجية البحث عن نمط معين في الأسطر. كم عدد موجود في السطر الأول؟ وكم في السطر الثاني؟ وهكذا. نلاحظ أن الصف ذا الترتيب $ن$ يحتوي على $٢ن - ١$ عدداً، وأن هذا العدد $(٢ن - ١)$ هو نفسه العدد الفردي ذا الترتيب $ن$ في مجموعة الأعداد الفردية الموجبة. إذن، الأسطر التسعة عشر الأولى تحتوي على

$$\sum_{ن=١}^{١٩}(٢ن - ١) = ٢\sum_{ن=١}^{١٩} ن - ١٩ = ٢ \times \frac{١٩ \times ٢٠}{٢} - ١٩ = ٣٦١$$

عدداً.

بما أن السطر رقم ٢٠ يحتوي على ٣٩ عدداً، فإن ترتيب العدد الأوسط فيه هو ٢٠. نستنتج من ذلك أن المطلوب هو العدد الفردي الذي ترتيبه $٣٦١ + ٢٠ = ٣٨١$ في مجموعة الأعداد الفردية، أي $٢ \times ٣٨١ - ١ = ٧٦١$.

الســــــؤال الثالث عشر:

المتتابعة $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣$ ، ... متتابعة تزايدية من الأعداد المكونة من مجموع القوى المختلفة للعدد ٣ وهي: ٣، ٩، ١٢، ٢٧، ٣٠، ٣٦، ٣٩، ...

(لاحظ الحدود هي نفسها: $٣^١$، $٣^٢$، $٣^٢ + ٣^١$، $٣^٣$، $٣^٣ + ٣^١$، $٣^٣ + ٣^٢$، $٣^٣ + ٣^٢ + ٣^١$، ...).

ترتيب العدد $٣^٨ = ٦٥٦١$ في هذه المتتابعة هو

أ) ١١٦
ب) ١٣٠
ج) ١٢٠
د) ١٦٠
هـ) ١٢٨

الحـــــل:

من العصف الذهني في هذه المسألة هو أن نسأل عن الشكل العام لأي حد من حدود هذه المتتابعة والذي يسبق العدد $٣^٨$. لاحظ أن أي حد من حدود المتتابعة التي يسبق العدد $٣^٨$ يمكن كتابته على صورة

$$م_١ \times ٣^١ + م_٢ \times ٣^٢ + م_٣ \times ٣^٣ + \cdots + م_٧ \times ٣^٧$$

حيث $م_ر \in \{٠، ١\}$، كما أن أكبر عدد في هذه الأعداد هو

$$٣^١ + ٣^٢ + ٣^٣ + \cdots + ٣^٧ = ٣٢٧٦ < ٦٥٦١ = ٣^٨$$

إذن عدد الحدود التي تسبق $٣^٨ = ٦٥٦١$ يساوي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار الأعداد

$$م_١ ، م_٢ ، م_٣ ، \cdots ، م_٧$$

حيث لا تكون جميعها أصفاراً. وبما أنه يوجد هناك خياران (إما صفر أو واحد) لكل من هذه الميمات، فإن عدد الخيارات (وبالتالي عدد الحدود) يساوي

$$٢^٧ - ١ = ١٢٨ - ١ = ١٢٧.$$

إذن ترتيب الحد $٣^٨ = ٦٥٦١$ هو ١٢٨.

السـؤال الرابع عشر:

مجموع كل الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ٤ أرقام (أو خانات) كل خانة منها تحتوي على أحد أرقام المجموعة $\{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$ بحيث يظهر كل من هذه الأرقام مرة واحدة على الأكثر هو

أ) ٣٩٩٩٦٠
ب) ٤٠٠٠٠٠
ج) ٣٦٠٠٠٠
د) ٤٦٠٠٠٠
هـ) ٣٩٩٦٦٠

الحـل:

خذ أحد الخانات الأربعة ولتكن هـ (مثلا خانة المئات) وثبته، وكذلك خذ رقماً من المجموعة $\{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$ وليكن $ن$. عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ٤ أرقام وفيها الرقم $ن$ في الخانة هـ يساوي $٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$ عدداً، وبذلك يكون مجموع الأرقام في هذه الخانة هـ للأعداد الـ ٢٤ يساوي ٢٤$ن$ وبما أن $ن \in \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$ فإن مجموع الأرقام في الخانة هـ لجميع الأعداد المطلوبة يساوي $٢٤(١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥) = ٣٦٠$. الآن مجموع الأرقام في كل خانة من الخانات هو ٣٦٠ وبذلك يكون مجموع الأعداد المطلوبة

$$٣٦٠ + ٣٦٠ \times ١٠^١ + ٣٦٠ \times ١٠^٢ + ٣٦٠ \times ١٠^٣ =$$
$$= ٣٦٠ \times (١ + ١٠^١ + ١٠^٢ + ١٠^٣)$$
$$= ٣٦٠ \times (١١١١)$$
$$= ٣٩٩٩٦٠$$

السـؤال الخامس عشر:

عدد الأصفار في يمين العدد

$$١٠٠٠! = ١٠٠٠ \times ٩٩٩ \times \cdots \times ٣ \times ٢ \times ١$$

يساوي

أ) ٢٤٠
ب) ٢٣٠
ج) ٢٥٠
د) ٢٤٩
هـ) ٢٢٠

الحـــــل:

نحتاج هنا لحساب أكبر أس للعدد ١٠ في المضروب. بما أن ١٠ = ٢×٥ وبملاحظة أن العدد ٢ يتكرر أكثر من العدد،٥ فيكفي أن نجد عدد تكرار العدد ٥ عند تحليل العدد (١٠٠٠!)

أولاً نلاحظ أن هناك $\frac{١٠٠٠}{٥} = ٢٠٠$ عدد في المضروب تقسم على خمسة (أي أن كلاً منها يعطي $٥^١$ في المضروب وهذه الأعداد هي ٥، ١٠، ١٥، ...، ٩٩٥، ١٠٠٠)، من هذه الأعداد يوجد $\frac{٢٠٠}{٥} = ٤٠$ عدد تقسم على ٢٥ (أي أن كلاً منها يعطي $٥^٢$ أخرى في المضروب وهي ٢٥، ٥٠، ٧٥، ...، ٩٧٥، ١٠٠٠)، ومن هذه الأعداد يوجد $\frac{٤٠}{٥} = ٨$ أعداد تقسم على ١٢٥ (أي أن كلاً منها يعطي $٥^٣$ في المضروب وهي ١٢٥، ٢٥٠، ...، ١٠٠٠)، بينما يوجد عدد واحد فقط ٦٢٥ من هذه الثمانية أعداد يعطي $٥^٤$. وبذلك يكون عدد تكرار العدد ٥ يساوي

$$٢٠٠ + ٤٠ + ٨ + ١ = ٢٤٩$$

إذن عدد الأصفار المطلوب هو ٢٤٩.

الســـــؤال السادس عشر:

نريد كتابة لوحات مختلفة، مثل لوحات السيارات، كل منها يحتوي على ١٠ حروف اختيرت فقط من الثلاثة حروف ا، ب، جـ بحيث يكون تكرار الحرف ا مساوياً لتكرار الحرف جـ. عدد اللوحات المختلفة يساوي

أ) ١١٠٧
ب) ١٢٦٠
ج) ٢٥٢
د) ٣١٥٠
هـ) ٨٩٥٣

مثال: $\boxed{\text{ب جـ ا ب جـ ا ب ا جـ ب}}$

الحـــــــل:

نقسم المسألة إلى حالات حسب عدد حروف أ التي تحتويها اللوحات. لندرس عدد حروف أ (وهذه تساوي عدد حروف جـ) في اللوحات. اللوحات التي لا تحتوي على أ (ولا تحتوي على جـ أيضاً) عددها $\binom{١٠}{١٠}=١$. عدد اللوحات التي تحتوي على حرف أ واحد (وبالتالي على حرف جـ واحد) يساوي $\binom{١٠}{٢}\binom{٢}{١}=٩٠$

عدد اللوحات التي تحتوي على حرفي أ (وبالتالي على حرفي جـ) يساوي $\binom{١٠}{٤}\binom{٤}{٢}=١٢٦٠$

عدد اللوحات التي تحتوي على ثلاثة حروف أ (و ثلاثة حروف جـ) يساوي $\binom{١٠}{٦}\binom{٦}{٣}=٤٢٠٠$

عدد اللوحات التي تحتوي على أربعة حروف أ (وأربعة حروف جـ) يساوي $\binom{١٠}{٨}\binom{٨}{٤}=٣١٥٠$

عدد اللوحات التي تحتوي على خمسة حروف أ (وخمسة حروف جـ) يساوي $\binom{١٠}{١٠}\binom{١٠}{٥}=٢٥٢$

وبذلك يكون العدد الكلي

$$١+\sum_{ن=١}^{٥}\binom{١٠}{٢ن}\binom{٢ن}{ن}=١+٩٠+١٢٦٠+٤٢٠٠+٣١٥٠+٢٥٢=٨٩٥٣$$

السـؤال السابع عشر:

في دوري التنس لإحدى المدارس سيلعب ن من المدرسين و٢ن من الطلاب بحيث يلعب كل لاعب مباراة واحدة فقط مع كل لاعب آخر، وفي كل مباراة يجب أن يفوز أحد المتسابقين (لا يسمح بالتعادل).

إذا كانت نسبة عدد المباريات التي فاز فيها المدرسون إلى تلك التي فاز فيها الطلاب تساوي $\frac{٧}{٥}$ فما قيمة العدد ن؟ الجواب هو

أ) ٢
ب) ٣
ج) ٦
د) ١٢
هـ) ٢٣

الحـــــــل:

عدد المباريات التي سيلعبها الجميع تساوي

$$\binom{٣ن}{٢}=\frac{٣ن(٣ن-١)}{٢}.$$

الآن لنفرض أن عدد المباريات التي فاز فيها المدرسون تساوي ٧م، وعدد المباريات التي فاز فيها الطلاب تساوي ٥م. إذن

$$٥م + ٧م = ١٢م = \frac{٣ن(٣ن-١)}{٢}$$

أي أن
$$م = \frac{ن(٣ن-١)}{٨} \qquad (*)$$

كما نلاحظ أن عدد المباريات التي فاز فيها المدرسون أقل من العدد الكلي للمباريات التي شارك فيها المدرسون أو تساويها، وهذا يعني أن

$$٧م \le \binom{٣ن}{٢} - \binom{٢ن}{٢} = \frac{ن(٥ن-١)}{٢}$$

أي أن
$$م \le \frac{ن(٥ن-١)}{١٤} \qquad (**)$$

من (*) و (**) نستنتج أن

$$م = \frac{ن(٣ن-١)}{٨} \le \frac{ن(٥ن-١)}{١٤}$$

وهذا يعطي
$$ن(٣-ن) \ge ٠$$

أي أن $ن = ١، ٢$ أو ٣. لكن من الواضح أن القيم $ن = ١$ و $ن = ٢$ مرفوضة لأنها تجعل عدد المباريات التي فاز فيها المدرسون كسوراً، لذلك فإن $ن = ٣$، وبذلك تكون $م = ٣$.

ملاحظة: عدد المباريات يساوي $\binom{٣ن}{٢} = \binom{٩}{٢} = ٣٦$ فاز المدرسون فيها بـ ٢١ مباراة وفاز الطلاب بـ ١٥ مباراة، أي أن المدرسين فازوا بجميع المباريات التي لعبوها.

السـؤال الثامن عشر:

إذا كان ثمة خلل في عدّاد قياس المسافة في سيارة ما، بحيث أن العدّاد لا يُظهر العدد ٤ بل تقفز قراءة العدّاد من ٣ إلى ٥ مباشرة في جميع خانات العدّاد، على سبيل المثال فإن قراءة العدّاد تقفز من ٠٠٠١٣٩ إلى ٠٠٠١٥٠ بعد أن تسير السيارة كيلومتراً واحداً. إذا كانت قراءة العداد الحالية هي ٠٠٣٠٠٠ فما ثلث المسافة الحقيقية التي قطعتها السيارة؟

الحـل:

نقسم المسألة الى حالات حسب الكيلومترات المفقودة.

الحالة الأولى: لكل ألف كيلومتر نفقد ١٠٠ كيلومتر بسبب فقدان الأعداد من ٤٠٠ إلى ٤٩٩.

الحالة الثانية: لكل ١٠٠ كيلومتر (عدا الـ ٤٠٠ التي حسبت في الحالة الأولى) نفقد ١٠ كيلومترات بسبب فقدان الأعداد من ٤٠ إلى ٤٩، كما نفقد ٩ كيلومترات بسبب فقدان الأعداد

٤، ١٤، ٢٤، ٣٤، ٥٤، ...، ٩٤

وهذا يعني أننا نفقد ١٩ كيلومتراً من كل مائة عدا المئات ٤٠٠، ١٤٠٠، ٢٤٠٠ التي حسبت في الحالة الأولى، وبما أن عندنا ٢٧ مائة (عدا ٤٠٠ ، ١٤٠٠ ، ٢٤٠٠) فإن عدد الكيلومترات التي فقدت تساوي

$$٣\times١٠٠+١٩\times٢٧=٨١٣؛$$

وهذا يعني أن المسافة الحقيقية التي قطعتها السيارة تساوي

$$٣٠٠٠-٨١٣=٢١٨٧$$

إذن ثلث المسافة الحقيقية التي قطعتها السيارة تساوي

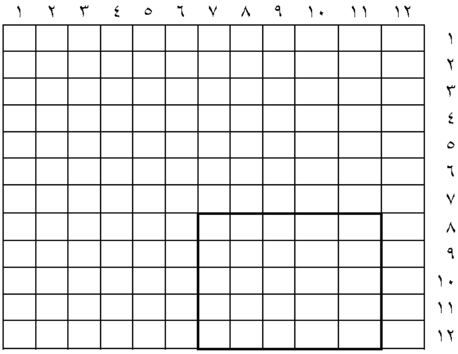
$٢١٨٧\div٣=٧٢٩$ كيلومتراً.

السـؤال التاسع عشر

ارسم مربعاً طول ضلعه ١٢ سم، وقسّمه إلى ١٤٤ مربعاً، طول ضلع كلٍ منها ١ سم، عن طريق رسم خطوط أفقية وعمودية. أوجد عدد المربعات الموجودة في الشكل الناتج.

الحـل:

لاحظ أن المطلوب هو مجموع عدد المربعات الموجودة في الشكل والتي طول ضلع كلّ منها ر، حيث $١\leq ر \leq ١٢$. خذ المربع الموجود في الزاوية العلوية اليمنى الذي طول ضلعه ر ، ولنسمّه ع.



لاحظ أن كل حركة لهذا المربع إلى الأسفل أو إلى اليسار تعطي مربعاً جديداً طول ضلعه ر، وأنه يمكن الحصول على أي مربع في الشكل طول ضلعه ر عن طريق تحريك المربع ع إلى أسفل أو إلى اليسار عدداً مناسباً من المرات (بشرط أن يبقى المربع الجديد دائماً داخل المربع الأصلي).

إذن عدد المربعات الموجودة والتي طول ضلعها ر يساوي عدد حركات المربع ع الممكنة إلى أسفل مضافاً إليه ١ مضروباً في عدد الحركات الممكنة إلى اليسار مضافاً إليه ١ (لاحظ أننا نضيف ١ حتى نأخذ بعين الاعتبار المربعات الناتجة عن عدم تحريك المربع ع إلى الأسفل أو عدم تحريكه إلى اليسار)، وهو

$$(١٢-ر+١)\times(١٢-ر+١)=(١٢-ر+١)^٢$$

نستنتج أن عدد المربعات الكلي

$$\sum_{ر=1}^{12}(12-ر+1)^2 = 12^2+\cdots+2^2+1^2$$

$$= \frac{12(12+1)(2\times 12+1)}{6}$$

$$= 650$$

ملاحظة: حاول تعميم هذه المسألة بإيجاد عدد المربعات الممكنة داخل مستطيل أبعاده $م \times ن$.

السـؤال العشرون:

إذا كان لدينا ١٠ علب من عصير التفاح وَ٨ علب من عصير العنب وَ ٧ علب من عصير المانجو. أوجد عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ١٥ علبة عصير من هذه العلب.

الحـل:

لنفرض أولاً بأن عدد العلب من كل نوع غير محدود وبذلك نستطيع اختيار ١٥ علبة منها بـ

$$ا = \binom{15+3-1}{15} = \binom{17}{15}$$

طريقة (لاحظ هنا أن التكرار مسموح). والآن لنفرض أن $ا_ت$ عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ١٥ علبة عصير وتحتوي على الأقل على ١١ علبة تفاح، فيكون

$$ا_ت = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4}$$

وهو عدد الطرق لاختيار ٤ علب من الأنواع الثلاثة لإكمال الـ ١٥ علبة. ولنفرض كذلك أن $ا_ع$ عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ١٥ علبة عصير وتحتوي على الأقل على ٩ علب عنب، فيكون

$$ا_ع = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6}$$

وهو عدد الطرق لاختيار ٦ علب من الأنواع الثلاثة لإكمال الـ ١٥ علبة. ولنفرض كذلك أن $ا_م$ عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ١٥ علبة عصير وتحتوي على الأقل على ٨ علب مانجو، فيكون

$$ا_م = \binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7}$$

وهو عدد الطرق لاختيار ٧ علب من الأنواع الثلاثة لإكمال الـ ١٥ علبة. وبذلك يكون العدد المطلوب هو

$$ا - (ا_ت + ا_ع + ا_م) = \binom{17}{15} - \left\{\binom{6}{4}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}\right\}$$

$$= 136 - (15+28+36)$$

$$= 57$$

السـؤال الحادي والعشرون:

وُضعت نقطة على كل رأس من رؤوس المستطيل ا ب جـ د، كما وضعت نقطتان وثلاث نقاط وأربع نقاط وخمس نقاط على الأضلاع ا ب، ب جـ، جـ د، د ا، على الترتيب. أوجد عدد المثلثات الحقيقية (مساحتها عدد موجب) التي تقع رؤوسها على هذه النقاط.

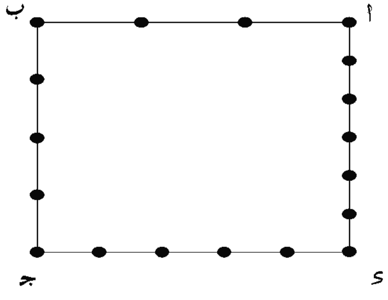
الحـل:

نفكر بالعكس في هذه المسألة، ما هو عدد الخيارات التي تعطي مثلثات غير حقيقية (مساحتها صفر) والتي تقع رؤوسها على هذه النقاط؟ ثم نطرح هذا العدد من العدد الكلي للخيارات الممكنة. أولاً مجموع عدد النقاط الموجودة على المستطيل يساوي ٤+٢+٣+٤+٥ = ١٨، وبذلك يكون عدد الطرق الممكنة لاختيار ثلاث نقاط منها هو $\binom{١٨}{٣}$ = ٨١٦. لكن ليس كل ثلاث نقاط تكوّن مثلثاً حقيقياً، يجب ألا تكون هذه النقاط على ضلع واحد. لذلك يجب طرح عدد الطرق المختلفة لاختيار ثلاث نقط من النقاط الواقعة على الضلع ا ب وكذلك على كل من الأضلاع ب جـ، جـ د وَ د ا. يعني يجب أن نطرح

$$\binom{٤}{٣}+\binom{٥}{٣}+\binom{٦}{٣}+\binom{٧}{٣}= ٤+١٠+٢٠+٣٥ = ٦٩$$

إذن عدد المثلثات الممكن تكوينها والتي تقع رؤوسها على هذه النقاط يساوي:

$$٨١٦-٦٩ = ٧٤٧$$



السـؤال الثاني والعشرون:

أوجد عدد الطرق المختلفة لتعليق ٣ أعلام مختلفة على ٥ سواري ثابتة على جانب طريق مستقيم. (يمكن تعليق أكثر من علم على السارية الواحدة)

الحـل:

نريد إيجاد عدد الطرق لتعليق٣ أعلام مختلفة على ٥ سواري ثابتة. لنسمي الأعلام $ع_١، ع_٢، ع_٣$ ونضيف إليها ٤ خطوط | لنكون المجموعة ع = $\{ع_١، ع_٢، ع_٣، |، |، |، |\}$. لاحظ هنا أن أي ترتيب لعناصر

المجموعة ع يعطي طريقة مختلفة لترتيب الأعلام، حيث أن الخطوط | تقسم عناصر المجموعة إلى خمسة أقسام بحيث يمثل كل قسم منها الأعلام الموجودة على السارية المقابلة. فمثلاً الترتيب

س$_1$ س$_2$ س$_3$ س$_4$ س$_5$

| ع$_1$ | | ع$_2$ ، ع$_3$ |

يمثل الترتيب التالي: تعليق العلم الأول على السارية الثانية س$_2$، وتعليق العلمين الثالث والثاني على السارية الرابعة س$_4$ بالترتيب، بينما تبقى السواري الأولى والثالثة والخامسة فارغة.

العدد المطلوب يساوي عدد الطرق المختلفة لترتيب عناصر المجموعة ع، وهذا العدد يساوي

$$\frac{(3+4)!}{(1!)\,(1!)\,(1!)\,(4!)} = \frac{7!}{4!} = 210$$

السـؤال الثالث والعشرون:

إذا كانت ن تساوي مجموع أرقام الأعداد الموجودة في المتتابعة: ١،٢،٣،...،١٠٠٠٠. أوجد ن−١٨٠٠٠٠

الحـل:

أولاً نحذف العدد ١٠٠٠٠ ونضيف العدد٠ إلى المتتابعة وبذلك يكون المجموع قد نقص١ وحصلنا على المتتابعة

٠، ١، ٢، ٣، ...، ٩٩٩٩

ونكتبها على الصورة ٠٠٠٠، ٠٠٠١، ٠٠٠٢، ٠٠٠٣، ...، ٩٩٩٩

لاحظ أن هذه المتتابعة تحتوي على ١٠٠٠٠عدد كل منها يتكون من أربعة أرقام. في كل خانة من الخانات الأربعة يظهر كل رقم من الأرقام ٠، ١، ٢، ٣، ... ، ٩ بنفس عدد المرات وهو $\frac{10000}{10} = 1000$ مرة. إذن كل رقم من الأرقام ٠، ١، ٢، ٣، ... ، ٩ يظهر في الأربع خانات ٤ (١٠٠٠) = ٤٠٠٠ مرة؛ وبذلك يكون مجموع الأعداد يساوي

٤٠٠٠ (٠+١+٢+...+٩) = ٤٠٠٠ (٤٥) = ١٨٠٠٠٠

وبإضافة العدد ١ الذي فقدناه في الخطوة الأولى نحصل على المجموع ن = ١٨٠٠٠١. إذن ن−١٨٠٠٠٠=١

الســـــؤال الرابع والعشرون:

لنأخذ المتتابعة التالية{١}،{٢،٣}،{٤،٥،٦}،{٧،٨،٩،١٠}، ... حيث تحتوي كل مجموعة على عنصر زيادة عن المجموعة السابقة وحيث تبدأ عناصرها بالعدد التالي للعنصر الأخير في المجموعة السابقة. على فرض أن $س_{ن}$ يمثل مجموع الأعداد في المجموعة ن، أوجد $س_{١٢}$(أي أوجد مجموع الأعداد الموجودة في المجموعة ١٢ الثانية عشر)

الحـــــل:

نبحث في هذه المسألة عن نسق معيين في المجموعات. المجموعة رقم ن تحتوى على ن من الأعداد المتتالية والعنصر الأخير فيها يمثل عدد العناصر في اتحاد المجموعات ن الأولى. (آخر عنصر في المجموعة الأولى يساوي ١؛ آخر عنصر في المجموعة الثانية يساوي ٣ وهو عدد العناصر في المجموعتين الأولى والثانية؛ آخر عنصر في المجموعة الثالثة يساوي ٦ وهو عدد العناصر في الثلاث مجموعات الأولى، وهكذا ...). بذلك يكون آخر عدد في المجموعة ن مساوياً لعدد العناصر في المجموعات ن الأولى، أي $١+٢+٣+\cdots+ن = \frac{١}{٢}ن(ن+١)$.

الآن آخر عدد في المجموع $س_{ن}$ هو $\frac{١}{٢}ن(ن+١)$ ولنحصل على $س_{ن}$ نضيف لهذا العدد الأعداد $(ن-١)$ التي تسبقه مباشرة، وبذلك يكون

$$س_{ن} = \frac{١}{٢}ن(ن+١) + \left[\left(\frac{١}{٢}ن(ن+١)\right)-١\right] + \left[\left(\frac{١}{٢}ن(ن+١)\right)-٢\right] + \cdots + \left[\left(\frac{١}{٢}ن(ن+١)\right)-(ن-١)\right]$$

$$= ن\left(\frac{١}{٢}ن(ن+١)\right) - (١+٢+٣+\cdots+ن-١)$$

$$= \frac{١}{٢}ن^{٢}(ن+١) - \frac{١}{٢}ن(ن-١)$$

$$= \frac{١}{٢}ن(ن^{٢}+١)$$

وإذا عوضنا ن = ١٢ نحصل على المجموع $س_{١٢} = \frac{١}{٢}(١٢)(١٢^{٢}+١) = ٨٧٠$

الســـــؤال الخامس والعشرون:

اخترنا خمسة أعداد من الجدول الآتي بشرط عدم اختيار عددين من نفس السطر أو من نفس العمود. أثبت أن الأعداد الخمسة هذه دائماً لها نفس المجموع.

١	٤	٧	١٠	١٣
١٦	١٩	٢٢	٢٥	٢٨
٣١	٣٤	٣٧	٤٠	٤٣
٤٦	٤٩	٥٢	٥٥	٥٨
٦١	٦٤	٦٧	٧٠	٧٣

الحـــــــل:

الأعداد الخمسة هذه لها الصيغة التالية

١ + ٣ب، ١٦ + ٣جـ، ٣١ + ٣ر، ٤٦ + ٣هـ، ٦١ + ٣و

حيث {ب، جـ، ر، هـ، و} ⊂ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}. وكذلك لا يوجد عددين من الأعداد {ب، جـ، ر، هـ، و} لهما نفس القيمة؛ أي أن {ب، جـ، ر، هـ، و} = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}، وبذلك يكون

ب + جـ + ر + هـ + و = ٠ + ١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠

إذن مجموع الأعداد الخمسة دائماً يساوي

(١+٣ب) + (١٦+٣جـ) + (٣١+٣ر) + (٤٦+٣هـ) + (٦١+٣و) = ١٥٥ + ٣(ب+جـ+ر+هـ+و)

= ١٥٥ + ٣(٠+١+٢+٣+٤)

= ١٥٥ + ٣ × ١٠

= ١٨٥

الســــــؤال السادس والعشرون:

ما هو عدد الكلمات التي تحتوي على ٢ن حرفاً نصفها جـ والنصف الآخر ر وتحقق الخاصية التالية: عندما تقرأ من اليمين إلى اليسار فإن عدد حروف جـ عند أي مكان لا تقل عن عدد حروف ر.

الحـــــــل:

لاحظ أولاً أنه بدون الشرط المذكور فإنه يوجد $\binom{\text{٢ن}}{\text{ن}}$ كلمة طولها ٢ن نصف حروفها جـ والنصف الآخر ر. بعض هذه الكلمات "سيئة" وهي التي فيها عند لحظة ما عدد حروف جـ تقل عن عدد حروف ر. لنأخذ أحدى هذه الكلمات السيئة وأول مرة يجتاز فيها عدد حروف الدال (ر) عدد حروف الجيم (جـ) نبدل الحروف من أول الكلمة (من اليمين) إلى حرف الدال ر هذا، (حرف الجيم (جـ) يصبح ر وحرف الدال (ر) يصبح جـ، وبذلك نكون قد حصلنا على كلمة عدد حروفها ٢ن وفيها ن+١ حرف جـ وَ ن−١ حرف ر. وبهذه الطريقة نحصل على دالة تقابل بين فئة الكلمات السيئة (التي فيها عند لحظة ما عدد حروف جـ تقل عن عدد حروف ر) وبين الكلمات التي عدد حروفها ٢ن وفيها ن+١ حرف جـ وَ ن−١ حرف ر. وبهذا يكون عدد الكلمات السيئة يساوي $\binom{\text{٢ن}}{\text{ن}+١}$. إذن عدد الكلمات المطلوبة يساوي

$$\binom{\text{٢ن}}{\text{ن}}-\binom{\text{٢ن}}{\text{ن}+١}=\binom{\text{٢ن}}{\text{ن}}-\frac{\text{ن}}{(\text{ن}+١)}\binom{\text{٢ن}}{\text{ن}}$$

$$=\binom{\text{٢ن}}{\text{ن}}\left[١-\frac{\text{ن}}{(\text{ن}+١)}\right]$$

$$=\frac{\text{ن}}{(\text{ن}+١)}\times\binom{\text{٢ن}}{\text{ن}}$$

السـؤال السابع والعشرون:

أوجد عدد الكلمات المكونة من $ن$ حرفاً من حروف المجموعة $س = \{أ، ب، جـ، د\}$ وتحتوي على عدد زوجي من الحرف د.

الحـل:

نستخدم مبدأ التقابل في هذه المسألة. لنفرض أن $ع(ن)$ يساوي عدد الكلمات المكونة من $ن$ حرفاً من المجموعة $س$ والتي تحتوي على عدد زوجي من الحرف د، ولنفرض أيضاً أن $ص_ز$ هي المجموعة التي تضم جميع هذه الكلمات؛ يعني $ع(ن) = |ص_ز|$. لنفرض الآن أن $ص$ تمثل مجموعة جميع الكلمات المكونة من $ن$ حرفاً من المجموعة $س$. إذن $|ص| = ٤^ن$. لنقسم الآن المجموعة $ص$ إلى مجموعتين، الأولى $ص_١$ وتحتوي على جميع الكلمات من $ص$ والمكونة من حرفين فقط $\{أ، ب\}$ وبذلك يكون $|ص_١| = ٢^ن$، والمجموعة الثانية $ص_٢$ وتحتوي على جميع الكلمات المتبقية في $ص$. ويكون بذلك $ص = ص_١ \cup ص_٢$.

الآن نقسم المجموعة $ص_٢$ إلى مجموعتين أيضاً: $ص_{٢ز}$ التي تحتوي على الكلمات في $ص_٢$ وعدد حروف الدال فيها زوجي، والأخرى $ص_{٢ف}$ وهي الكلمات في $ص_٢$ وعدد حروف الدال فيها فردي، كما نعرف الدالة $هـ: ص_{٢ز} \to ص_{٢ف}$ كما يلي: ننظر إلى أول حرف في الكلمة (من اليمين لليسار) لا يساوي أ أو ب. إذا كان هذا الحرف جـ فإن الدالة هـ تغيّره إلى د وإذا كان هذا الحرف د فإن الدالة هـ تغيّره إلى جـ. نلاحظ أن الدالة هـ تطابق، وهذا يعني أن

$$|ص_{٢ز}| = |ص_{٢ف}| = ع(ن).$$

الآن $$|ص_ز| = |ص_١| + |ص_{٢ز}| = ع(ن)$$

وحيث أن $$ص = ص_١ \cup ص_٢$$

فإن $$٤^ن = |ص| = |ص_١| + |ص_٢| = |ص_١| + ٢|ص_{٢ز}|$$

لذلك $$٤^ن = ٢^ن + ٢|ص_{٢ز}|$$

أي أن $$|ص_{٢ز}| = \frac{١}{٢}(٤^ن - ٢^ن)$$

وبذلك يكون $$ع(ن) = ٢^ن + \frac{١}{٢}(٤^ن - ٢^ن) = |ص_١| + |ص_{٢ز}| = \frac{١}{٢}(٤^ن + ٢^ن)$$

السـؤال الثامن والعشرون: (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٧٢)

المجموعة $س$ مكونة من عشرة أعداد من الأعداد التالية: ١٠، ١١، ١٢، ...، ٩٩. أثبت أنه يمكن دائماً إيجاد مجموعتين جزئيتين منفصلتين من $س$ بحيث يكون مجموع عناصر الأولى مساوياً لمجموع عناصر الثانية.

الحــــــل:

نستخدم مبدأ برج الحمام. عدد المجموعات الجزئية الأصلية المختلفة للمجموعة سـ (التي لا تساوي سـ نفسها وغير الخالية) يساوي ٢^١٠ – ٢ = ١٠٢٤ – ٢ = ١٠٢٢.

لاحظ أن أي مجموعة جزئية أصلية من سـ تحتوي على ٩ أعداد أو أقل ويكون أكبر مجموع يمكن الحصول عليه يساوي

$$٩١ + ٩٢ + \cdots + ٩٩ = ٨٥٥$$

وهذا يعني أن هناك على الأكثر ٨٥٥ مجموعاً مختلفاً للمجموعات الجزئية الأصلية للمجموعة سـ والتي عددها ١٠٢٢، وحسب مبدأ برج الحمام لا بد من وجود مجموعتين جزئيتين أصليتين مختلفتين لهما نفس المجموع. قد تكون هاتان المجموعتان غير منفصلتين وتحتويان على عنصر مشترك، ففي هذه الحالة نحذف العنصر المشترك لنحصل على مجموعتين جزئيتين مجموع عناصرهما متساوٍ. وإذا تكرر وجود عنصر آخر مشترك، فإننا نحذفه مرة أخرى وهكذا إلى أن نحصل على مجموعتين جزئيتين منفصلتين من سـ ومجموع عناصرهما متساوٍ.

لاحظ أيضاً أنه لا يمكن أن يكون المجموع النهائي بعد حذف العناصر المشتركة صفراً وذلك لأنه في هذه الحالة تكون المجموعتان متطابقتين.

الســـــؤال التاسع والعشرون: (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٧٢)

ﻧ وَ م عددان صحيحان موجبان. أثبت أن العدد ﻧ! م! (ﻧ + م)! يقسم العدد (٢ﻧ)! (٢م)!.

الحــــــل:

لنعرف الدالة $د(ﻧ ، م) = \frac{(٢ﻧ)!\,(٢م)!}{ﻧ!\,م!\,(ﻧ + م)!}$

المطلوب إثبات أن مدى الدالة مجموعة جزئية من ط. سنثبت أولا أن

$$د(ﻧ ، م) = ٤ \cdot د(ﻧ ، م - ١) - د(ﻧ + ١، م - ١) \qquad (*)$$

الطرف الأيسر للمعادلة (*) =

$$= ٤ \times \frac{(٢ن)!\,(٢م-٢)!}{ن!\,(م-١)!\,(ن+م-١)!} - \frac{(٢ن+٢)!\,(٢م-٢)!}{(ن+١)!\,(م-١)!\,(ن+م)!}$$

$$= \frac{٤(ن+١)(ن+م)\,(٢ن)!\,(٢م-٢)! - (٢ن+٢)!\,(٢م-٢)!}{(ن+١)!\,(م-١)!\,(ن+م)!}$$

$$= \frac{٢(ن+١)\,(٢ن)!\,(٢م-٢)!\left[٢(ن+م)-(٢ن+١)\right]}{(ن+١)!\,(م-١)!\,(ن+م)!}$$

$$= \frac{٢(ن+١)\,(٢ن)!\,(٢م-٢)!\,(٢م-١)}{(ن+١)!\,(م-١)!\,(ن+م)!}\cdots\times\frac{م}{م}$$

$$= \frac{(٢ن)!\left[٢م\,(٢م-١)\,(٢م-٢)!\right]}{ن!\,م!\,(ن+م)!}$$

$$= \frac{(٢ن)!\,(٢م)!}{ن!\,م!\,(ن+م)!}$$

$$= د(ن\text{، }م)$$

بتكرار تطبيق المعادلة (*) عدة مرات وحيث ننقص في كل مرة ١ من العنصر الثاني من $د(ن\text{، }م)$نستطيع كتابة $د(ن\text{، }م)$ على صورة

$$د(ن\text{، }م) = \sum_{ر} أ_ر \cdot د(ر\text{، }٠) \qquad (**)$$

حيث $أ_ر$ عدد صحيح موجب. وبما أن العدد

$$د(ر\text{، }٠) = \frac{٢ر!}{ر!\,٠!\,ر!}$$

يمثل المعاملات في مفكوك نظرية ذات الحدين فهو عدد صحيح، وعليه يكون المجموع في المعادلة (**) عدداً صحيحاً . نستنتج من ذلك أن العدد $ن!\,م!\,(ن+م)!$ يقسم العدد $(٢ن)!\,(٢م)!$.

الســـــؤال الثلاثون: (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٦٧)

في إحدى المسابقات وزعت $م$ من الميداليات على مدى $ن$ من الأيام ($ن > ١$). في اليوم الأول وزعت ميدالية واحدة و $\frac{١}{٧}$ مما تبقى من الميداليات. في اليوم التالي وزعت ميداليتان و $\frac{١}{٧}$ مما تبقى من الميداليات، وهكذا. في آخر يوم وزع ما تبقى من الميداليات وعددها $ن$. ما العدد الكلي للميداليات؟ وما عدد الأيام التي وزعت فيها الميداليات؟

الحـــــل:

لنفرض أن عدد الميداليات التي وزعت في اليوم $ر$ يساوي $ك_ر$ وعدد الميداليات الموجودة في بداية ذلك اليوم يساوي $م_ر$. بذلك يكون

$$ك_ر = ر + \frac{م_ر - ر}{٧} = \frac{م_ر}{٧} - \frac{٦ر}{٧}$$

وكذلك $ك_{ر-١} = م_{ر-١} - م_ر$. سنحاول الآن إيجاد علاقة بين $ك_ر$ وَ $ك_{ر-١}$. لاحظ أن

$$ك_{ر-١} - ك_ر = \left[\frac{م_{ر-١}}{٧} - \frac{٦(ر-١)}{٧}\right] - \left[\frac{م_ر}{٧} - \frac{٦ر}{٧}\right]$$

$$= \frac{م_{ر-١} - م_ر - ٦}{٧}$$

$$= \frac{ك_{ر-١}}{٧} - \frac{٦}{٧}$$

إذن
$$\frac{٦ك_{ر-١}}{٧} = ك_ر - \frac{٦}{٧}$$

أي أن
$$ك_{ر-١} = \frac{٧}{٦}ك_ر - ١ \qquad (*)$$

من المعطيات، $ك_ن = ن$ وبالتعويض في (*) نحصل على

$$ك_{ن-١} = \frac{٧}{٦}ن - ١ = \frac{٧ن - ٦}{٦} \qquad (**)$$

من هذه المعادلة نستنتج أن $ن$ تقسم على العدد ٦ وعليه فإن $ن \geq ٦$. إذا عوضنا الآن $جـ = ن - ٦$، فإن $جـ \geq ٠$، وبالتعويض في المعادلة (**) نحصل على

$$ك_{ن-١} = \frac{٧ن}{٦} - ١ = \frac{٧جـ}{٦} + ٦$$

بتطبيق المعادلة (*) نحصل على

$$ك_{ن-٢} = \frac{٧ك_{ن-١}}{٦} - ١ = \frac{٧}{٦}\left(\frac{٧جـ}{٦} + ٦\right) - ١ = \left(\frac{٧}{٦}\right)^٢ جـ + ٦$$

وكذلك

$$ك_{ن-٣} = \left(\frac{٧}{٦}\right)^٣ جـ + ٦ \quad ، \quad ك_{ن-٤} = \left(\frac{٧}{٦}\right)^٤ جـ + ٦ ، \ldots ، ك_١ = \left(\frac{٧}{٦}\right)^{ن-١} جـ + ٦$$

وبما أن $ك_١$ عدد صحيح موجب، فإن العدد $٦^{ن-١}$ يقسم $جـ = ن - ٦$. نستنتج من هذا أن $ن = ٦$ لأن $ن - ٦ < ٦^{ن-١}$. وعليه يكون عدد الأيام $ن = ٦$؛ وعدد الميداليات التي وزعت في كل يوم من الأيام الست هو ٦ والعدد الكلي للميداليات التي وزعت $م = ٣٦$.

٣-٤ أسئلة وحلول في الهندسة

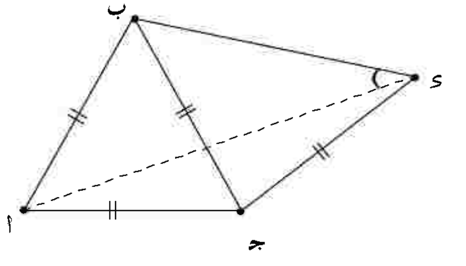
السـؤال الأول:

لدينا أربع نقاط ا، ب، جـ، ء في المستوى. إذا كان $|اب| = |بجـ| = |اجـ| = |جـء|$ فإن $\widehat{اءب} =$

أ) ١٥°
ب) ٣٠°
ج) ٤٥°
د) ٦٠°
هـ) ٩٠°

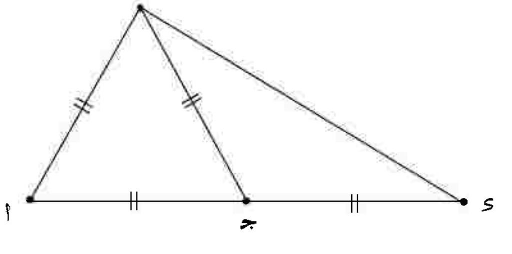
الحـل:

لنبدأ بوضع النقاط في المستوى والتوصيل بينها كما في الشكل التالي. لاحظ أن هناك عدداً لانهائياً من الطرق لوضع النقاط لأن المسافة بين نقطتي ب وَ ء غير محددة أو مرتبطة بأي من المسافات الأخرى. الوضع الموجود في الرسم أدناه هو إحدى هذه الطرق. يمكنك ملاحظة أن Δابجـ متطابق الأضلاع بينما كل من Δجـبء و Δاجـء متطابق الضلعين (هل يوصلنا ذلك إلى حل؟).



تستطيع أن تصل إلى حل بملاحظة التالي (بالمناسبة اعتبار بعض الحالات الخاصة، عندما يكون ذلك متاحاً، يُعد إستراتيجية دارجة لتقدير الحل أو لإقصاء بعض الخيارات):

بما أن النقطة ء يمكن أن تكون في أي وضع ما دامت تحافظ على مسافة بينها وبين النقطة جـ مساوية للمسافة بين النقطة جـ والنقطة ب ، فإنه يمكننا أن نضع النقطة ء على امتداد اجـ كما في الشكل التالي:



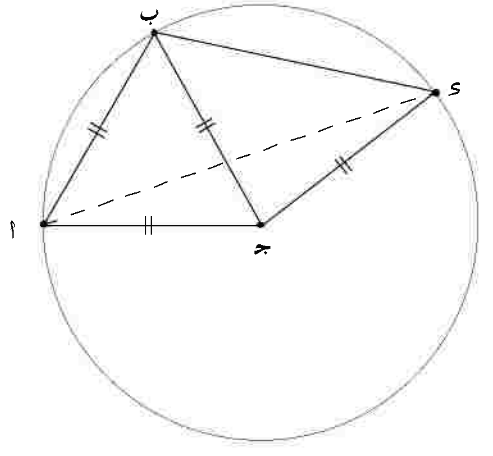
∵ Δ ا ب جـ متطابق الأضلاع وقياس كل زاوية من زواياه ٦٠° وبما أن $\widehat{\text{ء جـ ب}}$ زاوية خارجية

∴ $\widehat{\text{ء جـ ب}}$ = ١٢٠°

∵ Δ ب جـ ء متطابق الضلعين

∴ $\widehat{\text{ا ء ب}} = \frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢} = ٣٠°$

لنفرض الآن أن السؤال يتضمن أطوال الأضلاع بحيث لا يمكن للنقطة ء أن تكون على امتداد اجـ . إن وجود هذا العدد من القطع المستقيمة المتطابقة يستدعي أن نفكر فيها كأنصاف أقطار في دائرة مركزها النقطة جـ كما في الشكل التالي

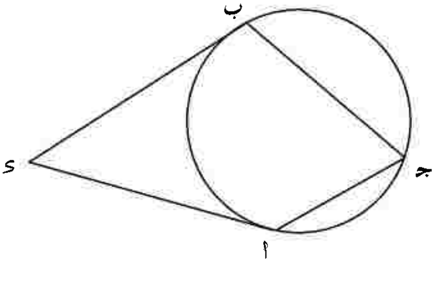


∵ $\widehat{\text{ا ء ب}}$ زاوية محيطية مشتركة بالقوس مع الزاوية المركزية $\widehat{\text{ا جـ ب}}$

∴ $\widehat{\text{ا ء ب}} = \frac{\widehat{\text{ا جـ ب}}}{٢} = \frac{٦٠°}{٢} = ٣٠°$

السـؤال الثاني:

في الشكل المرفق، $\hat{\text{ء}}$ = ٤٢° والقطعتان المستقيمتان ء ا وَ ء ب تمسان الدائرة. $\widehat{\text{ب جـ ا}}$ =

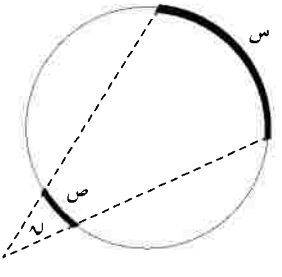


أ) ٢١°
ب) ٤٢°
ج) ٤٨°
د) ٦٩°
هـ) ٩٠°

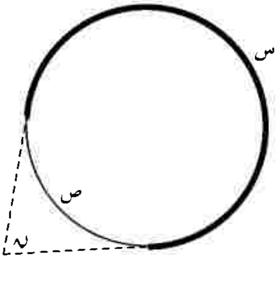
الحــــــل:

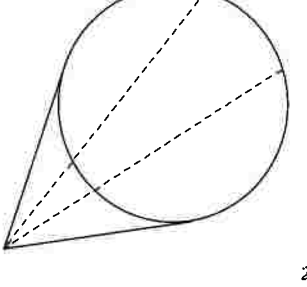
بما أن النقطة ء خارج الدائرة فإن أول ما يجب أن يقفز إلى ذهننا هو العلاقات التي تحكم النقطة الخارجة عن الدائرة. يمكننا أن نستنتج بسرعة أن |ءب| = |ءا| لأنهما يمسان الدائرة من نقطة خارجها. ولكن السؤال معنيٌ بإيجاد قياس زاوية وليس بإيجاد أطوال!

هل تتذكر العلاقة الأخرى التي تنص على أن "*قياس الزاوية الناتجة عن تقاطع قاطعين لدائرة في نقطة خارجها يساوي نصف حاصل طرح الزاويتين المركزيتين المقابلتين لقوسين المحصورين بين القاطعين*"؟ أي : $\hat{ن} = \frac{\widehat{س} - \widehat{ص}}{٢}$ (حيث $\widehat{س}$ تعني الزاوية المركزية المقابلة للقوس س)



يمكننا الآن الربط بين ما هو مطلوب والعلاقة الأخيرة هذه إذا لاحظنا أن العلاقة تبقى صحيحة إذا ما اتسع ضلعا الزاوية ن ليصبحا مماسين للدائرة. وفي هذه الحالة فإن القوسين س وَ ص يشكلان كامل محيط الدائرة.

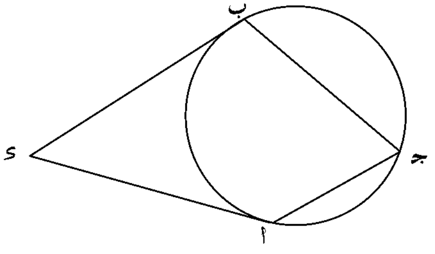




يمكننا كتابة

$$\hat{ه} = \frac{\widehat{س} - \widehat{ص}}{٢}$$

بالرجوع إلى مسألتنا الأصلية، نرمز للقوس الكبير $\overset{\frown}{أب}$ بالرمز $\overset{\frown}{س}$ وللقوس الصغير $\overset{\frown}{أب}$ بالرمز $\overset{\frown}{ص}$.



من الواضح أن

$$\frac{\widehat{س} - \widehat{ص}}{٢} = \hat{ء} = ٤٢^\circ$$

أو $\widehat{س} - \widehat{ص} = ٨٤^\circ$ (*)

من الواضح أيضاً أن مجموع الزاويتين المركزيتين المقابلتين للقوسين $\overset{\frown}{س}$ وَ $\overset{\frown}{ص}$ يساوي ٣٦٠° ، أي

$\widehat{س} + \widehat{ص} = ٣٦٠^\circ$ (**)

بحل المعادلتين (*) و (**) نجد أن

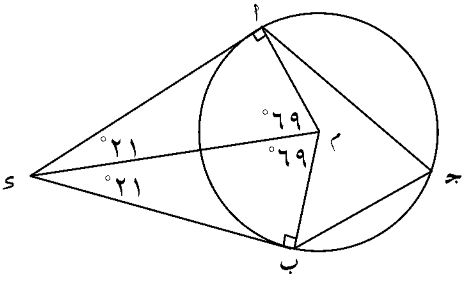
$$\widehat{ص} = ١٣٨^\circ$$

أخيراً لاحظ أن $\widehat{ب جـ أ}$ زاوية محيطية تحصر بين ضلعيها القوس $\overset{\frown}{ص}$.

$$\therefore \widehat{ب جـ أ} = \frac{\widehat{ص}}{٢} = ٦٩^\circ$$

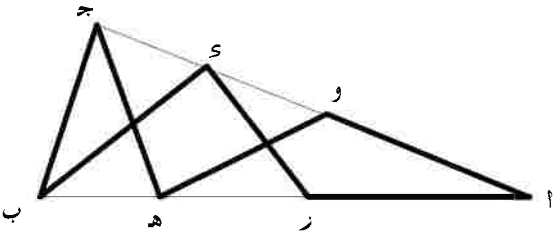
حل آخر:

الشكل التالي الناتج عن توصيل مركز الدائرة م بنقاط التماس يعطي حلاً آخر ربما يكون أبسط. الزاوية بين المماس ونصف قطر الدائرة قائمة. بملاحظة تطابق Δ أمء وَ Δ بمء يمكننا بسهولة تحديد الزوايا الموضحة في الشكل. الآن من الواضح أن $\widehat{ب جـ أ}$ زاوية محيطية مشتركة بالقوس مع الزاوية المركزية $\widehat{ب م أ}$. وبذلك تكون $\widehat{ب جـ أ} = ٦٩^\circ$.



السـؤال الثالث:

في الشكل المرفق إذا كان |أز|=|زء|=|ءب|=|بج|=|جه|=|هو|=|وا| ، فإن أ̂ =



أ) $\frac{360°}{29}$

ب) $15°$

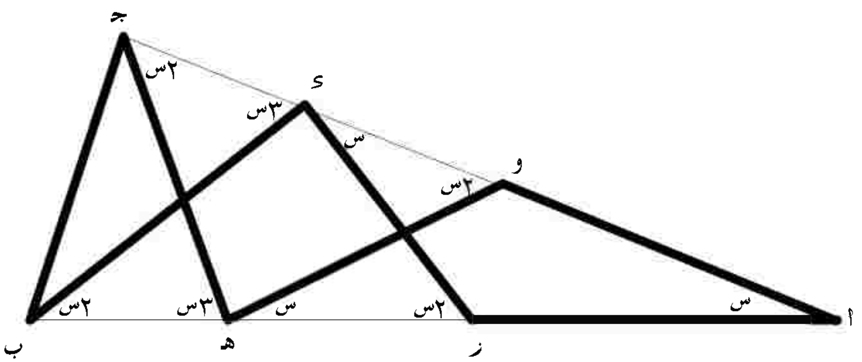
ج) $\frac{180°}{11}$

د) $\frac{180°}{7}$

هـ) $30°$

الحـل:

لنفرض بداية أن أ̂=س . هنالك العديد من المثلثات (وكثير منها متطابق الضلعين) وبالطبع نعرف أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠° . لنبدأ بتحديد الزوايا التي يمكن معرفتها بمعلومية الزاوية المطلوبة. في الشكل أدناه يمكننا تعيين الزوايا الظاهرة على التوالي (نقترح رسم الشكل وتحديد الزوايا بالتوالي) كالتالي:



Δازء متطابق الضلعين $\Leftarrow$ $\widehat{\text{اءز}}$ = س

Δاوهـ متطابق الضلعين $\Leftarrow$ $\widehat{\text{اهـو}}$ = س

$\widehat{\text{ءوهـ}}$ زاوية خارجية بالنسبة للمثلث Δاوهـ $\Leftarrow$ $\widehat{\text{ءوهـ}}$ = ٢س

$\widehat{\text{هـزء}}$ زاوية خارجية بالنسبة للمثلث Δازء $\Leftarrow$ $\widehat{\text{هـزء}}$ = ٢س

Δوهـجـ متطابق الضلعين $\Leftarrow$ $\widehat{\text{وجـهـ}}$ = ٢س

Δبزء متطابق الضلعين $\Leftarrow$ $\widehat{\text{ءبز}}$ = ٢س

$\widehat{\text{بهـجـ}}$ زاوية خارجية بالنسبة للمثلث Δاهـجـ $\Leftarrow$ $\widehat{\text{بهـجـ}}$ = ٣س

$\widehat{\text{جـءب}}$ زاوية خارجية بالنسبة للمثلث Δاءب $\Leftarrow$ $\widehat{\text{جـءب}}$ = ٣س

Δجـهـب متطابق الضلعين $\Leftarrow$ $\widehat{\text{جـبهـ}}$ = ٣س

Δجـبء متطابق الضلعين $\Leftarrow$ $\widehat{\text{ءجـب}}$ = ٣س

الآن يمكننا الاستعانة بصديقنا القديم !

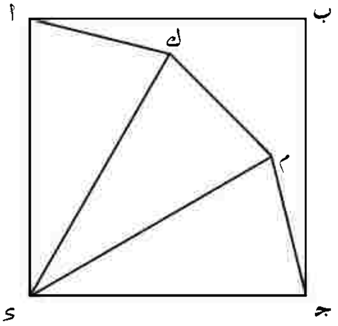
$\because$ مجموع قياسات زوايا Δابجـ يساوي ١٨٠°

$\therefore$ س + ٣س + ٣س = ٧س = ١٨٠°

$\therefore$ س = $\hat{\text{أ}}$ = $\frac{\text{١٨٠°}}{\text{٧}}$

السـؤال الرابع:

النقطتان ك وَ م تقعان داخل المربع ابجـء بحيث يكون |ءا| = |ءك| = |ءم| = |ءجـ| وَ $\widehat{\text{اءك}}$ = $\widehat{\text{كءم}}$ = $\widehat{\text{مءجـ}}$. المثلث Δبكم



أ) متطابق الأضلاع
ب) فيه ضلعان فقط متطابقان
ج) منفرج الزاوية
د) قائم
هـ) مختلف الأضلاع

الحـــل:

ليس مستغرباً (بدعم واضح من الشكل والتناظر فيه) أن تفكر في الاختيار الأول (Δ بكم متطابق الأضلاع)! لكنك بالتأكيد بحاجة لإثبات ذلك. أي أنك بحاجة لإثبات أن |بك|=|مب|=|كم| أو أن قياس كل زاوية من زاويا المثلث ٦٠°.

دعنا نسرد ما يمكننا معرفته بسرعة:

$$\widehat{\text{اءك}}=\widehat{\text{كءم}}=\widehat{\text{مءجـ}}=\frac{\text{٩٠}^\circ}{\text{٣}}=\text{٣٠}^\circ$$

كل من Δاءك وَ Δكءم وَ Δمءجـ متطابق الضلعين.

$$\Leftarrow\ \widehat{\text{ءاك}}=\widehat{\text{اكء}}=\widehat{\text{ءكم}}=\widehat{\text{ءمك}}=\widehat{\text{جـمء}}=\widehat{\text{ءجـم}}=\text{٧٥}^\circ$$

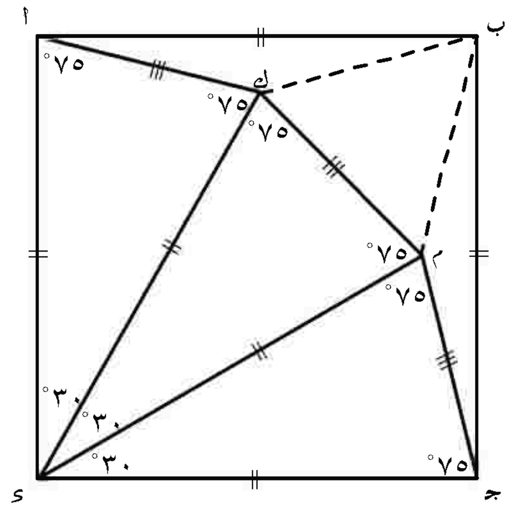
$$\therefore\ \widehat{\text{باك}}=\widehat{\text{بجـم}}=\text{٩٠}^\circ-\text{٧٥}^\circ=\text{١٥}^\circ$$

Δاءك $\cong$ Δكءم $\cong$ Δمءجـ لتطابق ضلعين والزاوية المحصورة بينهما ($\cong$ تعني تطابق)

$\Leftarrow$ |اك|=|كم|=|مجـ|

Δباك $\cong$ Δبجـم لتطابق ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

$\Leftarrow$ |بك|=|بم|



يتبقى أن نثبت أن ب ك أو ب م يطابق ك م !!!

نركز على ب م وَ ك م ونحاول أن نجد مثلثين (ربما متطابقين) يكون كل منهما ضلعاً فيه.

المثلثان Δ ا ب م وَ Δ ى ك م مفيدان في هذا السياق.

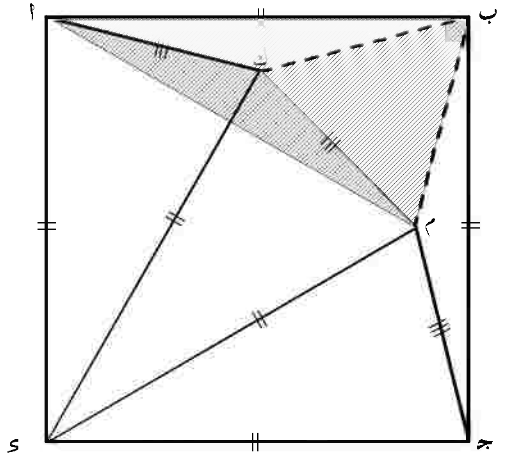
ليس صعباً أن ترى أن Δ ا م ى متطابق الأضلاع ($\widehat{\text{م ى ا}} = 60^\circ$ وَ $|\text{ا ى}| = |\text{م ى}|$)

$\therefore\ \widehat{\text{ب ا م}} = 90^\circ - \widehat{\text{م ا ى}} = 30^\circ$

$\therefore\ \Delta \text{ا ب م} \cong \Delta \text{ى ك م}$

$\therefore\ |\text{ب م}| = |\text{ك م}|$

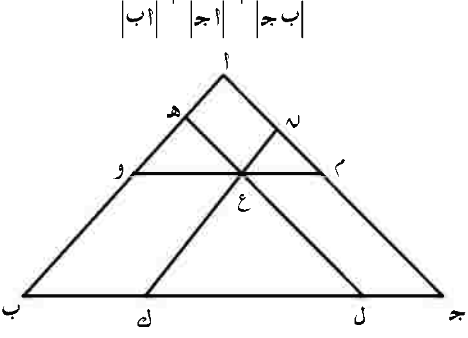
$\therefore$ Δ ب ك م متطابق الأضلاع



السـؤال الخامس:

النقاط ك ، ل ، م ، ن ، هـ ، و تقع على أضلاع Δ ا ب جـ كما في الشكل المرفق. القطع المستقيمة و م وَ ل هـ وَ ن ك موازية على التوالي لِـ ب جـ وَ جـ ا وَ ا ب وتمر جميعها في ع .

$$\frac{|\text{ك ل}|}{|\text{ب جـ}|} + \frac{|\text{م ن}|}{|\text{ا جـ}|} + \frac{|\text{هـ و}|}{|\text{ا ب}|} =$$



أ) $\frac{١}{٥}$

ب) $\frac{١}{٤}$

ج) $\frac{١}{٣}$

د) $\frac{١}{٢}$

هـ) ١

الحـــــل:

مثلثات وخطوط متوازية والمطلوب يتضمن نسب أضلاع ...... ترشيح قوي لاستخدام تشابه المثلثات.

هل تلاحظ أن $\triangle \text{نمع} \sim \triangle \text{هعو} \sim \triangle \text{علك} \sim \triangle \text{اجب}$ ؟

إذا لاحظت ذلك فسنحاول الآن توحيد مقام العبارة $\frac{|\text{كل}|}{|\text{بج}|}+\frac{|\text{من}|}{|\text{اج}|}+\frac{|\text{هو}|}{|\text{اب}|}$ بكتابة الكسر على أي من المقامات $|\text{بج}|$ أو $|\text{اج}|$ أو $|\text{اب}|$. نختار $|\text{اج}|$ ونستخدم تشابه المثلثات لإعادة كتابة $\frac{|\text{كل}|}{|\text{بج}|}$ وَ $\frac{|\text{هو}|}{|\text{اب}|}$ بالمقام $|\text{اج}|$.

$\triangle \text{علك} \sim \triangle \text{اجب}$ $\Leftarrow$ $\frac{|\text{كل}|}{|\text{بج}|}=\frac{|\text{عل}|}{|\text{اج}|}$

$\triangle \text{هعو} \sim \triangle \text{اجب}$ $\Leftarrow$ $\frac{|\text{هو}|}{|\text{اب}|}=\frac{|\text{هع}|}{|\text{اج}|}$

وبذلك يمكننا كتابة

$$\frac{|\text{كل}|}{|\text{بج}|}+\frac{|\text{من}|}{|\text{اج}|}+\frac{|\text{هو}|}{|\text{اب}|}=\frac{|\text{عل}|}{|\text{اج}|}+\frac{|\text{من}|}{|\text{اج}|}+\frac{|\text{هع}|}{|\text{اج}|}=\frac{|\text{عل}|+|\text{من}|+|\text{هع}|}{|\text{اج}|}$$

متوازيا الأضلاع انعه وَ مجلع يعطياننا الجزء الأخير من الحل لأن $|\text{عل}|=|\text{مج}|$ وَ $|\text{عه}|=|\text{نا}|$.

وبذلك

$$\frac{|\text{كل}|}{|\text{بج}|}+\frac{|\text{من}|}{|\text{اج}|}+\frac{|\text{هو}|}{|\text{اب}|}=\frac{|\text{عل}|+|\text{من}|+|\text{هع}|}{|\text{اج}|}=\frac{|\text{مج}|+|\text{من}|+|\text{نا}|}{|\text{اج}|}=\frac{|\text{اج}|}{|\text{اج}|}=١$$

السـؤال السادس:

في Δ ا ب جـ |ا ب| = |ا جـ| = ١٠ وَ |ب جـ| = ١٦ . إذا كانت س هي طول المتوسط من ب إلى ا جـ وكانت ص هي نصف قطر الدائرة الداخلية (الدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الداخل) فإن

أ) س = ٣ $\sqrt{١٧}$ ، ص = $\frac{٧}{٣}$

ب) س = $\sqrt{١٧}$ ، ص = $\frac{٧}{٣}$

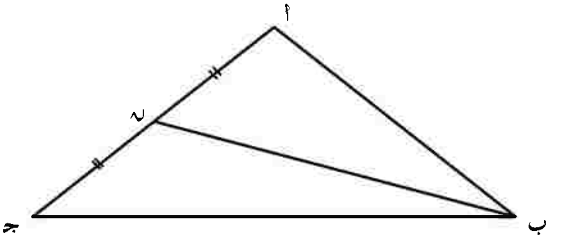
ج) س = ٣ $\sqrt{١٧}$ ، ص = $\frac{٨}{٣}$

د) س = ٤ $\sqrt{١٧}$ ، ص = $\frac{٧}{٣}$

هـ) س = ٤ $\sqrt{١٧}$ ، ص = $\frac{٨}{٣}$

الحـــل:

نبدأ برسم بسيط للمسألة كما في الشكل التالي ونعين ىـ كنقطة التقاء المتوسط من ب مع ا جـ .



كل ما لدينا مثلث متطابق الضلعين!!! كيف يساعدنا ذلك في الحصول على طول المتوسط ب ىـ ؟

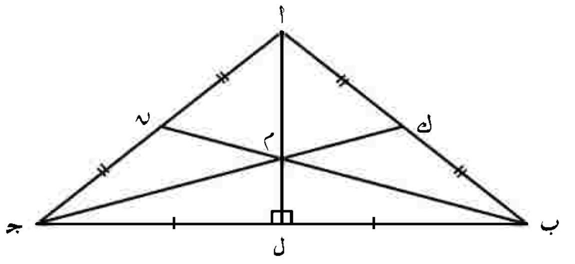
ماذا نعرف عن المتوسطات في مثلث ما؟
المتوسط يقسم ضلع المثلث إلى قسمين متطابقين، والمتوسطات الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة، وهذه النقطة بدورها تقسم كل متوسط بنسبة ٢ : ١ مع كون الجزء الأطول هو ذلك الذي يمتد للرأس.

لنقم برسم المتوسطين الآخرين كما في الشكل التالي. لاحظ أنه نتيجة لأن Δ ا ب جـ متطابق الضلعين فإن Δ ا ب ل $\cong$ Δ ا جـ ل (لتطابق ثلاثة أضلاع). وبذلك يكون المتوسط ا ل عمودياً على الضلع ب جـ . ربما من السهل الآن أن نحسب طول المتوسط ا ل.

$$|\text{ا ل}| = \sqrt{|\text{ا ب}|^{٢} - |\text{ب ل}|^{٢}} = \sqrt{(١٠)^{٢} - (٨)^{٢}} = ٦$$

∵ نقطة التقاء المتوسطات تقسم كل متوسط بنسبة ٢ : ١

∴ $|أم| = ٤$ وَ $|مل| = ٢$



سنقوم بحساب طول المتوسط بن بحساب الجزء الأطول منه (بم) والذي يمثل ثلثي المتوسط المطلوب بن .

∵ الجزء بم ضلع في المثلث القائم Δ بلم

$$\therefore\ |بم| = \sqrt{|مل|^٢ + |بل|^٢} = \sqrt{(٢)^٢ + (٨)^٢} = ٢\sqrt{١٧}$$

$$\therefore\ بن = \frac{٣}{٢}|بم| = ٣\sqrt{١٧}$$

نستطيع إجابة الجزء الثاني من السؤال إذا تذكرنا أن مساحة المثلث تساوي نصف محيطه مضروباً في نصف قطر الدائرة الداخلية. وفي مسألتنا الحالية

$$\text{مساحة } \Delta \text{ابجـ} = \frac{١}{٢}|بجـ||أل| = \frac{١}{٢}(١٦)(٦) = ٤٨$$

$$\text{نصف محيط } \Delta \text{ابجـ} = \frac{١٠+١٠+١٦}{٢} = ١٨$$

$$\therefore\ ص = \frac{٤٨}{١٨} = \frac{٨}{٣}$$

السـؤال السابع:

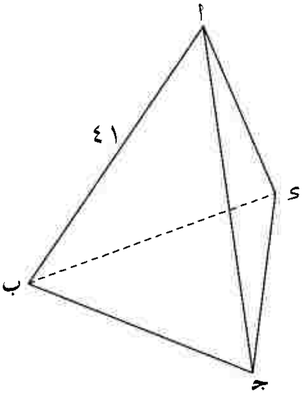
ابجـ ء هرم ثلاثي. قياس أطوال أضلاعه الستة ٧، ١٣، ١٨، ٢٧، ٣٦، ٤١ . إذا كان طول الضلع اب يساوي ٤١ فإن طول الضلع جـ ء

أ) ٧
ب) ١٣
ج) ١٨
د) ٢٧
هـ) ٣٦

الحـــــل:

دعنا نسأل السؤال الأهم في حل هذه المسألة ألا وهو: ما الذي يمنع من توزيع الأطوال المعطاة كيفما اتفق؟ بمعنى آخر، ماذا يمنع طول الضلع جـ ء من أن يأخذ القيمة ٧ أو ١٣ أو ٣٦ مثلاً؟
لا تجد ما يمنع؟ ... حسناً، هل يمكنك ربط سؤالنا هذا بكون أوجه الهرم مثلثة الشكل؟

نعم ... نعم ... المتباينة المثلثية هي بالضبط ما يمنع توزيع الأطوال بشكل عشوائي، فكون الأوجه مثلثة الشكل يعني أن أطوال أضلاع كل وجه يجب أن تحقق المتباينة المثلثية. ولكن كيف نوزع أو كيف نبدأ توزيع هذه الأطوال؟



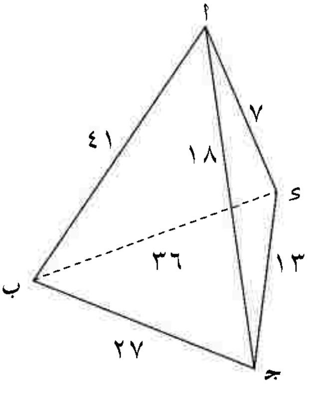
لنحاول الآن التركيز على المثلثين ا ب ء وَ ا ب جـ . بما أنه يجب علينا استرضاء المتباينة المثلثية فمن الواضح أن أطوال الأضلاع يجب أن تحقق التالي:
في Δا ب ء : |اء|+|ء ب|>٤١ (أي أن علينا اختيار |اء| وَ |ء ب| بحيث يكون مجموعهما أكبر من ٤١).
في Δا ب جـ : |ا جـ|+|جـ ب|>٤١ (أي أن علينا اختيار |ا جـ| وَ |جـ ب| بحيث يكون مجموعهما أكبر من ٤١).
الخيارات المتاحة للأضلاع اء وَ ء ب في Δا ب ء هي: (٧ وَ ٣٦) ، (١٣ وَ ٣٦) ، (١٨ وَ ٣٦) ، (٢٧ وَ ٣٦) ، (١٨ وَ ٢٧) فقط ، وجميع الأزواج بدون ترتيب (مثلاً : (٧ وَ ٣٦) لـ اء وَ ء ب أو لـ ء ب وَ اء سيان).

لاحظ أن أي اختيار للأضلاع اء وَ ء ب يحدد خياراتنا للأضلاع ا جـ وَ جـ ب في Δا ب جـ . ولذلك فالخيار (١٨ وَ ٣٦) مرفوض لأنه يترك الخيارات ٧،١٣،٢٧ للأضلاع ا جـ وَ جـ ب في Δا ب جـ وهذه الخيارات لا تحقق المتباينة المثلثية. وبالمثل فإن الخيار (٢٧ وَ ٣٦) مرفوض. يتبقى لدينا الخيارات (٧ وَ ٣٦) ، (١٣ وَ ٣٦) ، (١٨ وَ ٢٧) .

اختيار (٧ وَ ٣٦) للأضلاع اء وَ ء ب في Δا ب ء يحتم اختيار (١٨ وَ ٢٧) للأضلاع ا جـ وَ جـ ب في Δا ب جـ لأنه لا يمكن اختيار (١٣ وَ ٣٦) حيث أننا استخدمنا الطول ٣٦ .
وبالمثل فاختيار (١٣ وَ ٣٦) للأضلاع اء وَ ء ب يحتم اختيار (١٨ وَ ٢٧) للأضلاع ا جـ وَ جـ ب لأنه لا يمكن اختيار (٧ وَ ٣٦) لنفس السبب السابق. أي أن وجود الطول ٣٦ في Δا ب ء

يعني أن أطوال الأضلاع اجـ وَ جـب في Δابجـ تأخذ بالتأكيد القيم (١٨ وَ ٢٧) بصرف النظر عن الترتيب. من المهم ملاحظة أن تسمية رؤوس الهرم هي مسألة عشوائية ولذلك فإنه بإعادة تسمية الرأسين ء وَ جـ كـ جـ وَ ء فإن النقاش السابق يبقى صحيحاً. ولذلك يمكننا أن نجزم أن طول ضلعين في أحد المثلثين Δابء أو Δابجـ هما ١٨ وَ ٢٧ ، وليكن هذه المثلث هو Δابجـ.

اختيار (١٣ وَ ٣٦) للضلعين اء وَ ءب في Δابء يعني أن |ءجـ|=٧ . الآن إذا ربطنا الطول ٣٦ بالضلع ءب فمن السهل ملاحظة استحالة تحقيق المتباينة المثلثية في Δءبجـ لأنه لا يمكن للضلعين الآخرين أن يكونا أكبر من ٣٦ . أما إذا ربطنا الطول ٣٦ بالضلع اء فيستحيل تحقيق المتباينة المثلثية في Δاءجـ . بالتالي يتوجب علينا اختيار (٧ وَ ٣٦) للضلعين اء وَ ءب ، أي أن |ءجـ|=١٣ (ما يتبقى من الأطوال). لسنا مهتمين بتوزيع الأضلاع ولكن للمعلومية الشكل التالي يوضح هذا التوزيع حيث يمكن للقارئ التأكد من تحقق المتباينة المثلثية في جميع سطوح الهرم.



السـؤال الثامن:

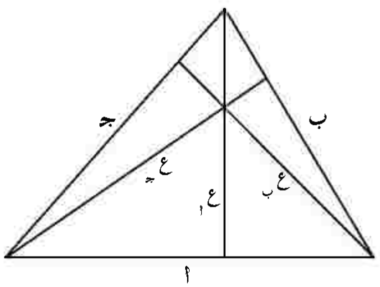
يمكن للارتفاعات الثلاثة في المثلث أن تكون

أ) ١،٢،٣
ب) ٢،٤،٥
ج) ٢،٥،٥
د) ٤،٦،٧
هـ) ٤،٩،١١

الحـــــل:

ماذا نعرف عن نسب ارتفاعات المثلثات؟ ليس من غير المتوقع ألا تتذكر أي قاعدة أو قانون يحكم هذه النسب !!! هل هناك في المثلثات ما له علاقة بهذه النسب؟ الأضلاع؟ ماذا يحكم أطوال الأضلاع؟ المتباينة المثلثية " مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث " ؟ هل هناك علاقة بين أطوال الأضلاع والارتفاعات؟

افرض أن أطوال أضلاع المثلث المرفق هي أ ، ب ، جـ . $ع_{أ}$ هو ارتفاع المثلث المرسوم إلى الضلع الذي طوله أ ، $ع_{ب}$ هو ارتفاع المثلث المرسوم إلى الضلع الذي طوله ب ، $ع_{جـ}$ هو ارتفاع المثلث المرسوم إلى الضلع الذي طوله جـ .



من المتباينة المثلثية نعرف أن

$$\text{أ}+\text{ب}>\text{جـ} \quad ، \quad \text{أ}+\text{جـ}>\text{ب} \quad ، \quad \text{ب}+\text{جـ}>\text{أ}$$

من الممكن ربط هذه العلاقات بالارتفاعات إذا استخدمنا حقيقة أن مساحة المثلث (م) تساوي حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع. أي $\text{م}=\text{أ}\times ع_{أ}=\text{ب}\times ع_{ب}=\text{جـ}\times ع_{جـ}$ ، والتي يمكن كتابتها عل الشكل التالي

$$\text{أ}=\frac{\text{م}}{ع_{أ}} \quad ، \quad \text{ب}=\frac{\text{م}}{ع_{ب}} \quad ، \quad \text{جـ}=\frac{\text{م}}{ع_{جـ}}$$

بالتعويض في المتباينة المثلثية نجد أن

$$\frac{\text{م}}{ع_{أ}}+\frac{\text{م}}{ع_{ب}}>\frac{\text{م}}{ع_{جـ}} \quad ، \quad \frac{\text{م}}{ع_{أ}}+\frac{\text{م}}{ع_{جـ}}>\frac{\text{م}}{ع_{ب}} \quad ، \quad \frac{\text{م}}{ع_{ب}}+\frac{\text{م}}{ع_{جـ}}>\frac{\text{م}}{ع_{أ}}$$

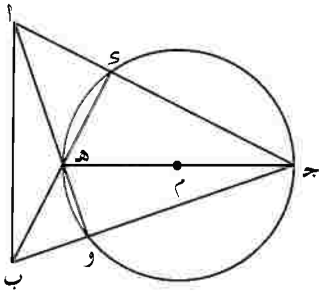
وبالقسمة على م نستطيع أن نجد متباينة مثلثية تربط مقلوبات الارتفاعات

$$\frac{1}{ع_{أ}}+\frac{1}{ع_{ب}}>\frac{1}{ع_{جـ}} \quad ، \quad \frac{1}{ع_{أ}}+\frac{1}{ع_{جـ}}>\frac{1}{ع_{ب}} \quad ، \quad \frac{1}{ع_{ب}}+\frac{1}{ع_{جـ}}>\frac{1}{ع_{أ}}$$

الآن كل ما علينا فعله هو التحقق أن الثلاثيات المعطاة تحقق العلاقة الأخيرة. بسهولة نجد أن الثلاثية المكونة من الأرقام ٧،٦،٤ هي الوحيدة التي تحقق هذه العلاقة.

السـؤال التاسع:

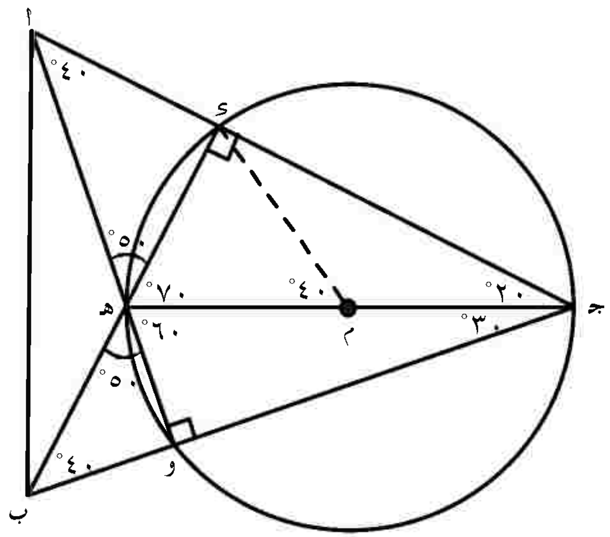
في الشكل المرفق، م مركز الدائرة وَ ءأهـ=٤٠° وَ ءهـ=٤٠°. هـأب=



أ) ١٥°
ب) ٣٠°
ج) ٤٥°
د) ٦٠°
هـ) ٩٠°

الحـل:

لنضع أولاً على الشكل التالي قياسات جميع الزوايا التي من الممكن معرفتها. يمكننا بالإضافة للزوايا المعطاة تتبع ومعرفة التالي:



ءجه = ٢٠° لأنها زاوية محيطية مشتركة بالقوس مع الزاوية المركزية ءمه

جوه = جءه = ٩٠° لأنهما زاويتين مرسومتين في نصفي دائرتين.

∴ ءهج = ٧٠° وَ اجو = ٥٠°

∴ هجو = ٣٠°

∴ جهو = ٦٠°

∴ ءها = وهب = ٥٠°

∴ اهب = ١٣٠°

هل استنفذنا كل ما نعرفه؟ هل يبدو هناك أي أمل في معرفة هاب ؟

أنظر إلى Δ ابج ....

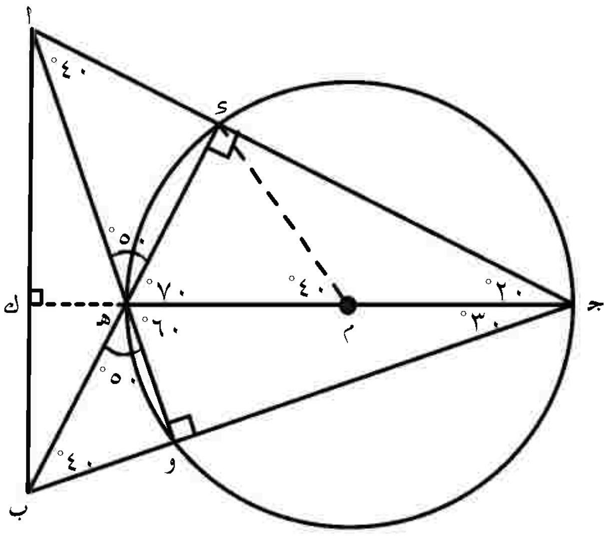
ماذا تمثّل او وَ بء ؟

نعم هي أعمدة في Δ ابج ...

ماذا عن جه الذي يقابل العمودين او وَ بء في نقطة ه ؟

نعم ... نعم ... يجب أن يكون العمود الثالث لأن الأعمدة الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة.

إذن لنمد جه حتى يقابل اب في ك.



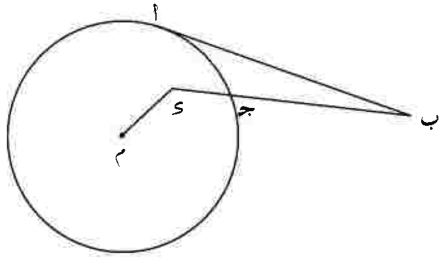
الآن

اكه = ٩٠° ، اهك = جهو = ٦٠°

∴ هاب = ٣٠°

السـؤال العاشر:

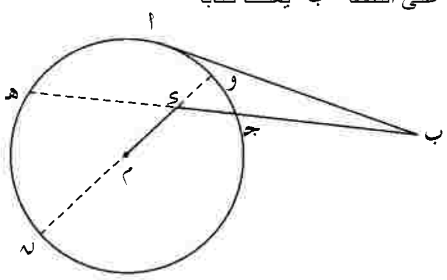
في الشكل المرفق ‌ا‌ب مماس للدائرة التي مركزها م في نقطة ا . إذا كانت |ب جـ|=|ء جـ|=٣ ، |م ء|=٢ ، |ا ب|=٦ فإن نصف قطر الدائرة يساوي



أ) ٢
ب) ٣
ج) $\sqrt{11}$
د) $\sqrt{17}$
هـ) $\sqrt{22}$

الحـل:

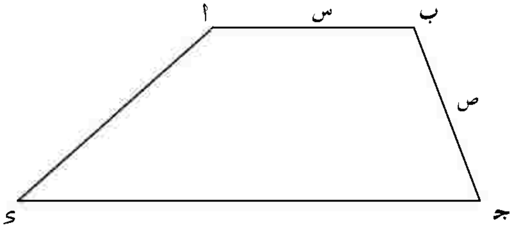
المسافات المعطاة من نقاط خارج وداخل الدائرة ربما تحثنا على استخدام مبرهنة قوة النقطة والتي تنص على أنه *إذا رسمنا قطعة مستقيمة من نقطة ثابتة ك بحيث تقطع دائرة ما في نقطتين س وَ ص ، فإن المقدار |ك س|×|ك ص| ثابت ولا يعتمد على اختيار النقطتين س وَ ص* . نمد القطعة المستقيمة ب ء لتقابل الدائرة في نقطة هـ كما نمد القطعة المستقيمة ء م لتقابل الدائرة في النقطتين و وَ ن .
بتطبيق المبرهنة على النقطة ب يمكننا كتابة



|ب ا|×|ب ا|=|ب جـ|×|ب هـ|، أي أن ٦×٦=٣×|ب هـ|، أي أن |ب هـ|=١٢ ،
أي أن |ء هـ|=١٢−٣−٣=٦
وبتطبيق المبرهنة على النقطة ء يمكننا كتابة
|جـ ء|×|ء هـ|=|و ء|×|ء ن|، أي أن |جـ ء|×|ء هـ|=(نق−|م ء|)×(نق+|م ء|)
أي أن ٣×٦=(نق−٢)×(نق+٢) ، ∴ نق = $\sqrt{22}$

الســــؤال الحادي عشر:

في شبه المنحرف المرفق ا ب جـ ى ، $\hat{ب} = ٢\ \hat{ى}$. إذا كانت |ا ب|=س وَ |ب جـ|=ص فإن |جـ ى|=

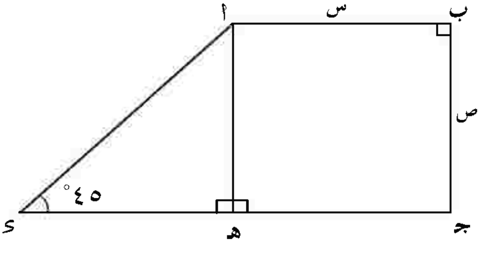


أ) ٢ص − س
ب) ٢ص + س
ج) س + ص
د) ٢س + ص
هـ) ٣س − ص

الحــــــل:

لاحظ أنه لا توجد قيمة محددة للزاوية $\hat{ب}$. هل يفيدك هذا في حل المسألة؟ هل اختيار قياس "جيد" للزاوية يسهّل حل المسألة؟ ماذا يمكنك أن تفعل إذا كانت $\hat{ب} = ٩٠°$ ؟

لنعيد رسم الشكل عندما تكون $\hat{ب} = ٩٠°$. في هذه الحالة تكون $\hat{ى} = ٤٥°$. الآن أسقط من نقطة ا عموداً يقابل القاعدة جـ ى في نقطة هـ .

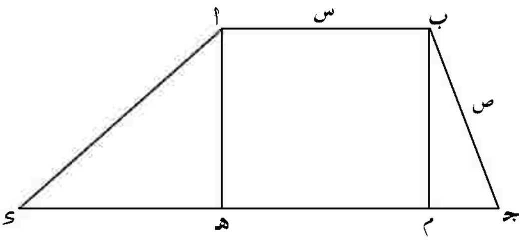


من الواضح أن $\widehat{هـ ا ى} = ٤٥°$ وَ Δ ا هـ ى متطابق الضلعين.

∴ |هـ ى| = |ا هـ| = ص

∴ |جـ ى| = |جـ هـ| + |هـ ى| = س + ص

الآن سنقوم بحل المسألة مرةً أخرى ولكن هذه المرة بدون تعيين قيمة للزاوية بَ̂ . أسقط من نقطة أ عموداً يقابل القاعدة جـ ء في نقطة هـ وأسقط من النقطة ب عموداً يقابلها في نقطة م . القاعدة جـ ء مكونة من ثلاثة أجزاء جـ م وَ م هـ وَ هـ ء . سنقوم بحساب كل جزء على حدة.



|م هـ| = |ب أ| = س

في Δ ب جـ م ،

|جـ م| = ص × جتا جـ̂

∵ جـ̂ = ١٨٠° − بَ̂ (نقصد بالطبع جـ ب أ)

∴ جـ م = ص × جتا (١٨٠° − بَ̂) = − ص × جتا بَ̂

وَ |ب م| = ص × جا (١٨٠° − بَ̂) = ص × جا بَ̂

في Δ أ هـ ء ،

|هـ ء| = |أ هـ| × ظتا ءَ̂ = |ب م| × ظتا ءَ̂ = ص × جا بَ̂ × ظتا ءَ̂

باستخدام المعطى بَ̂ = ٢ ءَ̂ يمكننا كتابة

|جـ م| = − ص × جتا (٢ ءَ̂)

|هـ ء| = ص × جا (٢ ءَ̂) × ظتا ءَ̂ = ٢ص × جا ءَ̂ × جتا ءَ̂ × ظتا ءَ̂ = ٢ص × جتا^{٢} ءَ̂

الآن نجمع الأجزاء الثلاثة للحصول على

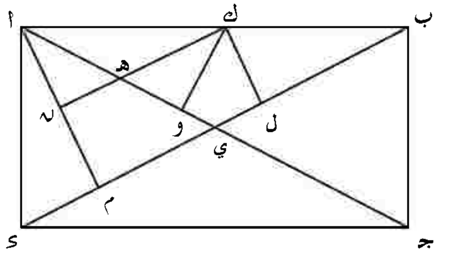
|جـ ء| = |جـ م| + |م هـ| + |هـ ء| = − ص × جتا (٢ ءَ̂) + س + ٢ص × جتا^{٢} ءَ̂

بملاحظة أن جتا (٢ ءَ̂) = ٢جتا^{٢} ءَ̂ − ١ نحصل على المطلوب

|جـ ء| = س + ص

السـؤال الثاني عشر:

في الشكل المرفق ك أي نقطة على الضلع أب في المستطيل أ ب جـ ء ، ك ل ⊥ ب ء ، ك و ⊥ أ جـ ، أ م ⊥ ب ء ، ك ن ⊥ أ م . أي من المقادير التالية يساوي دائماً المقدار |ك و| + |ك ل| ؟



أ) |كن|

ب) |أي|

ج) |كه|+|أه|

د) |أم|

هـ) |يم|

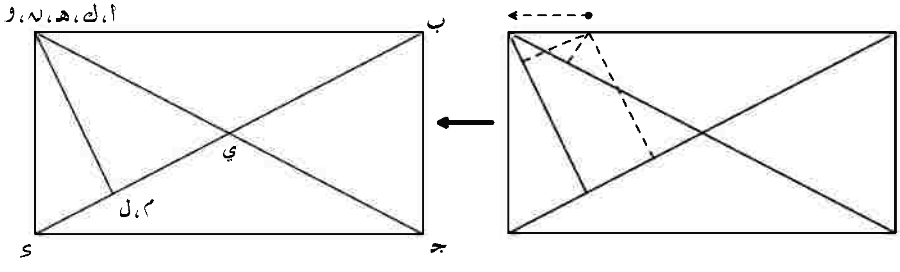
الحـــــل:

جميع الاحتمالات واردة ولا تدري من أين تبدأ؟

هل تعطيك العبارة " ك أي نقطة على الضلع أب" أي تلميح إلى طريق البداية؟

هل يمكنك تحريك النقطة ك إلى موقع يمكنك منه تحديد الإجابة أو على الأقل إقصاء بعض الخيارات؟

الشكل التالي يوضح الموقف إذا اقتربت وانطبقت النقطة ك على النقطة أ .

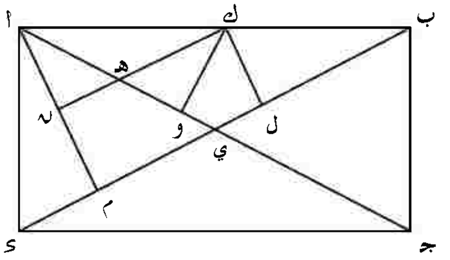


في هذه الحالة

|كو|=٠ ، |كن|=٠ ، |كه|=٠ ، |أه|=٠ ، |أم|=|كل|

وبالتالي فالمطلوب يصبح |كو|+|كل|=|أم| . لاحظ أن الخيارين (أ) و (ج) قيمتهما صفر وأن الخيارين (ب) و (هـ) يمثلان الضلعين الآخرين في المثلث القائم Δأيم .

الآن لدينا انطباع بأن الحل الصحيح هو الخيار (د) وسنقوم هنا بإثبات ذلك.



ليس صعباً أن ترى أن ك ل م ن مستطيل (لاحظ الزوايا القائمة).

∴ |ك ل| = |ن م|

ولذلك فكل ما علينا أن نثبته هو |ك و| = |أ ن|.

لاحظ أن Δ ك و هـ ~ Δ أ ن هـ (لماذا؟). إذا استطعنا أن نثبت إضافةً أن Δ ك و هـ ≅ Δ أ ن هـ فإننا نكون قد أثبتنا أن |ك و| = |أ ن| .

∵ ك ن || ب د

∴ $\widehat{\text{أ ك ن}} = \widehat{\text{أ ب ي}}$

∵ Δ أ ب ي متطابق الضلعين (القطران في المستطيل متطابقان وينصفان بعضيهما)

∴ $\widehat{\text{ب أ ي}} = \widehat{\text{أ ب ي}}$

∴ $\widehat{\text{أ ك ن}} = \widehat{\text{ب أ ي}}$

∴ Δ أ ك هـ متطابق الضلعين

∴ |ك هـ| = |هـ أ|

∴ Δ ك و هـ ≅ Δ أ ن هـ

∴ |ك و| = |أ ن|

∴ |ك و| + |ك ل| = |أ ن| + |ن م| = |أ م|

السـؤال الثالث عشر:

وُضع مضلع منتظم عدد أقطاره ٢٠ ومساحته ١٤٤ $\sqrt{2}$ داخل دائرة. مساحة الدائرة تساوي

أ) ٩ $\sqrt{2}$ ط

ب) ٣٦ط

ج) ٧٢ط

د) ١٤٤ط

هـ) ١٤٤ $\sqrt{2}$ ط

الحـــــل:

يمكننا الحصول على عدد أضلاع المضلع عن طريق عدد أقطاره.

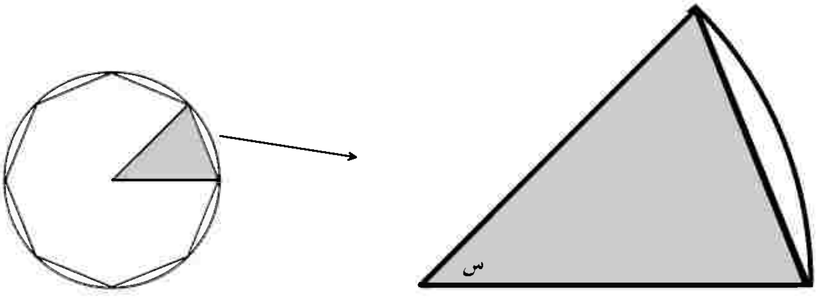
∵ عدد أقطار المضلع = $\frac{\text{ن}(\text{ن}-٣)}{٢}$ حيث ن عدد أضلاع المضلع،

$$\therefore \frac{\text{ن}(\text{ن}-٣)}{٢}=٢٠$$

$$\therefore \text{ن}^{٢}-٣\text{ن}-٤٠=٠$$

$$\therefore \text{ن}=٨$$

الشكل المرفق يبين المضلع الثماني موضوعاً داخل الدائرة.



المضلع مكون من ثمانية مثلثات مساحة كل منها $\frac{١٤٤\sqrt{٢}}{٨}=١٨\sqrt{٢}$

قياس الزاوية المركزية س في كل من المثلثات الثمانية هو $\frac{٣٦٠^{\circ}}{٨}=٤٥^{\circ}$

نعرف أن مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

$$\therefore \frac{١}{٢}\text{نق}^{٢}\text{جا}(٤٥^{\circ})=١٨\sqrt{٢}$$

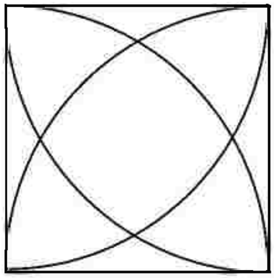
$$\therefore \frac{\sqrt{٢}}{٤}\text{نق}^{٢}=١٨\sqrt{٢}$$

$$\therefore \text{نق}^{٢}=٧٢$$

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \text{ط}\,\text{نق}^{٢}=٧٢\text{ط}$$

السـؤال الرابع عشر:

رُسمت أربعة أرباع لدوائر مراكزها رؤوس مربع طول ضلعه √٣ كما هو مبين في الشكل. مساحة الجزء المظلل تساوي



أ) ط + ٣ − ٣ √٣

ب) ط + ٣ + ٣ √٣

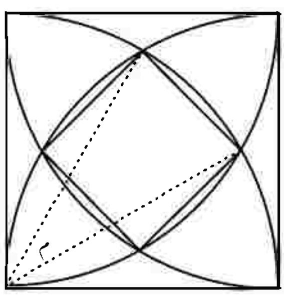
ج) ٣ + ٣ √٣ − ط

د) ٣ √٣ − ٣

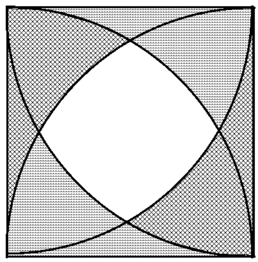
هـ) ٣ √٣ − ط

الحـــل:

يبدو أننا بحاجة لتقسيم المساحة المظللة لمعرفة مساحتها. ربما أنسب طريقة لتقسيم المساحة المظللة هي التي تمكننا من استخدام الأقواس في حساب المساحات. فمثلاً التقسيم المبين في الشكل التالي قد يكون مناسباً إلا أننا لا نعرف أطوال أضلاع المربع الناتج أو قيمة قياس زوايا مثل زاوية م والتي تمكننا من حساب مساحة الجزء المظلل وغير المشمول في المربع المرسوم. يمكن للقارئ محاولة طرق أخرى لتقسيم المساحة المستهدفة.

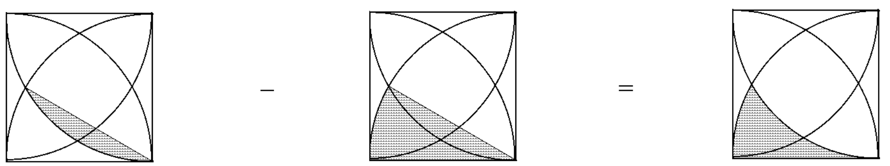


وبمحاولة صرف النظر عن الجزء المظلل إلى الجزء غير المظلل، نجد أن التركيز في هذا الجزء يقودنا إلى التعرف على أربعة مساحات متطابقة تكوّن في مجموعها الجزء غير المظلل كما هو مبين في الشكل التالي. إذا استطعنا أن نحسب مساحة أي من الأجزاء المتطابقة الأربعة فإننا نكون مستعدين لحساب مساحة الجزء المظلل في الشكل الأصلي.

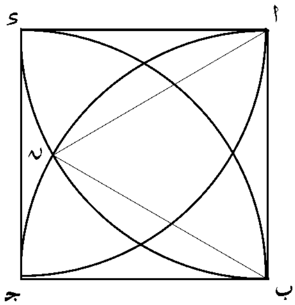


نقسم مساحة الجزء المظلل (ع) في الشكل التالي إلى جزئين ع$_1$ وَ ع$_2$

سنقوم بحساب مساحة كل جزء على حدة. لاحظ في الشكل التالي أن Δ أب ن متطابق الأضلاع نظراً لأن أضلاعه أنصاف أقطار أرباع الدوائر المتطابقة. ولذلك



ع = ع$_1$ − ع$_2$



$\overset{\frown}{\text{أبن}} = ٦٠^\circ$ أي أن $\overset{\frown}{\text{نبجـ}} = ٣٠^\circ$

الجزء $ع_١$ قطاع زاوي في الدائرة التي مركزها ب .

$\therefore$ مساحة الجزء $ع_١ = \frac{٣٠^\circ}{٣٦٠^\circ} \times ط \times (\sqrt{٣})^٢ = \frac{ط}{٤}$.

الجزء $ع_٢$ قطعة زاوية في الدائرة التي مركزها أ .

$\therefore$ مساحة الجزء $ع_٢$ = مساحة القطاع الزاوي أبن − مساحة Δ أبن

$$= \frac{٦٠^\circ}{٣٦٠^\circ} \times ط \times (\sqrt{٣})^٢ - \frac{١}{٢}(\sqrt{٣})^٢ \text{جا}(٦٠^\circ) = \frac{ط}{٢} - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$$

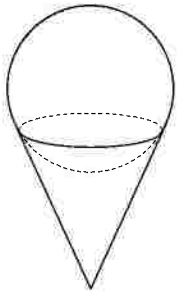
مساحة الجزء $ع = \frac{ط}{٤} - (\frac{ط}{٢} - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}) = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} - \frac{ط}{٤}$.

الجزء غير المظلل يتكون من أربعة أجزاء مطابقة للجزء ع .

$\therefore$ مساحة الجزء المظلل $= (\sqrt{٣})^٢ - ٤ \times (\frac{٣\sqrt{٣}}{٤} - \frac{ط}{٤}) = ط + ٣ - ٣\sqrt{٣}$

السـؤال الخامس عشر:

كرة من المثلجات (الآيسكريم) نصف قطرها ٢ سم فوق مخروط من البسكويت نصف قطر قاعدته $\sqrt{٣}$ سم. الكرة تمس جميع الارتفاعات الجانبية في مخروط البسكويت. أكل خالد بعضاً من "الآيسكريم" ووجد أن ما تبقى يملأ المخروط بالضبط. حجم "الآيسكريم" الذي أكله خالد بالسنتمتر المكعب يساوي



أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}ط$

ب) ط

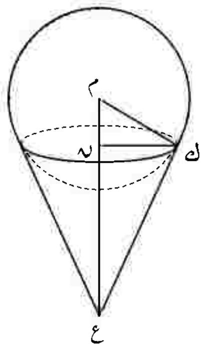
ج) ٣ط

د) $\frac{٢٣}{٣}ط$

هـ) $\frac{٣٢}{٣}ط$

الحـــــل:

حجم ما أكله خالد هو ببساطة الحجم الأصلي لكرة "الآيسكريم" مطروحاً منه حجم المخروط لأن ما تبقى من الكرة يملأ المخروط تماماً. وحيث إن حساب حجم الكرة الأصلي بسيط (نصف قطر الكرة معروف) فسنركز على حساب حجم المخروط.



حجم المخروط يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه. إذن نحن بحاجة لحساب الارتفاع. نقوم بتوصيل مركز الكرة بإحدى نقاط التماس ورأس المخروط. نقوم أيضاً بتوصيل مركز قاعدة المخروط بنقطة التماس كما هو موضح في الشكل.

لاحظ أن $\widehat{\text{م ك ع}} = ٩٠^\circ$ لأن ع ك مماس للكرة. لاحظ أيضاً أن ك ن $\perp$ م ع .

$$\because \quad |\text{م ك}| = ٢ \ \text{و} \ |\text{ك ن}| = \sqrt{٣}$$

$$\therefore \quad \widehat{\text{م ك ن}} = ٣٠^\circ$$

$$\therefore \quad \widehat{\text{ك ع ن}} = ٣٠^\circ \ \text{(لماذا؟)}$$

$$\therefore \quad |\text{ع ن}| = \frac{\sqrt{٣}}{\text{ظا } ٣٠^\circ} = ٣$$

$$\text{حجم المخروط} = \frac{١}{٣}\text{ط}(\sqrt{٣})^٢ \times ٣ = ٣\text{ط}$$

$$\therefore \quad \text{حجم ما أكله خالد} = \frac{٤}{٣}\text{ط}(٢)^٣ - ٣\text{ط} = \frac{٢٣}{٣}\text{ط}$$

السـؤال السادس عشر:

لدينا كأس اسطواني فارغ طوله ٨ سم ونصف قطره ٢ سم، تقف نملة في منتصف سطحه الخارجي. طول أقصر مسافة يتوجب على النملة مشيها بالسنتمتر إذا أرادت الوصول إلى نقطة تقع على السطح الداخلي للكأس في الجهة الأخرى المقابلة تماماً للنقطة التي تقف عليها، يساوي

أ) ٢ $\sqrt{ط^{٢}+١٦}$

ب) ٤+٢ط

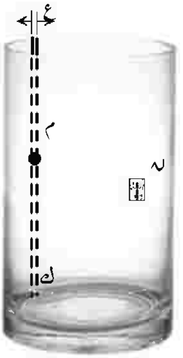
ج) ٨+٢ط

د) ٤+٤ط

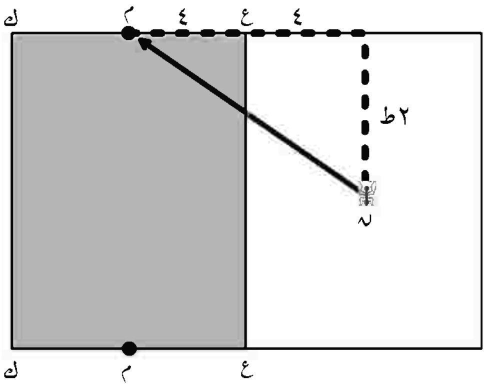
هـ) ١٢

الحـــــل:

على النملة أن تدور نصف دورة حول الكأس ثم تصعد إلى أعلى الكأس ثم تنزل إلى منتصفه على السطح الداخلي، وبذلك تكون المسافة ٢ط+٤+٤=٨+٢ط .... لا... لا خطأ !!!! لا تتوقع منا أن نكون بهذه السهولة مع المتسابقين في الأولمبياد !



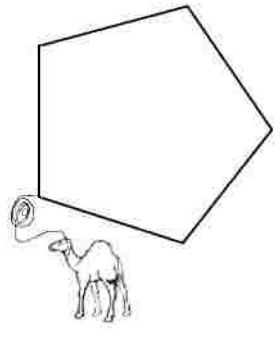
سنتخيل أننا نستطيع أن نفرد الكأس على طول الخط عك والذي يمر بالنقطة م التي ستصل إليها صديقتنا النملة الواقفة على النقطة ن . الشكل التالي يوضح الكأس مفروداً حيث يمثل الجزء المظلل السطح الداخلي بينما السطح الخارجي هو الجزء غير المظلل.



الطريق السابق الذي أشرنا إليه " تدور النملة نصف دورة حول الكأس ثم تصعد إلى أعلى الكأس ثم تنزل إلى منتصفه على السطح الداخلي" يمثله الخط المتقطع. يمكننا الآن أن نقنعك بأن أقصر طريق بين النقطتين ں وَ النقطة م هو الخط المستقيم الواضح في الشكل. وعليه فإن أقصر مسافة يتوجب على النملة قطعها تساوي $\sqrt{(٢ط)^٢ + (٨)^٢} = \sqrt{٤ط^٢ + ٦٤}$. هل يتبقى شيء؟ نعم ... يتبقى أن نعرف لماذا ترغب نملة في فعل ذلك !

السؤال السابع عشر:

لدينا حظيرة على شكل مضلع خماسي منتظم طول ضلعه ٦ أمتار، رُبط بأحد أركانها الخارجية جمل بطرف حبل طوله ١٠ أمتار، كما في الشكل. المساحة المتاحة لحركة الجمل بالمتر المربع تساوي



أ) $\frac{٣٧٩}{٥}$ط

ب) $\frac{٣٨١}{٥}$ط

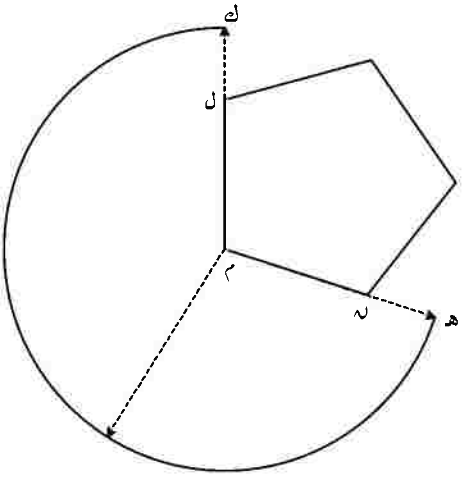
ج) $\frac{٣٨٢}{٥}$ط

د) $\frac{٣٨٧}{٥}$ط

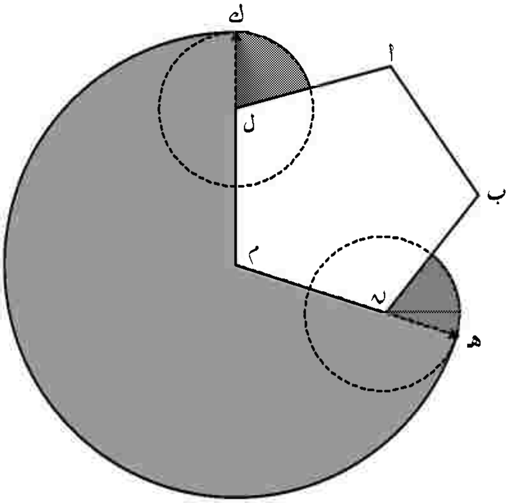
هـ) $\frac{٣٨٩}{٥}$ط

الحــــل:

لنمد الحبل المربوط إلى أقصى مداه. لاحظ أن أبعد مسافة يمكن للجمل أن يصل إليها هي القوس الكبير $\overset{\frown}{هـك}$ في الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها ١٠ متر ، كما هو موضح في الشكل التالي.



إذا تحرك الجمل أبعد من ذلك فإن حركته لن تكون على نفس الدائرة التي مركزها م . فمثلاً إذا كان الجمل عند النقطة ك وأراد التحرك باتجاه عقارب الساعة فسينثني الحبل عند النقطة ل وستكون هذه النقطة مركزاً جديداً لدائرة تحرك جديدة نصف قطرها يساوي طول الحبل مطروحاً منه طول ضلع المضلع الخماسي (أي ٤ أمتار). وبالمثل يمكننا الحديث عن النقطتين هـ وَ ن ، انظر الشكل التالي.



المساحة المتاحة للجمل للتحرك هي مجموع المساحتين الصغيرتين المنقطتين، والمساحة المظللة في الدائرة الكبيرة. يمكننا إيجاد هذه المساحات إذا استطعنا حساب قياس الزوايا $\widehat{\text{هـ ن ب}}$ وَ $\widehat{\text{ك ل أ}}$ وَ $\widehat{\text{هـ م ك}}$.

لاحظ أن $\widehat{\text{هـ م ك}}$ زاوية داخلية في المضلع الخماسي.

$$\therefore\ \widehat{\text{هـ م ك}} = \frac{(٥-٢)\times ١٨٠^\circ}{٥} = ١٠٨^\circ$$

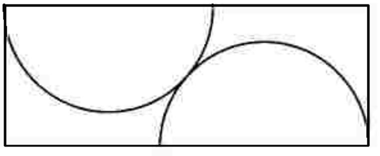
$$\therefore\ \widehat{\text{هـ ن ب}} = \widehat{\text{ك ل أ}} = ١٨٠^\circ - ١٠٨^\circ = ٧٢^\circ$$

$$\text{المساحة المتاحة للجمل للتحرك} = ٢\times\frac{٧٢}{٣٦٠}\times ٤^{٢}\,\text{ط} + \frac{٣٦٠-١٠٨}{٣٦٠}\times ١٠^{٢}\,\text{ط} = \frac{٣٨٢}{٥}\,\text{ط}$$

لماذا يربطني الراعي خارج الحظيرة وليس داخلها !!!

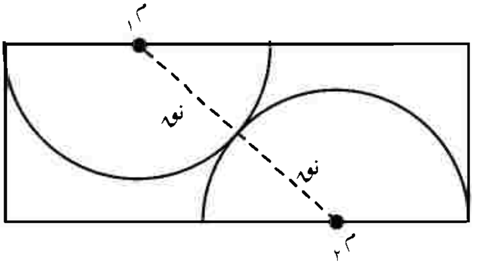
السـؤال الثامن عشر:

يريد خياط أن يقص نصفي دائرتين متطابقتين من قماش مستطيل الشكل طوله ١٦٠ سم وعرضه ٨٠ سم كما هو موضح في الشكل. قياس قطر إحدى الدائرتين يساوي

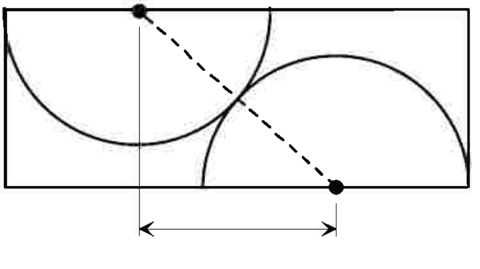


الحـل:

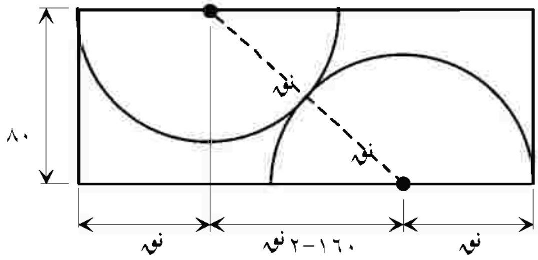
الدائرتان متماستان ... أنت تعلم أن الخط الواصل بين مركزي دائرتين متماستين يمر بنقطة التماس وطوله يساوي مجموع نصفي قطريهما. أي في حالتنا هنا يساوي ٢نق. لنصل مركزي الدائرتين ...



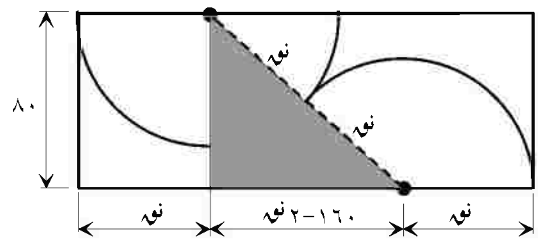
إليك هذا التلميح المجاني: إذا استطعت أن تحسب الطول المشار إليه في الرسم التالي، فيمكنك أن تقول إن المسألة قد حُلت ! (لماذا؟)



هل تتفق معي على القياسات المبينة في الشكل التالي؟



نعم ... نعم ... صحيح ... لنستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث الموضح في الشكل التالي.



$$(\text{١٦٠}-\text{٢نق})^{\text{٢}}+\text{٨٠}^{\text{٢}}=(\text{٢نق})^{\text{٢}}$$

$$\therefore\ \text{نق}=\text{٥٠}$$

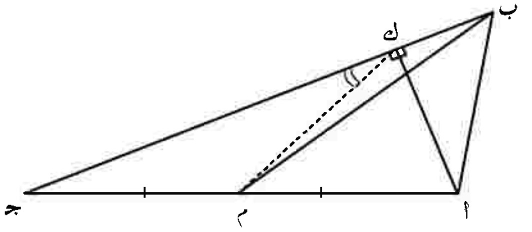
قطر أي من الدائرتين = ١٠٠ سم

السـؤال التاسع عشر:

في Δ ابجـ ، $\hat{\text{أ}}$=١٠٠° وَ $\hat{\text{ب}}$=٥٠° . النقطة ك تقع على الضلع بجـ بحيث يكون اك ارتفاعاً في المثلث، بينما تقع النقطة م على الضلع اجـ بحيث يكون بم متوسطاً في المثلث. الزاوية $\widehat{\text{مكجـ}}$ بالدرجات تساوي

الحـــــــل:

نوضح السؤال بالرسم التالي.

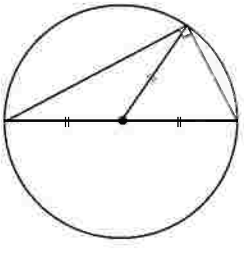


هذا السؤال يؤكد على أهمية الرسم الجيد في الوصول إلى الحل بسهولة.

لاحظ أن Δ اكجـ قائم في ك وَ كم مرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر. هل تتذكر شيئاً مهماً بالنسبة للقطع المستقيمة المرسومة من رأس الزاوية القائمة في مثلث إلى منتصف الوتر؟

منتصف الوتر في هذه الحالة يكون مركز الدائرة الخارجية التي تمر برؤوس المثلث.

لذلك يمكننا أن نكتب



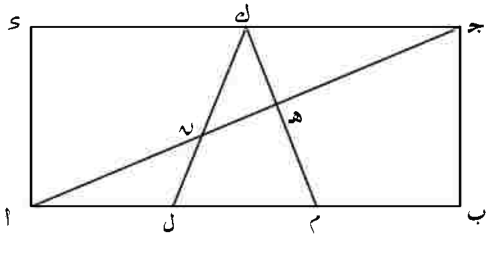
|كم| = $\frac{١}{٢}$ |اجـ| = |ام| = |مجـ|

∴ Δ مكجـ متطابق الضلعين

∴ مكجـ = جـ = ١٨٠° − ١٠٠° − ٥٠° = ٣٠°

الســــــؤال العشرون:

النقطتان ل وَ م تقعان على اب في المستطيل ابجء بحيث يكون |ال| = |لم| = |مب| وَ ك منتصف الضلع جء . اجـ يقطع كل في ن وَ كم في هـ . إذا كانت مساحة المستطيل ابجء تساوي ٦٠ فإن مساحة Δ انل تساوي

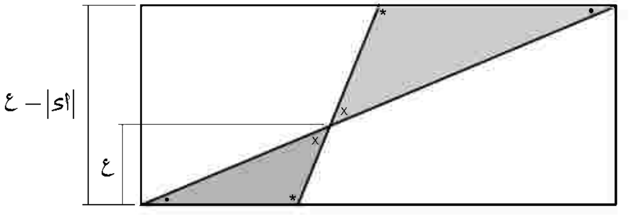


الحــــــل:

هنالك عدة طرق لحساب مساحة المثلث. إحدى هذه الطرق وأشهرها هي نصف حاصل ضرب القاعدة بالارتفاع. أي مساحة $\Delta\,\text{انل} = \frac{١}{٢}|\text{ال}|\,\text{ع}$ حيث ع ارتفاع المثلث $\Delta\,\text{انل}$.

ليس لدينا قياسات محددة لطول المستطيل وعرضه، ولذلك لا نتوقع أن نحصل على أرقام محددة لارتفاع المثلث أو طول قاعدته. ولكن يمكننا أن نربط (كنسبة) بين ارتفاع المثلث وعرض المستطيل، مع ملاحظة أن قاعدة المثلث تساوي ثلث طول المستطيل.

لإيجاد علاقة بين قاعدة $\Delta\,\text{انل}$ وعرض المستطيل لاحظ أن $\Delta\,\text{جكن} \sim \Delta\,\text{الن}$ ($\sim$ تعني تشابه). وبالمناسبة، البحث عن تشابه مثلثات قد يكون إستراتيجية جيدة عند محاولة الحصول على نسب لأطوال أضلاع.



العلاقة $\Delta\,\text{جكن} \sim \Delta\,\text{الن}$ كما نعلم تعني أن الأضلاع والمتوسطات والارتفاعات المتناظرة في المثلثين متناسبة. يمكننا كتابة

$$\frac{\text{ع}}{|\text{اد}| - \text{ع}} = \frac{|\text{ال}|}{|\text{كج}|} = \frac{\frac{١}{٣}|\text{اب}|}{\frac{١}{٢}|\text{اب}|} = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore\ \text{ع} = \frac{٢}{٥}|\text{اد}|$$

$$\text{مساحة } \Delta\,\text{انل} = \frac{١}{٢}|\text{ال}|\,\text{ع} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}|\text{اب}| \times \frac{٢}{٥}|\text{اد}| = \frac{١}{١٥}|\text{اب}| \times |\text{اد}|$$

$$= \frac{١}{١٥} \times \text{مساحة المستطيل ابجد} = ٤$$

لاحظ أننا لم نستخدم مطلقاً الجزء المتعلق بـ كهم (للتشويش فقط !).

الســـــؤال الحادي والعشرون:

ك وَ م وَ ن أطوال أضلاع في مثلث. إذا كانت ك=٥ وَ م=١١ وَ ن عدداً صحيحاً فإن مجموع قيم ن الممكنة بحيث يكون المثلث منفرجاً يساوي

الحـــــل:

مطلوبٌ منا في هذه المسألة أن نتأكد أن المثلث الناتج منفرج الزاوية. متى يكون المثلث منفرج الزاوية؟ طبعاً بالإمكان أن تكون زاوية واحدة فقط منفرجة في أي مثلث لأن مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي ١٨٠° .

نعلم أن الزاوية تكون منفرجة في مثلث ما إذا كان مربع طول الضلع المقابل لها أكبر من مجموع مربعي الضلعين الآخرين، (فمثلاً إذا كانت أطوال أضلاع في المثلث هي ٤،٥،٧ فإن الزاوية المقابلة للضلع الذي طوله ٧ منفرجة لأن $٧^٢ > ٥^٢ + ٤^٢$).

الآن فكر في أطوال الأضلاع ٤،٥،٩٩ . بالتأكيد $٩٩^٢ > ٥^٢ + ٤^٢$. من الواضح أيضاً أنه لا يمكننا أن نكوّن مثلثاً من الأضلاع المعطاة (حاول أن تبدأ بخط أفقي طوله ٩٩ مم ، ثم حاول أن تكمل المثلث بضلعين طولهما ٥ مم و ٤ مم !).

إمكانية تكوين مثلث من أضلاع ثلاثة تخضع للمتباينة المثلثية، وهي أن مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث. لذلك في الحالة الثانية نجد أن $٥ + ٤ < ٩٩$ ولذلك لا يمكن تكوين مثلث من هذه الأضلاع.

إذن لحل السؤال علينا أن نتأكد من إمكانية تكوين مثلث، ومن ثم البحث في حالات كونه منفرج. يمكن تكوين مثلث من الأضلاع ل وَ م وَ ن إذا كان $ل+م > ن$ وَ $ل+ن > م$ وَ $م+ن > ل$ ، أي

$$٥+١١ > ن \quad \text{أي أن} \quad ن < ١٦$$
$$٥+ن > ١١ \quad \text{أي أن} \quad ن > ٦$$
$$١١+ن > ٥ \quad \text{أي أن} \quad ن > -٦ \quad \text{(غير مفيدة)}$$

لذلك فإنه لتكوين مثلث من الأضلاع المعطاة (بصرف النظر عن كونه منفرج الزاوية أو غير ذلك) فإن

$$٦ < ن < ١٦ \quad (*)$$

لاحظ أنه إذا كانت $ن = ٦$ أو $ن = ١٦$ فإننا لا نحصل عل مثلث "حقيقي" حيث تكون جميع الأضلاع على خط مستقيم واحد.

الآن نبحث في أن يكون مربع طول أي من الأضلاع الثلاثة أكبر من مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

إذا كانت الزاوية المقابلة للضلع الذي طوله ل منفرجة فإن $ل^٢ > م^٢ + ن^٢$

أي أن $٥^٢ > ١١^٢ + ن^٢$ (مستحيل)

إذا كانت الزاوية المقابلة للضلع الذي طوله م منفرجة فإن $م^٢ > ل^٢ + ن^٢$

أي $١١^٢ > ٥^٢ + ن^٢$ أي أن $ن^٢ < ٩٦$ أي أن $ن < \sqrt{٩٦}$ أي أن $ن = ٧،٨،٩$

(تذكر ن عدد صحيح أكبر من ٦ حسب (*))

إذا كانت الزاوية المقابلة للضلع الذي طوله ن منفرجة فإن $ن^٢ > ل^٢ + م^٢$

أي أن $ن^٢ < ٥^٢ + ١١^٢$ أي أن $ن^٢ < ١٤٦$ أي أن $ن < \sqrt{١٤٦}$ أي أن $ن = ١٣، ١٤، ١٥$

(تذكر ن عدد صحيح أقل من ١٦ حسب (*))

وبذلك تكون قيم ن المسموح بها ٧، ٨، ٩، ١٣، ١٤، ١٥ ومجموعها ٦٦ .

السـؤال الثاني والعشرون:

أكبر عدد ممكن من الأضلاع لمضلع محدب فيه بالضبط ثلاث زوايا داخلية منفرجة هو

الحـل:

المضلع محدب... هذا يعني أن قياس كل زاوية من زواياه الداخلية أقل من $١٨٠°$.

لنفرض أن لدينا مضلعاً عدد أضلاعه ن . نعرف أن مجموع قياسات زواياه الداخلية $(ن-٢)\times ١٨٠°$.
لنفرض أيضاً أن مجموع قياسات الزوايا الثلاث المنفرجة س . بالضرورة س يجب أن تحقق العلاقة

$$٥٤٠° = ٣\times ١٨٠° > س > ٣\times ٩٠° = ٢٧٠°$$

ومجموع قياسات الزوايا المتبقية وعددها $ن-٣$ هو $(ن-٢)\times ١٨٠° - س$.

الآن فكر في عدة زوايا $ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ ، ... ، $ك_م$. إذا كان قياس كل من هذه الزوايا أقل من $٩٠°$ فإن متوسط قياس هذه الزوايا أيضاً أقل من $٩٠°$ لأنه إذا كان

$$ك_١ < ٩٠° \text{ وَ } ك_٢ < ٩٠° \text{ .... وَ } ك_م < ٩٠°$$

$$\text{فإن } ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_م < ٩٠° + ٩٠° + \cdots + ٩٠° = م\times ٩٠°$$

$$\therefore \frac{ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_م}{م} < ٩٠°$$

بالعودة إلى مسألتنا ، معدل قياس الزوايا المتبقية بعد طرح س من مجموع قياسات الزوايا الداخلية $\frac{(ن-٢)\times ١٨٠° - س}{ن-٣}$ يحقق العلاقة

$$\frac{(ن-٢)\times ١٨٠° - س}{ن-٣} < ٩٠°$$

$$\therefore ن < ١ + \frac{س}{٩٠°}$$

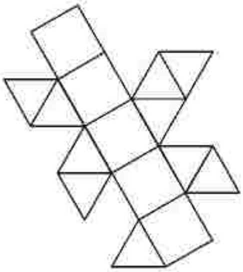
نستنتج أن ن تكون أكبر ما يمكن عندما تكون س أكبر ما يمكن. بما أن $٥٤٠° > س > ٢٧٠°$ فإن

$$ن < ١ + \frac{٥٤٠°}{٩٠°} = ٧$$

أي أن أكبر قيمة ممكنة لِـ ن هي ٦ .

الســــــؤال الثالث والعشرون:

ينتج الشكل المرفق، والمكون من عشرة مثلثات متطابقة الأضلاع وخمسة مربعات متطابقة، إذا فردنا متعدد سطوح مكون من خمسة عشر وجهاً. عدد رؤوس متعدد السطوح يساوي



الحــــــل:

يمكنك عد الرؤوس الواضحة في الشكل، لكنك تدرك أنك عندما تقوم بثني الوجوه لتكوين متعدد السطوح فإن بعضاً من هذه الرؤوس سينطبق على بعضها الآخر. لذلك فإنك لا تتوقع أن يكون عدد الرؤوس ٢١ أو ٢٢ كما يشير العد البسيط للرؤوس الظاهرة. هل يمكنك أن تتخيل كم من هذه الرؤوس سينطبق على بعض؟ ليس سهلاً؟ نعم ... نعم ... ليس سهلاً جداً. إذن ما العمل؟

نعرف أن العلاقة التي تربط بين عدد الرؤوس وعدد الوجوه وعدد الأحرف في أي متعدد سطوح (منتظم أو غير منتظم) هي:

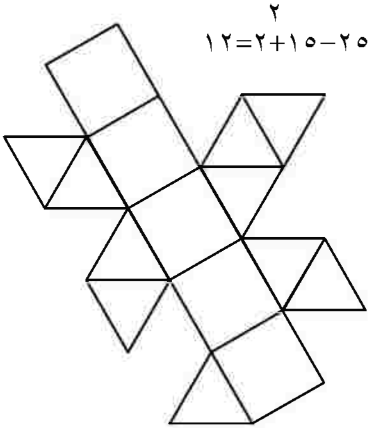
عدد الرؤوس + عدد الوجوه − عدد الأحرف = ٢

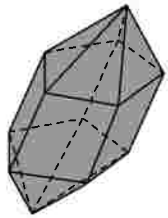
نعلم أن عدد الوجوه خمسة عشر وجهاً... هل يمكنك معرفة عدد الأحرف في متعدد السطوح؟ لو فرضنا أنك تستطيع معرفة ذلك، تطبيق العلاقة السابقة يعطينا ما نريد، وهو عدد الرؤوس. إذن كل ما علينا معرفته هو عدد الأحرف في متعدد السطوح.

تتلاقى أزواج الأوجه على طول الأحرف بحيث ينطبق كل حرفين على بعضهما بعضاً. ولذلك فإن عدد أحرف متعدد السطوح هو بالضبط نصف عدد أضلاع الوجوه المكونة له. أي في حالتنا هذه:

$$\text{عدد أحرف متعدد السطوح} = \frac{١٠\times٣ + ٥\times٤}{٢} = ٢٥$$

$$\therefore \quad \text{عدد الرؤوس} = ٢٥ - ١٥ + ٢ = ١٢$$





السـؤال الرابع والعشرون:

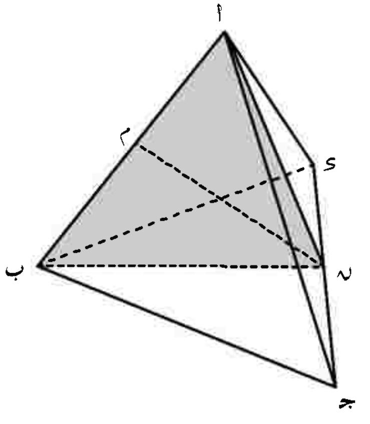
أبجـد هرم ثلاثي منتظم، المسافة من منتصف الضلع أب إلى منتصف الضلع جـد تساوي ٦. حجم الهرم يساوي

الحـل:

نعلم أن حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه. كيف نحصل على مساحة قاعدة الهرم؟ تذكر أن الهرم منتظم. أي أن قاعدته مثلث متطابق الأضلاع. ولحساب مساحة مثلث متطابق الأضلاع كل ما نحتاجه هو طول ضلع ذلك المثلث.

في الشكل التالي النقطة ن هي منتصف الضلع دجـ ، Δبدجـ متطابق الأضلاع، بن $\perp$ دجـ (لماذا؟). إذا فرضنا أن طول حرف الهرم س فإن

$$|\text{بن}| = \sqrt{\text{س}^2 - \left(\frac{\text{س}}{\text{٢}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\,\text{س}$$



Δأنب متطابق الضلعين ($|\text{أن}| = |\text{بن}|$ بالتناظر)، النقطة م هي منتصف الضلع

$$\therefore \ \text{نم} \perp \text{أب}$$

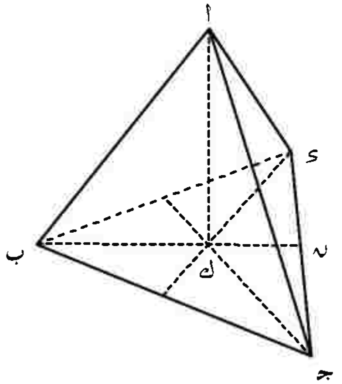
$$\therefore \ \left(\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\,\text{س}\right)^2 - \left(\frac{\text{س}}{\text{٢}}\right)^2 = (\text{٦})^2$$

$$\therefore \ \text{س} = \text{٦}\sqrt{\text{٢}}$$

وبذلك تكون مساحة القاعدة $= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times (\text{٦}\sqrt{\text{٢}})^2 \times \text{جا}(\text{٦٠}^\circ) = \text{١٨}\sqrt{\text{٣}}$

نحاول الآن أن نجد ارتفاع الهرم.

لاحظ أن النقطة ك هي مسقط الرأس أ على القاعدة ب جـ د . نظراً للتناظر فإن النقطة ك يجب أن تبعد نفس المسافة عن رؤوس Δ ب جـ د . أي أن النقطة ك هي مركز الدائرة الخارجية بالنسبة للمثلث وتقسم المتوسط ب ن بنسبة ١ : ٢ .



$$\therefore\ |\text{بك}| = \frac{٢}{٣} \times |\text{بن}| = \frac{٢}{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{س} = ٢\sqrt{٦}$$

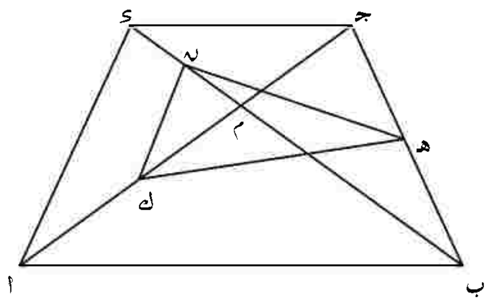
Δ أك ب مثلث قائم

$$\therefore\ |\text{أك}| = ٤\sqrt{٣}$$

$$\therefore\ \text{حجم الهرم} = \frac{١}{٣} \times ١٨\sqrt{٣} \times ٤\sqrt{٣} = ٧٢$$

السـؤال الخامس والعشرون:

أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الساقين، أب // د جـ وَ |أد| = |ب جـ| . يتقاطع أجـ وَ ب د في نقطة م حيث $\widehat{\text{أم ب}} = ٦٠^\circ$. النقاط ك وَ ن وَ هـ تنصف القطع المستقيمة أم وَ د م وَ ب جـ على التوالي. اثبت أن Δ ك ن هـ متطابق الأضلاع.



الحـــــل:

نبدأ بالسؤال البدهي، وهو ماذا نستفيد من معطيات السؤال؟ دعنا نسرد كل ما يمكننا معرفته.

∵ ن ك يصل منتصفا القطعتين المستقيمتين د م وَ ا م ،

∴ ن ك // ا د وَ |ن ك| = ½ |ا د|

∵ |ا د| = |ب جـ| ،

∴ |ن ك| = ½ |ب جـ| = |جـ هـ| = |هـ ب|

∵ ا م ب̂ = ٦٠° ،

∴ جـ م د̂ = ٦٠° .

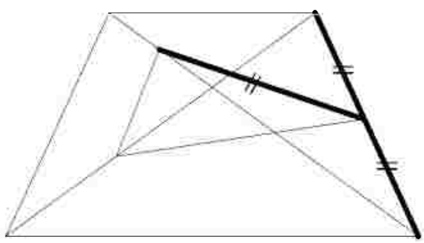
∵ شبه المنحرف متطابق الساقين،

∴ د جـ م̂ = م د جـ̂ = م ب ا̂ = م ا ب̂ = ٦٠° ، وكل من المثلثين Δ جـ م د وَ Δ م ب ا متطابق الأضلاع.
(لاحظ أن الشكل لا يوحي بذلك وهذا مقصود لكي لا يكون من الممكن الحصول على الإجابات الصحيحة باستخدام أدوات الرسم.)

هل من تقدم؟

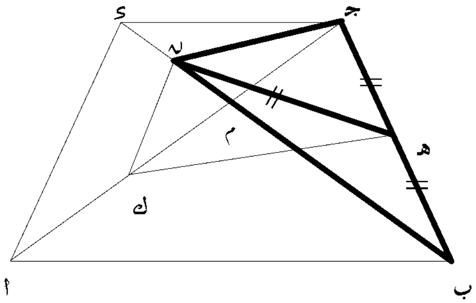
ببساطة نحن بحاجة إلى إثبات أن |هـ ن| = |ك ن| (ويكافئ ذلك |هـ ن| = |هـ جـ| أو |هـ ن| = |ب هـ|)، وأيضاً إثبات أن |هـ ك| = |ك ن| (ويكافئ ذلك |هـ ك| = |هـ جـ| أو |هـ ك| = |ب هـ|).
دعنا نفكر في كيفية إثبات أن |هـ ن| = |ك ن| . لا يبدو الأمر سهلاً فلذلك نقترح أن نثبت العبارة المكافئة |هـ ن| = |هـ جـ| .

لو استطعنا إثبات أن |هـ ن| = |هـ جـ| فسيكون الوضع العام كما هو موضح في الشكل التالي.



هل يذكرك الشكل بشيء تعرفه؟

لا ؟ ... والآن؟

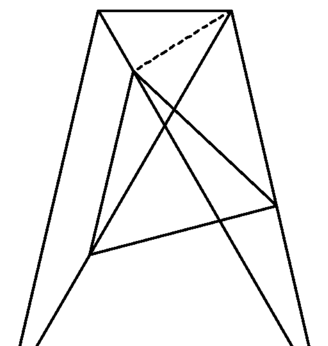


هل تتذكر شيئاً مهماً بالنسبة للمتوسطات المرسومة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر؟

نعم ... نعم ... طول المتوسط يساوي نصف الوتر. (نود أن ننوه هنا أن الصعوبة في معظم أسئلة المسابقات تكمن في ذلك الخط الإضافي، مثل جـن هنا، والذي يتوجب عليك رسمه. كيف تهتدي لذلك؟
لو كان من الممكن وضع أسس ثابتة لذلك لما كان هنالك مسابقات على ما أعتقد !)
إذن علينا أن نثبت أن $\widehat{\text{جـنب}}$ = ٩٠° .

قلنا أن Δ جـمء متطابق الأضلاع وبذلك يكون جـن هو المتوسط العمودي على الضلع مء .
يمكنك الآن وبنفس الطريقة أن تثبت أن |هـك|=|هـجـ| وَ |هـك| = |بهـ| (الخط السحري هو بك).

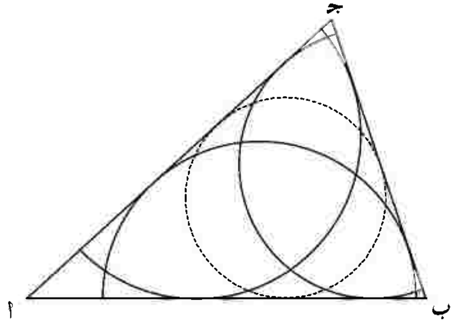
(ملاحظة: الشكل التالي مرسوم بمقاسات متناسبة جيداً)



السـؤال السادس والعشرون:

رسمنا نصف دائرة نصف قطرها $\text{نق}_{\text{ج}}$ في المثلث الحاد أبج بحيث تكون قاعدتها على الضلع أب وتمس الضلعين أج وَ بج من الداخل. ورسمنا بنفس الطريقة نصفي دائرتين على الضلعين الآخرين كما هو موضح في الشكل. إذا كانت نق هي نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث، أثبت أن

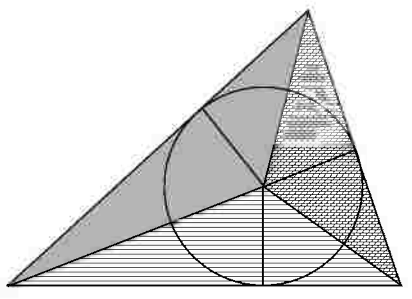
$$\frac{\text{٢}}{\text{نق}}=\frac{\text{١}}{\text{نق}_{\text{أ}}}+\frac{\text{١}}{\text{نق}_{\text{ب}}}+\frac{\text{١}}{\text{نق}_{\text{ج}}}$$

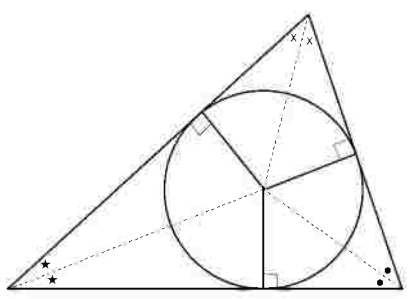


الحـــل:

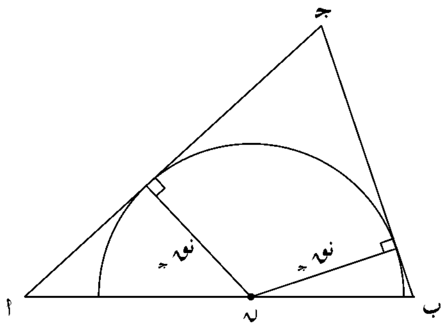
يبدو أن الشكل معقد قليلاً، كما أنه لا يبدو أن هنالك أي علاقة واضحة بين الدائرة الداخلية وأنصاف الدوائر المرسومة على الأضلاع.

لنسترجع بعض خواص الدائرة الداخلية في مثلث ما. مركز الدائرة الداخلية هو ملتقى منصفات الزوايا.
نستخدم نصف قطر الدائرة الداخلية كطول الأعمدة في الثلاث مثلثات الصغيرة الموضحة في الشكل لحساب مساحة المثلث الكبير. العلاقة الشهيرة $\text{م}=\frac{\text{نق}}{\text{٢}}\left(|\text{أب}|+|\text{بج}|+|\text{أج}|\right)$ حيث م مساحة المثلث الكبير يمكن اشتقاقها بسهولة.

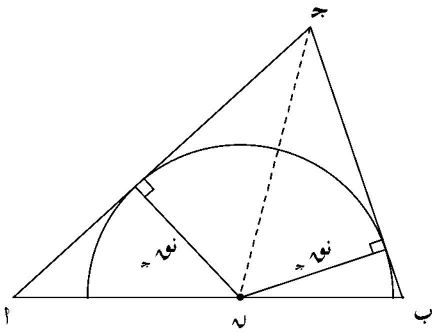




لنعد الآن إلى أنصاف الدوائر المرسومة على الأضلاع. لتبسيط الوضع دعنا نرسم واحدة فقط من أنصاف الدوائر كما هو موضح في الشكل التالي. لديك رغبة ملحة (لا يُعرف مصدرها أو ربما هذا هو الشيء الوحيد المتاح لنفعله !) في توصيل مركز الدائرة ن بنقطتي التماس على الضلعين الآخرين.



هل من رابط بين الشكل الحالي والدائرة الداخلية في الشكل السابق؟ أضلاع وأعمدة عليها؟ لنصل المركز ه بالرأس ج .



نستطيع الآن أيضاً حساب مساحة المثلث الكبير كمجموع مساحتي Δ جبه وَ Δ جأه .

$$\text{م} = \frac{1}{2}|\text{جب}|\,\text{نق}_{\text{ج}} + \frac{1}{2}|\text{جأ}|\,\text{نق}_{\text{ج}} \qquad \text{أو} \qquad \frac{\text{م}}{\text{نق}_{\text{ج}}} = \frac{1}{2}|\text{جب}| + \frac{1}{2}|\text{جأ}| \qquad (١)$$

وبالمثل إذا استخدمنا نصفي الدائرتين الأخريين نجد أن

$$\text{م} = \frac{1}{2}|\text{أج}|\,\text{نق}_{\text{أ}} + \frac{1}{2}|\text{أب}|\,\text{نق}_{\text{أ}} \qquad \text{أو} \qquad \frac{\text{م}}{\text{نق}_{\text{أ}}} = \frac{1}{2}|\text{أج}| + \frac{1}{2}|\text{أب}| \qquad (٢)$$

$$\text{م} = \frac{1}{2}|\text{بج}|\,\text{نق}_{\text{ب}} + \frac{1}{2}|\text{بأ}|\,\text{نق}_{\text{ب}} \qquad \text{أو} \qquad \frac{\text{م}}{\text{نق}_{\text{ب}}} = \frac{1}{2}|\text{بج}| + \frac{1}{2}|\text{بأ}| \qquad (٣)$$

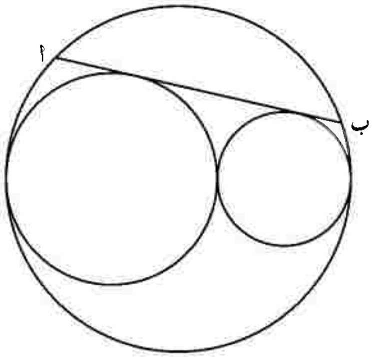
بجمع (١) و (٢) و (٣) نجد أن

$$\frac{\text{م}}{\text{نق}_{\text{أ}}} + \frac{\text{م}}{\text{نق}_{\text{ب}}} + \frac{\text{م}}{\text{نق}_{\text{ج}}} = |\text{أب}| + |\text{بج}| + |\text{أج}|$$

ونثبت المطلوب بمقارنة النتيجة الأخيرة بالعلاقة $\text{م} = \frac{\text{نق}}{2}\left(|\text{أب}| + |\text{بج}| + |\text{أج}|\right)$ التي حصلنا عليها من الدائرة الداخلية.

السـؤال السابع والعشرون:

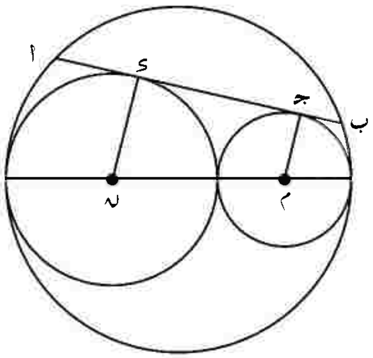
في الشكل التالي، نصفا قطري الدائرتين الصغيرتين المتماستين من الخارج ٦ وَ ٤ . الدائرتان تمسان الدائرة الكبيرة من الداخل. أوجد طول القطعة المستقيمة ب‌أ التي تمس كلتي الدائرتين الصغيرتين.



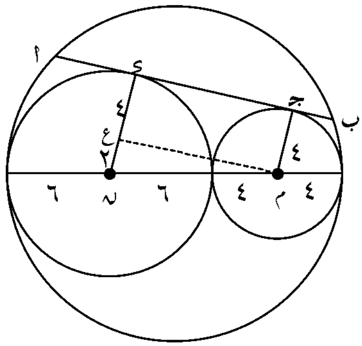
الحـل:

دعنا نبدأ بتعيين مركزي الدائرتين ونسقط منهما عمودين على نقطتي التماس (روتين !).

هل يمكنك أن تحسب طول القطعة جـ‌ى ؟

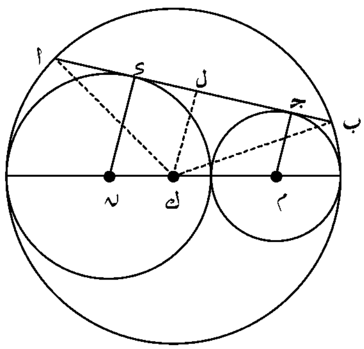


لا يبدو ذلك صعباً إذ بإمكانك أن تسقط عموداً من النقطة م في شبه المنحرف م‌ں‌ى‌جـ يلاقي الضلع ں‌ى في ع ، ومن ثم تستخدم نظرية فيثاغورس في Δ م‌ں‌ع كما في الشكل التالي. لكن السؤال المهم هو: هل يمكننا أن نحسب طول ب‌جـ أو ى‌أ ؟



لا يمكننا أن نحسب طول بجـ باستخدام نظرية فيثاغورس في Δبمجـ لأننا ببساطة لا نعرف طول بم . وبالمثل لا يمكننا أن نحسب طول ىأ باستخدام Δأىن .

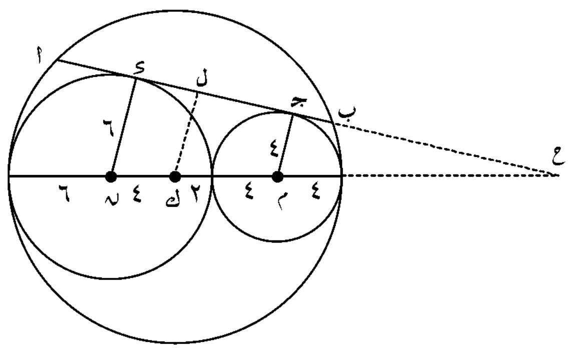
هل لاحظت أننا لم نستخدم الدائرة الكبيرة حتى الآن؟ إذن لنحدد مركزها ك ونرى ما يمكننا فعله...



لاحظ أن |كب| = |كأ| = ١٠ لأن قطر الدائرة الكبيرة يساوي مجموع قطري الدائرتين الصغيرتين.

إذن Δأكب متطابق الضلعين ونستطيع أن نحسب طول قاعدته (المطلوب |أب|) إذا عرفنا ارتفاعه كل . هل تستطيع أن تحسب ارتفاعه؟ لاحظ أن مجـ // كل // نى . هل هناك مثلثات متشابهة؟

مد القطعة المستقيمة أب لتلتقي مع امتداد نم في ع .



$\because \triangle \text{حمجـ} \sim \triangle \text{حند}$

$\therefore \dfrac{|\text{حم}|}{|\text{حم}|+|\text{من}|}=\dfrac{|\text{مجـ}|}{|\text{ند}|}$ أي أن $|\text{حم}|=٢٠$

$\because \triangle \text{حمجـ} \sim \triangle \text{حكل}$

$\therefore \dfrac{|\text{حم}|}{|\text{حم}|+|\text{مك}|}=\dfrac{|\text{مجـ}|}{|\text{كل}|}$ أي أن $|\text{كل}|=\dfrac{٢٦}{٥}$

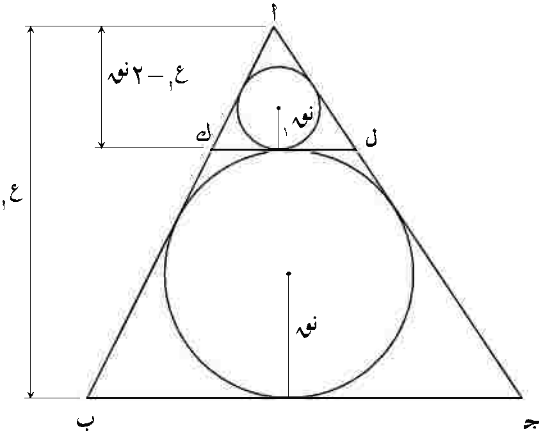
$\therefore |\text{با}|=٢|\text{بل}|=٢\sqrt{|\text{بك}|^{٢}-|\text{كل}|^{٢}}=\dfrac{٤\sqrt{١١٤}}{٥}$

السـؤال الثامن والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٦٤):

رُسمت ثلاثة مماسات للدائرة الداخلية في $\triangle$ابجـ موازية لأضلاعه الثلاثة. كل مماس من هذه المماسات يكوّن مثلثاً صغيراً مع ضلعين من أضلاع المثلث. في كلٍ من هذه المثلثات الصغيرة رُسمت دائرة داخلية. أوجد مجموع مساحات الدوائر الأربعة الداخلية.

الحـل:

في $\triangle$ابجـ ، افرض أن الموازي للضلع بجـ هو كل . افرض أن نصف قطر الدائرة الداخلية في $\triangle$ابجـ يساوي نق وأن نصف قطر الدائرة الداخلية في $\triangle$اكل يساوي نق$_{١}$. أخيراً افرض أن ارتفاع $\triangle$ابجـ المرسوم من الرأس ا إلى الضلع بجـ يساوي ع$_{١}$ كما هو موضح في الشكل.



∵ المثلثان Δ ابجـ وَ Δ اكل متشابهان ،

$$\therefore \frac{\text{نق}_1}{\text{نق}} = \frac{\text{ع}_1 - ٢\text{نق}}{\text{ع}_1} \qquad (١)$$

افرض أن طول الضلع بجـ يساوي س وطول الضلع اب يساوي ص وطول الضلع اجـ يساوي ع .

∵ مساحة Δ ابجـ = $\frac{١}{٢}$ س ع_1 = نق م ، حيث $\text{م} = \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{٢}$

$$\therefore \text{ع}_1 = \frac{٢\,\text{نق}\,\text{م}}{\text{س}} \qquad (٢)$$

من (١) و (٢) نحصل على

$$\text{نق}_1 = \left(١ - \frac{\text{س}}{\text{م}}\right)\text{نق} \qquad (٣)$$

باستخدام نفس الأسلوب يمكننا أن نحصل على

$$\text{نق}_2 = \left(١ - \frac{\text{ص}}{\text{م}}\right)\text{نق} \qquad (٤)$$

و

$$\text{نق}_3 = \left(١ - \frac{\text{ع}}{\text{م}}\right)\text{نق} \qquad (٥)$$

إذن مجموع مساحات الدوائر الأربعة = $\text{ط}\left(\text{نق}^2 + \text{نق}_1^2 + \text{نق}_2^2 + \text{نق}_3^2\right)$

$$= \frac{\text{ط}\,\text{نق}^2}{\text{م}^2}\left[\text{م}^2 + (\text{م}-\text{س})^2 + (\text{م}-\text{ص})^2 + (\text{م}-\text{ع})^2\right] = \frac{\text{ط}\,\text{نق}^2}{\text{م}^2}\left[\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2\right]$$

$$\because \text{نق} = \sqrt{\frac{(\text{م}-\text{س})(\text{م}-\text{ص})(\text{م}-\text{ع})}{\text{م}}}$$

مجموع مساحات الدوائر الأربعة = $\frac{\text{ط}(\text{م}-\text{س})(\text{م}-\text{ص})(\text{م}-\text{ع})(\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2)}{\text{م}^3}$

لاحظ أننا إذا جمعنا (٣) و (٤) و (٥) نحصل على العلاقة المثيرة

$$\text{نق} = \text{نق}_1 + \text{نق}_2 + \text{نق}_3$$

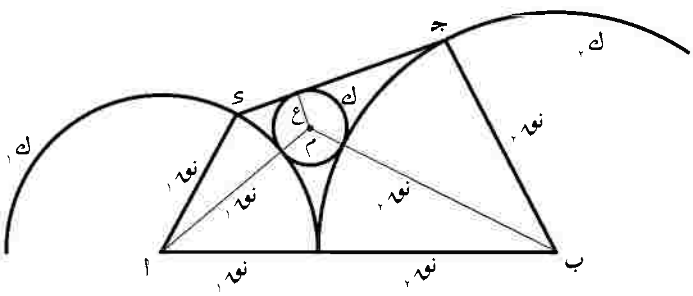
السـؤال التاسع والعشرون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٨٩):

ابجـد مضلع محدب حيث $|اب| = |اد| + |بجـ|$. تقع النقطة م داخل المضلع وعلى مسافة ع من الضلع جـد بحيث يكون $|ام| = ع + |اد|$ وَ $|بم| = ع + |بجـ|$. اثبت أن

$$\frac{١}{\sqrt{|بجـ|}}+\frac{١}{\sqrt{|اد|}}\le\frac{١}{\sqrt{ع}}$$

الحـل:

ارسم الدائرتين $ك_١$ وَ $ك_٢$ بنصفي القطرين $نق_١ = |اد|$ وَ $نق_٢ = |بجـ|$ حول الرأسين ا وَ ب على التوالي. بناءً على المعطيات، هاتان الدائرتان تمسان بعضيهما من الخارج في نقطة تقع على القطعة المستقيمة اب ، كما أن الدائرة ك التي نصف قطرها ع حول النقطة م تمس هاتين الدائرتين وتمس القطعة المستقيمة جـد . انظر الشكل التالي:

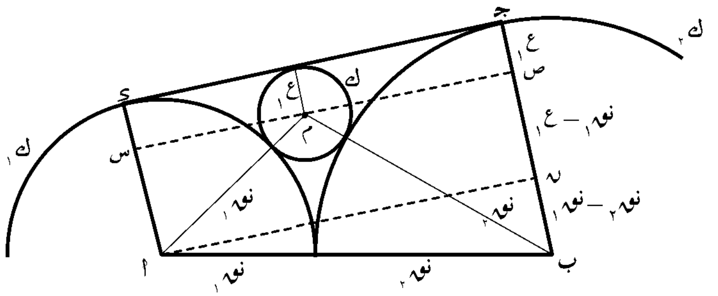


يمكننا أن نفرض أن $نق_٢ \le نق_١$ (لماذا؟). فكر الآن في جميع المضلعات التي رأساها ا وَ ب ثابتان والرأسان الآخران يقعان على الدائرتين الثابتتين $ك_١$ وَ $ك_٢$. الضلع جـد في هذه المضلعات يصل نقطتين على الدائرتين $ك_١$ وَ $ك_٢$ بحيث تمس الدائرة المتغيرة ك هذا الضلع. من الواضح أن الدائرة المتغيرة ك يمكنها أن تكبر إلى الحد الذي تكون فيه مماساً للمماس المشرك للدائرتين الثابتتين $ك_١$ وَ $ك_٢$ من الخارج. في هذه الحالة تكون قيمة ع أكبر ما يمكن. لنرمز لأكبر قيمة لـ ع بالرمز $ع_١$. بما أن $ع \le ع_١$ لأي قيمة ممكنة ع فإن

$$\frac{١}{\sqrt{ع_١}}\le\frac{١}{\sqrt{ع}} \quad \text{أي أن} \quad \sqrt{ع}\le\sqrt{ع_١}$$

من المؤكد أن إثبات المطلوب في حالة هذه القيمة العظمى يكفي لإثبات الحالة العامة. يوضح الشكل التالي الحالة عندما تمس الدائرة المتغيرة ك المماس المشرك للدائرتين الثابتتين $ك_١$ وَ $ك_٢$ من الخارج. يكون المضلع ابجـد في هذه الحالة شبه منحرف قائم. لنرمز لمسقط النقطة م على الضلع اد

بالرمز س ومسقطها على الضلع ب ج بالرمز ص . كما نرمز لمسقط النقطة أ على الضلع ب ج بالرمز ه . باستخدام نظرية فيثاغورس في المثلثين Δ م س أ و Δ م ص ب نجد أن



$$|\text{س م}| = \sqrt{(\text{نق}_{١}+\text{ع}_{١})^{٢}-(\text{نق}_{١}-\text{ع}_{١})^{٢}} = ٢\sqrt{\text{نق}_{١}\,\text{ع}_{١}}$$

$$|\text{م ص}| = \sqrt{(\text{نق}_{٢}+\text{ع}_{١})^{٢}-(\text{نق}_{٢}-\text{ع}_{١})^{٢}} = ٢\sqrt{\text{نق}_{٢}\,\text{ع}_{١}}$$

وفي المثلث القائم Δ أ ه ب

$$|\text{أ ه}| = \sqrt{(\text{نق}_{٢}+\text{نق}_{١})^{٢}-(\text{نق}_{٢}-\text{نق}_{١})^{٢}} = ٢\sqrt{\text{نق}_{١}\,\text{نق}_{٢}}$$

$$\because |\text{أ ه}| = |\text{س م}| + |\text{م ص}|$$

$$\therefore ٢\sqrt{\text{نق}_{١}\,\text{نق}_{٢}} = ٢\sqrt{\text{نق}_{١}\,\text{ع}_{١}} + ٢\sqrt{\text{نق}_{٢}\,\text{ع}_{١}}$$

بالقسمة على $٢\sqrt{\text{نق}_{١}\,\text{نق}_{٢}\,\text{ع}_{١}}$ نحصل على

$$\frac{١}{\sqrt{\text{ع}_{١}}} = \frac{١}{\sqrt{\text{نق}_{٢}}} + \frac{١}{\sqrt{\text{نق}_{١}}}$$

$$\therefore \frac{١}{\sqrt{\text{ع}}} \le \frac{١}{\sqrt{\text{نق}_{١}}} + \frac{١}{\sqrt{\text{نق}_{٢}}}$$

يمكننا أيضاً أن نستنتج أن المساواة في العلاقة الأخيرة تتحقق إذا كان المضلع شبه منحرف قائم.

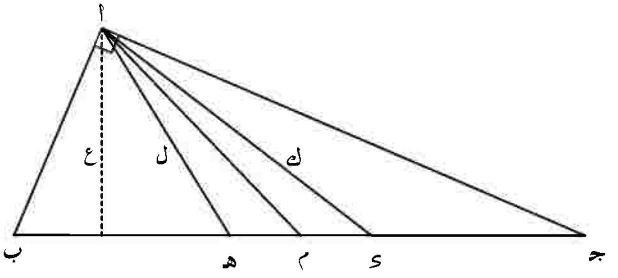
السؤال الثلاثون (أولمبياد الرياضيات العالمي ١٩٦٠):

قُسِّم الوتر ب جـ في المثلث القائم Δ أب جـ والذي طوله س إلى عدد فردي (ن) من القطع المستقيمة المتطابقة. إذا كان طول الارتفاع المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر يساوي ع والقطعة المستقيمة الوسطى على الوتر الناتجة عن التقسيم تقابل زاوية قياسها ى في الرأس أ ، اثبت أن

$$\text{ظا } ى = \frac{٤\, ن\, ع}{(ن^{٢}-١)\, س}$$

الحـــل:

يمكننا أن نفرض أن ن>١ . لنرمز لنقطة منتصف الوتر ب جـ بالرمز م ولطرفي القطعة المستقيمة الوسطى الناتجة عن التقسيم والتي تحوي النقطة م بالرمزين ء وَ هـ كما هو موضح في الشكل.
افرض أن طول أء يساوي ك وأن طول أهـ يساوي ل .



طول المتوسط أم يساوي نصف طول الوتر (لماذا؟). أي أن طول أم يساوي $\frac{س}{٢}$. طول القطعة المستقيمة ء هـ يساوي $\frac{س}{ن}$.

في Δ أء هـ ،

$$ل^{٢} = ك^{٢} + (\frac{س}{ن})^{٢} - ٢ك\frac{س}{ن}\text{جتا}\widehat{\text{أء هـ}} \qquad (١)$$

في Δ أء م ،

$$(\frac{س}{٢})^{٢} = ك^{٢} + (\frac{س}{٢ن})^{٢} - ٢ك\frac{س}{٢ن}\text{جتا}\widehat{\text{أء هـ}} \qquad (٢)$$

من (١) و (٢) نحصل على

$$ل^{٢} + ك^{٢} = \frac{(\frac{س}{ن})^{٢} + س^{٢}}{٢} \qquad (٣)$$

الآن سنقوم بحساب مساحة Δ أ ء هـ بطريقتين:

$$\text{مساحة } \Delta \text{ أ ء هـ} = \frac{1}{2} ك \times ل \text{ جا } ن = \frac{1}{2} \frac{س}{ر} ع$$

$$\Leftarrow \text{ جا } ن = \frac{س ع}{ر ك ل} \qquad (4)$$

في Δ أ ء هـ ،

$$\left(\frac{س}{ر}\right)^{2} = ك^{2} + ل^{2} - 2 ك \times ل \text{ جتا } ن \qquad (5)$$

وباستخدام (٣)، يمكننا كتابة (٥) على الصورة

$$\text{جتا } ن = \frac{س^{2} - \left(\frac{س}{ر}\right)^{2}}{4 ك \times ل} \qquad (6)$$

بقسمة (٤) على (٦) نحصل على

$$\text{ظا } ن = \frac{4 ر ع}{س (ر^{2} - 1)}$$

مصطلحات

English	عربي
Absolute Value	قيمة مطلقة
Acute	حاد
Adjacent	مجاور
Algebra	الجبر
Alternate (Angles)	متبادلة
Angle	زاوية
Arc	قوس
Area	مساحة
Arithmetic (Geometric) Series	متسلسلة حسابية (هندسية)
Arithmetic Mean	وسط حسابي
Arithmetic Sequence	متتابعة حسابية
Base	قاعدة
Bijection	تقابل (أو تناظر أحادي)
Binary System	نظام ثنائي
Binomial Theorem	مبرهنة ذات الحدين
Bisector	منصف
Cancellation	اختزال
Cartesian Product	ضرب المجموعات (الجداء الديكارتي)
Ceiling	سقف (العدد)
Center	مركز
Central Angle	زاوية مركزية
Centroid	مركز الثقل
Chord	وتر
Circle	دائرة
Circular Sector	قطاع زاوي
Circular Segment	قطعة زاوية
Circumcircle	دائرة خارجية
Circumference	محيط (دائرة)
Criterion	معيار
Closed	مغلق
Coefficient	معامل
Congruence	تطابق
Combinations	توافيق (تراكيب)
Common Factor	عامل مشترك
Complementary	متتامة
Complex Number	عدد مركب

Composite Number	عدد مؤلف
Concave	مقعر
Cone	مخروط
Congruence Equation	معادلة تطابق
Congruent	متطابق
Conjugate	مرافق
Constant	ثابت
Convergent Series	متسلسلة تقاربية
Converse	اتجاه معاكس
Convex	محدب
Corresponding (Angles)	متناظرة
Cosecant	قتا
Cosine	جتا
Cotangent	ظتا
Counting Principles	طرق عد
Curve	منحنى
Cylinder	اسطوانة
Decimal System	نظام عشري
Degree	درجة
Determinant	محدد
Diagonal	قطر
Diameter	قطر (دائرة)
Digit	منزلة - خانة
Distance	مسافة
Distribution	توزيع
Divide	يقسم
Dividend	مقسوم
Divisibility	قابلية القسمة
Divisibility Criterion	معيار قابلية القسمة
Division	عملية القسمة
Division Algorithm	خوارزمية القسمة
Divisor	قاسم - مقسوم عليه
Equal	يساوي
Equality	مساواة
Equation	معادلة
Equilateral	متطابق الأضلاع
Equivalence	تكافؤ

Equivalence Class	صف تكافؤ
Equivalence Relation	علاقة تكافؤ
Euclidean Division Algorithm	خوارزمية القسمة الإقليدية
Even Number	عدد زوجي
Extension	امتداد
Exterior (Angle)	خارجية
External	خارجي
Face	وجه
Factorial	مضروب العدد
Factorization	تحليل
Finite Sequence	متتابعة منتهية
Floor	أرضية العدد
Fraction	كسر
Function	دالة (تطبيق ، اقتران)
Fundamental Theorem Of Algebra	المبرهنة الأساس للجبر
Fundamental Theorem Of Arithmetic	المبرهنة الأساس للحساب
Geometric	هندسي
Geometric Mean	وسط هندسي
Geometric Sequence	متتابعة هندسية
Greatest Common Divisor	قاسم مشترك أعظم
Group	زمرة
Height	ارتفاع
Horizontal	أفقي
Hypotenuse	وتر (في مثلث قائم)
Imaginary Number	عدد تخيلي
Incircle	دائرة داخلية
Inclusion-Exclusion Principle	مبدأ التضمين والإقصاء
Inequality	متباينة
Infinite	لانهائي
Infinity	مالانهاية
Inscribed Angle	زاوية محيطية
Integer	عدد صحيح
Interior (Angle)	داخلية
Interval	فترة
Inverse	نظير
Inverse Element	معكوس (أو نظير) العنصر
Irrational Number	عدد لانسبي

Irreducible	غير قابل للاختزال
Isosceles	متطابق الضلعين (مثلث)
Leading Coefficient	معامل رئيس
Least Common Multiple	مضاعف مشترك أصغر
Lemma	توطئة
Length	طول
Linear	خطي
Mathematical Induction	استقراء رياضي
Mean	وسط
Measure	قياس
Median	متوسط
Middle	منتصف
Modulo	مقاس
Multiple	مضاعف
Multiset	مجموعة جزئية مضاعفة
Natural Number	عدد طبيعي
Negative	سالب
Number	عدد
Number Theory	نظرية الأعداد
Obtuse	منفرجة (زاوية)
Odd Number	عدد فردي
One-To-One	دالة متباينة
Onto Function	دالة شاملة
Opposite (Angles)	متقابلة بالرأس (زاويا)
Parallel	موازي
Parallelepiped	متوازي مستطيلات
Parallelogram	متوازي أضلاع
Partition	تجزئة
Perimeter	محيط
Permutations	تباديل
Perpendicular	عمودي
Pigeon Hole Principle	مبدأ برج الحمام
Plane	مستوى
Point	نقطة
Polygon	مضلع
Polyhedron	متعدد سطوح
Polynomial	كثيرة حدود

Positive	موجب
Power Set	مجموعة القوة
Prime Factor	عامل أولي
Prime Number	عدد أولي
Primitive Polynomial	كثيرة حدود بدائية
Prism	منشور
Product	ضرب
Product Principle	مبدأ الضرب
Pyramid	هرم
Pythagorean Theorem	مبرهنة فيثاغورس
Quadratic	تربيعي
Quadrilateral	شكل رباعي
Quotient	خارج قسمة
Radian	راديان (تقدير دائري)
Radius	نصف قطر
Ratio	نسبة
Rational Number	عدد نسبي
Real Line	خط الأعداد الحقيقية
Real Number	عدد حقيقي
Reciprocal	معكوس
Rectangle	مستطيل
Recurrence Relations	علاقات تكرار (علاقات ارتدادية)
Reducible	قابل للاختزال
Regular	منتظم
Relation	علاقة
Remainder	باقي
Repeated Root	جذر مكرر
Representation	تمثيل
Rhombus	معين
Right	قائم
Root	جذر
Satisfy	يحقق
Scalene	مختلف الأضلاع
Secant	قا
Segment	قطعة
Selection	نماذج أخذ العينات
Sequences	متتابعات

Series	متسلسلات
Set	مجموعة
Side	ضلع
Sign	إشارة
Similar	متشابه (مثلث)
Sine	جا
Slant Height	راسم
Solution	حل
Space	فضاء
Sphere	كرة
Square	مربع
Stirling Number	عدد ستيرلنج
Straight	مستقيم
Subtend	يقابل
Sum	مجموع
Sum Principle	مبدأ المجموع
Supplementary	متكاملة
Surface	سطح
Symmetry	تناظر
Tangent	مماس ، ظا (زاوية)
Theorem	مبرهنة
Three-Dimensional	ثلاثي الأبعاد
Transversal	قاطع
Trapezoid	شبه منحرف
Triangle	مثلث
Trigonometry	حساب المثلثات
Triple	ثلاثية
Unique Factorization	تحليل وحيد
Value	قيمة
Vertex	رأس
Vertical	عمودي
Volume	حجم
Whole Number	عدد كلي
Width	عرض
Zero Of A Function	صفر دالة
Zero Polynomial	كثيرة حدود صفرية

المراجع الرئيسة

Contests Books:

1. **Eötvös Competitions (Hungary):**
   - **E. Rapaport** (translator)**,** *Hungarian Problem Book I, Eötvös Competitions (1894 - 1905),* Random House & The L.W. Singer Company (1963).
   - **E. Rapaport** (translator)**,** *Hungarian Problem Book II, Eötvös Competitions (1906 - 1928),* Random House & The L.W. Singer Company (1963).

2. **IMO: International Mathematics Olympiad:**
   - Reiman, *International Mathematical Olympiad (1959 - 1999)*, Anthem Press (2001).

3. **MAA: Mathematical Association of America (USA):**
   - C. Salkind, *The MAA Problem Book I, Annual High School Contests of the MAA 1950 – 1960,* The Mathematical Association of America (1961).
   - C. Salkind, *The MAA Problem Book II, Annual High School Contests of the MAA 1961 – 1965,* The Mathematical Association of America (1966).
   - C. Salkind and J. Earl, *The MAA Problem Book III, Annual High School Contests of the MAA 1966 – 1972,* The Mathematical Association of America (1966).
   - R. Artino, A. Gaglione and N. Shell, *The Contest Problem Book IV, Annual High School Mathematics Examinations 1973 – 1982,* The Mathematical Association of America (1966).

4. **USSR:** *The USSR Olympiad Problem Book***,** By Shkylarsky, Chentozov, Yaglom; Translated by Maykovich, W.H. Freeman and Company, San Francisco and London, 3rd Ed. (1962)

Articles:

- L. Fan, *A Generalization of Synthetic Division and a General Theorem of Division of Polynomials,* Mathematical Medley, Volume 3. No. 1 (2003), pp. 30-37.

Monographs:

1. R. Aufmann, V. Barker and R. Nation, *College Algebra and Trigonometry,* Houghton Mifflin Company, 4th edition (2002).
2. A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer (1997).
3. G. Jones and J. Jones, *Elementary Number Theory,* Springer (1998).
4. S. Lehoczky and R. Rusczyk, *The Art of Problem Solving, Volume 1, the Basics,* 6th Edition, AoPS (2004).
5. S. Lehoczky and R. Rusczyk, *The Art of Problem Solving, Volume 2, and Beyond Solutions,* 4th Edition, AoPS (2004).
6. K. Rosen, *Elementary Number Theory and its Applications,* 4th edition, Addison Wesley Longman (2000).

7. I. Stewart, *Galois Theory,* 3rd edition, Chapman & Hall/CRC (2004).
8. L. C. Larson, *Problem-Solving Through Problems*, Springer-Verlag NY Inc., (1983).
9. A. Tucker, *Applied Combinatorics*, 3rd Ed. John Wiley & Sons Inc. (1995).
10. E. Lozansky and C. Rousseau, *The Winning Solution*, Springer-Verlag NY Inc., (1996).
11. G. E. Martin, *Counting: The Art of Enumerative Combinatorics*, Springer-Verlag NY Inc., (2001).
12. *Learning and Teaching Number Theory; Research in Cognition and Instruction*, Edited by S. Campbell and R. Zazkis, Ablex Publishing (2002).
13. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N Petrovic, The IMO Compendium, A Collection of ProblemsSuggested for the IMO 1959-2004, Springer (2006).

Dictionaries:

1. A. Al-Ashhar, *Dictionary of Mathematics (English – French – Arabic),* Academia (1995).
2. Ministry of Education "*Jordanian Committee for Arabization*" *Mathematics Dictionary (English – Arabic)y*; Librairie Du Liban, Beirut (1998).
3. Compiled by A. N. G. Press Committee (Revised by Dr. A. El-Atriby); *Mathematics Dictionary (Englishh – Arabic);* Arab Nile Group Cairo (2003).
4. A. Al-Khatib; " A New Dictionary of Scientific and Technical Terms; Librairie Du Liban, Beirut (1980) 5th ed.