الباب السادس

ارتفاع الظهر عن البطن

ومنحنيات الانتقال

ارتفاع الظهر عن البطن Superelevation :

إذا سارت عربة سكة حديد فى منحن دائرى فإنها تندفع إلى الخارج بقوة تسمى القوة المركزية الطاردة وتنتقل هذه القوة من العربة إلى القضيب الخارجى خلال شفة العجلات وينتج عن ضغطها العيوب الآتية :

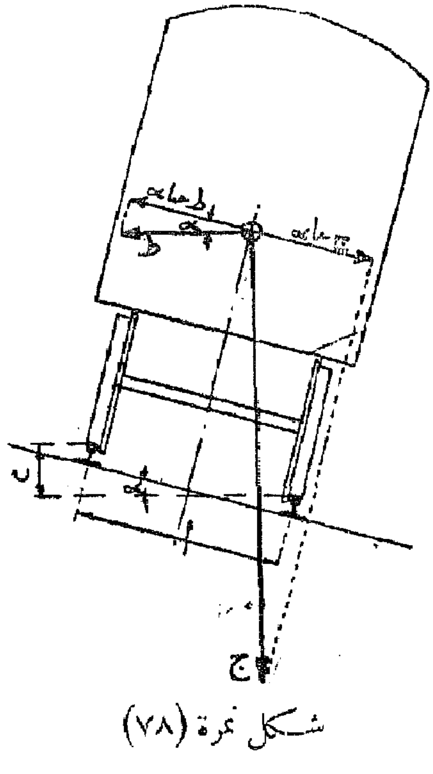
أولا — يتعرض القضيب الخارجى لتآكل مستمر يستلزم تغييره بين آن وآخر .

ثانياً — يصبح المنحنى عرضة لتغيير موضعه .

ثالثاً — تزداد مقاومة المنحنى ثم .

رابعاً — قد تسبب زيادة السرعة انقلاب العربات أو خروجها عن القضبان خصوصا إذا تآكلت شفة العجلات بشكل زاوى إذ تستند الشفة على تاج القضيب وتخرج عنه .

وللتغلب على هذه العيوب تعطى السكة ميل عرضى فيرتفع القضيب الخارجى عن القضيب الداخلى فتميل العربة ويستعمان مركبة وزنها فى اتجاه الميل على مقاومة القوة المركزية الطاردة ويسمى ارتفاع القضيب الخارجى عن الداخلى بارتفاع الظهر عن البطن .



شكل نمرة (٧٨)

والشكل نمرة (٧٨) يبين قطاعاً لعربة فى منحن . فإذا كانت زاوية العلو هى « α » وكان بعد محورى القضيبين « ا » مترا[1] وارتفاع الظهر عن البطن « ﻫ » مترا ووزن العربة « ج » طنا وكانت القوة المركزية الطاردة « ط » طنا . فلكى تحافظ العربة فى المنحنى على توازنها العرضى يجب أن تكون مركبة القوة المركزية الطاردة فى اتجاه مستوى ميل القضبان تساوى مركبة وزن العربة فى نفس الاتجاه .

أى أن ط جتا α = ج جا α

(١) يعوض عن البعد ا فى كثير من الأحيان باتساع السكة .

وحيث أن الزاوية α صغيرة دائماً فإن جتا α تساوى الوحدة تقريباً ، جا α = $\frac{ه}{ا}$

$$\therefore \quad ط = ج \times \frac{ه}{ا}$$

ولكن القوة المركزية الطاردة ط = $\frac{ج}{ح} \times \frac{س^{٢}}{ر}$ طنا

حيث س سرعة العربة بالمتر فى الثانية

، ح عجلة التثاقل بالمتر فى الثانية فى الثانية ، ر نصف قطر المنحنى بالمتر .

$$\therefore \quad \frac{ج}{ح} \times \frac{س^{٢}}{ر} = ج \times \frac{ه}{ا}$$

أو ه = $\frac{ا}{ح} \cdot \frac{س^{٢}}{ر}$ مترا

$$= \frac{ا\,س^{٢}}{١٢٧\,ر} \quad \text{مترا}$$

حيث س السرعة بالكيلو متر فى الساعة .

وحيث أن ا ، س ، ح ثوابت فيمكننا كتابة هذه العلاقة بالصورة الآتية :

$$ه = \frac{ك}{ر}$$

حيث ك = $\frac{ا}{ح}$ س^{٢}

وإذن فارتفاع الظهر عن البطن لسكة تسير عليها العربات بسرعة ثابتة يتناسب تناسبا عكسيا مع نصف قطر المنحنى .

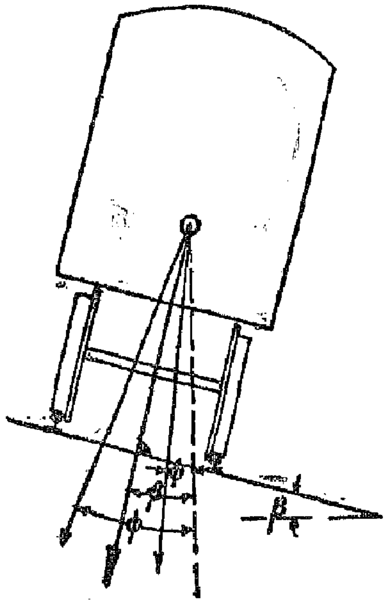
وسرعة القطارات « س » لا تكون ثابتة تقريبا إلا فى الخطوط التى تسير عليها قطارات الركاب فقط كخطوط الضواحى وخطوط تحت الأرض وإذن « ه » تكون مناسبة للانحناء دائما .

أما فى الخطوط ذات الحركة المزدوجة حيث يستخدم الخط للركاب والبضائع معا فأن سرعة القطار تختلف باختلاف نوعه وينتج عن ذلك أن قطارات الركاب تحتاج إلى ارتفاع ظهر أكبر مما تحتاجه قطارات البضائع . فأن كانت السرع لا تختلف عن بعضها كثيراً اختير ارتفاع متوسط . أما إذا كان الاختلاف كبيرا حسب ارتفاع الظهر عن البطن ليناسب قطارات الركاب . وهناك حالات فى أمريكا فصلت فيها حركة الركاب عن البضائع بالنسبة لشدة الحركة فاستقلت سكك كل منهما عن الأخرى .

ولا يزاد ارتفاع الظهر عن البطن فى العادة عن ١٢ أو ١٣ سنتيمترا فإذا كانت القطارات تسير بسرعة

أ كبر من تلك التى تقابل هذا الارتفاع انقصت سرعتها على هذه المنحنيات إلى السرعة المقابلة للارتفاع .

وإذا صمم الارتفاع فى سكة ما ليقابل سرعة محددة فأن القطار إذا تجاوز هذه السرعة اندفع ناحية القضيب الخارجى وإذا سار دونها اندفع ناحية القضيب الداخلى وفى كلتا الحالتين تنشأ ضغوط على القضبان فتتآكل . والشكل نمرة (٧٩) يوضح اتجاه محصلة القوى فى كل من الحالتين وكذلك يبين المحصلة العمودية فى حالة سير القطار بالسرعة المحسوب عليها الارتفاع .



شكل نمرة (٧٩)

وتدل الزاوية ϕ على موضع المحصلة بالنسبة للرأسى . والزاوية β على ميل المحصلة فى حالة السرعة المضبوطة .

فإذا كانت « ϕ » أقل من « β » كانت السرعة أبطأ من تلك المصمم عليها ارتفاع الظهر عن البطن وإذا كانت أكبر كانت السرعة أكبر .

وقد وجد البروفسر بيترسن نتيجة بحث احصائيات الصيانة فى شبكة السكك الحديد الألمانية أنه إذا كانت :

$$\text{ظا } \phi - \text{ظا } \beta \leqq \pm ٠٫٠٥$$

فأنه لا يحدث هناك تآكل يذكر فى القضبان فى المنحنيات . وهذه العلاقة تعطى موضع المحصلة فى كل من الحالتين ومنها يمكن استنتاج السرعة القصوى والسرعة الصغرى لكل ارتفاع ظهر عن بطن .

وينفذ الارتفاع فى السكة بأحدى الطرق الآتية :

(١) يحفظ القضيب الداخلى فى نفس المستوى ويرفع القضيب الخارجى بالمقدار ه .

(٢) يحفظ القضيب الخارجى فى نفس المستوى ويخفض القضيب الداخلى بالمقدار ه .

(٣) يرفع القضيب الخارجى بنصف مقدار الارتفاع ه ويخفض القضيب الداخلى بالنصف الآخر .

والطريقة الأولى هى المستعملة فى أكثر السكك الحديدية ومن ضمنها السكك الحديد المصرية وفيها يرتفع مركز ثقل العربات عند دخولها المنحنى بمقدار نصف الارتفاع ه ثم ينخفض بعد خروجه من المنحنى . وأما الطريقة الثانية فنادرة الاستعمال وفيها ينخفض مركز ثقل العربات بنصف الارتفاع أولا ثم يعود فيرتفع . وأما الطريقة الثالثة فتستعمل فى بعض سكك حديد أوروبا وهى أفضل الطرق الثلاثة وذلك من حيث احتفاظ العربات بمنسوب مركز ثقلها فى أثناء مرورها على المنحنى فلا تكون مبعثا لفقدان وحدات من الشغل لا مبرر لفقدانها كما فى الحالتين السابقتين .

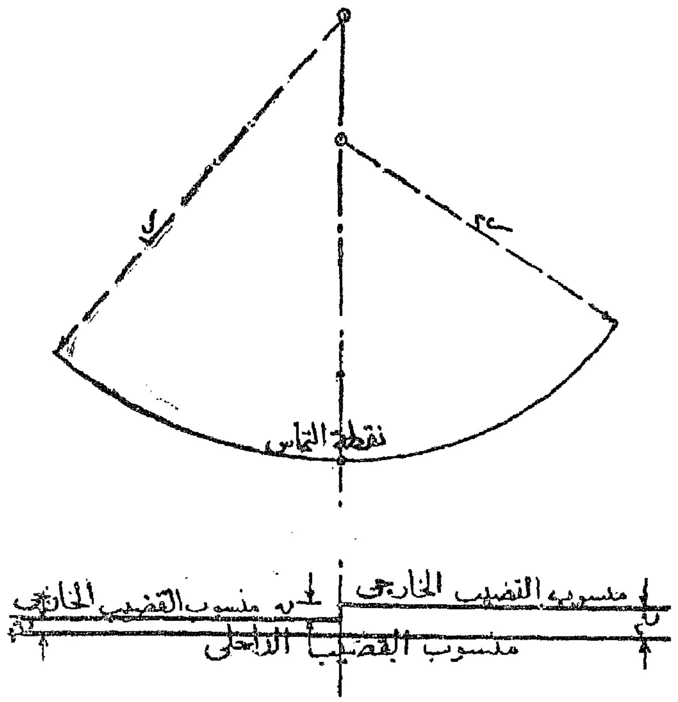
منحنيات الانتقـــال

Transition Curves

الحالة العامة بين منحنى وآخر :

إذا ما نظرنا إلى السقط الأفقى لأى خط حديدى وجدناه يتكون من خطوط مستقيمة تصلها ببعضها منحنيات . وإذا نظرنا إلى الموضوع نظرة رياضية لوجدنا الخط يتكون كله من منحنيات إذ الخط المستقيم ما هو إلا منحن نصف قطره ما لا نهاية . وإذن تكون الحالة العامة لمنحنيات الانتقال هى كيفية وصل هذه المنحنيات المركبة compound curves ببعضها .

ولنفرض الآن منحن مركب يتكون من جزئين أحدهما نصف قطره « ر_1 » والآخر نصف قطره « ر_2 » ، ولنفرض أن ر_1 أكبر من ر_2 . انظر شكل نمرة (٨٠) .



شكل نمرة (٨٠)

إذن يلزمنا للمرور فى المنحنى ر_1 أن نرفع القضيب الخارجى بمقدار الارتفاع النسبى[1] $\text{ه}_1 = \frac{\text{ك}}{\text{ر}_1}$

ويلزمنا أيضاً عند مرورنا على المنحنى ر_2 أن نرفع القضيب الخارجى بالمقدار $\text{ه}_2 = \frac{\text{ك}}{\text{ر}_2}$.

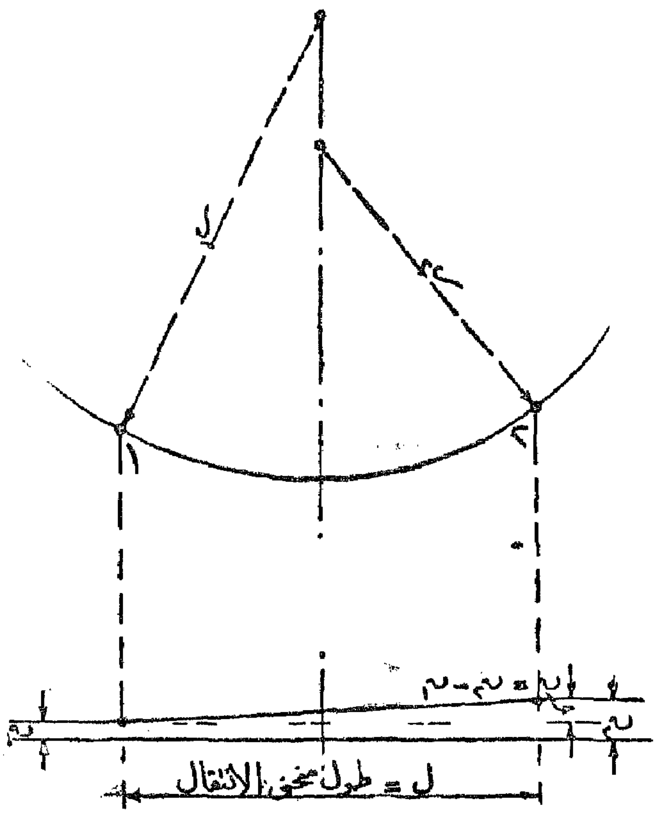
(١) سنطلق على ارتفاع قضيب الظهر عن البطن لفظة الارتفاع النسبى .

وإذن فعند نقطة تماس المنحنيين يكون لدينا اختلاف فى الارتفاع النسبى مقداره :

$$ه = ه_{٢} - ه_{١} = \frac{ك}{نق_{٢}} - \frac{ك}{نق_{١}} = ك\left(\frac{١}{نق_{٢}} - \frac{١}{نق_{١}}\right)$$

ولا يمكن للعجلات أن تقفز من المنسوب $ه_{١}$ إلى المنسوب $ه_{٢}$ دفعة واحدة عند نقطة التماس بل يستدعى الأمر أن يوزع المقدار $ه$ على مسافة فى كلتا الجهتين فترتفع العجلات $\frac{ه}{٢}$ قبل نقطة التماس ، $\frac{ه}{٢}$ بعدها بانحدار خطى خفيف وهـذه المسافة التى يسوى فيها هذا الاختلاف فى الارتفاع النسبى يطلق عليها اسم « طول منحنى الانتقال » .

والآن إذا نظرنا إلى المنحنى المركب فى مسقطه الأفقى شكل نمرة (٨١) لتبين لنا أن منحنى الانتقال



شكل نمرة (٨١)

يصل بين النقطتين ١ ، ٢ حيث الانحناء عند النقطة «١» يساوى $\frac{١}{نق_{١}}$ وعند النقطة «٢» يساوى $\frac{١}{نق_{٢}}$

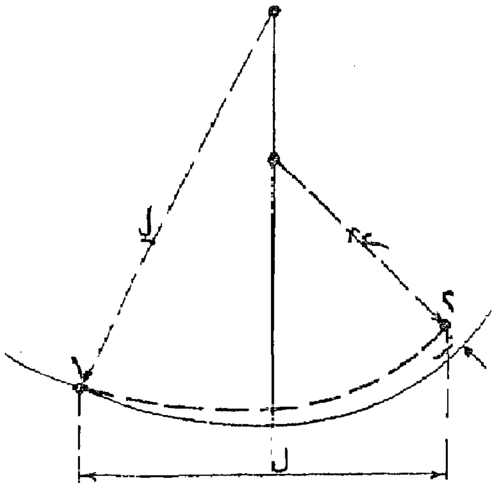
أى أن الانحناء يختلف من النقطة ١ إلى النقطة ٢ بالمقدار $\frac{١}{نق_{٢}} - \frac{١}{نق_{١}}$. وحيث أن الارتفاع النسبى

يتناسب مع هـذا المقدار إذ يساوى $ك\left(\frac{١}{نق_{٢}} - \frac{١}{نق_{١}}\right)$ وحيث أنه يختلف اختلافا خطيا بين النقطتين

ينتج أنه لضمان الاتزان العرضي للعربات بينهما يجب أن يتدرج الانحناء بين النقطتين تدرجا خطيا كذلك وذلك حتى يكون الارتفاع النسبي عند أى نقطة من نقط منحنى الانتقال متناسبا مع الانحناء عند تلك النقطة . ويكون كل من الارتفاع النسبي والانحناء لنقطة ما متناسبين مع بعد النقطة عن نقطة بداية المنحنى .

يمكننا من البحث السابق أن نعرف منحنى الانتقال بما يأتى :

« منحنى الانتقال هو ذلك المنحنى الذى يصل بين منحنيين دائرين بحيث يتناسب انحناؤه عند أى نقطة من نقطه مع الارتفاع النسبي لنفس النقطة » .



شكل نمرة (٨٢)

ولكى يغير منحنى الانتقال انحناؤه من المقدار $\frac{1}{ر_1}$ عند النقطة ١ إلى المقدار $\frac{1}{ر_2}$ عند النقطة ٢ فإن الانحناء بعد النقطة ١ يأخذ فى الزيادة فيتجه المنحنى إلى الداخل ابتداء من النقطة ١ وعند وصوله إلى النقطة ٢ يكون قد انحرف عن المنحنى $ر_2$ بمقدار سنسميه « الزحزحة ز » shift كما سنبين ذلك فيما بعد انظر شكل نمرة (٨٢) .

المعادلة العامة لمنحنى الانتقال :

الشكل نمرة (٨٣) يبين دائرتين نصف قطرهما $ر_1$ ، $ر_2$ حيث $ر_1 > ر_2$ ويوصلهما منحنى انتقال « ١ — ٢ » .

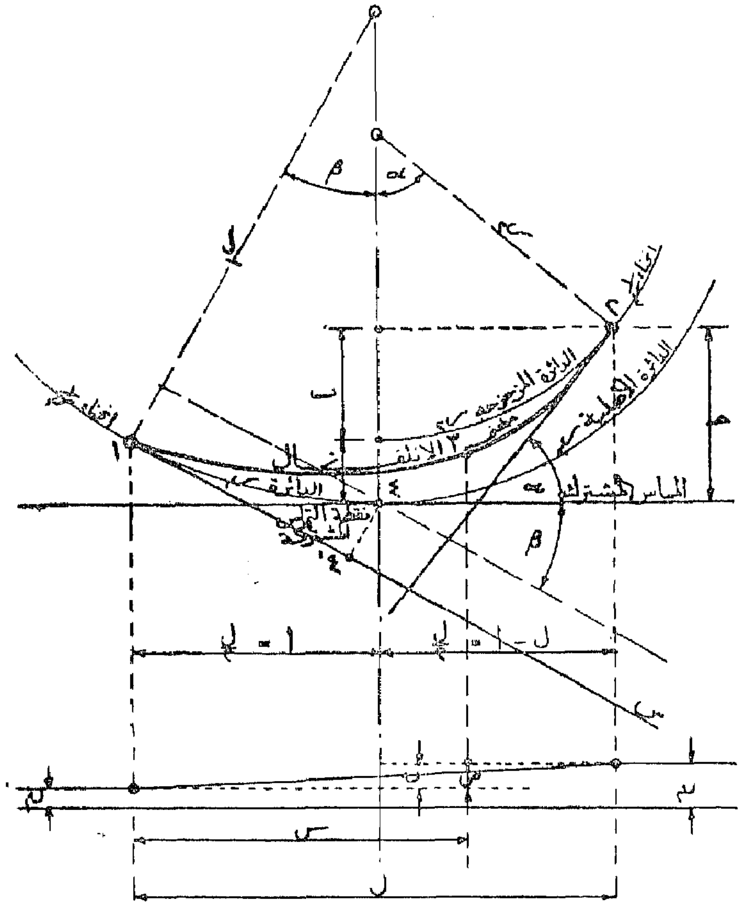
فإذا كانت النقطة « ١ » هى نقطة بداية منحنى الانتقال والنقطة « ٢ » هى نقطة نهاية المنحنى .
وكان « ١ — س » هو محور سينات المنحنى .

، ر نصف قطر الانحناء عند أى نقطة « ٣ » مثلا تبعد بمقدار س عن نقطة بداية المنحنى « ١ » .

فإن الانحناء عند النقطة ٣ $= \frac{1}{ر}$

$$= \frac{\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}}{\left[1+\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

وحيث أن نسبة ص إلى س صغيرة دائما فى مثل هـذا النوع من منحنيات الانتقال ذات الطول



شكل نمرة (٨٣)

القصير وهى الأكثر شيوعا فإن $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ تكون صغيرة جداً ويكون مربعها $\left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)^{٢}$ متناهياً فى الصغر بحيث يمكن إهماله . وعليه فالانحناء عند أى نقطة يصبح

$$\frac{١}{\text{نق}} = \frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$$

الكسب فى الانحناء بين النقطة ١ والنقطة ٢ $= \frac{١}{\text{نق}_{٢}} - \frac{١}{\text{نق}_{١}}$

والكسب فى وحدة الطول $= \frac{١}{\text{ل}} \left(\frac{١}{\text{نق}_{٢}} - \frac{١}{\text{نق}_{١}}\right)$

والكسب فى المسافة س $= \frac{\text{س}}{\text{ل}} \left(\frac{١}{\text{نق}_{٢}} - \frac{١}{\text{نق}_{١}}\right)$

وإذن فالانحناء عند النقطة ٣ يساوى الانحناء عند النقطة ١ مضاف إليه الكسب فى الانحناء فى المسافة س.

أى $$\frac{١}{\text{نق}} = \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = \frac{١}{\text{نق}_١} + \frac{\text{س}}{\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{نق}_٢} - \frac{١}{\text{نق}_١}\right)\ldots\ldots(١)$$

وهذه هى المعادلة التفاضلية لمنحنى الانتقال .

وبالتكامل ينتج أن :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}}{\text{نق}_١} + \frac{\text{س}^٢}{٢\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{نق}_٢} - \frac{١}{\text{نق}_١}\right) + \text{ك}_١$$

حيث $\text{ك}_١$ ثابت يعرف مقداره بالتعويض فى المعادلة بمقادير س ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند النقطة ١ .

عند النقطة ١ : س = صفرا ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = صفرا .

∴ الثابت $\text{ك}_١$ = صفرا .

وتصبح المعادلة $$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}}{\text{نق}_١} + \frac{\text{س}^٢}{٢\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{نق}_٢} - \frac{١}{\text{نق}_١}\right)\ldots\ldots(٢)$$

وبالتكامل مرة أخرى ينتج أن :

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^٢}{٢\text{نق}_١} + \frac{\text{س}^٣}{٦\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{نق}_٢} - \frac{١}{\text{نق}_١}\right) + \text{ك}_٢$$

ولمعرفة مقدار الثابت $\text{ك}_٢$ نعوض بإحداثيي النقطة ١ حيث ص = صفرا عند س = صفرا وإذن $\text{ك}_٢$ = صفرا .

وإذن معادلة منحنى الانتقال هى

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^٢}{٢\text{نق}_١} + \frac{\text{س}^٣}{٦\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{نق}_٢} - \frac{١}{\text{نق}_١}\right)\ldots\ldots(٣)$$

وهذا باعتبار أن النقطة « ١ » هى نقطة الأصل ، « ١ — س » هو محور السينات .

وكثيرا ما يطلق على هذه المعادلة معادلة القطع المكافىء التكعيبى .

طول منحنى الانتقال واحداثياته :

ذكرنا قبلا أن ميل منحنى الانتقال صغير وهـذا حقيقى حتى عند نقطة نهايته وإذن يمكننا دائما أن نعتبر طول المنحنى مساويا طول احداثيه السينى وهذا الاعتبار يسهل من حل المعادلات التفاضلية ولا يؤثر تأثيرا عمليا فى قيمة الاحداثيات . وسنبحث كيفية استنتاج أطوال منحنيات الانتقال المختلفة فيما بعد .

اثبات أن نقط التماس فى المنحنى المركب تقسم منحنى الانتقال بالتساوى :

أو إثبات أن $\text{ا} = \frac{\text{ل}}{٢}$ انظر شكل نمرة (٨٣) .

حيث أن الزاويتين β ، α صغيرتان ينتج أن :

$$\text{ظا}\,\beta = \text{جا}\,\beta = \frac{\text{ا}}{\text{ر}_١}$$

$$\text{، ظا}\,\alpha = \text{جا}\,\alpha = \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ر}_٢}$$

$$\text{ولكن ظا}\,(\beta + \alpha) = \text{جا}\,(\beta + \alpha)$$

$$= \text{جا}\,\beta\ \text{جتا}\,\alpha + \text{جا}\,\alpha\ \text{جتا}\,\beta$$

$$= \text{جا}\,\beta + \text{جا}\,\alpha$$

باعتبار أن جتا β ، جتا α يساوى كل منهما الوحدة .

$$\therefore\ \text{ظا}\,(\beta + \alpha) = \frac{\text{ا}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ر}_٢}$$

ولكن معادلة ميل منحنى الانتقال هى :

$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{\text{س}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{س}^٢}{٢\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right)$$

وبالتعويض فى هذه المعادلة عن الإحداثيات عند النقطة ٢ حيث س = ل ينتج أن :

$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \text{ظا}\,(\beta + \alpha) = \frac{\text{ل}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{ل}}{٢}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\text{ا}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ر}_٢} = \frac{\text{ل}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{ل}}{٢}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\text{ا}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{ل}}{\text{ر}_٢} - \frac{\text{ا}}{\text{ر}_٢} = \frac{\text{ل}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{ل}}{٢\text{ر}_٢} - \frac{\text{ل}}{٢\text{ر}_١}$$

$$\therefore\ \text{ا}\left(\frac{١}{\text{ر}_١} - \frac{١}{\text{ر}_٢}\right) + \frac{\text{ل}}{\text{ر}_٢} = \frac{\text{ل}}{٢\text{ر}_١} + \frac{\text{ل}}{٢\text{ر}_٢}$$

$$\therefore\ \text{ا}\left(\frac{١}{\text{ر}_١} - \frac{١}{\text{ر}_٢}\right) = \frac{\text{ل}}{٢\text{ر}_١} - \frac{\text{ل}}{٢\text{ر}_٢} = \frac{\text{ل}}{٢}\left(\frac{١}{\text{ر}_١} - \frac{١}{\text{ر}_٢}\right)$$

$$\therefore \quad \text{ا} = \frac{\text{ل}}{٢}$$

وإذن فنقطة تماس المنحنى المركب تقسم منحنى الانتقال على جانبيها بالتساوى .

وهناك طريقة أخرى لإثبات ذلك من ميل المعادلة نمرة (٤) التى سنتحصل عليها فيما بعد وهى معادلة منحنى الانتقال باعتبار أن نقطة تماس المنحنى المركب هى نقطة الأصل والمماس المشترك هو محور السينات .

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^٢}{٢\,\text{ر}_١} + \frac{١}{٦\,\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right)(\text{س} + \text{ا})^٣ \quad \cdots \cdots \cdots (٤)$$

معادلة الميل هى :

$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{\text{س}}{\text{ر}_١} - \frac{(\text{س} + \text{ا})^٢}{٢\,\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right)$$

وبالتعويض بما تساويه س عند نقطة نهاية المنحنى أى س = ل − ا ينتج أن :

$$\text{ظا}\,\alpha = \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ر}_١} + \frac{(\text{ل} - \text{ا} + \text{ا})^٢}{٢\,\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right)$$

$$= \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{ل}}{٢}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right)$$

$$\text{ولكن ظا}\,\alpha = \text{جا}\,\alpha = \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ر}_٢}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ر}_١} + \frac{\text{ل}}{٢}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right) = \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ر}_٢}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ل}}{٢}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right) = (\text{ل} - \text{ا})\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ل}}{٢} = \text{ل} - \text{ا}$$

$$\therefore \quad \text{ا} = \frac{\text{ل}}{٢}$$

معادلة منحنى الانتقال باعتبار أن نقطة تماس المنحنى المركب هى نقطة الأصل والمماس المشترك هو محور السينات :

معادلة منحنى الانتقال التى تحصلنا عليها حتى الآن هى :

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^٢}{٢\,\text{ر}_١} + \frac{\text{س}^٣}{٦\,\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{ر}_٢} - \frac{١}{\text{ر}_١}\right) \quad \cdots \cdots (٣)$$

ولزحزحة محورى هذه المعادلة من النقطة ١ إلى النقطة ٢ ليصبح محور السينات الجديد مطابقاً للمماس المشترك لدائرتى المنحنى المركب يلزم إجراء ثلاث عمليات :

الأولى — زحزحة محور السينات من الوضع « ١ » موازياً لنفسه ليمر بالنقطة « ٤ » .

الثانية — نقل نقطة الأصل من « ١ » إلى « ٤ » .

الثالثة — إدارة المحور فى هذه الصورة لينطبق على المماس المشترك عند النقطة « ٤ » .

فالعملية الأولى تستلزم زيادة الإحداثى ص بالمقدار $ع - ع_1 = \frac{ا^2}{2ر_1}$ انظر شكل نمرة (٨٣) .

والعملية الثانية تستلزم زيادة الإحداثى س بالمقدار ا أى $س = س + ا$.

والعملية الثالثة تستلزم زيادة الإحداثى ص بالمقدار س ظا $\beta = \frac{اس}{ر_1}$.

وإذن فالمعادلة تصبح :

$$ص + \frac{ا^2}{2ر_1} + \frac{اس}{ر_1} = \frac{(س+ا)^2}{2ر_1} + \frac{(س+ا)^3}{6ل}\left(\frac{1}{ر_2} - \frac{1}{ر_1}\right)$$

$$أو\ ص = \frac{(س+ا)^2}{2ر_1} + \frac{(س+ا)^3}{6ل}\left(\frac{1}{ر_2} - \frac{1}{ر_1}\right) - \frac{ا^2}{2ر_1} + \frac{اس}{ر_1}$$

$$= \frac{س^2}{2ر_1} + \frac{اس}{ر_1} + \frac{ا^2}{2ر_1} - \frac{ا^2}{2ر_1} - \frac{اس}{ر_1} + \frac{(س+ا)^3}{6ل}\left(\frac{1}{ر_2} - \frac{1}{ر_1}\right)$$

$$= \frac{س^2}{2ر_1} + \frac{(س+ا)^3}{6ل}\left(\frac{1}{ر_2} - \frac{1}{ر_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (٤)$$

وحيث قد أثبتنا أن $ا = \frac{ل}{2}$ فإن المعادلة تصبح

$$ص = \frac{س^2}{2ر_1} + \frac{(س+\frac{ل}{2})^3}{6ل}\left(\frac{1}{ر_2} - \frac{1}{ر_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (٥)$$

مقدار الزحزحة « ز » :

قلنا فيما سبق أن منحنى الانتقال يبدأ عند النقطة « ١ » ويتجه إلى الداخل إذ يأخذ انحناؤه فى الازدياد عن القدر $\frac{1}{ر_1}$ وعند ما يصل إلى النقطة « ٢ » يكون الانحناء قد بلغ $\frac{1}{ر_2}$ ويكون المنحنى قد تزحزح إلى الداخل بمقدار الزحزحة «ز» . وعلى ذلك فالمنحنى عند النقطة «٢» وبعدها يسير فى الدائرة المزحزحة $ر_2$.

ولمعرفة مقدار هذه الزحزحة نعود إلى الشكل نمرة (٨٣) فنقول :

$$ز = ح - ب$$

ح = الإحداثى الصادى للنقطة ٢ وتستنتج قيمته من التعويض فى المعادلة (٥) عما يساويه الإحداثى السينى أى عند ما س = $\frac{ل}{٢}$

$$هـ = \frac{ل^{٢}}{٨ ر_{١}} + \frac{ل^{٢}}{٦}\left(\frac{١}{ر_{٢}} - \frac{١}{ر_{١}}\right)$$

، ب = إحداثى الدائرة $ر_{٢}$ $= \frac{ل^{٢}}{٨ ر_{٢}}$

$$\therefore ز = \frac{ل^{٢}}{٨ ر_{١}} + \frac{ل^{٢}}{٦}\left(\frac{١}{ر_{٢}} - \frac{١}{ر_{١}}\right) - \frac{ل^{٢}}{٨ ر_{٢}}$$

$$= \frac{ل^{٢}}{٨ ر_{١}} + \frac{ل^{٢}}{٦ ر_{٢}} - \frac{ل^{٢}}{٨ ر_{١}} - \frac{ل^{٢}}{٨ ر_{٢}}$$

$$= \frac{٣ ل^{٢}}{٢٤ ر_{١}} + \frac{٤ ل^{٢}}{٢٤ ر_{٢}} - \frac{٤ ل^{٢}}{٢٤ ر_{١}} - \frac{٣ ل^{٢}}{٢٤ ر_{٢}}$$

$$= \frac{ل^{٢}}{٢٤}\left(\frac{١}{ر_{٢}} - \frac{١}{ر_{١}}\right) \ldots\ldots (٦)$$

ومقدار الزحزحة هذا يسبب زحزحة مركز الدائرة $ر_{٢}$ فى اتجاه الخط المنصف للزاوية α بالقدر $\frac{ل^{٢}}{٢٤}\left(\frac{١}{ر_{٢}} - \frac{١}{ر_{١}}\right)$ غير أنه لصغر مقدار هـذه الزحزحة بالنسبة لطول نصف القطر $ر_{٢}$ لا تتأثر القيم التى نرمى إلى استنتاجها من أجل توقيع المنحنى على الطبيعة وعلى ذلك يترك المركز فى موضعه بدون زحزحة ويحسب نصف القطر كما هو أى $ر_{٢}$.

ويمكننا من العلاقتين (٥) ، (٦) أن نـكتب المعادلة (٥) على الصورة الآتية :

$$ص = \frac{س^{٢}}{٢ ر_{١}} + \frac{٤ ز}{ل^{٣}}\left(س + \frac{ل}{٢}\right)^{٣} \ldots\ldots (٧)$$

المنحنى يقسم الزحزحة عند منتصفه الى قسمين متساويين :

إذا عوضنا فى المعادلة السابقة نمرة (٧) لاستنتاج الإحداثى الصادى عند نقطة الأصل « ٤ » أى عند س = صفر ينتج أن :

$$ص = \frac{٤ ز ل^{٣}}{٨ ل^{٣}} = \frac{ز}{٢}$$

أى أن المنحنى يقسم الزحزحة ز بالتساوى عند نقطة الأصل .

والآن وقد بحثنا منحنى الانتقال على صورته العامة يمكننا بسهولة استنتاج الحالة الخاصة وهى حالة منحنى الانتقال بين خط مستقيم ومنحنى دائرة إذ هى الأكثر شيوعا .

منحنى الانتقال بين خط مستقيم ومنحنى دائرة :

يمكننا استنتاج معـادلة الانحناء ومعادلة المنحنى والإحداثى النهائى والزحزحة بالتعويض فى المعادلات السابقة عن $ر$ بالمقدار مالانهاية وبذلك نستنتج ما يأتى :

$$\text{معادلة الانحناء} \quad \frac{ء^{2} ص}{ء س^{2}} = \frac{س}{ل\, ر} \quad \ldots\ldots (٨)$$

$$\text{معادلة المنحنى} \quad ص = \frac{س^{3}}{٦\, ر\, ل} \quad \ldots\ldots (٩)$$

$$\text{الإحداثى النهائى} \quad ح = \frac{ل^{2}}{٦\, ر}$$

$$\text{الزحزحة} \quad ز = \frac{ل^{2}}{٢٤\, ر} = \frac{ح}{٤}$$

والإحداثى الصادى عند نقطة المنتصف $= \frac{ل^{2}}{٤٨\, ر}$ أى نصف الزحزحة كذلك

طول منحنى الانتقال بين المستقيم والمنحنى الدائرى :

معادلة المنحنى هى :

$$ص = \frac{س^{3}}{٦\, ر\, ل} \quad \ldots\ldots (٨)$$

$$\text{والارتفاع النسبى}\ ه = \frac{ك}{ر} = \text{طول المنحنى} \times \text{ميله} = ل \times \frac{١}{ى}$$

حيث ١ : ى الميل الرأسى لمنحنى الانتقال .

$$\therefore\ ى\, ك = ر\, ل = ط \ \text{مثلا}$$

ويمكن كتابة معادلة المنحنى على الصورتين الآتيتين :

$$ص = \frac{س^{3}}{٦\, ى\, ك} \quad \text{أو} \quad = \frac{س^{3}}{٦\, ط}$$

وحيث أن $ط = ى\, ك$ وحيث أن $ك$ مقدار ثابت إذن تتوقف قيمة $ط$ على المقدار $ى$ أى على إنحدار المنحنى .

ويتراوح المقدار « ى » فى العادة بين العددين ٢٠٠ ، ١٠٠٠ فيؤخذ ٢٠٠ فى البلاد الجبلية حيث يفضل أن يكون طول المنحنى قصيراً ما أمكن . ويؤخذ ٤٠٠ فى سويسرا ، ١٠٠٠ فى البلاد المسطحة وأحيانا ٢٠٠٠ . وبمعلومية هذا العدد وبمعرفة مقدار الارتفاع النسبى ه يمكن استنتاج طول المنحنى .

وتحدد بعض السكك الحديدية المقدار « ط » فتأخذه من ١٢٠٠٠ — ١٨٠٠٠ فى البلاد الجبلية ومن ٢٠٠٠٠ إلى ٢٤٠٠٠ أو أكثر فى البلاد المسطحة كمصر . وبمعرفة ذلك المقدار يمكن تحديد طول المنحنى من العلاقة $ل = \frac{ط}{ر}$.

وقد بحث البروفسر بيترسن هذا الموضوع من ناحية راحة الركاب فقام بعدة تجارب استدل منها على أنه إذا مر القطار السريع على منحنى الانتقال فى ٣ر٦ ثانية فقلما يشعر به الركاب . ولاحظ أيضا أنه إذا مر القطار على المنحنى فى زمن أقصر من ذلك طردت العربات إلى الخارج وإذا مر فى زمن أطول دفعت العربات للداخل . وعلى ذلك أعطى العلاقة الآتية :

طول المنحنى ل بالمتر = سرعة القطار بالكيلومتر فى الساعة.

(طول المنحنى ل بالمتر = سرعة القطار بالمتر فى الثانية × زمن قطع المنحنى بالثانية

$$= \frac{س \times ١٠٠٠}{٦٠ \times ٦٠} \times ٣ر٦ = س$$

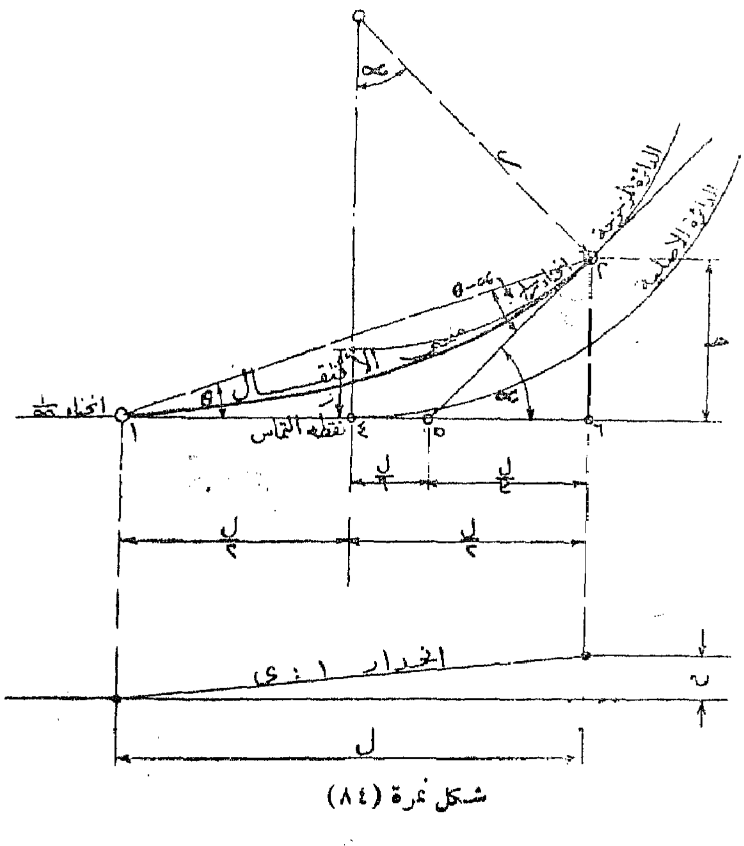
حيث س السرعة بالكيلومتر فى الساعة)

وتعطى هذه العلاقة أطوالا لا بأس بها فى البلاد المسطحة غير أنه يمكن تقليلها على حساب راحة المسافرين فى البلاد الجبلية فيؤخذ طول المنحنى

ل متر = ٨ر٠ س كيلومتراً فى الساعة .

توقيع المنحنى :

بالرجوع إلى الشكل نمرة (٨٤) وباعتبار أن نقطة التماس «٤» معينة على الطبيعة نرجع فى اتجاه المماس



شكل نمرة (٨٤)

مسافة $\frac{\text{ل}}{\text{٢}}$ لتعيين نقطة الأصل ١ . وبمعلومية نقطة الأصل والمماس الذي هو محور السينات يمكننا أن نوقع المنحنى على الطبيعة بإحدى طريقتين :

الطريقة الأولى : وهي طريقة الإحداثيات وتنحصر في توقيع نقط المنحنى بواسطة الإحداثيات فيقاس الإحداثى السينى ويؤخذ عليه الإحداثى الصادى .

الطريقة الثانية : بواسطة الثيودوليت وهي تنحصر في قياس زوايا ميلها $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ مع محور السينات على أبعاد س من نقطة الأصل .

وإذ يتعين منحنى الانتقال على الطبيعة بإحدى الصورتين السالفتين يلزم الحال تعيين الميل عند نهايته لتوقيع الدائرة المزحزحة .

$$\text{ميل منحنى الانتقال عند نهايته} = \text{ظا}\,\alpha = \frac{\text{ح}}{\text{٥ — ٦}}$$

$$\therefore \overline{\text{٥ — ٦}} = \frac{\text{ح}}{\text{ظا}\,\alpha} = \frac{\text{ل}^{\text{٢}}}{\text{٦ س}} \cdot \frac{\text{٢ س}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}}{\text{٣}}$$

فبتعيين النقطة « ٥ » التي تبعد عن « ٤ » بالمقدار $\frac{\text{ل}}{\text{٦}}$ وبوضع الثيودوليت فوق النقطة « ٣ » وتوجيهه في الاتجاه « ٣ — ٥ » يتعين موضع المماس الذي توقع منه نقط الدائرة المزحزحة بالطرق المعروفة في علم المساحة في المنحنيات الدائرية .

وللتأكد من صحة المماس ترصد النقطة « ١ » لقياس الزاوية ١ — ٣ — ٥ التي يجب أن تساوي α — Θ حيث α تساوي زاوية ميل المنحنى عند نهايته و Θ زاوية الخط الواصل بين طرفي المنحنى ومحور السينات .

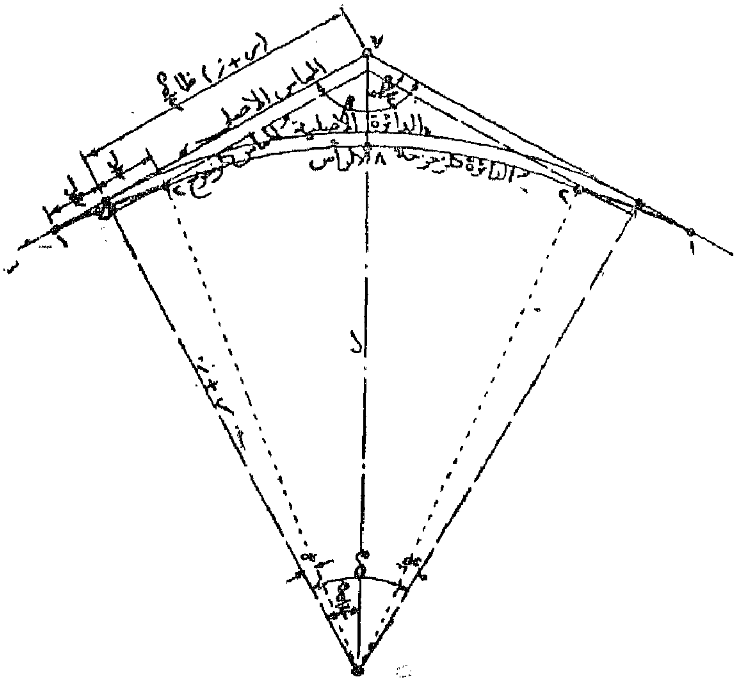
الآن وقد وقعنا المنحنى باعتبار أن نقطة التماس « ٤ » معينة يلزمنا شرح توقيع هذه النقطة من المعلومات الموجودة على الطبيعة . كلنا يعرف أن السكك الحديدية عبارة عن خطوط مستقيمة متصلة ببعضها بواسطة منحنيات دائرية وتتعين الخطوط المستقيمة في الطبيعة بواسطة أوتاد تدق عند نهاياتها أي عند نقط تقاطع الخطوط وتحدد أطوال هذه الخطوط بقياس البعد بين الأوتاد . وبقياس زوايا الانفراج بين هذه الخطوط وتحديد أنصاف أقطار المنحنيات التي تربطها يمكن توقيع أمثال نقطة التماس « ٤ » أو نقطة أصل المنحنى « ١ » .

وبالنظر إلى الشكل نمرة (٨٥) يمكن حساب ما يأتي :

(١) طول المماس $\overline{\text{١ — ٧}}$

(٢) بعد الرأس $\overline{\text{٧ — ٨}}$

(٣) الطول الكلي للمنحنى ١ — ٢ — ٨ — ٣ — ١



شكل نمرة (٨٥)

طول المماس $\overline{\text{١ — ٧}}$:

$$\overline{\text{١ — ٧}} = \overline{\text{٤ — ٧}} + \frac{\text{ل}}{\text{٢}} = (\text{نق} + \text{ز})\ \text{ظا}\frac{\delta}{\text{٢}} + \frac{\text{ل}}{\text{٢}}$$

وهنـاك جداول مطبوعة لسرازين وأوبربك Sarazin & Oberbeck وغيرها لجيصن in تعطى قيمة ظل أنصاف الزوايا .

البعد الرأسى $\overline{\text{٧ — ٨}}$:

$$\overline{\text{٧ — ٨}} = \overline{\text{٧ — ٩}} - \overline{\text{٩ — ٨}}$$

$$= (\text{نق} + \text{ز})\ \text{قا}\frac{\delta}{\text{٢}} - \text{نق}$$

وبإضافة ز وطرح ز ينتج أن

$$\overline{\text{٧ — ٨}} = \text{نق}\ (\text{قا}\frac{\delta}{\text{٢}} - \text{١}) + \text{ز}(\text{قا}\frac{\delta}{\text{٢}} - \text{١}) + \text{ز}$$

$$= (\text{نق} + \text{ز})(\text{قا}\frac{\delta}{\text{٢}} - \text{١}) + \text{ز}$$

وتعطى الجداول السابقة أيضاً مقدار ما يساويه (قا $\frac{\delta}{٢}$ — ١) لمختلف الزوايا δ .

الطول الكلى للمنحنى ١ — ٢ — ٨ — ٢ — ١ :

$$\text{طول المنحنى ١ — ٨ — ١} = \text{نق} \frac{\pi\,\delta}{١٨٠} + \frac{\text{ل}}{٢} + \frac{\text{ل}}{٢}$$

$$= \text{نق} \frac{\pi\,\delta}{١٨٠} + \text{ل}$$

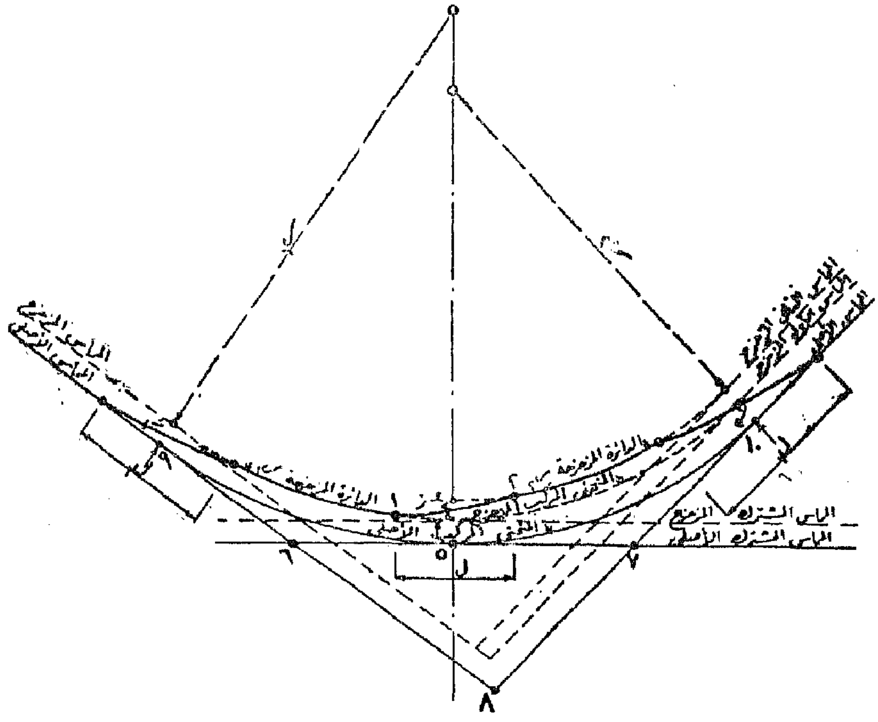
وبالرجوع فى اتجاه المماس الأصلى المسافة $\overline{١ — ٧}$ تتعين نقطة أصل المنحنى التى يبدأ منها توقيع منحنى الانتقال ثم توقع الدائرة المزحزحة كما وضحنا قبلا . أما بعد الرأس $\overline{٧ — ٨}$ فيساعد على التأكد من صحة توقيع المنحنى إذ بوضع الثيودوليت فوق النقطة « ٧ » وبتوجيه خط النظر فى الاتجاه $\overline{٧ — ٩}$ وقياس الطول $\overline{٧ — ٨}$ عليه تتعين النقطة « ٨ » التى يجب أن تنطبق على النقطة « ٨ » الموقعة .

وقد يحصل بعد قياس المنحنى ١ — ٨ — ١ على الطبيعة أن لا يتفق طوله مع الطول المحسوب فإذا كان الفرق ضئيلا وزع على المنحنى ٢ — ٨ — ٢ بالتساوى أما إذا كان الفرق محسوساً أعيدت عملية التوقيع من جديد .

المعادلة العامة لمنحنى الانتقال

باعتبار المماس المشترك للمنحنى المركب محورا للسينات ونقطة التماس نقطة الأصل :

ليس المنحنى المركب الذى اعتبرناه فى المعادلات السابقة بالمنحنى الأصلى بل هو المنحنى المزحزح والذى يبعد عن المنحنى المركب الأصلى بمقدار زحزحة المنحنى الدائرى نق١ انظر شكل نمرة (٨٦) . والواقع



شكل نمرة (٨٦)

أن المنحنى الأصلي يتصل من طرفيه بالماسين الأصليين وإذن فللوصول من أى الماسين لدائرته يلزمنا عمل منحنى انتقال . فمنحنى الانتقال للدائرة $نق_١$ يبلغ طوله $ل_١$ وزحزحته «$ز_١$» وتنصفه نقطة التماس «٩» . وبالمثل منحنى الانتقال للدائرة $نق_٢$ طوله $ل_٢$ وتنصفه نقطة التماس «١٠» وزحزحته «$ز_٢$» وإذن فالزحزحة النسبية بين المنحنيين المزحزحين هى $ز = ز_٢ - ز_١$ وهى مقدار زحزحة منحنى الانتقال بين جزءى المنحنى المركب . وعلى ذلك فالمنحنى المركب يلزمه ثلاث منحنيات انتقال لنقل القطار بين طرفيه تفصلها دوائر مزحزحة فالقطار عند دخوله من المستقيم إلى الدائرة $نق_١$ ينتقل على منحنى الانتقال $ل_١$ ثم على الدائرة المزحزحة $نق_١$ ثم يسير فوق منحنى الانتقال ل ثم إلى الدائرة المزحزحة $نق_٢$ ثم إلى منحنى الانتقال $ل_٢$ ثم إلى المستقيم الآخر .

والآن يحسن بنا أن نستنتج معادلة منحنى الانتقال بالنسبة للماس المشترك الأصلي إذ هو الماس المعين على الطبيعة .

معادلة المنحنى بالنسبة للمماس المشترك المزحزح هى :

$$ص = \frac{س^٢}{٢\,نق_١} + \frac{٤\,ز}{ل^٣}\left(س + \frac{ل}{٢}\right)^٣ \quad \ldots\ldots \quad (٧)$$

ولكى ننتقل إلى الماس المشترك الأصلي جاعلين نقطة الأصل «٥» بدلا من «٤» يلزمنا فقط طرح مقدار الزحزحة $ز_١$ من الإحداثيات الصادية للمعادلة نمرة (٧)

وإذن المعادلة المطلوبة تصبح :

$$ص = ز_١ + \frac{س^٢}{٢\,نق_١} + \frac{٤\,ز}{ل^٣}\left(س + \frac{ل}{٢}\right)^٣ \quad \ldots\ldots \quad (١٠)$$

طول المنحنى :

عند تحديد طول منحنى الانتقال العام لا نكون فى حل من اختيار طوله كما فعلنا فى حالة المنحنى بين المستقيم والدائرة بل تربطنا هنا علاقة هى الزحزحة النسبية بين الدائرتين المزحزحتين . وقد ذكرنا فيما سبق أن هذه الزحزحة النسبية هى الفرق بين زحزحتى الدائرتين الأصليتين أى

$$ز = ز_٢ - ز_١$$

ولكل من هذه الزحزحات علاقة تربط كل منها بطول منحنى انتقالها

$$ز = \frac{ل^٢}{٢٤}\left(\frac{١}{نق_٢} - \frac{١}{نق_١}\right) \quad \ldots\ldots \quad (٦)$$

$$،\ ز_١ = \frac{ل_١^٢}{٢٤\,نق_١} \quad ،\ ز_٢ = \frac{ل_٢^٢}{٢٤\,نق_٢}$$

$$\therefore \frac{ل^{٢}}{٢٤}\left(\frac{١}{نق_{٢}} - \frac{١}{نق_{١}}\right) = \frac{ل_{٢}^{٢}}{٢٤\,نق_{٢}} - \frac{ل_{١}^{٢}}{٢٤\,نق_{١}}$$

$$\text{أو } ل^{٢} \times \frac{نق_{١} - نق_{٢}}{نق_{١}\,نق_{٢}} = \frac{نق_{١}ل_{٢}^{٢} - نق_{٢}ل_{١}^{٢}}{نق_{١}\,نق_{٢}}$$

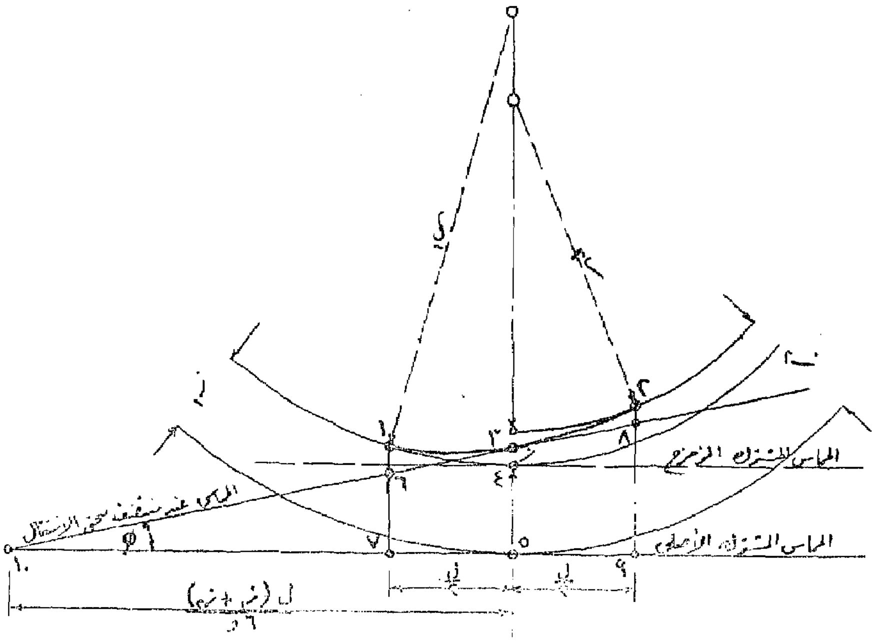
$$\therefore ل = \sqrt{\frac{نق_{١}ل_{٢}^{٢} - نق_{٢}ل_{١}^{٢}}{نق_{١}\,نق_{٢}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (١١)$$

وهى العلاقة التى تحدد طول منحنى الانتقال العام .

المعادلة العامة لمنحنى الانتقال

باعتبار نقطة منتصف المنحنى نقطة الأصل والمماس عندها محور السينات :

شكل نمرة (٨٧) .



شكل نمرة (٨٧)

المعادلة نمرة (٧) هى :

$$ص = \frac{س^{٢}}{٢\,نق_{١}} + \frac{٤\,ز}{ل^{٣}}\left(س + \frac{ل}{٢}\right)^{٣}$$

ولاستنتاج المعادلة المطلوبة باعتبار أن نقطة الأصل هى النقطة « ٣ » أى منتصف المنحنى وباعتبار أن محور السينات هو المماس للمنحنى عند تلك النقطة يلزمنا أن نجرى الخطوات الآتية :

أولا — إضافة المقدار $\frac{\text{ن}}{2}$ على قيم الإحداثيات الصادية .

ثانياً — إضافة المقدار س ظا $\phi = \frac{3\,\text{س}\,\text{ن}}{\text{ل}}$ على الإحداثيات الصادية وذلك نتيجة ميـل المحور بالقدر ϕ عن المماس المزحزح وبمعنى آخر نضيف معادلة الخط ٨ — ٣ — ٦ — ١٠ وهي

$$\text{ص} = 3\,\frac{\text{س}\,\text{ن}}{\text{ل}} \quad \text{حيث ميله} \quad \frac{3\,\text{ن}}{\text{ل}} .$$

وهذا الميل ناتج من ايجاد ميل المعادلة (٧) ثم التعويض فيها بالقيمة س = صفرا .

بفك المعادلة (٧) ينتج أن :

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^2}{2\,\text{ر}_1} + \frac{4\,\text{ن}}{\text{ل}^3}\left(\text{س}^3 + \frac{3\,\text{س}^2\,\text{ل}}{2} + \frac{3\,\text{س}\,\text{ل}^2}{4} + \frac{\text{ل}^3}{8}\right)$$

$$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 0 + \frac{4\,\text{ن}}{\text{ل}^3}\left(0 + 0 + \tfrac{3}{4}\text{ل}^2 + 0\right) = \frac{3\,\text{ن}}{\text{ل}}$$

وذلك عند النقطة س = صفرا

وتصبح معادلة منحنى الانتقـال كالآتي :

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^2}{2\,\text{ر}_1} + \frac{4\,\text{ن}}{\text{ل}^3}\left(\text{س} + \frac{\text{ل}}{2}\right)^3 - \frac{\text{ن}}{2} - \frac{3\,\text{ن}\,\text{س}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{2\,\text{ر}_1} + \frac{4\,\text{ن}}{\text{ل}^3}\left(\text{س}^3 + \frac{3\,\text{س}^2\,\text{ل}}{2} + \frac{3\,\text{س}\,\text{ل}^2}{4} + \frac{\text{ل}^3}{8}\right) - \frac{\text{ن}}{2} - \frac{3\,\text{ن}\,\text{س}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{2\,\text{ر}_1} + \frac{4\,\text{ن}\,\text{س}^3}{\text{ل}^3} + \frac{6\,\text{ن}\,\text{س}^2}{\text{ل}^2} + \frac{3\,\text{ن}\,\text{س}}{\text{ل}} + \frac{\text{ن}}{2} - \frac{\text{ن}}{2} - \frac{3\,\text{ن}\,\text{س}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{2\,\text{ر}_1} + \frac{4\,\text{ن}\,\text{س}^3}{\text{ل}^3} + \frac{6\,\text{ن}\,\text{س}^2}{\text{ل}^2}$$

ولكن $\frac{6\,\text{ن}\,\text{س}^2}{\text{ل}^2} = \frac{\text{س}^2}{4}\left(\frac{1}{\text{ر}_2} - \frac{1}{\text{ر}_1}\right)$

وذلك بالتعويض عن $\text{ن} = \frac{\text{ل}^2}{24}\left(\frac{1}{\text{ر}_2} - \frac{1}{\text{ر}_1}\right)$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{س}^2}{2\,\text{ر}_1} + \frac{4\,\text{ن}\,\text{س}^3}{\text{ل}^3} + \frac{\text{س}^2}{4}\left(\frac{1}{\text{ر}_2} - \frac{1}{\text{ر}_1}\right)$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٤}\left(\frac{٢}{\text{نق}_{١}} + \frac{١}{\text{نق}_{٢}} - \frac{١}{\text{نق}_{١}}\right) + \frac{٤\,\text{ذ}\,\text{س}^{٣}}{\text{ل}^{٣}}$$

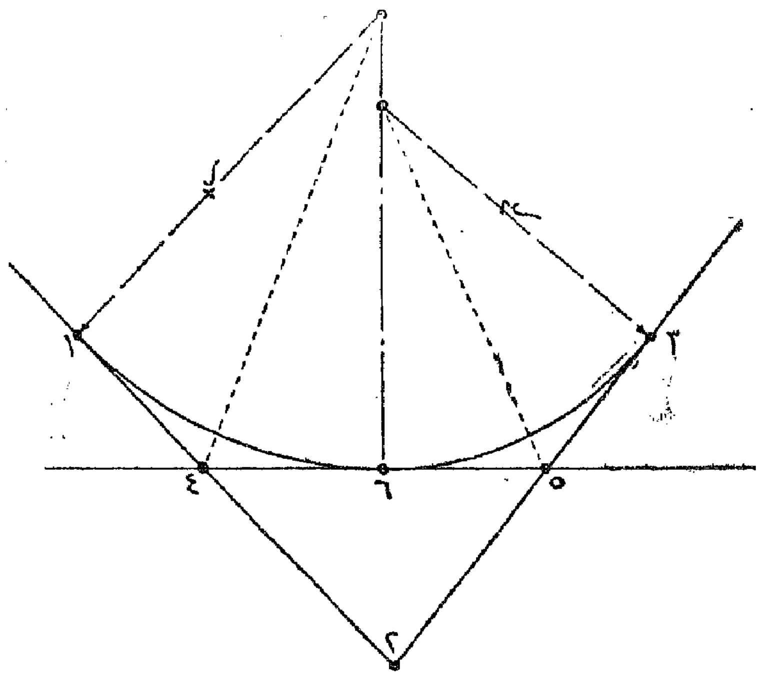
$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٤}\left(\frac{١}{\text{نق}_{١}} + \frac{١}{\text{نق}_{٢}}\right) + \frac{٤\,\text{ذ}\,\text{س}^{٣}}{\text{ل}^{٣}} \quad \ldots\ldots (١٢)$$

$$\text{أو ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{٤}\left(\frac{١}{\text{نق}_{١}} + \frac{١}{\text{نق}_{٢}}\right) + \frac{\text{س}^{٣}}{٦\,\text{ل}}\left(\frac{١}{\text{نق}_{٢}} - \frac{١}{\text{نق}_{١}}\right) \quad \ldots\ldots (١٣)$$

المنحنى الدائرى المركب :

خط السكة الحديدية كما ذكرنا سابقا هو خط يتكون من مستقيمات متعاقبة متصلة ببعضها بمنحنيات دائرية . وقد يحصل كثيراً أن تقع فى طريق المنحنى ممتلكات ثمينة لا يمكن تفاديها حتى ولو جربنا أنصاف أقطار مختلفة . وقد تحل مثل هذه الحالات إذا بدأنا المنحنى بنصف قطر ما ثم غيرنا الانحناء لتفادى الممتلك الثمين . ومثل هذا المنحنى المكون من جزءين دائريين مختلفين فى الانحناء يسمى المنحنى الدائرى المركب .

فالشكل نمرة (٨٨) يبين رسماً لخطين من هـذه الخطوط المتعاقبة ١ — ٢ ، ٢ — ٣ يتلاقيان فى نقطة الانحراف « ٢ » . وحيث أن المطلوب هو اختيار منحن دائرى مناسب لوصل الخطين بحيث يفادى الممتلكات الثمينة بينهما ولا يقل نصف قطره عن نصف القطر الأدنى .



شكل نمرة (٨٨)

وحيث يتعذر الوصول الى ذلك بمنحن دائرى واحد نجتهد فى اختيار المنحنى الدائرى المركب الذى يوفى الشروط ونستعين فى الوصول إلى ذلك باختيار عدة خطوط قاطعة مثل $\overline{٤ — ٥}$ واختيار نقطة عليها

مثل « ٦ » يتعين منها نصفا القطرين فإذا أقمنا العمود من « ٦ » ونصفنا الزاوية عند « ٤ » التقيا فى مركز الدائرة $ن_١$ وبالمثل إذا نصفنا الزاوية عند « ٥ » التقيا فى مركز الدائرة $ن_٢$. وبقياس $\overline{٤ — ٦}$ وتوقيع هذا الطول فى اتجاه المماس $\overline{٣ — ١}$ ابتداء من النقطة « ٤ » تتعين عندنا النقطة « ١ » التى هى بدء المنحنى المركب . وإذا وقعنا الطول $\overline{٦ — ٥}$ على المماس $\overline{٢ — ٣}$ من النقطة « ٥ » تحددت عندنا النقطة « ٣ » التى هى نقطة نهاية المنحنى المركب . وبمعلومية المنحنى المركب تمكننا كما سبق شرحه عمل منحنيات الانتقال اللازمة لنقل القطار من أحد طرفى المنحنى المركب الى الطرف الآخر .

توقيع منحنى الانتقال العام :

حصلنا فيما سبق على ثلاثة معادلات للمنحنى المركب :

أولا — معادلة المنحنى باعتبار نقطة بدايته نقطة الأصل والمماس عندها محور السينات .

ثانياً — معادلة المنحنى باعتبار نقطة التماس المشتركة للمنحنى المركب هى نقطة الأصل والمماس المشترك هو محور السينات .

ثالثا — معادلة المنحنى باعتبار نقطة منتصفه نقطة الأصل والمماس عندها محور السينات .

ويتوقف توقيع المنحنى باعتبار أيها على الحالة القائمة أو بالأحرى على الطبيعة نفسها فقد يكون من السهل توقيع المنحنى بالاستعانة بمعادلة دون الأخرى وذلك لعدم اعتراض شىء فى طريق مماسها . وسنشرح طريقة التوقيع فى كل من الحالات الثلاثة ولو أن المتبع فى العادة إذا ما تساوت الاعتبارات هو أن يوقع المنحنى من المماس عند منتصفه وذلك لتلافى الأخطاء فى أطوال الإحداثيات إذ هى فى هذه الحالة تكون أقصرها .

توقيع المنحنى بالنسبة للمماس عند بدايته :

المعين عندنا على الطبيعة من الترفرس هو المماس المشترك الأصلى ونقطة التماس المشتركة « ٣ » انظر شكل نمرة (٨٩) والمطلوب أولا توقيع مماس المنحنى عند بدايته « ١ » .

النقطة ١ يمكن تعيينها بواسطة الإحداثيات وذلك بالرجوع فى اتجاه المماس المشترك المسافة $\frac{ل}{٢}$

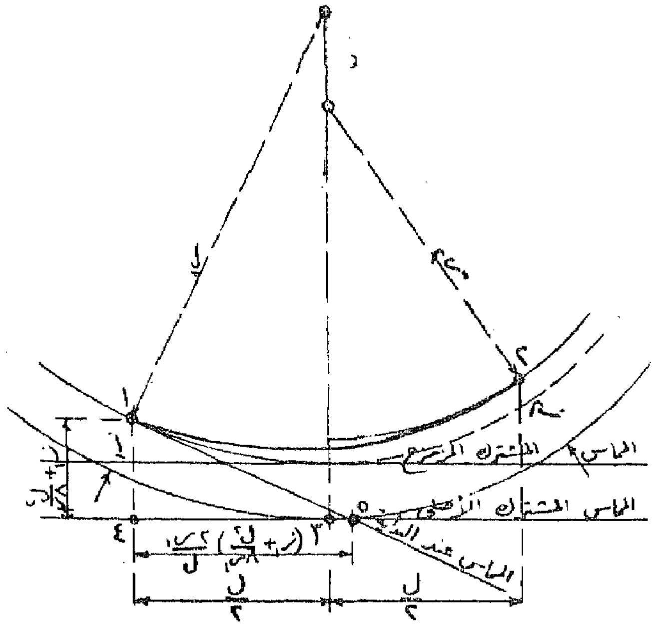
فتتعين النقطة « ٤ » وبأخذ إحداثى عند « ٤ » مقداره $\overline{٤ — ١} = ن_١ + \frac{ل^٢}{٨ نق_١}$ تتعين نقطة الأصل « ١ » .

ولتعيين المماس يكفى تعيين نقطة التقاطع مع المماس المشترك الأصلى وهى النقطة « ٥ » على الشكل .

المسافة $\overline{٤ — ٥} = \overline{١ — ٤} \times$ الميل بين المماس عند البداية وبين المماس المشترك الأصلى .

$$= (ن_١ + \frac{ل^٢}{٨ نق_١}) \frac{٢ نق_١}{ل}$$

إذن تتعين النقطة « ٥ » بالسير فى اتجاه المماس المشترك الأصلى مسافة $\overline{٣ — ٥}$



شكل نمرة (٨٩)

$$= \left(ن_١ + \frac{ل^٢}{٨ م_١} \right) \frac{٢ م_١}{ل} - \frac{ل}{٢}$$

وإذ يتعين المماس يمكن توقيع منحنى الانتقال بواسطة الإحداثيات المستنتجة من المعادلة (٣)

$$ص = \frac{س^٢}{٢ م_١} + \frac{س^٣}{٦ ل} \left(\frac{١}{م_٢} - \frac{١}{م_١} \right)$$

وهذه الطريقة فى توقيع نقطة الأصل « ١ » تحقق موقع نفس النقطة المستنتجة بعد توقيع منحنى الانتقال بين الخط المستقيم والمنحنى $م_١$ ثم توقيع الدائرة المزحزحة بعده فإن لم تتفق النقطتان وجب إعادة العمل .

توقيع المنحنى بالنسبة للمماس المشترك الأصلي :

المماس ونقطة الأصل موقعتان من البداية وكل ما يلزم هو توقيع المنحنى بواسطة الإحداثيات المستنتجة من المعادلة (١٠)

$$ص = ن_١ + \frac{س^٢}{٢ م_١} + \frac{٤ ن}{ل^٣} \left(س + \frac{ل}{٢} \right)^٣$$

توقيع المنحنى بالنسبة للمماس عند منتصفه :

نعود إلى الشكل نمرة (٨٧) فنقول

حيث أن النقطة « ٥ » موقعة على الطبيعة نقيس البعد $\frac{ل}{٢}$ فى اتجاهى المماس المشترك الأصلى لتعيين النقطتين ٧ ، ٩ . ثم نوقع نقطة منتصف المنحنى بأخذ الاحداثى $\overline{٣-٥}$ عند النقطة « ٥ » $= \frac{ن_١ + ن_٢}{٢}$

ثم نوقع النقطتين ٦ ، ٨ وذلك بأخذ الاحداثى $\overline{٦-٧}$ عند النقطة ٧ والاحداثى $\overline{٨-٩}$ عند النقطة ٩ .

$$\overline{٦-٧} = \frac{ن_١ + ن_٢}{٢} - \frac{ل}{٢}\ \text{ظا}\ \phi = \frac{ن_١ + ن_٢}{٢} - \frac{٣ن}{ل} \times \frac{ل}{٢}$$

$$= \frac{ن_١ + ن_٢ - ٣ن_٢ + ٣ن_١}{٢} = ٢ن_١ - ن_٢$$

$$\overline{٨-٩} = \frac{ن_١ + ن_٢}{٢} + \frac{ل}{٢}\ \text{ظا}\ \phi = \frac{ن_١ + ن_٢}{٢} + \frac{٣ن}{ل} \times \frac{ل}{٢}$$

$$= \frac{ن_١ + ن_٢ + ٣ن_٢ - ٣ن_١}{٢} = ٢ن_٢ - ن_١$$

والآن إذ تعينت النقطتان ٦ ، ٨ وجب أن تكونا فى استقامة نقطة الأصل ٣ بل ووجب أن يقطع الخط $\overline{٦-٨}$ المماس المشترك الأصلى فى النقطة « ١٠ » حيث

$$\overline{٥-١٠} = \frac{ن_١ + ن_٢}{٢} \div \text{ظا}\ \phi = \frac{ل\,(ن_١ + ن_٢)}{٦ن}$$

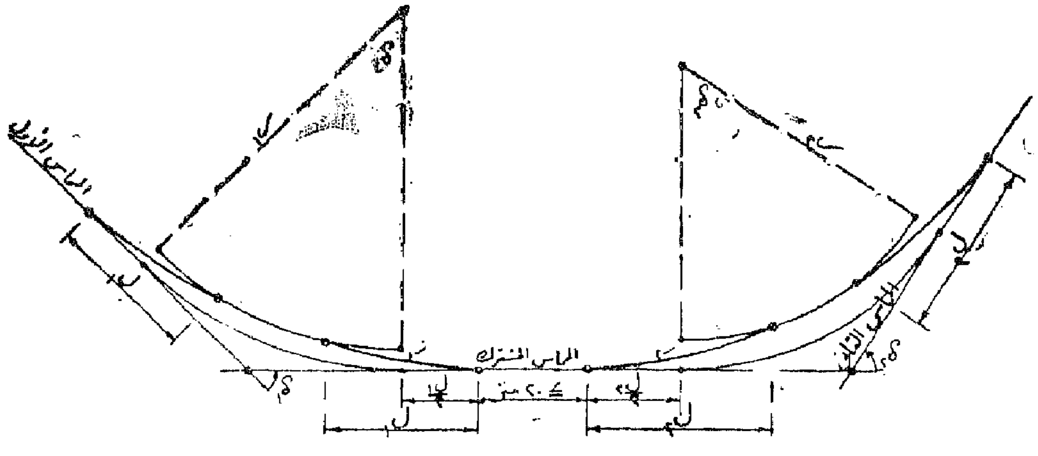
منحنى الانتقال بين دائرتين يفصلهما خط مستقيم :

المنحنى المركب هو منحن مكون من جزءين من دائرتين متماستين . وإذن فالمماس المشترك بينهما عبارة عن نقطة هى نقطة التماس . وقد يحصل أن يكون المماس المشترك ذا طول وتبعا لهذا الطول يتوقف اعتبار الحالة وهناك ثلاثة اعتبارات :

الاعتبار الأول : حالة المنحنيات الانتقالية البسيطة عند ما يكون المماس بين منحنيين دائرين نصف قطرهما $ر_١$ ، $ر_٢$ ذا طول يسمح بعمل منحنيات انتقال بسيطة انظر شكل نمرة (٩٠) ويلجأ إلى هذا الحل اذا كان طول المماس المشترك يساوى نصف مجموع طولى منحنيي الانتقال $ل_١$ ، $ل_٢$ مضافاً إليه طول عربة (حوالى ٢٠ متراً) أو زيادة . وبمعنى آخر يكون أقصر طول لخط الانحراف مساوياً

$$(ر_١ + ن_١)\ \text{ظا}\ \frac{\delta_١}{٢} + (ر_٢ + ن_٢)\ \text{ظا}\ \frac{\delta_٢}{٢} + \tfrac{١}{٢}\,(ل_١ + ل_٢) + ٢٠\ \text{مترا}$$

وهنا يسير القطار من المماس الأول إلى منحنى الانتقال $ل_١$ فالدائرة المزحزحة $ر_١$ فمنحنى الانتقال

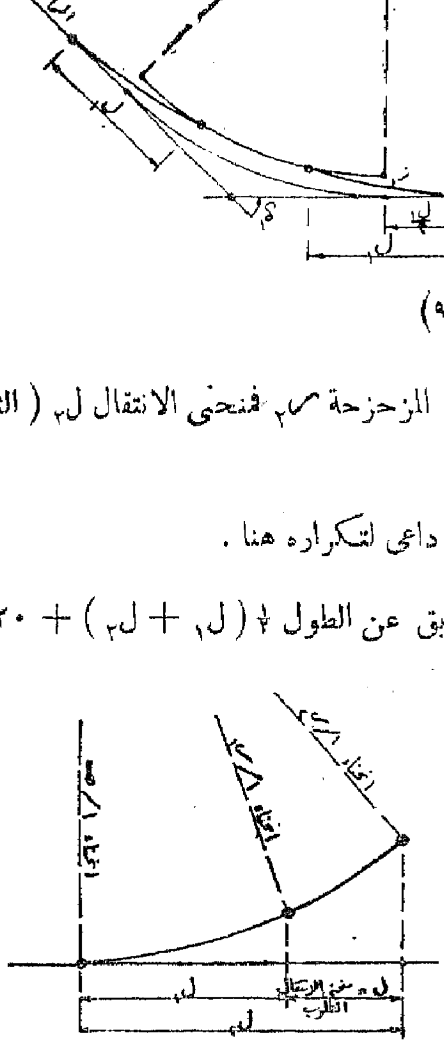


شكل نمرة (٩٠)

ل$_1$ (الثانى) فالماس المشترك فمنحنى الانتقال ل$_2$ فالدائرة المزحزحة ر$_2$ فمنحنى الانتقال ل$_2$ (الثانى) فالماس الثانى .

وقد سبق بحث هذا النوع من منحنيات الانتقال فلا داعى لتكراره هنا .

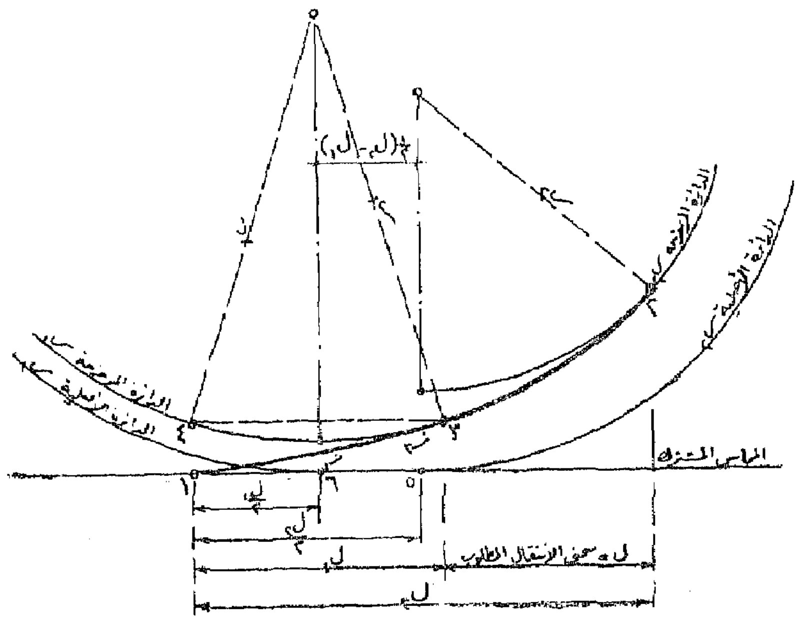
الاعتبار الثانى : إذا قل طول الماس المشترك السابق عن الطول ½ (ل$_1$ + ل$_2$) + ٢٠ مترا بحيث كان أقرب إلى الطول ½ (ل$_2$ — ل$_1$) يحسن زحزحة التخطيط لجعل طول الماس المشترك يساوى ½ (ل$_2$ — ل$_1$) وفى هذه الحالة يمكن عمل منحنى انتقال واحد يصل بين الدائرتين المزحزحتين ر$_1$ ، ر$_2$ فيصل من نقطة على أحدها إلى نقطة على الآخر . ويكون البعد بين هاتين النقطتين هو طول منحنى الانتقال .



شكل نمرة (٩١)

ففى الشكل نمرة (٩١) حيث أن ط مقدار ثابت ينتج أنه يمكن رسم المعادلة ص $= \frac{س^3}{٦ ط}$ وهى معادلة قطع مكافئ تكعيبى حتى الانحناء $\frac{١}{ر_2}$ أى حتى يصبح طول المنحنى يساوى ل$_2$. ويختلف الانحناء على هذا المنحنى من صفر عند نقطة البداية حتى $\frac{١}{ر_2}$ عند نقطة النهاية . وحيث أن ر$_1$ أكبر من ر$_2$ ينتج أنه توجد نقطة على المنحنى تبعد بالمقدار ل$_1$ عن نقطة البداية انحناؤها $\frac{١}{ر_1}$. وإذن فالطول بين هذين الانحناءين وهو ل$_2$ — ل$_1$ = ل هو طول منحنى الانتقال المطلوب .

والآن نوضح هذه الحالة بالرسم فنرسم أولا الدائرة $س_{٢}$ ونرسم منحنى الانتقال $ل_{٢}$ بأخذ البعد $\frac{ل_{٢}}{٢}$ فى كلا الاتجاهين من النقطة «٥» انظر شكل (٩٢) .



شكل نمرة (٩٢)

وإذا رسمنا الدائرة $س_{١}$ تمس المماس المشترك فى النقطة ٦ ورسمنا منحنى الانتقال $ل_{١}$ بأخذ البعد $\frac{ل_{١}}{٢}$ فى كلا الاتجاهين من النقطة ٦ فبتقريب النقطة ٦ من النقطة ٥ حتى تقع نقطة بداية منحنى الانتقال $ل_{١}$ على نقطة بداية منحنى الانتقال $ل_{٢}$ ينطبق منحنى الانتقال $ل_{١}$ حتى نهايته ٣ على الجزء الأول من منحنى الانتقال $ل_{٢}$ وإذن يصبح البعد بين مركزى الدائرتين فى اتجاه المماس المشترك يساوى $(\overline{١-٥})-(\overline{١-٦})$ أى $\frac{١}{٢}(ل_{٢}-ل_{١})$. ويكون منحنى الانتقال المطلوب هو $\overline{٣-٢}$ وطوله $ل = ل_{٢} - ل_{١}$ ويوقع بنفس الطريقة التى يوقع بها منحنى الانتقال البسيط ويكون احداثيه الأول على بعد $ل_{١}$ واحداثيه الأخير على بعد $ل_{٢}$ ويبلغ طول خط الانحراف فى هذه الحالة

$$(س_{١}+ن_{١})\ ظا\ \frac{ه_{١}}{٢} + (س_{٢}+ن_{٢})\ ظا\ \frac{ه_{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}(ل_{٢}-ل_{١}) .$$

الاعتبار الثالث : وهى الحالة البسيطة التى يقل فيها طول المماس المشترك عن البعد $\frac{١}{٢}(ل_{٢}-ل_{١})$ وفى هذه الحالة إما أن يعدل التخطيط بحيث يصبح البعد يساوى $\frac{١}{٢}(ل_{٢}-ل_{١})$ أو يعدل بحيث يصبح طول المماس المشترك يساوى صفراً فتؤول الحالة إلى حالة منحنى انتقال بين جزءى منحنى مركب وهى الحالة التى بسطناها قبلا وفيها يبلغ طول خط الانحراف

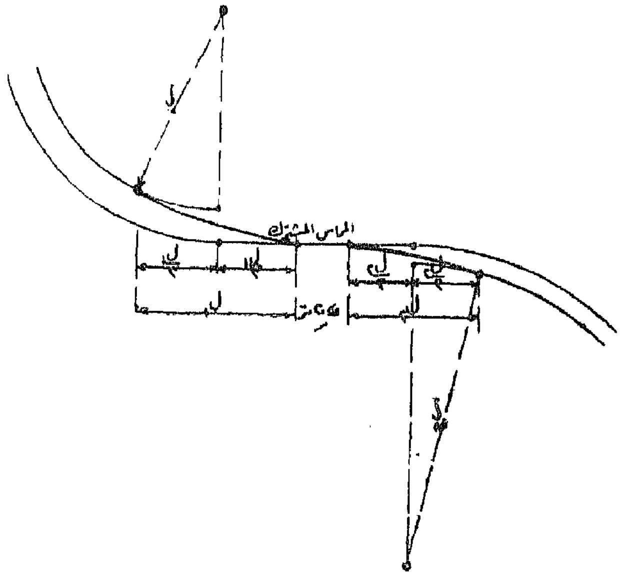
$$(س_{١}+ن_{١})\ ظا\ \frac{ه_{١}}{٢} + (س_{٢}+ن_{٢})\ ظا\ \frac{ه_{٢}}{٢}$$

منحنيات الانتقال العكسية

المنحنى الدائرى العكسى هو منحن متكون من دائرتين متماستين يقع مركزاهما على جانبى المماس المشترك . وإذن فانحناء أحدهما عكسى بالنسبة لانحناء الآخر .

وهناك ثلاثة اعتبارات للمنحنيات العكسية الدائرية :

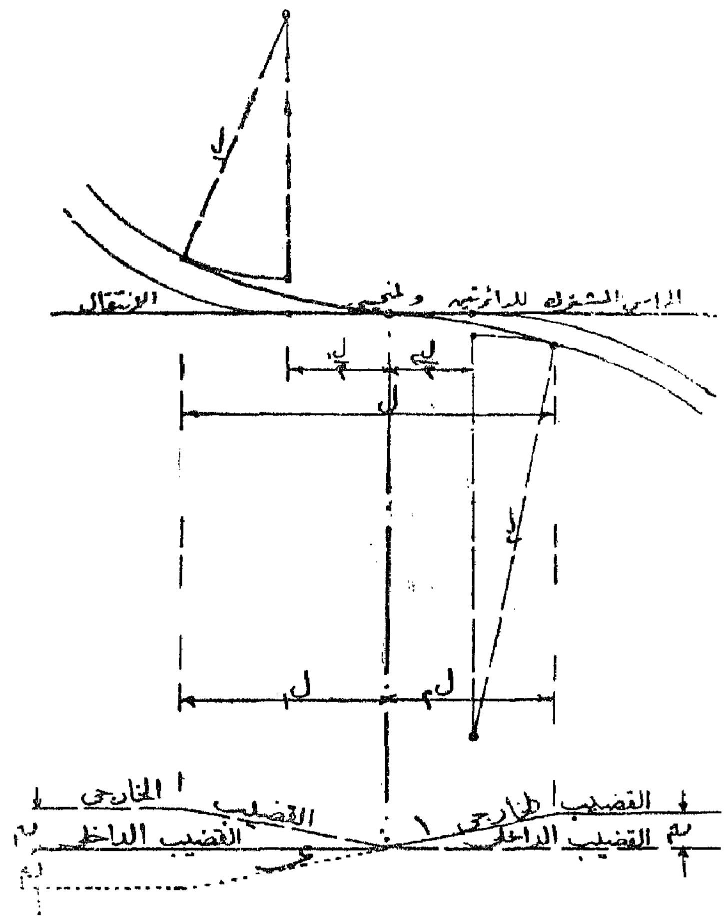
أولا : عندما تكون المسافة بين مركزى الدائرتين فى اتجاه المماس المشترك ≤ ½ (ل١ + ل٢) + ٢٠ مترا انظر شكل نمرة (٩٣) وهنا توصل الدائرة م١ بالمماس المشترك بواسطة منحنى الانتقال ل١ وتوصل الدائرة م٢ بالمماس عينه بواسطة منحنى الانتقال ل٢ . ويتضح من الشكل أن هذه الحالة هى حالة منحنيات انتقال بسيطة .



شكل نمرة (٩٣)

ثانياً : إذا صغرت المسافة بين مركزى الدائرتين فأصبحت ½ (ل١ + ل٢) وهنا تنطبق نقطة بداية منحنى الانتقال ل١ على نقطة بداية منحنى الانتقال ل٢ ويصبح منحنى الانتقال العكسى ل = ل١ + ل٢ كما هو موضح فى الشكل نمرة (٩٤) وإذن فإذا عينا نقطة بداية منحنى الانتقال بأخذ البعد $\frac{ل_1}{٢}$ من نقطة تماس الدائرة م١ مع المماس المشترك فيمكننا توقيع نقط المنحنيين كل فى ناحية وذلك بطريقة الإحداثيات كما سبق شرحه .

ثالثاً : إذا صغرت المسافة بين مركزى الدائرتين فأصبحت تساوى صفرا وهى حالة المنحنى الدائرى العكسى . وفى هذه الحالة يكون خط المركزين متعامدا مع المماس المشترك وعلى ذلك يلزم إدارة مماس منحنى الانتقال بالزاوية θ حول نقطة التماس المشتركة حتى يصبح البعد بين



شكل نمرة (٩٤)

مركزي الدائرتين في اتجاه المماس الجديد يساوي $\frac{1}{2}$ ($\text{ل}_1 + \text{ل}_2$) . ويجب في هذه الحالة والحالة السابقة أن يكون الانحدار النسبي منتظما أي يجب أن تكون ١ : ى ثابتة وبمعنى آخر يجب أن يكون منحنيي الانتقال تابعين لنفس المعادلة أي تكون ط ثابتة وذلك حتى لا يشعر الركاب بتغير الانحدار في المرور من منحنى الانتقال ل_1 إلى منحنى الانتقال ل_2 .

ولنفرض أن النقطة "١" في الشكل نمرة (٩٥) هي نقطة تماس المنحنيين المعكسيين ر_1 ، ر_2 . ونفرض أن $\text{ر}_2 > \text{ر}_1$.

فاذا أدرنا المماس المشترك للدائرتين حول النقطة "١" الزاوية θ بحيث أصبح البعد بين مركزي الدائرتين في اتجاه المماس الجديد يساوي $\frac{1}{2}$ ($\text{ل}_1 + \text{ل}_2$) فان نقطة التماس المشتركة لمنحني الانتقال المعكسين تقع على هذا الخط . ولإيجاد موقع هذه النقطة نقول :

حيث أن $\text{ر}_1 < \text{ر}_2$

$\therefore \text{ل}_1 > \text{ل}_2$

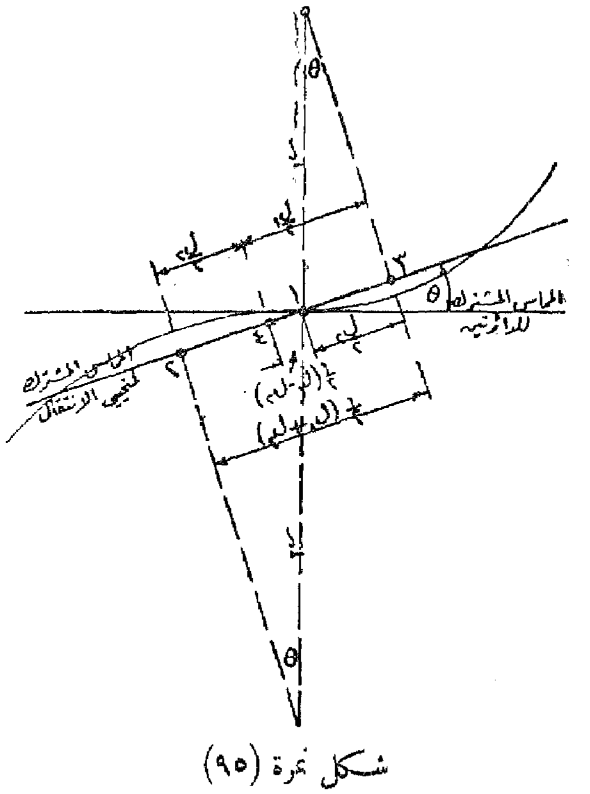
وحيث أن $\overline{١ - ٣} > \overline{١ - ٢}$ ينتج أن نقطة التماس تقع على يسار النقطة " ١ " فى الموضع " ٤ " مثلا بحيث يكون $\overline{٣ - ٤} = \frac{ل_١}{٢}$

، $\overline{٤ - ٢} = \frac{ل_٢}{٢}$

وينتج من تشابه المثلثات أن

$$\frac{\overline{١-٣}}{\overline{١-٢}} = \frac{ر_١}{ر_٢}$$

ولكن $$\frac{\overline{٤-٢}}{\overline{٤-٣}} = \frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{ر_١}{ر_٢}$$



شكل نمرة (٩٥)

$$\therefore \quad \frac{\overline{١-٣}}{\overline{١-٢}} = \frac{\overline{٤-٢}}{\overline{٤-٣}}$$

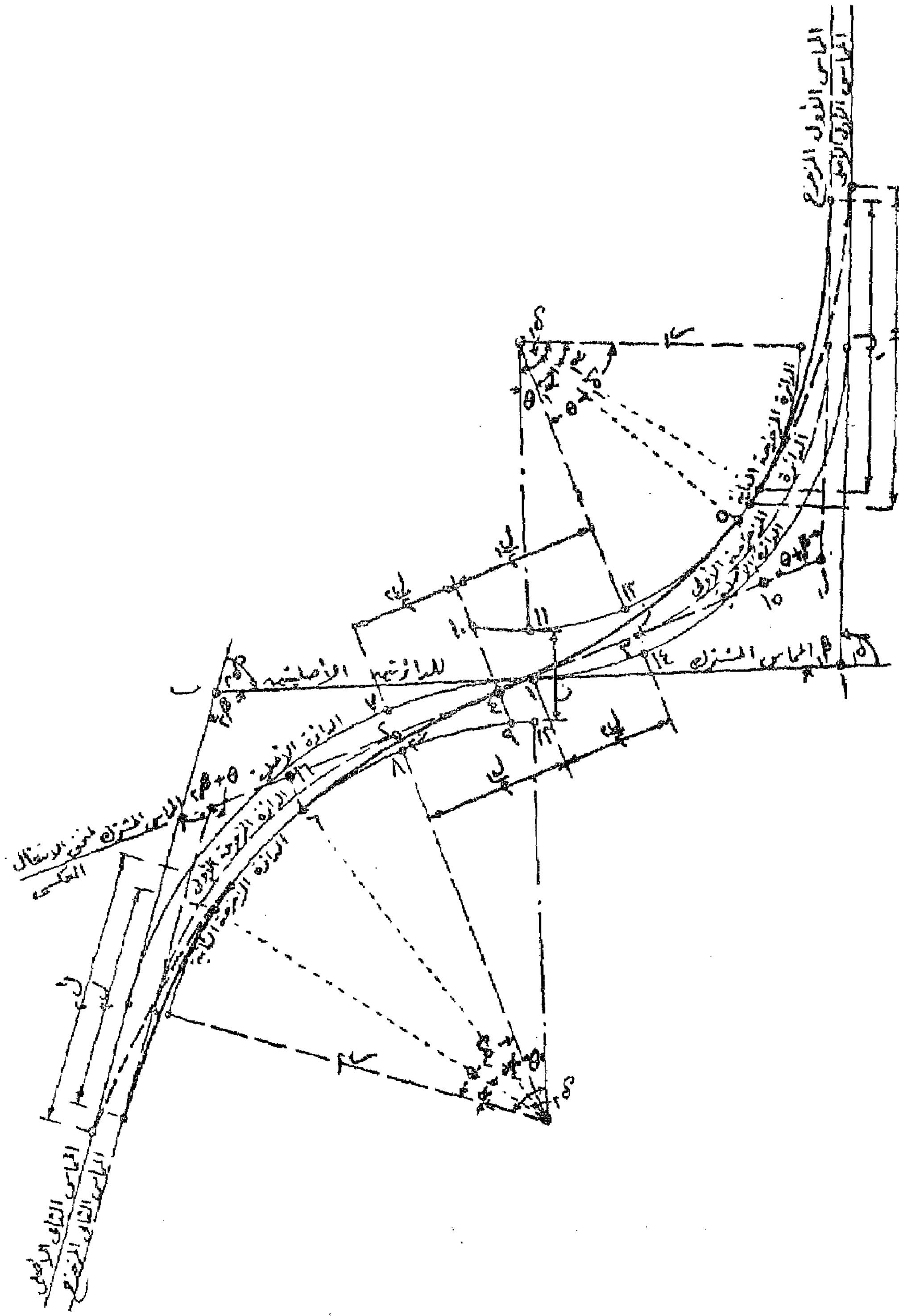
ولكن $$\overline{١-٣} + \overline{١-٢} = \overline{٤-٢} + \overline{٤-٣}$$

$$\therefore \quad \overline{١-٣} = \overline{٢-٤} = \frac{ل_٢}{٢}$$

و $\overline{١-٢} = \overline{٤-٣} = \frac{ل_١}{٢}$

∴ $\overline{١-٤} = \frac{١}{٢} \left(ل_١ - ل_٢ \right)$

وعلى ذلك فنقطة تماس منحنيي الانتقال المكسيين تقع على مماسهما المشترك فى اتجاه الدائرة الكبرى



شكل نمرة (٩٦)

وعلى بعد من نقطة التماس المشتركة يساوى نصف الفرق بين طول المنحنيين . ويصنع المماس المشترك لمنحنيي الانتقال زاوية مقدارها θ مع المماس المشترك للدائرتين جميعها

يساوى $\frac{ل_2}{2س_1} = \frac{ل_1}{2س_2}$

زحزحة الدائرتين الأصليتين :

زحزحتا الدائرتين الأصليتين واضحة فى الشكل نمرة(٩٦) وهما عبارة عن البعدين $\overline{1-11}$ ، $\overline{1-12}$

زحزحة المنحنى $س_1 = \overline{1-11} = \overline{13-14} = \overline{3-14} + \overline{3-13}$

وبالمثل زحزحة المنحنى $س_2 = \overline{1-12} = \overline{7-8} = \overline{2-7} + \overline{2-8}$

ولكن $\overline{3-14} = \frac{ل_2^2}{8س_1}$ ، $\overline{2-7} = \frac{ل_1^2}{8س_2}$

∴ زحزحة المنحنى $س_1 = \overline{1-11} = \frac{ل_2^2}{8س_1} + \frac{ل_1^2}{24س_1} = \frac{3ل_2^2 + ل_1^2}{24س_1}$

وبالمثل زحزحة المنحنى $س_2 = \overline{1-12} = \frac{ل_1^2}{8س_2} + \frac{ل_2^2}{24س_2} = \frac{3ل_1^2 + ل_2^2}{24س_2}$

الزحزحة الكلية :

$$ز = \overline{1-11} + \overline{1-12}$$

$$= \frac{ل_2^2}{8س_1} + \frac{ل_1^2}{24س_1} + \frac{ل_1^2}{8س_2} + \frac{ل_2^2}{24س_2}$$

$$= \frac{3ل_1^2 س_1 س_2^2 + ل_2^2 س_2^2 س_1 + 3ل_2^2 س_2^3 + ل_1^2 س_2^3}{24 س_2^3 س_1}$$

ولكن $ل_2 = ل_1 \frac{س_1}{س_2}$

$$\therefore \quad ز = \frac{3ل_1^2 س_1 س_2^2 + ل_1^2 \frac{س_1^2}{س_2^2} س_2^2 س_1 + 3ل_1^2 \frac{س_1^2}{س_2^2} س_2^3 + ل_1^2 س_2^3}{24 س_1 س_2^3}$$

$$= \frac{3ل_1^2 س_1 س_2^2 + ل_1^2 س_1^3 + 3ل_1^2 س_1^2 س_2 + ل_1^2 س_2^3}{24 س_1 س_2^3}$$

$$= \frac{\text{ل}_1^2\,(\text{س}_1^3 + 3\,\text{س}_1^2\,\text{س}_2 + 3\,\text{س}_1\,\text{س}_2^2 + \text{س}_2^3)}{24\,\text{س}_1\,\text{س}_2^3}$$

$$= \frac{\text{ل}_1^2\,(\text{س}_1 + \text{س}_2)^3}{24\,\text{س}_1\,\text{س}_2^3} = \frac{\text{ل}_1^2}{24\,\text{س}_1}\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{\text{س}_2}\right)^3$$

$$= \frac{\text{ل}_1^2\,\text{س}_1^3}{24\,\text{س}_1}\left[\frac{1 + \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}}{\text{س}_2}\right]^3 = \frac{\text{ل}_1^2\,\text{س}_1^2}{24}\left(\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}\right)^3$$

وحيث أن $\frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{\text{ل}_1} + \frac{1}{\text{ل}_2}}{\frac{1}{\text{ل}_2}} = \frac{\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}}{\frac{1}{\text{س}_1}}$$

أو $$\frac{1}{\text{س}_1} = \frac{\left(\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}\right)}{\left(\frac{1}{\text{ل}_1} + \frac{1}{\text{ل}_2}\right)} \cdot \frac{1}{\text{ل}_2}$$

أو $$\text{س}_1 = \frac{\left(\frac{1}{\text{ل}_1} + \frac{1}{\text{ل}_2}\right)^2}{\frac{1}{\text{ل}_2}\left(\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}\right)}$$

$$\therefore \quad \text{ز} = \frac{\text{ل}_1^2}{24}\,\frac{\left(\frac{1}{\text{ل}_1} + \frac{1}{\text{ل}_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\text{ل}_2}\right)^2} \times \frac{\left(\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}\right)^3}{\left(\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}\right)^2}$$

$$= \frac{\text{ل}_1^2\,\text{ل}_2^2}{24} \times \left(\frac{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}{\text{ل}_1\,\text{ل}_2}\right) \times \left(\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}\right)$$

$$= \frac{(\text{ل}_1 + \text{ل}_2)^2}{24}\left(\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2}\right)$$

وهذه العلاقة تشبه علاقة الزحزحة فى حالة المنحنى المركب فبينما طول منحنى الانتقال هناك يساوى ل إذا به هنا $\text{ل}_{١} + \text{ل}_{٢}$ والفرق بين الانحنائين هناك يساوى $\frac{١}{\text{نق}_{٢}} - \frac{١}{\text{نق}_{١}}$ وهنا يساوى $\frac{١}{\text{نق}_{٢}} + \frac{١}{\text{نق}_{١}}$.

الزحزحة بين منحنى الانتقال العكسى و بين المماسين الأول والثانى :

عند خروجنا من منحنى الانتقال العكسى فى طريقنا إلى المماس الأول مثلا تكون الزحزحة ز مكونة من جزءين .

الجزء الأول : الزحزحة $\text{ز}_{١}$ وهى زحزحة منحنى الانتقال الذى يربط الدائرة $\text{نق}_{١}$ بالخط المستقيم وهى تساوى $\frac{\text{ل}_{١}^{٢}}{٢٤\,\text{نق}_{١}}$.

الجزء الثانى : الزحزحة $\overline{٣ - ١٤}$ وهى الناشئة من دوران المماس المشترك الزاوية θ وتساوى $\frac{\text{ل}_{٢}^{٢}}{٨\,\text{نق}_{١}}$ ،

فإذا أردنا الانتقال إلى المماس الأول الأصلى فإننا ننتقل فى الطول $\text{ل}_{١}'$ المستنتج من العلاقة

$$\text{ز}_{١}' = \frac{\text{ل}_{١}^{٢}}{٢٤\,\text{نق}_{١}} + \frac{\text{ل}_{٢}^{٢}}{٨\,\text{نق}_{١}} = \frac{(\text{ل}_{١}')^{٢}}{٢٤\,\text{نق}_{١}}$$

$$\therefore\ \text{ل}_{١}' = \sqrt{\text{ل}_{١}^{٢} + ٣\,\text{ل}_{٢}^{٢}}$$

أى أن $\text{ل}_{١}'$ أكبر من $\text{ل}_{١}$ وينتج من ذلك أن الميل ١ : ى على هذا المنحنى أقل من الميل على المنحنى ل.

هذه طريقة للانتقال إلى المماس الأول وهناك طريقة أخرى تحفظ طول المنحنى ثابتاً حتى يكون الميل عليه نفس الميل على سابقه وتتلخص فى تعديل التخطيط بزحزحة المماس الأول إلى الداخل المسافة $\overline{٣ - ١٤}$ والمماس الثانى المسافة $\overline{٢ - ٧}$ فيأخذان الوضعين المبينين فى الشكل (المماس الأول المزحزح والمماس الثانى المزحزح) .

توقيع منحنيات الانتقال السالفة :

أولا : يوضع الثيودوليت عند نقطة التماس المشتركة « ١ » وترصد به النقطة ا أو ب .

ثانياً : يدار الثيودوليت فى اتجاه الدائرتين زاوية مقدارها θ جيبها يساوى $\frac{\text{ل}_{١}}{٢\,\text{نق}_{٢}}$ ليتعين مماس

منحنى الانتقال العكسى .

ثالثاً : يقاس على هذا الاتجاه الجديد وفى اتجاه الدائرة الكبيرة المسافة $\overline{١ - ٤}$ تساوى $\frac{1}{2}$ (ل$_1$ — ل$_2$) لتعيين نقطة « ٤ » نقطة الأصل لمنحنى الانتقال العكسى .

رابعاً : تعين النقطتان ا^1 ، ب^1 اللتان تبعدان عن نقطة الأصل « ٤ » بالمقدارين

$$\frac{ل_1}{٢} + (نق_1 - ز_1) \text{ ظا } \frac{\delta_1 - \Theta}{٢}$$

$$، \quad \frac{ل_2}{٢} + (نق_2 - ز_2) \text{ ظا } \frac{\delta_2 - \Theta}{٢} \text{ على التوالى .}$$

خامساً : يوضع الثيودوليت فى النقطتين ا^1 ، ب^1 وبعد ضبطه على اتجاه المماس المشترك لمنحنى الانتقال العكسى يوجه فى اتجاه الدائرة بزاوية مقدارها ($\beta_1 + \Theta$) عند ا^1 ، ($\beta_2 + \Theta$) عند ب^1 وذلك لتعيين موضعى المماسين المزحزحين الأول والثانى .

سادساً : يؤول الحل إلى مسألة مزدوجة لمنحنى انتقال بسيط عبارة عن :

أولا — وصل المماس الأول المزحزح والمماس المشترك لمنحنى الانتقال العكسى اللذان تفصلهما زاوية مقدارها ($\beta_1 + \Theta$) ويوصلهما منحن نصف قطرة نق$_1$.

ثانياً — وصل المماس الثانى المزحزح والمماس المشترك لمنحنى الانتقال العكسى اللذان تفصلهما الزاوية ($\beta_2 + \Theta$) ويوصلهما منحن نصف قطره نق$_2$.

عود إلى منحنى الانتقال بين منحنى الدائرة والخط المستقيم

استنتجنا فيما سبق معادلة منحنى الانتقال بين الدائرة والخط المستقيم وهى :

$$ص = \frac{س^3}{٦ \text{ نق ل}} = \frac{س^3}{٦ \text{ ط}} \qquad \text{معادلة نمرة (٨)}$$

$$= \text{ك } س^3$$

$$\text{باعتبار أن ك ثابت} \quad = \frac{1}{٦ \text{ ط}}$$

$$\text{ميل المنحنى هى} \quad \frac{ء ص}{ء س} = ٣ \text{ ك } س^2$$

$$\text{والمعادلة التفاضلية للمنحنى هى} \quad \frac{ء^2 ص}{ء س^2} = ٦ \text{ ك س}$$

ولكن الانحناء $\frac{1}{ر} = \frac{\frac{ء^2 ص}{ء س^2}}{\left[1 + \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$= \frac{٦ ك س}{\left[1 + ٩ ك^2 س^4\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ولاستنتاج أقصى انحناء نفاضل قيمته بالنسبة للدالة س ونساوى الناتج بصفر لتعيين قيمة س التى تعطى أقصى انحناء .

$$\frac{ء \frac{1}{ر}}{ء س} = \frac{(1 + ٩ ك^2 س^4)^{\frac{3}{2}} \times ٦ ك - ٦ ك س . \frac{3}{2} (1 + ٩ ك^2 س^4)^{\frac{1}{2}} \times ٣٦ ك^2 س^3}{(1 + ٩ ك^2 س^4)^3}$$

فاذا اعتبرنا $1 + ٩ ك^2 س^4 = ا$ وذلك للسهولة .

فإن $\frac{ء \frac{1}{ر}}{ء س} = \frac{٦ ك}{\sqrt{ا^3}} - \frac{٣٢٤ ك^3 س^4 \sqrt{ا}}{ا^3}$

$=$ صفراً عند أقصى انحناء

$$\therefore \frac{٦ ك}{\sqrt{ا^3}} = \frac{٣٢٤ ك^3 س^4 \sqrt{ا}}{ا^3}$$

أو $\frac{ك^2 س^4}{ا} = \frac{1}{٥٤}$

$\therefore$ س^4 $= \frac{ا}{٥٤ ك^2} = \frac{1 + ٩ ك^2 س^4}{٥٤ ك^2}$ وذلك بعد التعويض عن ا بما تساويه

$$= \frac{1}{٥٤ ك^2} + \frac{1}{٦} س^4$$

$$\therefore \frac{٥}{٦} س^4 = \frac{1}{٥٤ ك^2}$$

أو س^4 $= \frac{٦}{٢٧٠ ك^2} = \frac{1}{٤٥ ك^2}$

$$\therefore \text{س} = \frac{١}{\sqrt[٤]{٤٥\,\text{ك}^٢}} = \frac{٠,٣٨٦١}{\sqrt{\text{ك}}}$$

$$= \frac{٠,٣٨٦١}{\sqrt{\frac{١}{٦\,\text{ط}}}}$$ وهو بعد النقطة التي تعطى أكبر انحناء على المنحنى .

فإذا أردنا معرفة ميل المنحنى عند تلك النقطة عوضنا عن قيمة س هذه في معادلة الميل وإذن :

$$\text{ظا}\ \alpha = \frac{٣\,\text{ك} \times ٠,٣٨٦١^٢}{\text{ك}} = ٣ \times ٠,٣٨٦١^٢ = ٠,٤٤٧٢$$

وهذه تعطى زاوية مقدارها ٤١" ٥' ٢٤°. وعلى ذلك فانحناء منحنى الانتقال يزداد من الصفر عند بدايته إلى مقدار أقصى على بعد ٠,٣٨٦١ $\div \sqrt{\frac{١}{٦\,\text{ط}}}$ أى ٠,٩٤٥٩ $\sqrt{\text{ط}}$ ثم بعد ذلك يقل الانحناء وعلى ذلك فلا يجب أن نسمح بوجود ميل على المنحنى يزيد عن ٤١" ٥' ٢٤° .

فإذا بلغ المنحنى الطول الأقصى كانت زاوية ميله عند نهايته تساوى ٤١" ٥' ٢٤° وإذا اتحدت نقطتا نهايتى المنحنى فى هذه الحالة أى ولم يكن بينهما جزء دائرى فإن ذلك يحدث عندما تكون الزاوية β المحصورة بين المماسين الخارجيين تساوى (١٨٠° — ٢ α) أى ٣٨" ٤٨' ١٣١° فإذا كانت الزاوية β أقل من هذه الزاوية ظهر بين منحنيي الانتقال جزء دائرى وإذا زادت عن هذه الزاوية تلاشى الجزء الدائرى وتقابل منحنيي الانتقال قبل نهايتيهما عند نقطة ينطبق فيها مماسهما وتكون زاوية هذين المماسين أقل من الزاوية القصوى ٤١" ٥' ٢٤° .

تأثير اهمال $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ فى معادلة الانحناء :

إن معادلة منحنى الانتقال ص = ك س^٣ والتى تعرف بالقطع المكافىء التكعيبى صالحة الاستعمال للمنحنيات القصيرة التى تسير عليها القطارات بسرعة معتدلة . أما إذا زادت السرع كثيراً اضطررنا إلى زيادة طول منحنيات الانتقال وازدادت تبعا لذلك قيمة زاوية الميل عند نهاية المنحنى .

وفى المنحنيات القصيرة تقل الزاوية عند نهايتها قلة تسمح باهمال قيمة ميلها $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ ولكن كلما كبرت الزاوية واقتربت من القيمة القصوى ٤١" ٥' ٢٤° تساءلنا هل بالإمكان إهمالها وماذا يكون تأثير ذلك .

ومعادلة منحنى الانتقال التى استنتجناها سابقا هى :

$$\text{ص} = \text{ك}\ \text{س}^٣$$

$$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣\,\text{ك}\ \text{س}^٢ = \text{ظا}\ \alpha = \text{و} \quad \text{مثلا}$$

$$\therefore \quad س^{٢} = \frac{و}{٣ك}$$

$$،\quad س = \frac{\sqrt{و}}{\sqrt{٣ك}}$$

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٦ك\,س = ٦ك\,\frac{\sqrt{و}}{\sqrt{٣ك}} = ٢\,\sqrt{٣ك}\,\sqrt{و}$$

فاذا أهملنا $\frac{ءص}{ءس}$ فان

$$\text{الانحناء}\ \frac{١}{ر} = ٢\,\sqrt{٣ك}\,\sqrt{و} = \frac{١}{ر_{٠}}$$

ولكن إذا اعتبرنا $\frac{ءص}{ءس}$ فان

$$\text{الانحناء}\ \frac{١}{ر} = \frac{٢\,\sqrt{٣ك}\,\sqrt{و}}{\left[١ + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}\right]^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{٢\,\sqrt{٣ك}\,\sqrt{و}}{(١+و^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$$

فاذا فرضنا أن $\frac{١}{\left[١ + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}\right]^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{١}{(١+و^{٢})^{\frac{٣}{٢}}} = هـ$ مثلا

فان $\frac{١}{ر} = ٢\,\sqrt{٣ك}\,\sqrt{و}\ هـ = \frac{١}{ر}$

وإذن ففي حالة اهمال $\frac{ءص}{ءس}$ تكون $هـ = ١$ لأن $\frac{ءص}{ءس} = و =$ صفر

ويكون الانحناء $\frac{١}{ر} = \frac{١}{ر_{٠}}$

وفي حالة اعتبار $\frac{ءص}{ءس}$ يكون

$$\text{الانحناء}\ \frac{١}{ر} = \frac{١}{ر} = \frac{١}{ر_{٠}} \times هـ$$

أو $ر_{٠} = هـ\, ر$

وعلى ذلك فمعادلة منحنى الانتقال التى هى

$$ص = ك\, س^{٣} = \frac{س^{٣}}{٦\, ر_{٠}\, ل}$$

$$تصبح\ ص = \frac{س^{٣}}{٦\, هـ\, ر\, ل} = \frac{١}{هـ} \cdot \frac{س^{٣}}{٦\, ر\, ل} \quad (١)$$

وإذن فنصف قطر الانحناء $ر_{٠}$ عند نهاية المنحنى وذلك فى حالة إهمال $\frac{دص}{دس}$ لا يساوى نصف قطر الدائرة $ر$ وإنما تربطه به العلاقة $ر_{٠} = هـ \,.\, ر$

وقد ذكرنا أن أقصى انحناء يحصل عندما تكون

$$س = \frac{١}{\sqrt[٤]{٤٥\, ك^{٢}}} = \frac{٠٫٣٨٦١}{\sqrt{ك}}$$

فإذا عوضنا بهذه القيمة فى معادلة الانحناء التى هى

$$\frac{١}{ر} = \frac{٦\, ك\, س}{\left[١ + (٩\, ك^{٢}\, س^{٤})\right]^{\frac{٣}{٢}}}$$

لوجدنا أن أقصى مقدار للانحناء $= \dfrac{٦\, ك \,.\, \dfrac{٠٫٣٨٦١}{\sqrt{ك}}}{\left[١ + ٩\, ك^{٢} \left(\dfrac{٠٫٣٨٦١}{\sqrt{ك}}\right)^{٤}\right]^{\frac{٣}{٢}}}$

$$= \frac{٢٫٣١٦٦\, ك}{\sqrt{ك}\left[١ + ٩\, ك^{٢}\, \dfrac{٠٫٣٨٦١}{ك^{٢}}\right]^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{٢٫٣١٦٦ \sqrt{ك}}{\left[١ + ٩\, (٠٫٣٨٦١)^{٤}\right]^{\frac{٣}{٢}}} = ١٫٧٦٢٣ \sqrt{ك}$$

---

(١) نصف قطر الانحناء عند نقطة نهاية المنحنى فى حالة اهمال قيمة $\frac{دص}{دس}$ يساوى $ر_{٠}$ ولا يساوى $ر$. وعندما يقل الفرق بين $ر$ ، $ر_{٠}$ — وهو فى حالة المنحنيات القصيرة التى تجرى عليها القطارات بسرعة معتدلة — يمكن التغاضى واعتبار $ر_{٠} = ر$.

ومعلوم لدينا أن

$$\text{ص} = \text{ك}\ \text{س}^{٣}$$

$$،\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\ \text{ك}\ \text{س}^{٢}$$

وإذن فعندما تكون س = ل فإن :

$$\text{ظا}\ \alpha = ٣$$

فإذا كانت الزاوية α عند نهاية المنحنى = ٤١" ٥' ٢٤° فإن

$$\text{ل}^{٢} = \frac{\text{ظا}\ \alpha}{٣\ \text{ك}} = \frac{٠\text{ر}٤٤٧٢}{٣\ \text{ك}}$$

$$\therefore \text{ك} = \frac{٠\text{ر}٤٤٧٢}{٣\ \text{ل}^{٢}}$$

ولكننا نعلم أن $\text{ك} = \frac{١}{٦\ \text{ر}_{٠}\ \text{ل}} = \frac{٠\text{ر}٤٤٧٢}{٣\ \text{ل}^{٢}}$

$$\therefore \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{ل}} = ٢ \times ٠\text{ر}٤٤٧٢\ \text{ر}_{٠}$$

$$\therefore \text{ل} = ٠\text{ر}٨٩٤٤\ \text{ر}_{٠}$$

وإذا وضعنا قيمة ك هذه في معادلة الانحناء الأقصى

فإن أقصى انحناء $\frac{١}{\text{ر}} = ١\text{ر}٧٦٢٣ \sqrt{\text{ك}}$

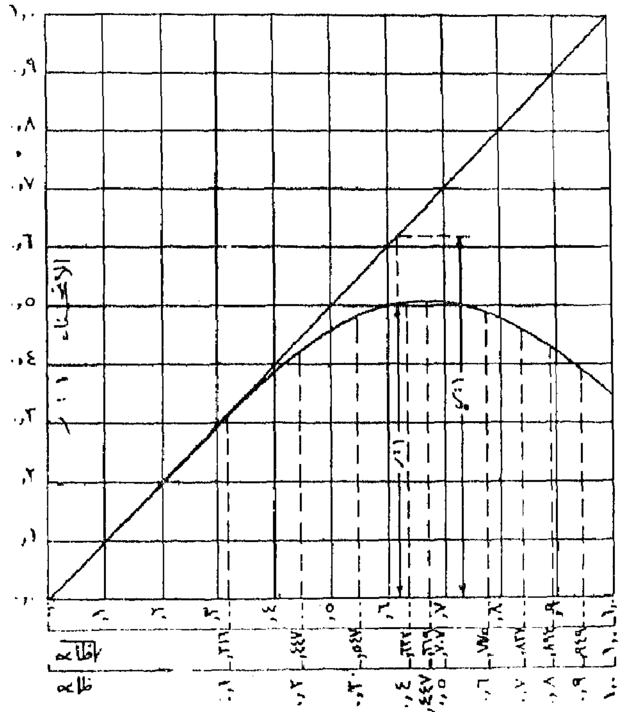
$$= ١\text{ر}٧٦٢٣ \sqrt{\frac{١}{٦\ \text{ر}_{٠}\ \text{ل}}} = ١\text{ر}٧٦٢٣ \sqrt{\frac{١}{٥\text{ر}٣٦٦٥٦٨\ \text{ر}_{٠}^{٢}}}$$

$$= ٠\text{ر}٧٦٠٧\ \frac{١}{\text{ر}_{٠}}$$

$\therefore \text{ر}_{٠} = ٠\text{ر}٧٦٠٧ \times$ النهاية الصغرى لنصف قطر الانحناء ر .

وعلى ذلك فبإهمال $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لا يكون نصف قطر الانحناء عند نقطة نهاية المنحنى في الحالة التي يكون فيها الميل صانعاً زاوية مقدارها ٤١" ٥' ٢٤° — أي في حالة أقصى انحناء — مساوياً نصف قطر الدائرة ر وإنما يساويه بعد ضربه في ٠ر٨٦٠٧ . ويمكن توضيح ذلك بالرسم البياني التالي

شكل نمرة (٩٧) .



شكل نمرة (٩٧)

والآن إذا أخذنا المعادلة :

$$\frac{١}{\text{ر}} = ٢ \sqrt{٣\text{ك}}\ \sqrt{\text{ظا}\ \alpha}\ \text{هـ}$$

$$\text{حيث ك} = \frac{١}{٦\text{هـ ر ل}}$$

$$\therefore \frac{١}{\text{ر}} = \frac{٢\sqrt{\text{ظا}\ \alpha}}{\sqrt{٢\text{هـ ر ل}}}$$

$$، \frac{١}{\text{ر}^{٢}} = \frac{٤\ \text{ظا}\ \alpha}{٢\text{هـ ر ل}} \cdot \text{هـ}^{٢}$$

$$\therefore \frac{١}{\text{ر}} = \frac{٢\ \text{ظا}\ \alpha}{\text{ل}} \cdot \text{هـ}$$

$$، \frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ٢\ \text{ظا}\ \alpha \cdot \text{هـ}$$

$$\text{أو ل} = ٢\ \text{ر ظا}\ \alpha \cdot \text{هـ}$$

حيث α زاوية منحنى الانتقال عند نهايته

وهذه هي المعادلة التي تربط طول المنحنى ونصف قطر الدائرة وميل الزاوية عند نهاية المنحنى .

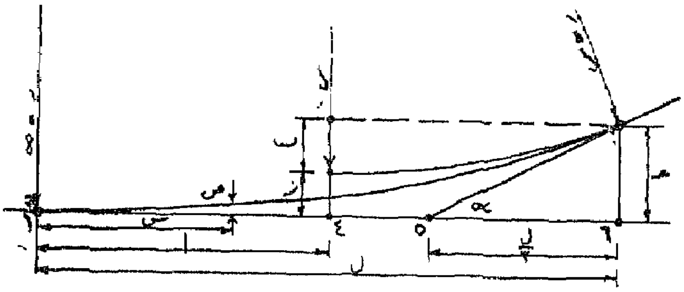
ويمكننا عمل جداول لقيمة هـ $= \frac{١}{\left[١ + (\text{ظا}\ \alpha)^{٢}\right]^{\frac{٣}{٢}}}$ وذلك لسهولة توقيع نقط المنحنى

في المعادلة .

$$\text{ص} = \frac{١}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{س}^{٣}}{٦\ \text{ر}\ \text{ل}}$$

خصائص المنحنى الجديد :

شكل نمرة (٩٨) .



شكل نمرة (٩٨)

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ٢\ \text{ظا}\ \alpha \cdot \text{هـ}$$

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{ل}} = \frac{١}{\text{هـ}} \cdot \frac{١}{٢\ \text{ظا}\ \alpha}$$

$$\therefore \text{ظا}\ \alpha = \frac{١}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{ل}}{٢\ \text{ر}}$$

$$،\ \text{ر} = \frac{\text{ل}}{\text{هـ}} \cdot \frac{١}{٢\ \text{ظا}\ \alpha}$$

الاحداثى النهائى هـ :

نعوض في معادلة المنحنى $\text{ص} = \frac{١}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{س}^{٣}}{٦\ \text{ر}\ \text{ل}}$ بالقيمة $\text{س} = \text{ل}$

$$\therefore \text{هـ} = \frac{١}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{ل}}{٢\ \text{ر}} \cdot \frac{\text{س}^{٣}}{٣\text{ل}^{٢}}$$

= $\frac{\text{ل}}{\text{٣}}$ ظا α

البعد ا :

ا = ل − ر − ر حا α = ل − $\frac{\text{ل}}{\text{ه}}$. $\frac{\text{جتا } \alpha}{\text{٢}}$ بعد تعويض قيمة ر بما تساويه

∴ $\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$ = ١ − $\frac{\text{١}}{\text{ه}}$. $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتا α

الزحزحة :

الزحزحة ز = م − ب

= $\frac{\text{ل}}{\text{٣}}$ ظا α − ر (١ − جتا α)

= $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ه ظا^{٢} α . ر − ر (١ − جتا α)

= ر [$\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ه ظا^{٢} α − (١ − جتا α)]

تحديد ميل المنحنى :

$\overline{\text{٥ − ٦}}$ = م ÷ ظا α = $\frac{\text{ل}}{\text{٣}}$ ظا α ÷ ظا α

= $\frac{\text{ل}}{\text{٣}}$

ويحسن دائما استعمال هذه المعادلات عند ما يكون المنحنى طويلا ونصف قطره قصيرا .