فلسفة العلوم الرياضية

تصحيح وتوضيح

كتب الأستاذ أحمد فؤاد الأهوانى (١) فى مقاله « فلسفة العلوم الرياضية » عن هندسة إقليدس وسبب سقوطها فى العصر الحاضر ، وذكر أن القضايا الثلاث المسلم بها فى هذه الهندسة هى :

ا — لا يمكن أن نرسم إلا مستقيماً واحدا بين نقطتين .

ب — الخط المستقيم هو أقصر طريق بين نقطتين .

حـ — من نقطة واحدة لا يمكن أن نرسم إلا موازياً واحداً لمستقيم معلوم .

وهو يؤكد أنها وأمثالها أساس سقوط هندسة إقليدس ، وذلك لما ظهر فيها من الخطأ ؛ ولكى يثبت سقوط القضية الثانيـة مثلا قال : إن أقصر طريق بين القاهرة وبرلين هو قوس دائرة ، لأنه لو كان خطاً مستقيماً لاحتجت أن تشق الأرض وهذا مستحيل (٢) .

هكذا ترى أنه ارتكن فى برهانه الرياضى على استحالة شق الأرض ، وهذا — فيما ترى — ليس معهوداً فى أساليب البرهان الرياضى ؛ فكثير من فروض الرياضة وبراهينها ما يقبلها العقل ويعدها حقيقة واقعة ، بينما لا نستطيع إجراءها عملياً ؛ فإليك مثلا : قوانين النهايات التى يبنى عليها علم التفاضل والتكامل الذى هو أهم فروع الرياضة العالية ، فهل نستطيع حقاً الوصول إلى ما لا نهاية ؟ لا شك أن هذا مستحيل ؛ ولكنك ترى أننا نستطيع إجراء ذلك بكل سهولة فى العقل المجرد ؛ وإليك مثلا أقرب الفروض إلينا ؛ وهو تعريف النقطة بأنها وضع مجرد من الأبعاد ؛ فهل نستطيع عملياً أن نأتى بهذا الوضع ؟ طبعاً لن نستطيع ؛ ولكن الحقيقة أننا نتصور هذا الوضع فى العقل المجرد أيضاً ؛ ومن هنا نرى أننا لو أردنا استعمال مثل ذلك البرهان لسقطت فروض رياضية لا عد لها ولا حصر ، ولأخذت الرياضة مجرى غير هـذا المجرى ، وأصبحت فى النهاية تجارب طبيعية نقبل منها ما نستطيع إجراءه ونرفض ما لا نستطيع .

وهذه نظرية النسبية Relativity آخر ما وصل إليـه الانسان من علوم الرياضة والطبيعة ، تناولت فى جملتها كثيراً من البديهيات الرياضية فحولتها ونقحتها ، وبرهنت لنا أن كل ما نراه من الحقائق نسبى محض — مما لم يتنبه إليه إقليدس — ولكننا لم نعهد فى براهينها مثل هذا البرهان .

---

(١) مجلة المعرفة عدد أغسطس سنة ١٩٣٢ ص ٤٩١

(٢) ص ٤٩٥ : من مجلة المعرفة ٤ ج ٤ م ٣

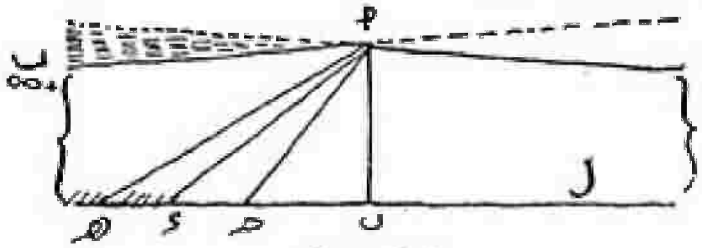
كنا نقول ـ حسب هندسة إقليدس ـ إن كل ثلاث نقط من جسم متماسك على استقامة واحدة ؛ وكنا نقول إن القدم يظل قدماً ، والثانية تظل ثانية فى أى زمان ومكان ؛ وجلى أن هذه بديهيات لا جدال فيها ، ولكن تلك النظرية تثبت خطأ هذه البديهيات . ولنترك هذا الموضوع لنناقشه فى المستقبل،ونرجع إلى مثال الأستاذ الأهوانى .

أحقاً كان السبب المباشر فى سقوط هندسة إقليدس قيامها على أمثال تلك القضايا ؟ كلا ، لم يكن ذلك هو السبب ، بل إن السبب الحقيق يرجع إلى سقوط فروض أولية هى أساس تلك القضايا ، بل هى أساس علم الهندسة بأجمعه .

نظر إقليدس إلى الكون ، فبنى هندسته المعروفة على أسس ثلاثة : (١) الخط المستقيم ، (٢) الفراغ ، (٣) العالم ؛ وهكذا تبنى كل هندسة على هذه الأسس ، وسنتناول كلا منها ببحث مجمل لنعلم السبب الحقيق فى سقوط هندسته ، ولنعرفه ناحية من نواحى التفكير الرياضى الحديث .

١ ـ الخط المستقيم

إننا فى الرياضة العملية لا نستخدم خطوطاً مستقيمة كاملة ، بل أجزاءاً محدودة جداً منها ، ولكننا فى كثير من براهيننا الرياضية نتصور امتداد الخط المستقيم إلى ما لا نهاية ، وهنا يبدأ العقل يتصور ما يؤول إليه ذلك الخط فى تلك اللانهاية حيث يبدأ الخلاف والجدل ؛ فإقليدس يفرض أنه « يتوازى المستقيمان إذا تلاقيا فى ما لا نهاية » ، ومعنى ذلك أن نقطة التقاطع تكون على مسافة لانهائية فى الكبر من نقطة أخرى ثابتة على أحد المستقيمين ، ولو أنا تأملنا قليلا لرأينا عدم صلاحية هذا الفرض .



(شكل ١)

خذ مثلا النقطة ا خارج المستقيم ل (شكل ١) ، ونتصور أنها ترسل الأشعة ا ب ، ا حـ ، ا ء ، . . . . ، ا هـ لتلاقى المستقيم ل فى ب ، حـ ، ء ، . . . . ، هـ .

واضح أنه كلما ازداد ميل الشعاع اهـ على المستقيم ل، كلما بعدت النقطة هـ عن العمود ا ب جهة اليسار بمسافات محدودة ؛ فإذا ما سرنا مع اتساع الزاوية ب ا هـ ، فإنا نرى أنه سيأتى وضع يكون فيه الطول ب هـ محدوداً ، ولكن إذا ما ازدادت الزاوية ب ا هـ بعد ذلك زيادة لانهائية فى الصغر، فإننا ـ حسب إقليدس ـ نجد أن هـ انتقلت إلى ما لا نهاية على ل ،

وأصبح الشعاع ا هـ يوازى المستقيم ل ؛ ومعنى ذلك أن النقطة هـ تترك الأبعاد المحدودة لتختفى فى ما لا نهاية ، وذلك بسبب زيادة صغيرة فى الزاوية ب ا هـ ؛ وجلى جداً أن هذا بعيد التصور .

من أجل ذلك قال لوبانشوسكى Lobatchewsky: إن ب + ه ه ، ب — ه ه (وهما الوضعان اللذان بعدهما تختفى هـ فى ما لا نهاية) يكونان زاوية تختلف قليلا عن القائمتين ، وإنه يوجد عدد لانهائى من المستقيمات الأخرى — المنقوطة — محصورة بينهما لا تقابل المستقيم ل على مسافات محدودة ، فهى بذلك توازيه ؛ بينما قال ريمان Riemann: إننا لا حاجة بنا إلى فرض اللانهاية ؛ ولنفرض أنه إذا تحركت النقطة هـ على المستقيم ل باستمرار ، مبتدئة من ب فى أحد الاتجاهين ، فإنها تعود إلى الوضع ب ثانياً من الاتجاه الآخر ؛ وذلك لأن الكون منحن على نفسه : فلا بد أن يكون كل مستقيم فيه منحنياً على نفسه .

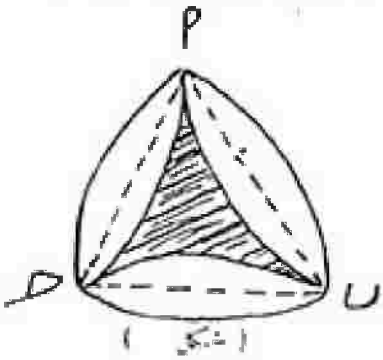
وهكذا نرى أن النقطة هـ لا تترك المستقيم ل ، ولا تختفى فى ما لا نهاية ؛ وبذلك فلا يمكن رسم أى مستقيم من ا يوازى المستقيم ل ؛ ومن هنا نرى كيف أخذ العلماء ينظرون إلى هندسة إقليدس من هذه الناحية ، وكيف أن الاختلاف فى تحديد خواص الخط المستقيم أدى إلى برهنة أنه ليس بحقيق أن من نقطة واحدة يمكن رسم مستقيم واحد يوازى مستقيماً آخر .

٢ — الفراغ

زعم إقليدس — من غير دليل أو برهان — أن الفراغ مسطح لا انحناء فيه ، وأننا نستطيع أن نتخذ فيه ما شئنا من السطوح المستوية ؛ ولكن هذا على خلاف ما تقوله النسبية ؛ التى تبرهن أن الفراغ منحن ، وأن كل ما نراه من خطوط ومستويات نسبى محض ؛ ولما أراد (نيوتن) استعمال هندسة إقليدس المستوية فى تسجيل أبحاثه اضطر إلى إدخال فروض كثيرة ، منها فرض الجاذبية مثلا ، حيث يقول : إن أى جزأين من المادة يجذبان بعضهما حسب القانون $\frac{ك_1 \times ك_2}{س^2}$ (حيث ك ، س هما الوزن والمسافة) ؛ وإلا فلماذا تسير الكواكب — كالأرض مثلا — فى أفلاكها المنحنية ؟ قال نيوتن : ذلك لأنها تجذب بعضها البعض . أما النسبية فتقول : إنه ليس هناك جاذبية ، بل إننا لو تركنا الكواكب حرة تسير فى الفضاء ، فإنها — نظراً لانحنائه — تسير فى هذه الأفلاك المنحنية ، وإن أشعة الشمس المنحنية التى نراها عند كسوفها إنما هى دليل بين على هذا الانحناء ؛ وعلى ذلك لو أنا أردنا أن نتحرك من نقطة إلى أخرى متخذين أقرب طريق ممكن ، فلا بد أن نسير فى منحن تبعاً لطبيعة الكون .

ولقد شبه إنشتين Einstein فقاعة الصابون التى كلما شحناها بالكهرباء كلما ازداد حجمها

بالكون الذى كما شحناه بالمادة كما ازداد حجمه أيضاً ؛ فهو يقول إننا نستطيع أن نعين حجم مادة الكون بالضبط ؛ وكذلك تاريخها ـ الماضى والحاضر والمستقبل ـ من جراء ذلك التشبيه . ولقد أيدت المشاهدات الفلكية صحة نتائجه تماما . وعلى ذلك فليس هنالك أى خط مستقيم ، وليست هنالك سطوح مستوية كما زعم إقليدس ؛ ومن هنا يتبين لماذا لا يمكن أن يكون مجموع زوايا المثلث قائمتين كما هو مبين فى (شكل ٢) ، حيث يتضح أنه نظراً لانحناء الأضلاع كان مجموع زوايا مثلث إقليدس ـ وهو المنقوط ـ أكثر من مجموع زوايا المثلث الداخلى المظلل ، وأقل من مجموع زوايا المثلث الخارجى .



(شكل ٢)

٣ ـ العالم

هذه هى أهم نقط الضعف الظاهرة فى هندسة إقليدس ، فهو يزعم أن :

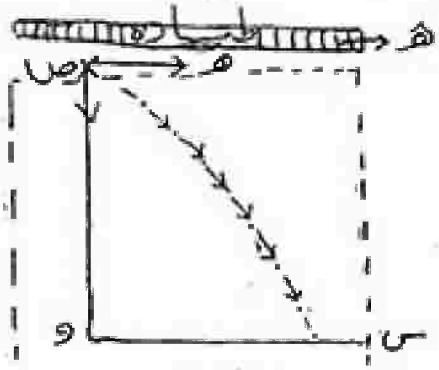
(١) يتكون العالم من نقط مكانية ، وعلى ذلك فنحن ننتقل فيه من نقطة إلى نقطة ؛ ولقد أثر هذا الزعم فى نيوتن الذى أعطانا فكرة المكان المطلق Absolute space .

(٢) لا دخل للزمان فى هندسته ، فالزمان عنده شىء مستقل عن المكان ، مما جعل نيوتن ـ أيضاً ـ يعطينا فكرة الزمان المطلق Absolute time ؛ وأخيراً قال العالم مينكوسكى Minkowski : إن عالمنا هذا عالم حوادث Events ، فهو متغير على الدوام ؛ وعلى ذلك فهو يتكون من الحوادث التى نراها ونحسها لا من نقط مكانية ؛ وما حياتنا إلا سلسلة من الحوادث لا سلسلة من النقط ؛ ولننظر الآن مم تتركب هذه الحوادث ؟ إنها تحدث فى مكان معين ، وزمان معين ، ولذلك فهى تتركب من مكان وزمان معاً ؛ أى أنها ذات أربعة أبعاد ؛ ونقاس فى الرياضة بالاحداثيات س ، ص ، ع ، ∈ ل √ ـ١ ، حيث ∈ الزمن بالثوانى ، ل سرعة الضوء *

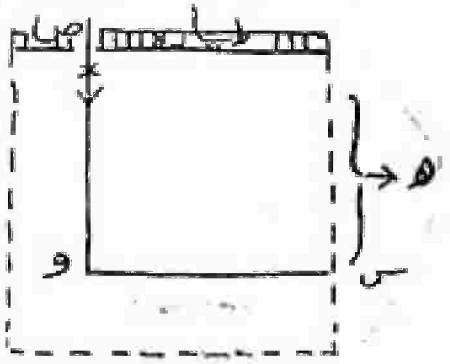
ولقد أثبت مينكوسكى هذا أن الكمية √{(س٢ ـ س١)٢ + (ص٢ ـ ص١)٢ + (ع٢ ـ ع١)٢ ـ ل٢ (∈٢ ـ ∈١)٢} تساوى كمية ثابتة دائماً ، أى أنها مطلقة ـ حيث الرمز ١ ، ٢ لتعيين أحداثيات نقطتين معينتين ـ ؛ وجلى أن هذه الكمية ليست بالزمان ولا بالمكان ، ولكن خليطاً منهما يسمى الزمان المكانى Space-time الذى استطعنا به التغلب على كثير من الأخطاء التى طالما ارتكبناها باستعمال هندسة إقليدس الناقصة .

* يراد من كلا الاحداثيات : الأبعاد القائمة من جهة معلومة فى اتجاهات خاصة .

فثلاً لنفرض أن شخصاً ما أسقط حجراً صغيراً من طيارة تسبح به أفقياً فى الهواء بالسرعة ﻫ فى الثانية ، ثم أخذ يلاحظه (شكل ١٣) فانه يراه يسقط بحيث تخضع سرعته الرأسية ص



(شكل ١٢)



(شكل ١٣ ب)

فى الثانية ء للقانون س = حـ × ء حيث حـ عجلة الجاذبية .

وتخضع سرعته الأفقية س للقانون س = صفر × ء = صفر

وعلى ذلك فسرعته المحصلة هى $\sqrt{ص^{٢} + س^{٢}}$ = ص = حـ × ء ١

ولكن اذا كان هنالك من ينظر إلى ذلك الحجر من سطح الأرض كما فى (شكل ١٣ ب) ؛ فانه يراه كأنه يسير فى خط منحن واسع (قطع مكافىء) ، وهو سلسلة السهام المنقوطة فى الشكل ، حيث تخضع سرعتاه : الرأسية والأفقية للقانونين : ص = — حـ × ء ؛ س = ﻫ على الترتيب ؛ وعلى ذلك فسرعته المحصلة بعد الزمن ء هى $\sqrt{ص^{٢} + س^{٢}}$

أى أنها $\sqrt{حـ^{٢} \times ء^{٢} + ﻫ^{٢}}$ ٢

وبمقارنة ١ ، ٢ نرى أننا اختلفنا فى قياس سرعة ذلك الحجر ؛ هنا يقول إنشتين : إنه باستعمال الزمان المكانى عند ما يكون الشخصان فى حركة نسبية — كالذى بالطيارة بالنسبة إلى ذلك الذى على الأرض — يميل احداثياً زمانهما ، بحيث إنما يراه أحد زماناً خالصاً أو مكاناً خالصاً يراه الاخر زماناً مع مركبة صغيرة فى المكان ، أو مكاناً مع مركبة صغيرة فى الزمان ، وبذلك نستطيع أن نحصل دائماً على نتيجة واحدة .

تلك إذن هى الأسس الثلاثة التى سقطت من أجلها هندسة إقليدس ، حيث أصبحت تعجز أن تسير مع الرياضة الحديثة ، خصوصاً بعد ظهور النسبية ، عرضتها بجملة لنعطى فكرة حقيقية عن التفكير الرياضى الحديث ، ونوضح أن سقوط تلك القضايا التى ذكرها الأستاذ الأهوانى أو أمثالها ما هو إلا نتيجة مباشرة لها . ؟

محمد جمال الدين الفندى
بكلية العلوم