

المجموعة "الزمرة"

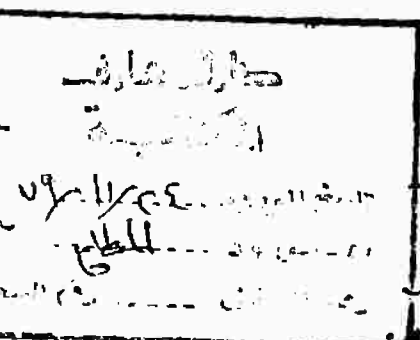
مفهومها ~ نظريتها ~ نشأتها وتطورها
تطبيقاتها وأثر ذلك على منهج التعليم العام

تأليف

دكتورة معصومة محمد كاظم

أستاذة المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية البنات - جامعة عين شمس

١٩٧٩



دارالمعارف

الناشر : دار المعارف - ١١١٩ كورنيش النيل - القاهرة ج.م.ع

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمة

الرياضيات مرآة الحضارة، ولا يمكن أن تبنى مدنية بدون أساس رياضي متقدم. وهذا هو سر حضارة أجدادنا قدماء المصريين.

والعلوم الحديثة تعتمد اعتماداً كلياً على الرياضيات، فلو لا الرياضيات ما استطاع الإنسان غزو الفضاء. فالرياضيات بحق ملكة العلوم وغادمتها.

ولقد تطورت الرياضيات وتقدمت تقدماً سريعاً في الحقبة الأخيرة من الزمن، مما دعا خبراء ومتخصصي المذاهب وعلماء تدريس الرياضيات يفكرون في تطوير مناهج التعليم العام ابتداء من المدرسة الابتدائية إلى نهاية المرحلة الثانوية. وقد بدأت تجربة تطوير مناهج الرياضيات في مصر منذ حوالي عشر سنوات. ومع ذلك فالتجربة تلاقى الكثير من الصعوبات حتى الآن.

ولاشك أننا في حاجة إلى تناول المفاهيم الجديدة، ودراستها بعمق والتعرف على نشأتها وتطورها وعلى قيمتها التطبيقية في مجال الرياضيات وفي مجالات أخرى خارج الرياضيات بهدف أن يشعر المعلم والطالب بقيمة هذه المفاهيم وحتمية دراستها.

وفي بحثنا هذا نقدم مفهوم المجموعة (الزمرة) من منظور تاريخي وتطبيقي وذلك في ستة فصول: يقوم الفصل الأول بتعريف مفهوم المجموعة ونظريتها. ويختص الفصل الثاني بنشأة وتطور المجموعة. ويتناول الفصل الثالث دراسة مفهوم المجموعة وعلاقته بالهندسات المختلفة. أما الفصل الرابع فيختص بمدى

الاستفادة من تطبيق نظرية المجموعات في تدريس الرياضيات في التعليم العام .
ويتناول الفصل الخامس استخدام نظرية المجموعات في علم الكيمياء . ويتتبع
الكتاب بالفصل السادس وهو الفصل الذي يوضح أثر نظرية المجموعات على
مناهج الرياضيات في التعليم العام وإعداد المعلم .

وتشكر المؤلفة كل من ساهم في المداونة في إخراج هذا الكتاب إلى النور
وتخص بالشكر الأستاذ الدكتور محمد هـ عبد الرحمن وأولادها الذين همموا
الجو المناسب . كما تقدم الشكر للأستاذ الدكتور وليم عبيد لمناقشاته البناءة وإلى
السيد الدكتور محمد صبرى عبد المطلب لتقديمه المشورة العلمية في مجال الكيمياء
وكذلك تشكر دار المعارف ومطبعة دار نشر الثقافة .

وترجو من الله أن يكون هذا الكتاب فاتحة لمزيد من الكتب والأبحاث
التي تهدف إلى تعميق الأسس والمفاهيم الرياضية الجديدة على مناهجنا . والله
الموفق والمعين .

المؤلفة

يونيو سنة ١٩٧٩

محتويات الكتاب

الموضوع	الصفحة
الهدف من البحث	٢
أهمية البحث	٢
الفصل الأول : مفهوم ونظرية المجموعات	٣ — ٢٠
مجموعة التباديل	٣
تمائل المربع	٥
مجموعة التحويلات	٨
تعريف المجموعة	١٠
الايسومورفيزم بين المجموعات	١١
أهمية الايسومورفيزم	١٤
المجموعات الدورية	١٧
رتبة المجموعة	١٩
المجموعة الجزئية	١٩
دليل المجموعة الجزئية	٢٠
نظرية لاجرانج	٢٠
الهومومورفيزم	٢٠
الفصل الثاني : نشأة وتطور نظرية المجموعات	٢١ — ٣١
ما ساهم به الرياضيون قبل القرن التاسع عشر	٢٢

ما ساهم به الرياضيون في القرن التاسع عشر ٢٥

الفصل الثالث : مفهوم المجموعة في الهندسات المختلفة . . ٣٢ — ٤٣

فراغ الهندسة التحليلية ٣٥

الانواع الأكثر عمومية للفراغ ٣٥

الخواص والأشكال الهندسية ٣٦

اللامتغيرات الهندسية ٣٧

الهندسة الإقليدية ٣٨

الهندسة الأفينية ٣٩

الهندسة الإسقاطية ٤٠

التوبولوجي ٤١

الفصل الرابع : تطبيق نظرية المجموعات في تدريس بعض موضوعات ٤٤ — ٦٤
الرياضيات في التعليم العام

استعمال المجموعات في حل الجمل الرياضية ٤٤

استعمال المجموعات في العمليات على الأعداد ٤٨

استعمال المجموعات في تدريس بعض المفاهيم الهندسية الأساسية ٥١

الفصل الخامس : استخدام نظرية المجموعات في الكيمياء . . ٦٥ — ٨٢

عملية التماثل ٦٥

مستويات التماثل والانعكاس ٦٧

مركز التماكس ٧١

بسم الله الرحمن الرحيم

لا يزال الجدل حول مناهج الرياضيات في التعليم العام بين المتخصصين وغير المتخصصين . ونقطة الحوار هي مسار التطوير . ومع أنه قد حدث فعلا تطوير في المناهج عندنا منذ سنة ١٩٧٠ ومع أن هذا التطوير قد وضع على أسس مدروسة ، إلا أن كثيرين من رجال التعليم في مصر ومن أولياء الأمور لا يزالون غير مقتنعين بهذا النوع من التطوير ، وربما يرجع السبب في ذلك إلى عدم العناية بالثقافة العامة حول المادة نفسها وتطورها وتطبيقاتها المتعددة . وكذلك إلى تركيز الاهتمام في مدارسنا على المعلومات والمهارات . وإغفال الانجازات وعدم إتاحة الفرصة للثقيف العام وتوسيع الأفق خارج نطاق المقرر الدراسي .

وعلى ذلك رأت الباحثة أن تأخذ مفهوما من المفاهيم الموجودة في المنهج المطور — أى من المفاهيم الجديدة في مناهجنا الدراسية ، وإن كان هذا المفهوم عرف في علم الرياضيات قبل سنة ١٩٠٠ ، ثم تتناول هذا المفهوم بالتعريف ثم بعد ذلك تنتقل إلى نشأته وتطوره . ثم تبحث في أهميته في الرياضيات عامة وفي تطبيقاته في إحدى مجالات المعرفة الأخرى أى خارج نطاق الرياضيات . وهذا المفهوم الذى وقع عليه اختيار الباحثة هو مفهوم المجموعة (الزمرة)^(١) . وعلى ذلك ستكون خطوات هذا البحث كما يأتى :

(١) يستخدم اصطلاح « الزمرة » كترجمة بديلة للمجموعة Group في بعض المراجع العربية .

بسم الله الرحمن الرحيم

لا يزال الجدل حول مناهج الرياضيات في التعليم العام بين المتخصصين وغير المتخصصين . ونقطة الحوار هي مسار التطوير . ومع أنه قد حدث فعلا تطوير في المناهج عندنا منذ سنة ١٩٧٠ ومع أن هذا التطوير قد وضع على أسس مدروسة ، إلا أن كثيرين من رجال التعليم في مصر ومن أولياء الأمور لا يزالون غير مقتنعين بهذا النوع من التطوير ، وربما يرجع السبب في ذلك إلى عدم العناية بالثقافة العامة حول المادة نفسها وتطورها وتطبيقاتها المتعددة . وكذلك إلى تركيز الاهتمام في مدارسنا على المعلومات والمهارات . وإغفال الانجازات وعدم إتاحة الفرصة للتشويق العام وتوسيع الأفق خارج نطاق المقرر الدراسي .

وعلى ذلك رأت الباحثة أن تأخذ مفهوما من المفاهيم الموجودة في المنهج المطور — أى من المفاهيم الجديدة في مناهجنا الدراسية ، وإن كان هذا المفهوم عرف في علم الرياضيات قبل سنة ١٩٠٠ ، ثم تتناول هذا المفهوم بالتمريف ثم بعد ذلك تنتقل إلى نشأته وتطوره . ثم تبحث في أهميته في الرياضيات عامة وفي تطبيقاته في إحدى مجالات المعرفة الأخرى أى خارج نطاق الرياضيات . وهذا المفهوم الذى وقع عليه اختيار الباحثة هو مفهوم المجموعة (الزمرة)^(١) . وعلى ذلك ستكون خطوات هذا البحث كما يأتى :

(١) يستخدم اصطلاح « الزمرة » كترجمة بديلة للمجموعة Group في بعض المراجع العربية .

- ١ — دراسة مختصرة لمفهوم المجموعة ونظريتها .
- ٢ — دراسة لنشأة فكرة المجموعات وتطورها .
- ٣ — عرض بعض تطبيقات مفهوم المجموعة في الرياضيات وفي منهج رياضيات التعليم العام .
- ٤ — عرض بعض الأمثلة التي توضح تطبيق المجموعات في علم الكيمياء .
- ٥ — عرض أثر نظرية المجموعات على مناهج الرياضيات في التعليم العام وإعداد المعلم .

الهدف من البحث :

يهدف هذا البحث إلى دراسة وعرض العلاقة بين المجموعات وموضوعات شتى في الرياضيات عامة وفي منهج الرياضيات بالمدرسة الثانوية خاصة . وفي مجال آخر خارج علم الرياضيات وهو مجال علم الكيمياء وكذلك تقديم مجالات متعددة برجا تأكيد أهمية ضرورة احتواء دراسة المجموعات في مناهج الرياضيات للطالب المتوسط الذي سيدخل الجامعة .

اهمية البحث :

المجموعة تركيب رياضي مجرد بسيط . ومع ذلك له تطبيقات عدة في مجالات العلوم المختلفة كالفيزياء النظرية والكيمياء والهندسة الكهربائية والآلات الحاسبة الالكترونية . لذلك وجب توعية معلم الرياضيات وطلبة كليات إعداد المعلمين والمهتمين بعلم الرياضيات من أولياء الأمور وغيرهم بأهمية المجموعات وتطورها وتطبيقاتها في الرياضيات وفي غيرها من المجالات وكذلك توعية مدرسي الكيمياء ومعلمي العلوم الأخرى بقيمة الرياضيات في تدريس وفهم المواد الدراسية المختلفة وكذلك تثقيف المعلم وطالب كليات إعداد المعلم حول موضوعات الرياضيات التي وضعت في المنهج المطور .

الفصل الأول

مفهوم ونظرية المجموعات

قبل أن نعرف المجموعة، نسمطي بعض الأمثلة المحسوسة للمجموعات وسنبدا بإعطاء مثال لمجموعة تباديل **Permutation Group**.
حيث أن مجموعات التباديل هامة جدا تاريخيا في تطور مفهوم المجموعة.
أولا : مجموعة التباديل :

نفرض أن الفئة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ حيث أن هذه الستة عناصر على الترتيب هي الست تباديل الآتية للأعداد 1، 2، 3 :
بمعنى أن :

$I = (1, 2, 3)$ وهو الترتيب الأصلي ويكتب هكذا $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ويقرأ كما يلي : 1 تحل مكان 1 ، 2 تحل مكان 2 ، 3 تحل مكان 3

$A = (1, 3, 2)$ ويكتب هكذا : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ويقرأ كما يلي : 1 تحل مكان 1 ، 3 تحل مكان 2 ، 2 تحل مكان 3

$B = (2, 1, 3)$ ويكتب هكذا : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ وتقرأ كما يلي : 2 تحل مكان 1 ، 1 تحل مكان 2 ، 3 تحل مكان 3

$C = (2, 3, 1)$ ويكتب هكذا : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ويقرأ كما يلي :

٣ تحل مكان ١، ١ تحل مكان ٢، ٢ تحل مكان ٣

$(1, 2, 3) = ٥$ وتكتب هكذا :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

ونقرأ كما يلي :

٣ تحل مكان ١، ٢ تحل مكان ٢، ١ تحل مكان ٣

ويعرف حاصل ضرب A بالقيام بعملية التباديل الأولى ثم تليها العملية

الثانية B .

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك فالقيام بعملية التباديل $A =$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

تم عملية التباديل $B =$

$$\text{أى أن } A = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix} = B \text{ فى هذا المثال}$$

أى $A = B$

ولكن إذا أجرينا العملية B نجد أن $B \neq A$

أى أن فى هذا المثال $A \neq B$ أى عملية الضرب هنا ليست تبديلية .

ويمكن وضع كل نواتج ضرب عناصره الممكنة فى الجدول الآتى :

⊗	١	٢	٣	٤	٥
١	١	٢	٣	٤	٥
٢	٢	١	٤	٥	٣
٣	٣	٤	١	٥	٢
٤	٤	٥	٢	١	٣
٥	٥	٣	٣	٢	١

جدول (١)

ونلاحظ في الجدول السابق ما يأتي :-

١ - توافر خاصية الانغلاق بالنسبة لعملية الضرب المعروفة أى أن حاصل ضرب أى عنصرين في الفئة سـ يكون عنصرا فيها .

٢ - توافر خاصية الدمج .

أى نجد أن $(ا ب) ح = ا (ب ح)$ وذلك بأخذ الطرف الايمن .

$$(ا ب) ح = ح (ب ح) = ح$$

ثم الطرف الايسر $ا (ب ح) = ا (ح هـ) = ح$

٣ - توافر خاصية وجود العنصر المحايد (I في هذا المثال) وله خاصية

$$ا = ا I = I ا$$

$$ب ، ب I = I ب = ب$$

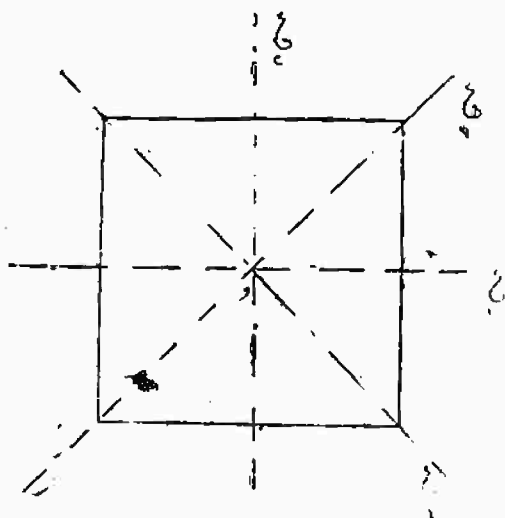
وهكذا

٤ - توافر خاصية وجود معكوس لكل عنصر من عناصر الفئة سـ

وفي هذا المثال نجد أن ا ، ب ، هـ معكوسات لنفسها ولكن ح معكوس

د ، د معكوس ح .

ثانيا : تماثل المربع .



شكل (١)

إن فكرة التماثل مألوفة عندنا جميعا . ولكن قليل من الناس الذين يدركون أن هناك جبر خاص بالتماثل . وفيما يلي نستمطى حالة محسوسة من تماثل المربع .

تتصور أن عندنا مربعا من الورق المقوى موضوعا على مستوى له محاور ثابتة . وأن مركز المربع يقع عند نقطة الأصل . وأن أحد الأضلاع يكون أفقيا من الواضح أن المربع له تماثل دوراني ، أى أن الشكل الناتج من الدوران يكون متماثلا مع الشكل الأصلي . ولتوضيح ذلك تحرك المربع الحركات الدورانية الجاسئة rigid الآتية :

د_١ = دوران الشكل مع اتجاه عقارب الساعة بزاوية قدرها ٩٠° حول المركز .

د_٢ = دوران الشكل مع اتجاه عقارب الساعة بزاوية قدرها ١٨٠° حول المركز .

د_٣ = دوران الشكل مع اتجاه عقارب الساعة ولكن بزاوية قدرها ٢٧٠° حول المركز .

كذلك نجد أن للمربع تماثل إنعكاسي أى أن الشكل الناتج من الانعكاس يكون متماثلا مع الشكل الأصلي وانرمز لهذه الانعكاسات الجاسئة بالرموز ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ ، ع_٤ حيث أن : ع_١ = إنعكاس الشكل على المحور الأفقي المار بالمركز .

ع_٢ = إنعكاس الشكل على المحور الرأسى المار بالمركز .

ع_٣ = إنعكاس الشكل على القطر الواصل من المربع الأول إلى المربع الثالث .

ع_٤ = إنعكاس الشكل على القطر الواصل من المربع الثانى إلى المربع الرابع .

وعندما يكون الشكل في وضعه الأصلي سترمز لهذا الوضع 1 وبهذا يكون عندنا الآن ثمان حركات تماثل للمربع .

وفي جبر التفاضل هذا سنمير عن القيام بحركتين متتاليتين (بعملية الضرب) أى أن عملية الضرب هنا تعنى القيام بالحركة الأولى ثم يعقبها الحركة الثانية وعلى ذلك يمكن الحصول على $ع_١ د_١$ بأنعكاس المربع على المحور الأفقى ثم دورانه بزاوية قدرها ٩٠° . فإذا وضعنا كل نواتج ضرب الحركات التى عرفناها فى جدول . كان الجدول كما يلى :

	1	د _١	د _٢	د _٣	ع _١	ع _٢	ع _٣	ع _٤
1	1	د _١	د _٢	د _٣	ع _١	ع _٢	ع _٣	ع _٤
د _١	د _١	د _٢	د _٣	1	ع _٢	ع _٣	ع _٤	ع _١
د _٢	د _٢	1	د _٣	ع _١	ع _٢	ع _٣	ع _٤	د _١
د _٣	د _٣	1	د _١	ع _١	ع _٢	ع _٣	ع _٤	د _٢
ع _١	ع _١	ع _٢	ع _٣	ع _٤	1	د _١	د _٢	د _٣
ع _٢	ع _٢	ع _٣	ع _٤	ع _١	د _١	1	د _٢	د _٣
ع _٣	ع _٣	ع _٤	ع _١	ع _٢	د _١	د _٢	1	د _٣
ع _٤	ع _٤	ع _١	ع _٢	ع _٣	د _١	د _٢	د _٣	1

جدول (٢)

ونلاحظ أنه إذا أجرينا الحركتين $ع_١ د_١$ على المربع يمكن التحقق من أن هاتين الحركتين لهما نفس نتيجة القيام بالحركة $ع_١$.

ويمكن التأكد من ذلك من الجدول حيث $ع_١ د_١ = ع_١$ (أنظر الجدول)

٢ - وبالمثل إذا قمنا بتحصيل الحركتين $د_١ ع_١$ نلاحظ أن

$$د_١ ع_١ \neq ع_١ د_١$$

ولست نتيج من ذلك أن عملية الحركة التي عندنا ليست تبدلالية ولكن يمكن التأكد من أن جميع الخواص الأخرى متوافرة مثل خاصية الانغلاق وخاصية الدمج وخاصية وجود العنصر المحايد وخاصية وجود معكوس لكل عنصر في الفئة أي أن فئة الحركات .

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, d_1, d_2, d_3, 1) = k$$

وعمليات الضرب المعرفة في هذا المثال تكون مجموعة غير تبديلية

ثالثاً - مجموعة التحويلات :

يمكن مد جبر التماثل إلى تحويلات أحادية لأية فئة من العناصر. ومع أن غالبا ما يقترح التفكير في الفئة كـ "كفراغ" (مثل مستوى أو كرة) وفي عناصرها كـ "نقط". ولكن هذا لا يتعارض مع الجبر الشكلي.

فإذا كانت فئة التعويض والتي تحدث دورانات في المستوى هي : —

س = س حقا θ - ص حقا θ
ر : ص = س حقا θ + ص حقا θ

وإذا كانت (س، ص) نقطة في مستوى. وإذا كانت $\theta = 0$ صفر فإن التحويلة السابقة تكون كما يلي:

$$\begin{aligned} s' &= s(1) - s(0) \\ s' &= s(0) + s(1) \end{aligned}$$

أى أن عندما تكون $\theta = 0$ صفر فإن النقطة (س، ص) تبقى بدون تغيير. وعلى ذلك يكون العنصر المحايد في فئة التحويلات هذه هي :

1: $\bar{m} = m \text{ حتا صفر} - m \text{ حا صفر}$
 $\bar{m} = m \text{ حا صفر} + m \text{ حتا صفر}$

ولتوليد Generate مجموعة تحويلات نعوض عن س ، ص على النحو التالي :

$$\begin{aligned} \text{س}^{\sim} &= \text{س حتا } \theta - \text{ص حتا } \theta \\ \text{ت}^{\sim} &= \text{ص}^{\sim} = \text{س حتا } \theta + \text{ص حتا } \theta \end{aligned}$$

حيث أن $\theta = \frac{\text{م ط}}{\text{ل}}$ ، ط النسبة التقريبية ، م ، ل أعدادا صحيحة .
وإذا أخذنا

$$\begin{aligned} \text{س}^{\sim} &= \text{س}^{\sim} \text{حتا } \theta - \text{ص}^{\sim} \text{حتا } \theta \\ \text{ت}^{\sim} &= \text{ص}^{\sim} = \text{س}^{\sim} \text{حتا } \theta + \text{ص}^{\sim} \text{حتا } \theta \end{aligned}$$

وهذا معناه أن :

$$\begin{aligned} \text{س}^{\sim} &= \text{س حتا } \theta - \text{ص حتا } \theta \\ \text{ت}^{\sim} &= \text{ص}^{\sim} = \text{س حتا } \theta + \text{ص حتا } \theta \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة يكون :

$$\begin{aligned} \text{س}^{\sim} &= \text{س حتا } \theta - \text{ص حتا } \theta \\ \text{ت}^{\sim} &= \text{ص}^{\sim} = \text{س حتا } \theta + \text{ص حتا } \theta \end{aligned}$$

$$\text{أى أن } \text{ت}_1 = \text{ت}_2 , \text{ت}_1 = \text{ت}_2$$

وواضح أن $\text{ت}_1 = \text{ت}_2$ فإذا كانت $\theta = 90^\circ$ كانت $\theta = 270^\circ$

$$\text{فتكون } \text{ت}_1 = \text{ت}_2$$

والجدول الآتي يبين فئة التحويلات مع عملية الضرب (ه) المعرفة سابقا .

٥	١	٢	٣	٤
١	١	٢	٣	٤
٢	٢	٣	٤	١
٣	٣	٤	١	٢
٤	٤	١	٢	٣

جدو رقم (٣)

وإذا خصنا هذا النظام وجدنا أن كل خواص المجموعة متوفرة حتى الخاصية التبديلية أى أن هذا النظام مثال لمجموعة تبديلية .

وعلى ذلك يمكننا تعريف مجموعة التحويلات ج تعريفا مجردا كما يأتي :
نعنى بمجموعة التحويلات على فراغ سه أية فئة ج أحادية التحويلات ولترمز لهذه التحويلة بالرمز ر من سه على سه بحيث أن :

- ١ — التحويلة المحايدة تكون في ج .
- ٢ — إذا كان التحويلة ت في ج ، فتكون معكوسها كذلك في ج .
- ٣ — إذا كان ت_١ ، ت_٢ في ج ، كان حاصل ضربهما كذلك في ج .
- ٤ — (ت_١ ت_٢) = ت_٣ = (ت_٢ ت_١) (ت_٣ ت_٤) .

والآن سنعطى تعريفا عاما مجردا للمجموعة :

تعريف :

- إذا كانت • عملية ثنائية على الفئة سه فان الفئة سه ، العملية • تكون مجموعة (م ، •) إذا وإذا فقط توافرت الشروط التالية :

- ١ — خاصية الانفلاق أى العملية * تكون عملية مغالقة فى الفئة سـ .
- ٢ — خاصية الدمج أى أن العملية * تكون عملية إدماجية فى سـ .
- ٣ — خاصية العنصر المحايد أى يوجد عنصر محايد للعملية * فى الفئة سـ .
- ٤ — خاصية معكوس العنصر أى يوجد لكل عنصر فى سـ معكوس تحت العملية * أى أن خواص الانفلاق والدمج ووجود العنصر المحايد ووجود معكوس لكل عنصر تسمى خواص المجموعة .

ومن الملاحظ أن الخاصية الإبدالية Commutative ليست من الخواص الأساسية للمجموعة . ولكن إذا توافرت خاصية التبديل سميت المجموعة بالمجموعة التبديلية أو المجموعة الاييلية نسبة إلى العالم الرياضى « أبول » Abol ، الذى سنتكلم عنه فى الفصل الثانى .

الايسومورفيزم (التشاكل) بين المجموعات :

يمكن تقديم فكرة المجموعات الايسومورفيه (التشاكل) أو فى بعض الاحيان تسمى (المتشابهة نظميا) بالمثال الآتى :-

فما إلى هودان أحدهما مكونا من بعض الاعداد الصحيحة م ويقابلها فى العمود الثانى ٢ أى ٢ مرفوعة إلى الاس م .

٢٢	٢
١	٠
٢	١
٠.٥٥	١ —
٤	٢
٠.٥٢٥	٢ —
٨	٣
٠.١٢٥	٣ —
١٦	٤
٠.٠٦٢٥	٤ —
٣٢	٥
٠.٠٣١٢٥	٥ —
٠	٠
٠	٩
٠	٠
إضرب	إجمع

جدول (٤)

فإذا نظرنا إلى العمودين وجمعنا المنصرين في العمود الاول

$3 + (-4) = -1$ وضربنا العنصرين المقابلين لهما في العمود الثاني
 $8 \times 0.625 = 5$. كانت الاجابة كما يلي $(-1, 0.5)$

ونجدها في الصف الثالث من العمودين وهذه صفة خاصة للمجموعات
 الايسومورفيه أو المتشاكاة أو المتشابهة نمطيا. وعلى ذلك يمكن تعريف
 المجموعات الايسومورفيه فيما يأتى :

تعريف : — تسمى المجموعتان (ق، هـ) ، (ك، #) ايسومورفينين
 إذا وإذا فقط وجد تناظر أحادى بين عناصر ق ، عناصر ك بحيث أن إذا كانت
 $a \in ق$ تناظر من $b \in ك$

، كانت $b \in ق$ تناظر من $a \in ك$

فان $1 \in ب$ تناظر من $1 \in ص$.

أى أن إذا كانت $a \in ب$ ، $b \in ص$ فان $a \in ب$ تناظر من $b \in ص$ وعلى ذلك
 يمكن أن نقول أن المجموعات الايسومورفيه تكون لها نفس التركيب الجبرى .
 مثال : إذا كانت ق هى فئة الاعداد الصحيحة ، ك فئة الاعداد الصحيحة
 الزوجية أى : $0, 2, 4, 6, 8, \dots$ — $2, 4, 6, 8, \dots$ — $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

ك : $0, 2, 4, 6, 8, \dots$ — $2, 4, 6, 8, \dots$ — $0, 2, 4, 6, \dots$
 فإذا كانت $a \in ب$ ، $b \in ص$ مع العملية * بحيث أن $a * ب = ح$
 وإذا كانت $ص$ ، $ب$ عناصر فى ك فى العملية # بحيث أن $ص # ب = ح$
 وعلى ذلك إذا كان التناظر بين $ا \in ب$ ، $ب \in ص$. فلا بد أن
 يكون صحيحا أن $ا \in ب$ إذا كان التناظر ايسومورفى .

وفعلا يكون هذا صحيحا إذا كانت العملية هى عملية الجمع العادية وليس
 صحيحا إذا كانت العملية عملية الضرب .

أى أن مع عملية الجمع تكون فئة الاعداد الصحيحة آيسومورفية مع فئة الاعداد الزوجية واسكنها لا يكونا آيسومورفيين مع عملية الضرب .

فمثلا $4 \leftrightarrow 8, 3 \leftrightarrow 6, 2 \leftrightarrow 4, 1 \leftrightarrow 3$.
ولكن (3×4) لا تناظر (6×8) .

أهمية الآيسومورفيزم (التماثل) بين المجموعات :

بناء على ما ذكر في البند السابق ، إذا استطعنا اكتشاف وجود آيسومورفيزم بين بعض المجموعات ، فالتا نستطيع أن نقول أن هذه المجموعات لها نفس التركيب الجبرى . وهذه الخاصية مفيدة جدا ، لأنها توفر جهود دراسة كل مجموعة على حدة ، ففى يكشف آيسومورفيزم بين المجموعات يكتفى بدراسة مجموعة واحدة كشال لباقي المجموعات .

وتعتبر دراسة التباديل أساسا لدراسة المجموعات المحدودة الرتب ، وتخدم كأداة أساسية فى توضيح تركيب المجموعات الآيسومورفية وعلى ذلك يمكن أن نخدم كنمط لتوحيد بعض الأفكار فى الرياضيات .

وفىما يلى سمعنى أربعة أمثلة لمجموعات مختلفة كل منها له عملية مختلفة وعناصرها غير متشابهة ، فإذا كان بين هذه المجموعات آيسومورفيزم ، تستطيع أن تقول أن المجموعات الأربع لها نفس التركيب الجبرى .

المثال الاول : مجموعة تباديل

إذا أخذنا $(1, 2, 3, 4)$ مع عملية التباديل وأخذنا الترتيب الاصلى كعنصر محايد ورمزنا له بالرمز I حيث :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 \text{ وأخذنا الترتيب الثاني } 1$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 = 1 = 1 \text{ والترتيب الثالث ب } 1$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 = 1 \text{ والترتيب الرابع ح } 1$$

$$1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ ونجد أن الترتيب الذي يليه } 1 = 1$$

وعلى ذلك يمكن وضع هذا النظام في الجدول الآتي :-

ح	ب	ا	ل	•
ح	ب	ا	ل	1
ا	ح	ب	ل	1
ا	ل	ح	ب	ب
ب	ا	ل	ح	ح

جدول (٥)

المثال الثاني : مجموعة الجذور الرابعة للواحد الصحيح :

من دراسة نظرية ديموافر والجذور النونية للواحد الصحيح نجد أنه إذا

اختير الجذر المناسب فيمكن إستعماله لتوليد فئة الجذور كاملة . وفي هذا المثال سنختار الجذور الاربعة للواحد الصحيح لتكون عناصر الفئة هي (ت ، ت^٢ ، ت^٣ ، ت^٤) حيث $T = \sqrt{-1}$ وستكون العملية هنا الضرب العادي .

	×	١	ت	١ -	ت -
	١	١	ت	١ -	ت -
ع :	ت	ت	١ -	ت -	١
	١ -	١ -	ت -	١	ت
	ت -	ت -	١	ت	١ -

جدول (٦)

المثال الثالث : مجموعة الاعداد مقياس ٤ :

إذا أخذنا في الاعتبار الفئة (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣) مع عملية الجمع مقياس (٤) فافتنا يمكن وضع المجموعة في الجدول الآتى :

	+	٠	١	٢	٣
	٠	٠	١	٢	٣
س :	١	١	٢	٣	٠
	٢	٢	٣	٠	١
	٣	٣	٠	١	٢

جدول (٧)

المثال الرابع : مجموعة التحويلات :

إذا أخذنا نفس المثال الذى ذكر سابقا في صفحة (١٠) .

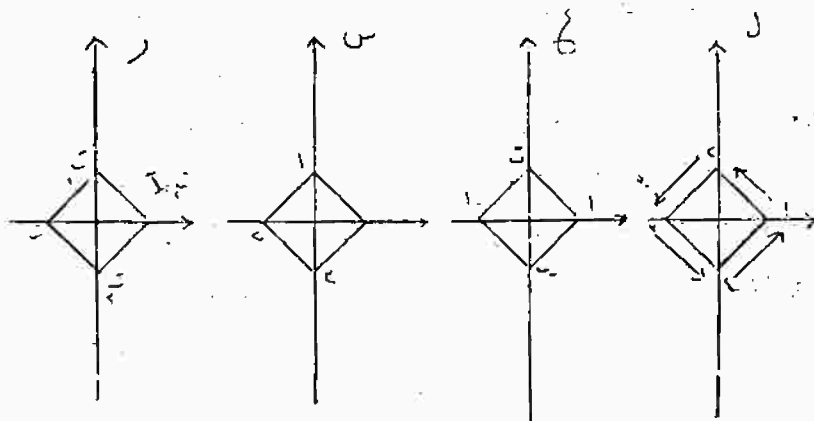
٥	١	٢	٣	٤
١	١	٢	٣	٤
٢	٢	١	٤	٣
٣	٣	٤	١	٢
٤	٤	٣	٢	١

فإن ر :

جدول (٨)

والأمثلة الأربع السابقة هي مثال لأربع مجموعات أيسومورفية وعلى ذلك فهي تمثل مجموعة واحدة من الوجوه المجردة .

ويمكن تمثيل هذه المجموعات هندسيا بدوران مربع في مستوى براوية قدرها ٩٠° في كل مرة . أنظر (شكل (٢)) .

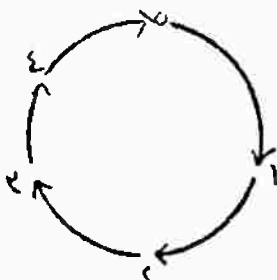


شكل (٢)

Cyclic Groups

المجموعات الدورية:

في أي مجموعة ، يمكن تعريف القوى الصحيحة a^n لعنصر a من المجموعة للأسس الموجبة والصفر والأسس السالبة كل على حدة فإذا كانت $m < n$. فإن:



رتبة المجموعة : Order of a group

رتبة المجموعة هي عدد عناصرها

وعلى ذلك فالتباديل الدورية النونية
العناصر أى التى عددها n من العناصر تكون
رتبتها n .

المجموعة الجزئية : Sub group

شكل (٢)

تسمى الفئة الجزئية H فى المجموعة G

مجموعة جزئية للمجموعة G إذا كانت H هي

نفسها تكون مجموعة مع العملية الثنائية للمجموعة G .

ففى أية مجموعة G تكون الفئة التى تتكون من العنصر المحايد فقط

مجموعة جزئية، كذلك المجموعة H كلها تعتبر مجموعة جزئية بالنسبة لنفسها
وتسمى المجموعات الجزئية غير المجموعة الجزئية H ، G مجموعات جزئية فعلية.

دليل المجموعة الجزئية فى المجموعة :

إذا كانت H مجموعة جزئية فى المجموعة G .

فإن الفئة المرتبطة اليمينية (أو اليسارية) aH للمجموعة الجزئية H هي

أية فئة aH (أو Ha) المكونة من حواصل ضرب اليمينية s (أو s أو حواصل

الضرب اليسارية) للعناصر $s \in H$ مضروبة فى عنصر ثابت a فى المجموعة G .

وعدد الفئات المرتبطة (يمينية أو يسارية) المتمايزة تسمى دليل المجموعة

الجزئية H فى المجموعة G .

وفى هذا المقام سنذكر نظرية لاجرانج دون أن نتدخل فى البرهان ولن يهـمـه

الأمر أن يرجع إلى كتب الجبر^(١).

G. Birkhoff & S. MacLane, A survey of Modern Algebra, (١)
Macmillan Company, New York, 1953, pp. 142 - 144.

كمال رياض يعقوب « الرياضيات الحديثة » الجزء الاول - دار
المعارف ، ١٩٧٣ .

معصومة محمد كاظم وآخرون « أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة »
دار المعارف ١٩٧٠ .

نظرية لاجرانج :

رتبة المجموعة المحدودة ج هي حاصل ضرب رتب كل من مجموعاتها الجزئية .

الهومومورفيزم (تماثل التركيب) :

الهومومورفيزم (أو التماثل في التركيب) لمجموعة ج على مجموعة أخرى ج' هي تحويلة أحادية القيمة س $\rightarrow$ س' تطبق على كل ج . Mapping G onto all of G'.
بحيث أن

$$(س ص) = س' ص' \text{ لكل من س ، ص في المجموعة ج}$$

وسنكتفي بهذا القدر من التعريف بالمجموعة ونظريتها . ومن يريد الاستزادة في دراسة جبر المجموعات يمكن الرجوع إلى عدة كتب، نذكر بعضها في المراجع، في آخر البحث .

الفصل الثاني

نشأة وتطور نظرية المجموعات

في هذا الفصل ، سنقوم بدراسة سريعة لنشأة وتطور نظرية المجموعات ، لنرى ما ساهمت به العقول البشرية في تطور هذا المفهوم المجرد ، الذي ظهرت له تطبيقات شتى .

ويعتبر الرياضى الفرنسى فيتا (Francois Viete) (١٥٤٠ - ١٦٠٣) أول من وضع أسس التركيب المجرد الحديث لعلم الجبر . ولكن كان على هذه الأسس أن تبقى حوالى المائتين عاما قبل أن يحىء أبلى Abel سنة ١٨٢٤ وجالوا Galois سنة ١٨٣١ ويقدموا للعالم فكرة المجموعة أى أن بشائر هذه النظرية ابتدأت مع فيتا ولكنها لم تصبح نظرية كاملة إلا بعد حوالى مائتين عاما بفضل جالوا .

ومع أن هذا المفهوم يعتبر حديثا نسبيا إلا أن بذوره كانت قديمة ، فالمجموعة الجمعية مقياس (٢٤) عرفت واستعملت بواسطة المصريين والبابليين القدامى في حساب الساعة . كما أن بعض المختصين في تاريخ الرياضيات أمثال فان دير فاردين^(١) وسبارير^(٢) وميللر^(٣) يرون أن طريقة المصريين القدماء في معالجة مسائل الكسور

(١) Van Der Waerden, B.L. Science Awakening, Noordhoff Ltd. Groningen, Holand, 1954.

(٢) Speiser, A, Die Theorie der gruppen Endlicher Ordnung, Basel, Switz, 1955.

(٣) Miller, G. A, Group Theory in the History of Mathematics Scientific Monthly, 47 : 24 - 27.

الاعتيادية بواسطة طريقة الكسور التي بسطها الواحد ، هي طريقة مبنية على مفهوم المجموعة .

وفيما يلي سنتناول باختصار دراسة تاريخ نظرية المجموعات . وسنرى كيف أن معظم المفاهيم الأساسية في هذه النظرية قد ظهرت أثناء القرن التاسع عشر ، وكيف أن في أواخر القرن التاسع عشر لم تكن هذه النظرية قد درست وفُهِت في مجال الرياضيات فقط ، بل كانت قد استعملت كذلك في حل مشكلات العالم الفيزيقي .

ومع أن معظم أفكار نظرية المجموعات جاءت من مصادر مختلفة ومتشعبة وغير مترابطة ، ولكنها أخيرا نظمت وتكاملت مع بعضها بواسطة رياضي القرن التاسع عشر في فئة منتظمة من المفاهيم والنظريات وأصبحت بذلك أساسا للنظرية التي نعرفها الآن .
وسنتناول فيما يلي :

أولا - ما ساهم به الرياضيون قبل القرن التاسع عشر :

عرفت بعض مكونات المجموعة وكذلك بعض الخواص التي تتميزها قبل أن يعرف مفهوم المجموعة صراحة ، ولكن مع ذلك عرف واستعمل ضمينا . ولقد ساهم بعض الرياضيين في تطوير بعض مفاهيم هذه النظرية ، إلا أنهم لم يعرفوا اصطلاح المجموعة في ذلك الوقت حيث أن المفهوم لم يكن قد اتضح بعد ، ولكن مع ذلك يرجع إلى هؤلاء العلماء الفضل في التمهيد لبعض أساسيات نظرية المجموعات ففي أثناء القرن السابع عشر ، كان من الواضح لهؤلاء الذين يشتغلون بالجذر النوني للواحد الصحيح ، أن هذه النون من العناصر تكون مجموعة دورية ضربية وأن الجذور النونية البدائية يمكن استعمالها كمولدات للمجموعة . كما يوجد مثالا آخر على استعمال نظرية المجموعات على مستوى شبه رسمي وهو في برهان أويلر (١٧٦٠ - ١٧٦١) في تعميمه لإحدى نظريات فرمات Fermat وهي التي تنص على أن :

والاعداد الطبيعية التي ليست أكبر من m والتي تكون أوليه بالنسبة للعدد m تكون مجموعة أييلية بالنسبة للضرب مقياس (m) ، ،

وكان المثال الذي استعمله في برهانه مثال هام لمجموعة تبديلية محدودة وسنوضح هذه الفكرة في المثال الثاني :

نفرض أن العدد $m = 35$ هو حاصل ضرب عددين أولين فإذا كانت $m = 35 = 5 \times 7 = 7 \times 5 = 5 \times 7$.

وإذا رتبنا كل الاعداد الصحيحة من ١ إلى ٣٥ في صفوف وأعمدة كما في شكل (٤) ثم حذفنا مضاعفات العددين ٥ ، ٧ وأعدنا كتابة الاعداد ثانياً بعد الحذف كما في الشكل (٥) .

٤	٣	٢	١	٥	٤	٣	٢	١
٩	٨	١٢	٦	١٠	٩	٨	٧	٦
١٩	١٣	١٧	١١	١٥	١٤	١٣	١٢	١١
٢٤	١٨	٢٢	١٦	٢٠	١٩	١٨	١٧	١٦
٢٩	٢٣	٢٧	٢٦	٢٥	٢٤	٢٣	٢٢	٢١
٣٤	٢٣	٣٢	٣١	٣٠	٢٩	٢٨	٢٧	٢٦
٤٠	٣٤	٣٨	٣٦	٣٥	٣٤	٣٣	٣٢	٣١

١ - ج = ٤

٤	٣	٢	١	٥	٤	٣	٢	١
٩	٨	١٢	٦	١٠	٩	٨	٧	٦
١٩	١٣	١٧	١١	١٥	١٤	١٣	١٢	١١
٢٤	١٨	٢٢	١٦	٢٠	١٩	١٨	١٧	١٦
٢٩	٢٣	٢٧	٢٦	٢٥	٢٤	٢٣	٢٢	٢١
٣٤	٢٣	٣٢	٣١	٣٠	٢٩	٢٨	٢٧	٢٦
٤٠	٣٤	٣٨	٣٦	٣٥	٣٤	٣٣	٣٢	٣١

١ - د = ٤

شكل (٥)

شكل (٤)

وعلى ذلك يمكن تعريف دالة أويلر — التي يرمز لها بالرمز ϕ وهي في هذا المثال $\phi(m) = \phi(35) = \phi(7) \phi(5) = 6 \times 4 = 24$ — بأنها عدد الاعداد الصحيحة الموجبة التي أقل من m وتكون أولية بالنسبة للعدد m . وفي هذه الحالة :

$$\phi(m) = \phi(35) = 6 \times 4 = 24 = (1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7}) =$$

وهو عدد الاعداد الصحيحة الموجبة في المصفوفة الثانية (شكل ٥) والتي فيها

$$ل - ١ = ٤، ع - ١ = ٦ .$$

ونظرية أويلر تنص على أن :

$$\phi(n) - ١ \text{ يقبل القسمة على } م \text{ حيث } ١، م أوليتين بالنسبة لبعضهما$$

ويعنى هذا في هذا المثال أن : $٢٤١ - ١$ يقبل القسمة على ٣٥ بشرط عدم وجود عامل مشترك بين ١، م

فاذا كانت $٢ = ١$ فان نظرية أويلر تؤكد على أن :

$$٢٤٢ - ١ \text{ تقبل القسمة على } ٣٥ . \text{ وهذا صحيح لأن } \frac{١ - ٢٤٢}{٣٥} = ٤٧٩٣٤٩$$

وللبرهنة على هذه النظرية استخدم أويلر مصفوفة كالمصفوفتين في شكل (٤)،

شكل (٥) وعرض فيها عناصر المجموعة الضربية (مقياس م) .

وفي سنة ١٧٧٠ وضع أويلر طريقة جديدة لحل معادلة الدرجة الرابعة (مختلفة عن طريقة فرارى) . ولكنه لم يوفق فيما كان يأمل فيه ، وهو الوصول لحل عام لكثيرة الحدود بطريقة ماثلة . وفي نفس السنة فكر لاجرانج Lagrange في حل معادلة كثيرة الحدود العامة بمقارنة الحلول المعروفة لمعادلات الدرجة الثانية والثالثة والرابعة . وقد لاحظ ان في كل حالة من هذه الحالات الثلاث حدث اختصار معين حول المعادلة إلى معادلة أقل منها في الدرجة . ولكن عندما حاول لاجرانج اختصار معادلة الدرجة الخامسة ، حدث ان تحولت هذه المعادلة إلى معادلة درجتها أكبر بدلا من أصغر . ومع أن لاجرانج لم ينجح في تحقيق هدفه الاصلى ، الا أن طريقته في معالجة المسألة كانت باستعمال تباديلات جذور المعادلة ، وقد اكتشف مفتاح نظرية مجموعات التباديل متضمنة الخاصية التي ذكرت آنفا — والتي تسمى الآن بنظرية لاجرانج — وفيما يلي نص نظرية لاجرانج :

« رتبة كل مجموعة تبديل من الدرجة n تقسم رتبة مجموعة متماثلة Symmetric من نفس الدرجة ، .

بالإضافة إلى ذلك ، فقد بحث لاجرانج في المجموعة الثمانية octic group من الدرجة الرابعة ، وفي المجموعات الدورية وغير الدورية من الرتبة الرابعة ومن الدرجة الرابعة .

كما ساهم رافيني P. Ruffini (١٧٦٥ - ١٨٢٢) بنظرية هامة أخرى في نظرية المجموعات وهي الخاصة بما يأتي : —

ان رتبة المجموعة تقبل القسمة على رتبة كل مجموعاتها الجزئية ، ولكن لا يوجد دائماً مجموعات جزئية للمجموعة بحيث ان رتبة هذه المجموعات الجزئية تكون مقسوم عليه اختياري لرتبة المجموعة .

كما صنف رافيني مجموعات التباديل ولكن اصطلاحاته لا تستعمل في وقتنا

ثانياً - ما ساهم به الرياضيون في القرن التاسع عشر :

من علماء الرياضيات الذين مهدوا لهذه النظرية سيرفوا F. Servois فقد أدخل لأول مرة سنة ١٨١٤ مصطلح قانون التبديل Commutative law. كما يرجع الفضل للرياضي العظيم جاوس K. F. Gauss (١٧٧٧ - ١٨٥٥) لاستعماله مفهوم المجموعات الدورية للتباديل . وكذلك في ادخال مصطلح المقياس modular وكذلك الرمز الخاص بالمقياس $(\equiv)$ والتي تستعمله إلى وقتنا هذا كما درس جاوس المجموعة الجمعية واستعمل الصفر كعنصر محايد جمعي .

وقد أضاف إلى نظرية المجموعات اضافات هامة عالمان رياضيين عبقرين لم يهلهما القدر فكانا في زهرة الشباب ، هذين العالمين هما ابل N. Abel (١٨٠٢ - ١٨٢٩) وجالوا E. Galois (١٨١١ - ١٨٣٢) وقد بنيا ههلهما على أبحاث لاجرانج .

ولقد عالج د أبيل ، المشكلة العامة وهى محاولة حل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة النونية بمحاولة حل المعادلة من الدرجة الخامسة . وفى الحقيقة انه اعتقد انه نجح وأرسل حله إلى أحد الرياضيين فى الدانمرك . ولكنه اكتشف بعد ذلك انه أخطأ . ولكن هذه التجربة الحاطنة جعلته يتساءل هل من الممكن وجود حل جبرى عام . ولقد نجح د أبيل ، فى البرهنة على انه لا يمكن حل معادلة كثيرات الحدود العامة جبريا إذا كانت $n > 4$ ومع ذلك فلقد شعر بأنه لم يحقق أهدافه ، وهى :

- ١ — إيجاد كل المعادلات من أى درجة معلومة والى يمكن حلها جبريا .
- ٢ — تحديد إذا كانت أى معادلة معلومة لها حل جبرى أو ليس لها حل جبرى .

ولقد أثبت د أبيل ، انه لا يوجد حل جبرى لمعادلة الدرجة الخامسة وذلك بالبرهنة على أن المجموعة المتماثلة من الدرجة الخامسة لا تحتوى على أى فئة جزئية ذات دليل (خمسة) ، ما عدا المجموعة المتماثلة من الدرجة الرابعة .

ولقد كان من حسن الحظ أن ينشر مبكرا برهان د أبيل ، الذى استعمل فيه المجموعات التباديلية — وأن هذا البرهان يسترعى انتباه وتفكير جالوا وقد استطاع د جالوا ، أن يعطى إجابات كاملة على التساولين اللذين أثارهما د أبيل ، وفى سنة ١٨٣١ برهن جالوا على أن : —

معادلة كثيرة الحدود يمكن حلها إذا وإذا فقط كان فى الامكان . حل مجموعتها على حقل معاملاتها .

وتعرف المفاهيم المرتبطة بهذه النتيجة عادة بنظرية جالوا ولقد استعمل د جالوا ، فى بحثه فكرة المجموعات المتشاكلية أو الاسبومورفية كما كان أول من أثبت أهمية المجموعات الجزئية اللامتناهية ، ومجموعات العامل . Factor groups

كما كان له الفضل في ابتكار تطبيقات مبتكرة وهامة للمجموعات المحدودة في الجبر كما وضع أساس قابلية حل المعادلات الجبرية بواسطة عمليات قياسية . rational operations واستخراج الجذور .

ومن المعروف أن « جالوا » هو أول من استعمل اصطلاح المجموعة من وجهة النظر المجردة ، كما تستعمل اليوم .

ولقد قام جالوا كذلك بأبحاث في بعض الموضوعات مثل مجموعات التحويل وأوجد المفاهيم الآتية - مجموعات خارج القسمة Quotient groups المجموعات الجزئية اللا متغيرة والفئات المرتبطة التبادلية واليسارية .

ومع أهمية وأصالة أبحاث جالوا ، فإنها لم تلقى فيها كبراً من معاصريه من الرياضيين . ولذا لم تنشر إلا بعد موته بعدة سنوات .

وفي حوالي منتصف القرن التاسع عشر درس كوشى A. L. Cauchy (١٧٨٩ - ١٨٥٧) بعض الموضوعات مثل التباديل الدائرية وطريقة تحويل مجموعات التباديل كما بحث في ضرب المجموعات المتعدية من الدرجة ٦ والرتبة ١٢

ونشرت هذه الأبحاث في الفترة من ١٨٤٠ - ١٨٦٠ في سنة ١٨٤٤ نشر عمله الأول الخاص بتحويل التبادل . وفي هذا البحث توقع كوشى حالة خاصة من نظرية Sylow وبالإضافة إلى ذلك بحث في الشكل الكامل للمجموعة الدورية . ذات الرتبة التوتية كما أدخل مفهوم الفئة المرتبطة المزدوجة double coset وفي سنة ١٨٥٤ نشر كايلى A. Cayley (١٨٢١ - ١٨٩٥) بحثاً بعنوان :

« دراسة لنظرية المجموعات على أساس المعادلة الرمزية $\Theta^n = 1$ » .

وهذه النظرية هامة حيث أنها أعطت أول تعريف للمجموعة المحدودة المجردة كما أعطت النتيجة التي تسمى الآن بنظرية كايلى Cayley وهي تنص على : « كل مجموعة محدودة تكون أيسومورفية لمجموعة تبادلية منتظمة » .

وفي سنة ١٨٧٠ نشر جوردان C. Jordan بحثه الخاص بمجموعات التعميض، وكان بحثا رائعا، جمع فيه نتائج أبحاث لاجرانج ورافيني وأبل وجالوا بالإضافة إلى أبحاثه الخاصة به.

كذلك ساهم كرونيكر L. Kronecker (١٨٢٣ - ١٨٩١) بأعمال قيمة على المجموعات وخصوصا تعريف المجموعه الابيلية المحدودة.

ويعتبر هامان W. R. Hamilton (١٨٠٥ - ١٨٦٥) مثالا جيدا للرياضي عظيم اشتغل بالمجموعات، ولكن لم تتضح عنده دلالة مفهوم المجموعة، ففي محاضراته عن الرباعيات Quaternions والتي نشرت ١٨٥٣ قدم لأول مرة اصطلاح وقانون الدمج associative law وفي سنة ١٨٥٦ قدم ثانية موضوع الرباعيات في عمل له بعنوان نظام جديد لجذور «الواحد الصحيح».

A New System of Roots of Unity .

وقد مهد مفهوم الرباعيات للمثال الخاص بالمجموعة غير التبديلية للضرب كما أخذ في اعتباره العلاقات بين المجسمات المنتظمة والمجموعات.

وفي أواخر القرن التاسع عشر ظهر كثير من الجديد في نظرية المجموعات بجانب حدوث تطور في كثير من المفاهيم التي كانت موجودة فعلا في سنة ١٨٦٧ نشر جوردان M. E. C. Jordan (١٨٣٨ - ١٩٢٣) مقالته الأولى في المجموعات ذات الرتب اللانهائية. وأدخل اصطلاح طبقة Class مجموعة التباديل. كما قدم نظرية تبرهن على ثبات عوامل تركيب المجموعة وفي سنة ١٨٧٠ نشر كتابه بعنوان:

«بحث في التعميزات والمعادلات الجبرية».

لخص فيه معظم ما كتب حتى هذا التاريخ. كما عمل بعض الاعمال الاصلية فيما يسمى الآن بالمجموعات المجردة. وقد قام جوردان بعمل أول قائمة شاملة للمجموعات البدائية Primitive groups حتى درجة ١٧ ولكن القائمة لم تكن كاملة.

كما ساهم ماثيو E. L. Mathieu (١٨٣٥ - ١٨٩٠) في تطور هذه النظرية فقد اكتشف مفهوم مجموعات الضرب المتعدية Multiply transitive groups كما ابتكر ما يعرف الآن بمجموعات ماثيو Mathieu groups وهي خاصة بالمجموعات المتعدية من درجة ١٢ ، ٢٤ وكذلك أثبت وجود نظام لانتهائى لمجموعات متعددة ثلاثية . من درجة $q + 1$ ورتبة $q (q - 1)$.

infinite system of triply transitive group.

وفي سنة ١٨٧٢ نشر L. Sylow (١٨٣٢ - ١٩١٨) ثمانية نظريات هامة تسمى باسمه . وتعتبر هذه الاعمال استمرارا لاجمال جالوا وبعض هذه النظريات يمكن تلخيصها باستعمال المصطلحات الحديثة فيما يلي :

١ - إذا كانت المجموعة G من الرتبة $n = |G|$ حيث q لا تقسم n ، q عدد أولي . فإن G تحتوي على مجموعات جزئية من رتبة q حيث $1 = 1, 2, 3, \dots, m$ ، وأن كل مجموعة جزئية من رتبة q حيث $1 = 1, 2, 3, \dots, (m - 1)$ تكون مجموعة جزئية معتادة normal لمجموعة جزئية واحدة على الأقل من الرتبة q .

٢ - في مجموعة محدودة G ، فإن المجموعات الجزئية المتساوية Sylow تكون مترافقة Conjugate .

٣ - عدد مجموعات سيلو الجزئية q لمجموعة محدودة G تكون على صورة $1 + k$ وتقسم رتبة G .

وقد طبق نظرية المجموعات في العالم الفيزيقي ثلاثة علماء أولهم فيليكس كلاين سنة ١٨٧٢ في برنامجيه المسمى ببرناج إيرلانجر والذي اعتبر فيه الهندسة كسلسلة من المسائل في نظرية المجموعات وقد كتب مجموعة أفكاره في كتاب نشر سنة ١٨٨٤ .

وقد استعمل بوانسكاريه H. Poincaré (١٨٥٤ - ١٩١٢) ثانياً هؤلاء العلماء بعض المفاهيم الأساسية التي وضعها كلاين في اثبات أن هندسة اقليدس مؤسسة على مفهوم المجموعات ونشر ذلك سنة ١٨٩٨ .

وكان ثالث هؤلاء العلماء هو دلي ، Sophus "Lie" (١٨٤٢ - ١٨٩٩) فقد استخدم بعض المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات ليحل بعض مشكلات الفيزياء وذلك في مجلداً من ثلاث أجزاء أثناء ١٨٨٨ - ١٨٩٣ وقد استعمل اللاتغير invariance تحت مجموعات التحويل المستمر ، في حل مسائل المعادلات التفاضلية وكان هذا العمل معتمداً على نظريته الخاصة بمجموعات التحويلات المستمرة وغير المستمرة .

وقد ناقش ديديكند R. Dedekind (١٨٣١ - ١٩١٦) في مجلة علمية أمريكية^(١) سنة ١٨٩٨ خواص المجموعات الهاميلتية والتي اشتقت من رباعيات هاملتن ، وأثبت أن المجموعة الضربية للوحدات الرباعية Quaternionic units تكون مجموعة رتبها ٨ كما أثبت ديديكند أن هذه المجموعة مثال على مجموعة غير أبيلية .

وفي سنة ١٨٩٦ قدم فروبنوس G. Frobenius (١٨٤٩ - ١٩١٧) لأول مرة مفاهيم العنصر المميز Characteristic element والمجموعات الجزئية المميزة . Characteristic subgroups وكان من أوائل الذين بحثوا في مجال المصفوفات . كما قام أيضاً بدراسة Commutator subgroups.

كما اشتهر العالمين كيركان T.P. Kirkman (١٨٠٦ - ١٨٩٥) وبرنسايد W. Burnside (١٨٥٢ - ١٩٢٧) بأبحاثهما في نظرية المجموعات فقام كيركان سنة ١٨٥٨ بتقديم ورقة خاصة بتجديد مجموعات التباديل ونال عليها جائزة من أكاديمية العلوم بباريس وقام برنسايد بأبحاث متقدمة في مجال المجموعات

ذات الرتبة المحدودة ودرس التباديل الزوجية والفردية . وعمل على مميزات المجموعة Group characteristics ولقد ابتكر هذان العالمان مجال هام للمجموعات المحدودة يعرف بنظرية مجموعات التمثيل

Group representation theory

وسنكتفي بهذا القدر عن نشأة وتطور مفاهيم نظرية المجموعات وعن العلماء الذين ساهموا في التطوير وأن كنا لم نذكر إلا بعضاً منهم وهناك مراجع كثيرة يمكن الرجوع إليها لارتشاف مزيد من المعلومات حول هذا الموضوع لمن يرغب في الاستزادة .

الفصل الثالث

مفهوم المجموعة في الهندسات المختلفة

تسلكنا في الفصل الأول عن جبر المجموعات . وفي هذا الفصل سنبين وجود مفهوم المجموعة وخواصها في علم الهندسة .

فإذا كانت $\{ \rho_1 \}$ هي فئة كل الدورانات لدائرة في مستوى حول مركزها حيث يأخذ الدليل ρ كل القيم بحيث $\rho > 1$. وحيث ρ تدل على الدوران خلال الزاوية $\rho \times 360^\circ$ وإذا عرفنا العملية $\rho \circ \sigma$ بحيث أن $\rho \circ \sigma = \rho + \sigma$ حيث أن $\rho + \sigma$ تدل على حاصل جمع ρ, σ (مقياس ρ) .

(وهذا يعنى أنه إذا كانت $\rho + \sigma \leq 1$ فأنتا نعوض عن $\rho + \sigma$ بالمقدار $\rho + \sigma - 1$ وعلى ذلك إذا كانت $\rho + \sigma = 1$ ، $\rho + \sigma = 0$ فان $(\rho + \sigma = 0)$.

وهندسيا ، فان $\rho \circ \sigma$ تعنى دوران الدائرة خلال زاوية قدرها $\rho \times 360^\circ$ متبوعة بدوران آخر خلال زاوية قدرها $\sigma \times 360^\circ$ (أو بالعكس) وتكون النتيجة كدوران واحد مقداره $\rho + \sigma$ حيث ρ هو العدد $\rho + \sigma$ (مقياس ρ) ونجد أن تجمع $\{ \rho \}$ مع العملية التي عرفناها آنفا تكون مجموعة تسمى مجموعة دورانات دائرة .

وإذا فرضنا أن J ترمز إلى فئة كل التحويلات

$$\begin{aligned} (1) \quad & \{ \text{س} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ص} + \text{ه} \} \\ & \{ \text{ص} = \text{ح} + \text{س} + \text{ز} + \text{و} \} \\ & \text{حيث (ا، ب، ح، ز، ه، و) } (\exists \text{ ر}) \end{aligned}$$

فى المستوى الاحداثى حيث كل تحويل تحول أى نقطة (س، ص) إلى نقطة (س'، ص') بحيث يرتبط إحداثياها بأحداثى (س، ص) بالمعادلتين (١) بشرط أن $\text{ا} \neq \text{ب} \neq \text{ح}$.

وإذا رمزنا للتحويلتين بالرمزين $\text{ت}_\text{ه}$ ، $\text{ت}_\text{و}$ فإن $\text{ت}_\text{ه} \text{ت}_\text{و}$ رمز إلى التحويله التى تحصل عليها وذلك بالقيام أولا بالتحويله $\text{ت}_\text{و}$ ثم تتبعها بالتحويله $\text{ت}_\text{ه}$ وبالجبر البسيط يمكن رؤية أن التحويلتين المرتبطتين هكذا تكافئان تحويله واحده تكون معالماتها ا، ب، ح، ز، ه .

وتسمى المجموعة المكونه من الفئة ج والعملية التى عرفناها فى هذا البند بالمجموعة الأفينية للمستوى Affine group of the plane وبدراستها نجد أنها مجموعة غير أبيلية.

يتضح لنا مما سبق وجود مجموعات فى الهندسة مثل مجموعة دورانات الدائرة والمجموعة الأفينية لتحويلات المستوى ويمكن مد المجموعه الأولى إلى مجموعة الدورانات حول نقطة ثابتة للمستوى بأكمله. وهذه المجموعه مثال آخر لمجموعه تحويلات.

وسنعرف فيما يلى مجموعة التحويلات بطريقة عامة مجردة أكثر مما ذكر فى الفصل الأول.

تعريف (١):

إذا كانت سه فئة ما. فإن تحويله الفئة سه هى راسم فوقى للفئة سه على سه وهى أحادية التناظر أى (١ - ١).

فإذا كانت $S = \{ \}$ تدل على الراسم ، فإن كل عنصر من عناصر S يكون له صورة واحدة وواحدة فقط من عناصر S .

ويترتب على هذا التعريف أن التحويلة دائماً يكون لها معكوس ويمكن التعبير عن المعكوس بما يأتي :

$$S^{-1} = \{ \} \quad (\text{وهذه إحدى خواص المجموعة})$$

تعريف (٢) :

إذا كانت $D = \{ \}$ ، $H = \{ \}$ (S) تحويلات للفئة S فإن $D \rightarrow H$ تعنى التحويلة $\{ (S) \}$ ، حيث $D \rightarrow H$ يسمى حاصل ضرب $D \rightarrow H$.

تعريف (٣) :

إذا كانت T هي فئة تحويلات تجمع S بحيث أنه بدلالة العملية الثنائية التي عرفناها في تعريف (٢) فإن الفئة T تكون مجموعة ، وعلى ذلك نسمى T مجموعة تحويلات .

وعلى ذلك يمكن البرهنة بسهولة على أن فئة التحويلات T لتجمع S يتوافر فيها خواص المجموعة وهي :

١ - حاصل ضرب أى عنصرين في T يكون أيضاً عنصر في T .

٢ - التحويلة المحايدة $S = \{ \}$ (S) عنصر في T .

٣ - معكوس عناصر T يكونوا عناصر في T .

٤ - قانون الدمج يتحقق .

تطبيق فكرة المجموعة في الهندسة :

عند تطبيق ما سبق على الهندسة فإن الفئة S المذكورة في التعاريف السابقة تكون نوعاً من الفراغ Space والاصطلاح "فراغ" له معنى واسع الآن في الرياضيات. فالفرق بين الفئة والفراغ ليس كبيراً . فالفراغ ببساطة فئة أضيف

لها بعض الخواص المميزة . ومن هذه الخواص وجود دالة مترية أو دالة مسافة
وسنوضح هذه الفكرة في بعض الفراغات :

فراغ الهندسة التحليلية :

إذا أخذنا في الاعتبار مستوى الهندسة التحليلية . وإذا نظرنا إليه كفضة فإن
مستوى الهندسة التحليلية يكون هو التجمع لـ شكل الثنائيات المرتبة (س ، ص)
من الأعداد الحقيقية س ، ص . أما إذا نظرنا إليه كفرغ ، فهو فضاء سـه مع
دالة المسافة الفياغورية ف (ق ، ك) والتي تعبر عن المسافة بين ق ، ك فإذا
كانت ق هي النقطة (س_١ ، ص_١) ، ك هي النقطة (س_٢ ، ص_٢) فإننا يمكن
أن نعبر عن المسافة بما يأتي :

$$ف(ق، ك) = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2} \quad (٢)$$

وكل الخواص الأخرى للمستوى التحليلي تأتي من هذا التعريف .

وبالمثل لإيجاد الهندسة التحليلية ذات الثلاث أبعاد ، تبدأ بفضة كل الثلاثيات
المرتبة (س ، ص ، ي) للأعداد الحقيقية س ، ص ، ي .

ولتعريف هذا الفراغ ، نضيف دالة مسافة مشابهة للدالة (٢) . وبالمثل
يمكن عمل نفس الخطوات بالنسبة للفراغات ذات الأربع أبعاد والخمس أبعاد
وعامة للهندسة التحليلية ذات النون من الأبعاد (النونية الأبعاد) .

الأنواع الأكثر عمومية للفراغ :

يعتبر الفراغ التوبولوجي من أكثر أنواع الفراغات عمومية . فإذا حللنا
الآثر الذاتي لإضافة دالة المسافة (٢) لتجمع أزواج الأعداد الحقيقية (س ، ص)
فإننا نرى أن ذلك يؤدي إلى تعيين موقع للأزواج (س ، ص) بالنسبة
لبعضها بعضا . فمثلا إذا كانت ق ، ك ، ع نقاطا ، ف (ق ، ك) = ٢ ،
ف (ق ، ع) = ٣ فإننا نعتبر ك أقرب للنقطة ق من النقطة ع للنطقة ق . وحيثما

تقل المسافة بين النقط بدلالة الترتيب بواسطة قيمة الأعداد الحقيقية ف (ق ، ك)
فاننا نعتبر أنها تقرب أكثر لتأخذ نفس الموقع في مستوى الهندسة التحليلية .

إذا اعتبرنا أن موقع عناصر فئة ما أساس ، فاننا نصل لفكرة الفراغ
التوبولوجى (وقدما سى جاوس Gauss التوبولوجى بعلم تحليل الموقع
position analysis) ولكن توجد طرقا أخرى لتعريف الموقع النسبى غير
طريقة دوال المسافة فمثلا إحدى الطرق هى تعيين جوار neighborhood لكل
عنصر فى الفئة سم التى نريد أن نعمل منها فراغا .

فى فئة الأعداد الحقيقية المرتبة ر إذا كانت $u \in R$ فإن لى عديدين
حقيقيين a, b بحيث أن :

$$a > u > b \text{ فاننا نسمى الفئة } (a, b) \text{ س } | \text{ س } > a > b$$

جوار للعنصر u فى R .

وهذه الأفكار مثل نهاية المتابعة مثلا يمكن تعريفها مباشرة بدلالة هذا
الجوار المعرف فى (٣) .

الخواص والأشكال الهندسية :

نرى مما سبق أن للحصول على فراغ من فئة من العناصر ، نضيف بعض
الخواص المعينة التى بطريقة أو بأخرى تتضمن الأفكار الهندسية للموقع فى الفئة
ويمكن أن تسمى الخواص المضافة أو العلاقات والخواص أو العلاقات المعرفى
منها أنها هندسية . وعلى ذلك فالمسافة بين النقط كما هى معرفة فى (٢) تكون
خاصية هندسية . وكذلك يمكن اعتبارها علاقة بين ق ، ك . وبالمثل فالتوازى
والتمامد و وغير ذلك تعتبر علاقات هندسية بين المستقيمات .

وعادة ما تسمى عناصر الفراغ نقطا ، والفئات الخاصة المعرفة بدلالة

الخواص الهندسية تسمى أشكالاً هندسية . فثلاً الأزواج المرتبة (س ، ص) الخاصة بمستوى الهندسة التحليلية تسمى نقاطاً والفئات :

$$\{ (س، ص) \mid (س - س_1) + (ص - ص_1) = 2 \}$$

حيث ر عدد حقيقي ، تسمى دوائر مركزها (س_١ ، ص_١) ونصف قطرها ر . والخواص التي تعرف بدلالة فئات فقط ، مثل الأعداد الكاردينالية لا تعتبر عادة هندسية (ما لم تكن مرتبطة بخاصية هندسية) . وتجمعات النقاط الاختيارية والتي لا تكون معرفة بدلالة خواص هندسية تسمى فئات من النقاط أو فئات فقط .

للاهمغرات الهندسية . . . Geometric Invariants

إذا كانت سه فراغا ، خ خاصية هندسية أو علاقة للفراغ سه وكانت تحويلة للفراغ سه . مثلاً سه ربما تكون فراغ مستوى هندسة تحليلية وتكون خ دالة مسافة (٢) وتكون دوران سه حول النقطة (. ، .) وتكون دوران سه حول النقطة (. ، .) .

$$\text{ف تكون ف (ق ، ك) = ف (ت (ق) ، ت (ك)) .}$$

(المسافة بين نقطتين تكون هي نفسها المسافة بين صورتيهما بواسطة التحويلة ت) .

ونعبر عن هذه الحقيقة الأخيرة بأن نقول أن الخاصية خ لا متغير تحت التحويلة ت .

ومن الناحية الأخرى ، مع نفس الفراغ سه ولكن خ في هذه الحالة ترمز إلى علاقة التعمد بين المستقيمت وإذا كانت تحويلة أفينية ، فإننا نجد عامة أنه عندما تكون المستقيمت ل_١ ، ل_٢ متعامدة — فليس صحيحاً أن تكون

ت (ل_١) ، ت (ل_٢) متعامدة أى أن التعماد عادة لا يكون لا متغير Invariants تحت التحويلة الأفينية .

وإذا كانت الخاصية χ لا متغير تحت كل التحويلات لمجموعة T من تحويلات الفراغ S ، فالتناظر يسمى χ لا متغير للفراغ S تحت T أو نقول أن الخاصية χ لا متغير T للفراغ S ، فمثلا إذا كانت T هي مجموعة تحويلات أفينية لمستوى الهندسة التحليلية S ، فن السهل أن نبرهن على أن توازى المستقيمات لا متغير T للفراغ S .

وتبعا لوجهة النظر هذه ، والتي عبر عنها فيليبس كلاين في برنامج الذي القاه في إيرلانجر بألمانيا سنة ١٨٧٢ فإنه يمكن التسليم عن هندسة T للفراغ S على أنها دراسة خواص الفراغ وأشكاله اللامتغيرة تحت T . أى أن هندسة T للفراغ S هي دراسة اللامتغيرات T للفراغ S .

ولقد كان لتطبيق فكرة كلاين في تصنيف الهندسات أهمية ذات دلالة أكثر من أية نظرية من النظريات الخاصة .

وفيما يلي سندرس بعض الهندسات المختلفة من وجهة النظر هذه :

أولا - الهندسة الاقليدية :

يمكن النظر إلى الهندسة الاقليدية على أنها مجموعة تحتوي على عدد لا نهائى من التحويلات . وهذه الهندسة تحتوي على متساويات القياس للمستوى أو بلغة الهندسة الابتدائية تحتوي على تحويلات بحيث يكون المستوى مطابقا لنفسه تحت هذه التحويلات ويمكن أن تكون هذه التحويلات مركبة من إزاحات دورانات جاسة أو إ انعكاسات .

كما تحتوي هذه الهندسة أيضا على مجموعة أخرى تتكون من تحويلات التشابه ، في الفراغ وهذه التحويلات أحادية وتتكون من ضرب كل المسافات

في معامل ثابت كـ . بحيث أن $K < 0$ ، (تسمى ك عامل التناسب) ويمكن توضيح ذلك بدراسة الخواص الاشكال التي تدرس في هندسة المدرسة الثانوية ، نجد أن هذه الخواص مثل الطول ، المساحة ، التطابق ، التوازي والتعامد والتشابه ، جميعا لا متغيرات invariants تحت مجموعة الحركات الجاسئة rigid وهذه هي المجموعة التي عذاصرها : الازاحات ، الدورانات والانعكاسات على المستقيمات . ونجد أن الجزء الأول من هندسة المدرسة الثانوية يختص بهندسة الحركة الجاسئة للمستوى والفراغ ثم يلي ذلك الاهتمام بالتشابه أو ما يمكن أن نسميه بهندسة التساوى الشكلي equiform وفي هذه الحالة تكون المجموعة هي مجموعة تحويلات تشابه . وتكون فيها مجموعة الحركات الجاسئة فئة جزئية لها ومجموعة التشابه هذه تحترق كذلك على تحويلات تحفظ بالزوايا (كما هي) ولكن تقل المسافات بين النقط أو تزيد بنسب معينة وتحت مجموعة التكبير هذه لا يمكن دراسة خواص مثل المساحة والحجم والتطابق لأن هذه الخواص لا تكون لا متغيرة . ولكن الاشكال المتشابهة مثل المثلثات المتشابهة أو كثيرات الاضلاع المتشابهة تصبح موضعا للدراسة .

ثانيا - الهندسة الأفينية :

إذا وسعنا enlarge مجموعة التحويلات T فاننا نحصل على هندسة مختلفة وكذلك على أشياء مختلفة أى اللامتغيرات تحتفك كذلك (أى أن ما يهمنا دراسته من اللامتغيرات يتختلف) .

فأولا : إذا أضيفت تحويلات جديدة ، فربما نتوقع أن الخواص التي كانت لا متغيرة قبل ذلك لا تبقى كذلك . وبذلك يوجد عدد أقل منها .

ثانيا : أن نقص عدد اللامتغيرات يفقدنا طبيعيا إلى البحث عن لامتغيرات لم تكن ملاحظة قبل ذلك فمثلا إذا فرضنا أن T هي فئة كل التحويلات الأفينية في المستوى (١) .

فعلى ذلك لا تكون الزوايا لا متغيرات ولكن توازى المستقيمتين يكون خاصية لا متغيرة. وعلى ذلك يكون التوازى موضعاً للدراسة فى الهندسة الأفينية للمستوى .

ثالثاً - الهندسة الإسقاطية :

إذا أخذنا فى الاعتبار الحالة التى تكون فيها T مجموعة التحويلات الإسقاطية للمستوى . والتحويلة الإسقاطية من الوجهة التحليلية يمكن تعريفها بأنها التحويلة التى تجعل النقطة $(س', ص')$ نحل محل $(س, ص)$ تبعاً للقانون .

$$س' = \frac{اس + ب ص + ح}{دس + هـ ص + و}$$

$$ص' = \frac{دس + ح ص + و}{دس + هـ ص + و}$$

حيث $ا, ب, ح, د, هـ, و$ ، أعداداً حقيقية تحقق شرط المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} ا & ب & ح \\ د & هـ & و \\ س & ح & و \end{vmatrix} \neq \text{صفر}$$

وتكون مجموعة التحويلات الأفينية للمستوى هـ فئة جزئية لمجموعة التحويلات الإسقاطية التى فيها $و = هـ = صفر$.

وفي هذه الحالة ، لا يصبح توازى المستقيمات لا متغير للمجموعة الأكبر ولكن تطابق النقط على المستقيمات تكون لا متغير^(١) أى تحتفظ النقط على المستقيمات .

رابعاً - التوبولوجى :

كفرع من الهندسة ، فإن التوبولوجى تعتمد على مجموعة T وعناصرها التى تسمى تحويلات توبولوجية أو هومومورفيزم (تماثل التركيب) عامة جداً والتحويلة التوبولوجية تصلح لاي فراغ توبولوجى وهى مجرد راسم أحادى بحيث أن الراسم ومعكوسه يحتفظ بنقط النهاية $\text{preserve limit points}$.

وغالباً ما توصف التحويلة التوبولوجية بالنسبة للرجل العادى — دون دقة بأنها أى تغيير deformation فى الشكل ، ولكن دون أن يقطع ولا يوجد قيود سوى ذلك .

فمثلاً يمكن تغيير شكل الدائرة إلى قطع ناقص أو مثلث أو كثير أضلاع — ولكن بشرط ألا يتغير إلى دائرتين غير متقاطعتين ، وذلك لعدم الإخلال بشرط عدم القطع — وكذلك لا يمكن أن يتحول إلى شكل 8 وذلك بسبب الخاصية الأحادية للتحويلة وعلى هذا تسمى توبولوجى المستوى أحياناً بهندسة لوح المطاط . ولكن كل هذا الوصف غير دقيق لأن التحويلة التوبولوجية شئ عام أكثر من ذلك بكثير وفيما يلى تعريف التحويلة التوبولوجية بدلالة الاحتفاظ بنقطة النهاية .

(١) للاستزادة من دراسة هندسة التحويلات الاسقاطية يمكن الرجوع

إلى :

Courant, C. and Robbins, H. What is Mathematics, Oxford University Press, 1961, P. 155.

تعريف :

في فئة الأعداد الحقيقية المرتبة إذا كانت $u \in R$ فإن أي عدد حقيقيين a, b بحيث $a < u < b$ فإننا نسمى الفئة $\{s \mid a < s < b\}$ جوار للنقطة u .

وفكرة نهاية المتابعة يمكن تعريفها مباشرة بدلالة هذا الجوار (المعرف في (٣)).

وأكثر المفاهيم أساسية في الفراغ التوبولوجي هي نقطة النهاية limit point فإذا كانت q نقطة نهاية لفئة من النقاط m في T إذا كان لكل جوار neighborhood q في T فالفئة $m \cap (q - q)$ ليست خالية. وعلى هذا فالعدد صفر هو نقطة نهاية لفئة الأعداد الحقيقية.

$\{s \mid 0 < s < 1\}$ وكذلك للفئة :

$$\{s \mid s = \frac{1}{n}, n \in \text{فئة الأعداد الطبيعية}\}$$

ومن ناحية اللامتغيرات التوبولوجية، فواضح أن المسافة ليست لا متغير ولا أي عدد يكون دالة للطول. ولكن إذا حذفنا نقطتين من دائرة، فإن ذلك يفصلها إلى جزئين وعلى ذلك يكون — أخذ النقطتين في الدائرة لتقدمها إلى جزئين — لا متغير توبولوجي للدائرة. لأنه مهما كانت التحويلة التوبولوجية T ، فإن التحويلات (j) للدائرة (j) يكون لها دائماً هذه الخاصية. وهناك خاصية أخرى توبولوجية للدائرة وهي : إذا حذفنا نقطة واحدة من الدائرة — فإن ذلك لا يفصل الدائرة إلى قسمين.

رأينا فيما سبق أنه أمكن تصنيف الهندسات تبعاً لمجموعة التحويلات الخاصة بها. فمثلاً رأينا أن هندسة إقليدس تتعامل مع خواص الفراغ التي تحتفظ (تكون لا متغيرات) تحت متساويات القياس isometries. أما التوبولوجي فتتعامل

مع الخواص التي تحفظ (تكون لا متغيرة) تحت تماثل التركيب homeomorphism وبالمثل فالهندسة الإسقاطية والافينية تتعامل مع الخواص التي لا تتغير تحت المجموعات الإسقاطية والافينية .

وعما سبق نرى أن فكرة التحويلات ذات أهمية عظيمة فهي تعمل كوسيلة لتصنيف الهندسات ذات الطابع الكلاسيكي . وكما ذكرنا سابقا يرجع الفضل في وجهة النظر التي قدمناها إلى برنامج كلاين الذي كان حدثا هاما في تاريخ الرياضيات لأنه حل على توضيح كثير من المفاهيم الهندسية ، ذلك بتنظيمه للمعلومات الهندسية التي كانت معروفة في ذلك الوقت . كما أثار الطريق أمام أنواع كثيرة أخرى من الهندسات (١) .

(١) لإبتكار هندسة جديدة ، من الضروري فقط إيجاد نوع جديد من مجموعة التحويلات ، وفراغ يمكن تطبيقها عليه . ولكن ليس بالطبع أن الهندسات المختلفة بهذه الطريقة تكون لها دلالة في تقدم الرياضيات .

الفصل الرابع

تطبيقات نظرية المجموعات في تدريس بعض موضوعات الرياضيات في التعليم العام

في هذا الفصل سنوضح كيفية استخدام مفهوم وخواص نظرية المجموعات في بعض دروس الرياضيات في المرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية، وذلك بإعطاء بعض الأمثلة :

أولاً - استعمال المجموعات في حل الجمل الرياضية :

وذلك بتطبيق النظرية^(١) الآتية :

الفئة S والعملية $\cdot$ تكون مجموعة إذا وجد حل وحيد في S لكل
من المعادلتين الآتيتين :

$$a \cdot s = b, \quad s \cdot a = b$$

حيث a, b أي عنصرين في S

مثال (١) :

نحتاج إلى خواص المجموعة للبرهنة على أن المعادلة $a + s = b$
لها حل وحيد عندما تكون a, b أي عنصرين في فئة S وتكون $s \in S$

(١) برهان هذه النظرية يوجد في أي كتاب من كتب الجبر مثل :

Birkoff, G. and S. MacLane, A Survey of Modern Algebra,
Macmillan company, N.Y. 1958 P. 127.

البرهان : بما أن $1 + س = ب$

∴ $1 - (1 + س) = -ب$ وجود المعكوس في سـ

∴ $(1 + 1) + س = ب$ خاصية الدمج

∴ صفر $+ س = ب$ خاصية العنصر المحايد الجمعي

أى أن $س = 1 - ب$

ومن خاصية الانغلاق تعلم أن $(1 - ب) + س = س$ وهى الخاصية الرابعة للمجموعة (سـ ، +) .

وواضح أن هذه المعادلة $1 + س = ب$ لا يكون لها حل دائما في فئة الأعداد الصحيحة الموجبة ، لأن الأعداد الصحيحة الموجبة لا تكون مجموعة جمعية . ولكن هذه المعادلة لها حل دائما عندما تكون سـ فئة الأعداد الصحيحة وكذلك إذا كانت سـ فئة الأعداد القياسية ، ذلك لأن الأعداد الصحيحة والأعداد القياسية يكونا مجموعة مع عملية الجمع .

مثال (٢) :

باستعمال خواص المجموعة يمكن تفسير عدم وحدانية حلول بعض المعادلات الخاصة البسيطة التى تتضمن عملية الضرب .

إذا كانت الفئة سـ فئة الأعداد الحقيقية فلحل المعادلة :

$أس = ب$ حيث $أ ، ب \neq سـ$

نعتبر الحالات الآتية :

(أ) عندما تكون $أ \neq$ صفر ، $ب \neq$ صفر فيوجد دائما حل وحيد للمعادلة $أس = ب$ (لأن فى هذه الحالة تكون عندنا مجموعة ضربية لأعداد حقيقية لا تساوى الصفر) .

أما الحالات الأخرى فتكون كالآتي :

(ب) ١ - عندما يكون $A = B = \text{صفر}$ فإن $\text{صفر} \times \text{صفر} = \text{صفر}$ وهنا يوجد لها عدد لا نهائي من الحلول .

٢ - عندما يكون $A = \text{صفر}$ ، $B \neq \text{صفر}$ فإن $\text{صفر} \times \text{صفر} = B$ ،
 $B \neq \text{صفر}$. وفي هذه الحالة لا يوجد لها أي حل

٣ - وعندما يكون $B = \text{صفر}$ ، $A \neq \text{صفر}$

فإن $A \times \text{صفر} = \text{صفر}$ ، $A \neq \text{صفر}$ وهنا يكون لها حل وحيد هو الصفر

مثال (٣) :

يمكن ربط حل الانظمة الخطية بحل المعادلات البسيطة .

وذلك باستخدام المجموعات

فإذا كان النظام على الصورة الآتية :

$$A \times B + C = D$$

$$E \times F + G = H$$

ويمكن التعبير عن هذا النظام بلغة المصفوفات كما يأتي :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ H \end{bmatrix}$$

ويمكن تكوين مجموعة ضربية من مصفوفتين غير منعزلتين^(١)

(invertible-nonsingular) بحيث تكون معادلة بسيطة في هذه المجموعة على

الصورة الآتية :

(١) تتميز هذه المصفوفات غير المنعزلة بأن : لكل مصفوفة غير منعزلة م يوجد معكوس المصفوفة م^{-١} (وهو مصفوفة غير منعزلة) بحيث أن

$$M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$$

$$\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ي} \\ \text{ص} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{هـ} & \text{ر} \\ \text{و} & \text{ح} \end{bmatrix}$$

وبضرب المصفوفات نحصل على النظام الأصلي ونظام آخر بنفس المعاملات
أ، ب، ج، د ولكن في متغيرين آخرين ي، ع

وهذه الطريقة توضح للطالب إمكانية حل نظامين لمعادلتين بنفس المجهود
الذي يحل به نظام واحد وذلك بفضل استعمال المصفوفات .

أى أننا نفكر فى الحل كما لو كانت معادلة واحدة على صورة :

$$م \text{ صه } = ل$$

ونحلها كما لو كانت على الصورة السابقة (مثال ٢) أس = ب

ومن غير شك لا يوجد غير حل وحيد إذا وإذا فقط م كان لها معكوس
وهذا صحيح إذا كانت أ د - ب ج $\neq 0$.

فإذا كان لدينا المعادلتان المصفوفتان الآتيتان ، (بحيث كانت م مصفوفة
غير منمزملة) ،

$$\text{فإن } م \text{ صه } = ل ، \text{ صم } = ل \quad \text{وكانت :}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = ل ، \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = م$$

$$\begin{bmatrix} \frac{٧}{٢} & ١- \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = ل \quad \text{كان للمصفوفة سه حل وحيد هو } ١- = ل$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3- \\ 5- & 11 \end{bmatrix} \frac{1}{4} = 1- \text{ م } \text{حل وحيد هو ل م} = 1-$$

واللاحظ أن $س \neq ص$ وذلك لأن $م- 1 \neq ل م- 1$ حيث أن ضرب المصفوفات غير إبدالى .

ثانيا - استعمال المجموعات في العمليات على الاعداد :

من المفيد أن يكون هناك تمثيل هندسى للعمليات الجبرية والحسابية وهذه الصورة الهندسية يمكن استعمالها لمراجعة الأجوبة والتحقق من الخواص وفى بعض الحالات تقوم هذه الصور إلى نتائج جديدة كما يمكن ترجمة هذه الصور الهندسية فى بعض الحالات إلى مجموعة أخرى متشاكلة (ايسومورفيه) مع المجموعة الجبرية أو الحسابية .

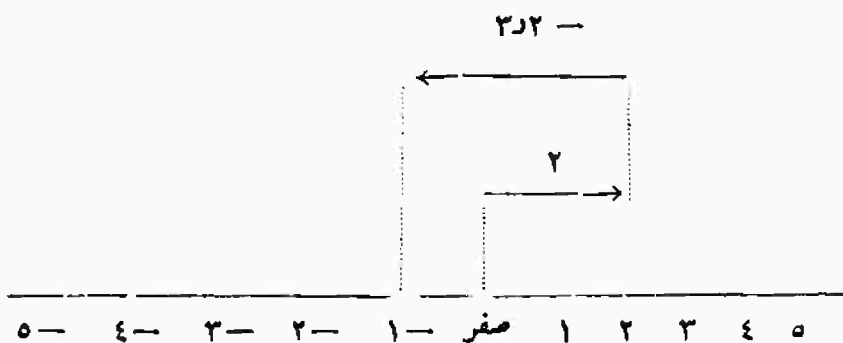
وفىما يلى بعض الأمثلة التى توضح كيف يمكن أن تستفيد من خاصية الأيسومورفيزم بين المجموعات .

مثال (٢) :

جمع الاعداد الحقيقية تكون متشاكلة (ايسومورفيه) مع تحصيل الانتقالات (الازاحات) فى بعد واحد .

وهذا المثال جيد حيث أنه يسهل العملية الحسابية ، فالإزاحات أو الانتقالات أسهل بكثير من جمع الاعداد الحقيقية حتى أننا فى كثير من الأحيان نستعمل الإزاحة كنموذج لتعليم الأطفال الجمع .

$$\text{والشكل الاتى يمثل لنا } 2 + (-3) = -1$$



(شكل ٦)

ويمكن توضيح الأيسر موفيوم (التشاكل) وذلك بتناظر العناصر مع بعضها كما في الشكل التالي (شكل ٦) . فن الواضح وجود تناظر أحادي وأن الإجابات متناظرة .

العدد الحقيقي	التناظر	الانتقال (الإزاحة)
٢	وحدتين إلى اليمين	٣ر٢
جمع عليها	ثم	وحدتين إلى اليسار
٣ر٢ -		
١ر٢ -		١ر٢ وحدتين إلى اليسار
الإجابة		

(شكل ٧)

مثال (٥) :

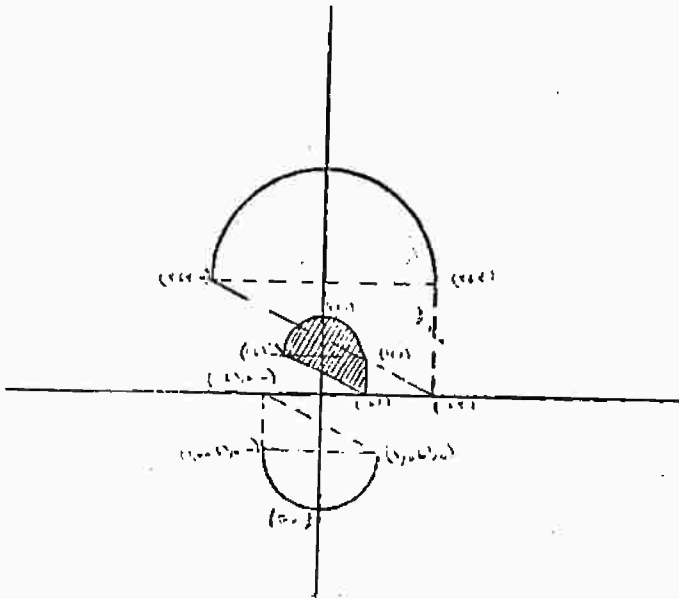
حاصل ضرب الأعداد الحقيقية تكون أيسومورفية مع تحصيل تحويلات

التكبير . Size transformations.

وهذا النوع من التحويل أساسى فى دراسة التشابه .

و (الشكل ٨) يوضح صورة ذات بعدين للضرب فى ٣

والفكرة هى أن نضرب أحداثيات كل نقط الشكل الاصلى فى ٣ لتحصل على صورة الشكل .



(شكل ٨)

وبالضرب فى — ١/٣ يعطينا صورة أبعادها ١/٣ أبعاد الصورة الاصلية وكذلك

نجد أن الصورة الناتجة نتيجة لدوران الصورة الاصلية بزاوية قدرها ٩٠° .

ونلاحظ أن الضرب فى ٣ ثم متابعته بالضرب فى — ١/٣ له نفس النتيجة

كما لو ضربنا الشكل الاصلى فى — ٣/١ .

وهذا ما نصينا عليه فى مثال (٥) وهو أن حاصل الضرب يناظر نتيجة

تحصيل تحويلات التكبير .

كما اننا يمكن التحقق من ان التشاكل موجود بين فئة مضاعفات العدد ٣ وعملية الطرح وبين فئة القوى الصحيحة للعدد ٢ ، عملية القسمة .

مثال (٧) :

يمكن استعمال المجموعات المتشاكلية (الايسومورفية) للمضاعفات والقوى (الاسس) وذلك لمساعدة التلاميذ على فهم الخواص الاساسية للقوى (الاسس) .

نبدأ بفحص المجموعة الجمعية للمضاعفات وتأخذ العدد ١ كعنصر مولد للمجموعة . فيكون أى عنصر فى فئة المضاعفات على صورة م^١ حيث م عدد صحيح . وعلى ذلك نجد توافر الخواص الآتية :

١ - الانغلاق بالنسبة لعملية الجمع وذلك من الخاصية م^١ + ن^١

$$= (م + ن)١$$

٢ - خاصية وجود العنصر المحايد وذلك عندما م = صفر فيكون

$$صفر \times ١ = صفر$$

٣ - خاصية وجود معكوس لكل عنصر م^١ هو (م -)^١

وهذه الخواص الثلاث يعرفها التلاميذ قبل تعاملهم مع القوى (الاسس)
وفما يلى سنبحث فى الخواص المناظرة فى المجموعة الضربية للقوى فاذا كان العنصر المولد للمجموعة هو س حيث س $\neq$ ١ ، س $\neq$ صفر . وأى عنصر فى فئة القوى سيكون على صورة س^١ حيث م عدد صحيح .

وحيث انه يوجد ايسومورفيزم (تشاكل) بين المجموعتين المذكورتين لذلك فان لكل خاصية للمضاعفات يناظرها خاصية للقوى وعلى ذلك تتوافر الخواص الآتية :

(١) الانغلاق بالنسبة لعملية الضرب وتشير عليها خاصية القوى الآتية :

$$س^٢ \times س^٢ = س^٢ + ن$$

(٢) خاصية وجود العنصر المحايد للقوى. وذلك عند م = صفر فيكون
 $س^٢ = ١$.

(٣) خاصية وجود المعكوس لكل عنصر ويكون معكوس
 $س^٢$ هو $س^{-٢}$

وعلى ذلك نجد ان كل خاصية للمضاعفات تناظرها خاصية للقوى .
 وفيما يلي نرى توافر خاصية التجميع في المضاعفات وفي القوى .

$$(٤) ن(م) = (١ م) + ن(م) \text{ تناظر } (س^٢) = س^٢ + ن$$

كما يمكن استخلاص خاصية أخرى للقوى من هذا التناظر كما يأتي :

$$(٥) م(١ + ب) = م + ب \text{ تناظر } (س ص) = س^٢ + ص^٢$$

وفيما يلي الخاصية السادسة .

(٦) مضاعف الفرق يساوي الفرق بين المضاعفات ، وهذا تناظر قوى
 خارج القسمة يساوي خارج قسمة القوى .
 أي

$$م(ب - ١) = م - ب \text{ تناظر } (س ص) = س^٢ - ص^٢$$

مثال (٨) :

يمكن ان تساعد المجموعات الايسومورفية (المتشاكلات) للمضاعفات
 والقوى على فهم القوى الكسرية (الاسس الكسرية) .

من الامور الهامة أن يتعلم الطلبة ان القوى (الاسس) الكسرية طبيعية
 مثل المضاعفات الكسرية (حاصل ضرب عدد $\times$ عدد كسري) ، فمثلاً ١

هي ناتج حل معادلة تتضمن مضاعفات (٢ ب = ١) وب نفس الطريقة فان

س^١ تنتج من حل معادلة تتضمن قوى (ص^٢ = س) .

ولكن لاقامة التناظر الاحادى الضرورى للنشا كل (الايسومورفيزم)

تطلب أن يكون لمجموعة القوى القياسية مولد موجب وعناصر موجبة فقط .

وعلى ذلك يكون شرط أساسى أن تكون س موجبة ، س^١ تدل على الجذر

التربيعى الموجب فقط للعنصر س .

وفيما يلي بعض الخواص المتناظرة للمضاعفات القياسية والقوى القياسية

القوى (الأس)

المضاعفات

(١) $\frac{1}{s}$ هو العدد الذى عندما يجمع (١) س^١ هو الممدد الذى عندما

على نفسه يعطى ١ يضرب فى نفسه يعطى س

(٢) نصف المجموع هو مجموع (٢) الجذر التربيعى لحاصل الضرب

الانصاف $\frac{1}{s} = (١ + ب)$ هو حاصل ضرب الجذور

التربيعية $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = ب$

(س ص) = س^١ . ص^١ أو

$\sqrt{s} \cdot \sqrt{v} = \sqrt{sv}$

(كلا الطرفين يساوى المتوسط الحسابى للمعددين ١ ، ب)

الهندسى للمعددين س ، ص)

(٣) $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}$ (٢) $\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$

ن من العوامل

ن من الحدود

$\frac{n}{n} = س = س$

$1 = 1 \frac{n}{n} =$

ولقد درسنا في المثاليين السابقين مجموعات جزئية من هاتين المجموعتين .

وحيث أن أى عدد حقيقى هو مضاعف حقيقى لأى عدد حقيقى لا يساوى الصفر،
وأى عدد حقيقى موجب هو قوة حقيقية لأى عدد حقيقى موجب لا يساوى
واحد (١) ، لذا نعيد تسمية هاتين المجموعتين إلى :

المجموعة الجمعية للأعداد الحقيقية ،

المجموعة الضربية للأعداد الحقيقية الموجبة .

وحتى يكون هناك تشا كل (أيسومورفيزم) بين هاتين المجموعتين ، وإذا
كانت أ ، ب فى المجموعة الجمعية يناظر العددين س ، ص من المجموعة الضربية،
فإن الخواص التالية تكون متناظرة :

إضرب أعداد حقيقية موجبة	إجمع أعداد حقيقية
س ص	(١) أ + ب
$\frac{1}{ص}$	(٢) ب - أ
$\frac{س}{ص} = \frac{1}{ص} \cdot س$	(٣) أ + ب = ب + أ - ب
س	(٤) ن أ
١	(٥) ٠

وهذا التناظر الاخير رقم (٥) هو التناظر الوحيد الذى يتضمن عددين
معروفين والذى يتحقق دائما .

ولكن إذا عرفنا كيف نجعل العناصر الاخرى فى المجموعتين تتناظر فإن

كل عملية ضرب يمكن تحويلها إلى عملية جمع وأي عملية حسابية لمقلوبات الأعداد يمكن تحويلها لمسألة حساب الأعداد المخالفة في الإشارة . وهذه هي الفكرة الأساسية وراء اللوغاريتمات .

وفيما يلي سنجعل الأعداد التي على اليمين لوغاريتمات للأعداد المناظرة على اليسار . وسيعدد التناظر بالعدد الذي يناظر العدد ١ .

سنضع ب تناظر ١ وسنسمى ب بأساس التناظر :

اللوغاريتمات العدد

ب

١

حيث ب يمكن أن تكون أي عدد موجب غير الواحد .

وحيث أن المضاعفات تناظر القوى فأننا نحصل على الآتي :

$$ب \cdot ب = ب^2$$

$$2 = 1 + 1$$

ب^ن

٦ - ن

$$\sqrt{ب}$$

٥

$$\sqrt[10]{ب}$$

١

والتناظر ن ← ب^ن هو الدالة الأسية للأساس ب والتناظر العكسي هو الدالة اللوغاريتمية للأساس ب .

وغالبا ما يختار الأساس ب = ١٠ عندما نبدأ في دراسة اللوغاريتمات مع أن ب = هـ تكون طبيعية أكثر في التطبيقات (هـ = e) وعندما تكون ب = ١٠

فان

٢١٠	تسكون لوغاريتم	م
١٠	د د	١
١٠٠	د د	٢
٠.١	د د	١ -
٠.٠١	د د	٢ -
.		.
.		.

وكذا نعلم فضل الاساس ١٠ فاذا كان لوغاريتم عدد كسر عشري ، أى مثلاً ٠.٣٠١٠ لوغاريتم للعدد ٢

فان عملية الضرب على اليسار تماظر عملية الجمع على اليمين فمثلاً :

$$٠.٣٠١٠ + م \quad \text{لوغاريتم للعدد} \quad ٢ \times ١٠$$

$$٠.٣٠١٠ - ٤ \quad \text{د د} \quad ٢ \times ١٠ = ٠.٠٠٠٢$$

وعلى هذا نجد أن استعمال المجموعات له فائدة في أنه يمكن معرفة كل خواص اللوغاريتمات من الأول .

فالخواص من ١ إلى ٦ يمكن إعادة كتابتها بدلالة رموز الدالة اللوغاريتمية فاذا كانت $لوس = أ$ ، $لوس = ب$.

فان :

$$(١) \quad لوس ص = أ + ب = لوس + لوس ص .$$

$$(٢) \text{ لو } \frac{1}{ص} = ب - = - \text{ لو ص}$$

$$(٣) \text{ لو } \frac{ص}{ص} = أ - ب = \text{لو ص} - \text{لو ص}$$

$$(٤) \text{ لو ص ن} = ن أ = ن \text{ لو ص}$$

$$(٥) \text{ لو } ١ = \text{صفر} \text{ بغض النظر عن الأساس}$$

$$(٦) ب \text{ لو ن} = ن$$

وعلى ذلك فإن الدالة اللوغاريتمية هي تشاكل (أيسومورفيزم) يرسم المجموعة الضربية للأعداد الحقيقية الموجبة على المجموعة الجمعية للأعداد الحقيقية .

رابعا - استعمال المجموعات في تدريس بعض المفاهيم الهندسية الأساسية :
توجد ثلاثة مفاهيم أساسية في هندسة التعليم العام ، لها أهمية كبيرة للرياضيين ، كما لها علاقة وثيقة بدراسة المجموعات .

هذه المفاهيم هي :

١ - المسافة : وهي مرتبطة إرتباطا وثيقا بالتطابق .

٢ - نسبة المسافات : وهي مرتبطة بالتشابه .

٣ - التماثل .

مثال (١٠) :

مجموعة التطابق توضح خواص علاقة تكافؤ التطابق .

إن إستعمال التحويلات لتعريف التطابق يعمل على سد بعض الثغرات في

تعريف إقليدس للتطابق^(١)، ومع ذلك يحتفظ بتعريف عام للتطابق فبلغة التحويلات : يتطابق الشكلان A ، B أى $A \cong B$ إذا وإذا فقط كان هناك أيسومتري Isometry (تحويلة مع الاحتفاظ بالمسافة) T بحيث أن $T(A) = B$.

وهذه العلاقة تحول أفكار إقليدس إلى أفكار رياضية وذلك باستعمال إنعكاسات، ودورانات، وإزاحات (إتصالات) وإنعكاسات إزلاقية glide reflections (وهذه هي كل الأيسومترات الممكنة) للأفكار الفيزيائية مثل وضع شكل على آخر Superposition وانطباق الأشكال على بعض coinciding

وفيما يلي خواص علاقة التكافؤ الخاصة بالتطابق :

١ - لكل شكل A يكون $A \cong A$

٢ - إذا كان $A \cong B$ فإن $B \cong A$

٣ - إذا $A \cong B$ ، $B \cong C$ فإن $A \cong C$

وبدلالة التعريف العام للتطابق فإن هذه الخواص تتطلب ما يأتي :

١ - وجود أيسومتري T بحيث أن لكل شكل A يكون $T(A) = A$

٢ - إذا وجد أيسومتري T بحيث أن $T(A) = B$ ، فإن هناك أيسومتري T^{-1} بحيث أن $T^{-1}(B) = A$.

٣ - إذا كان T_1 ، T_2 أيسومترات بحيث أن $T_1(A) = B$ ، $T_2(A) = C$ فإنه يوجد أيسومتري T_3 بحيث أن $T_3(A) = C$.

"two figures are congruent if they can be made to coincide". (1)

فإذا نظرنا إلى هذه الخواص من وجهة نظر خواص المجموعة وتحصيل التحويلات فإن الخواص تكون كما يلي :

١ — فئة الأيسومترات تحتوى على العنصر المحايد تحت عملية تحصيل التحويلات (العنصر المحايد = 1) .

٢ — فئة الأيسومترات تحتوى على معكوس لكل عنصر من عناصرها (ت معكوس ت) .

٣ — فئة الأيسومترات مغلقة تحت عملية تحصيل التحويلات (ت_٣ = ت_٢ ت_١) .

وحيث أن عملية تحصيل التحويلات تحقق دائماً خاصية الدمج كذلك ، لذلك نرى أن خواص علاقة التكافؤ الخاصة بالتطابق مكافئة منطقياً لما يأتي :

فئة الأيسومترات تحت عملية تحصيل التحويلات تكون مجموعة ، هذه المجموعة تسمى بمجموعة التطابق Congruence group .

مثال (١١) :

مجموعة تحويلات التشابه مع عملية تحصيل التحويلات توضح خواص علاقة تكافؤ التشابه :

يمكن وضع تعريف عام للتشابه باستعمال التحويلات^(١) هكذا :

يتشابه الشكلان ١ ، ب أى ١ ~ ب إذا وإذا فقط وجدت تحويلة تشابه ب (مركبة من تحويلات تكبير وأيسومترات) .

بحيث أن ت (١) = ب .

ومن التعريف يمكن إستنتاج أن : إذا كانت الأشكال متشابهة ، فإن هذه

(١) هذا التعريف العام لم يكن موجودا عند اقليدس .

الاشكال تكون لها علاقة مع بعضها من حيث الموقع بطريقة ما بحيث يمكن أن الشكل يرسم على الآخر بطريقة واحدة فقط من الطرق الاربعة الآتية :

١ - الإزاحة (الانتقال) translation

٢ - الإنعكاس reflection

٣ - التشابه الحلزوني spiral similarity

٤ - إنعكاس تشابه (مركب من تحويلة تكبير وانعكاس على مستقيم يحتوى على مركز تحويلة التكبير) .

ونلاحظ أن نتيجة الطريقتين الاوليتين أشكالا متطابقة ولكن الطريقتين الثالثة والرابعة فسكون في بعض الاحيان للاشكال المتشابهة أو المطابقة .

وتسكون فئة تحويلات التشابه من كل تحويلات هذه الارباع أنواع .
وتكون مجموعة من هذه الفئة مع عملية تحصيل التحويلات تكافؤ منطقيا العبارة الآتية :

التشابه هو علاقة تكافؤ .

وخواص علاقة التكافؤ تؤدي إلى أننا نحصل دائما على أشكال متشابهة بالتطبيق المتتالي لهذه التحويلات ومن غير شك فكل شكل يحصل عليه بهذه الطريقة يكون مشابها لكل الاشكال الأخرى .

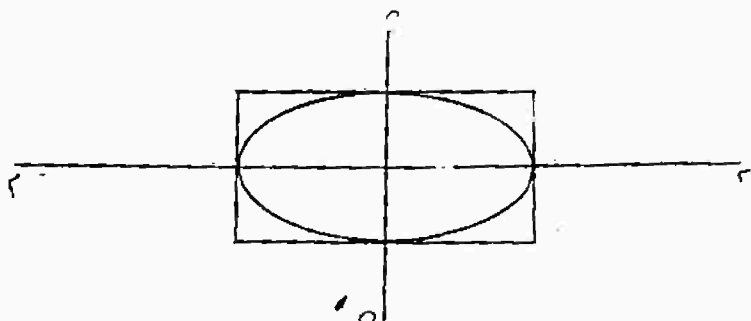
مثال (١٢) :

تستعمل مجموعات التماثل لاستنباط معلومات عن الاشكال :

يرتبط بكل شكل فئة من الايسومترات (إنعكاسات، دورانات، إلتقالات إنعكاسات إزلاقية ، بحيث ترسم هذا الشكل على نفسه) .

وهذه الفئة هي فئة التماثل لهذا الشكل . وفئة التماثل هذه مع عملية تحصيل التحويلات ، تكون مجموعة ، هي مجموعة التماثل لهذا الشكل .

ففي شكل (٩) نرى أن المستطيلات، القطاعات الناقصة ، لها نفس مجموعة التماثل أى أيسومورفية ، كل لها فئات تماثل مكونة من أربعة عناصر .



(شكل ٩) أيسومترات في فئة تماثل :

انعكاس على المستقيم مم ، انعكاس على المستقيم ن

دوران بزواية قدرها ١٨٠° حول و ، والعنصر المحايد

وكما زاد التماثل في الشكل ، كلما زاد احتمال وجود أجزاء متساوية الطول وزوايا متساوية في المقياس .

ودراسة التماثل لها قيمة كبيرة في الرياضيات . فكثير من الدوال يمكن ترجعها على أنها تشير الى تماثل في أشكالها البيانية فمثلا :

جا (- س) = - جا س تشير إلى تماثل دوراني حول نقطة الأصل
 $\sin(-s) = -\sin s$.

جتا (- س) = جتا س تشير إلى تماثل انعكاس على المحور الصادي
 $\cos(-s) = \cos s$.

ظا (س + ط) = ظا س تشير إلى تماثل انتقال (إزاحة) .

وبالعكس ، إذا وجد شكلا بيانيا متماثلا فيمكن إستنتاج علاقات ودوال متناظرة .

ذكرنا في هذا الفصل بعض الأمثلة التي توضح فائدة استعمال المجموعات وخواصها في تدريس فروع الرياضيات المختلفة . وسنكتفي بهذا القدر من الأمثلة وإن كانت هناك أمثلة كثيرة أخرى لاستعمالاتها في فروع رياضية أخرى مثل في حساب المتجهات وغير ذلك .

ولكننا سنتقل في الفصل القادم إلى دراسة إستعمالات المجموعة ونظريتها في مجال آخر غير مجال الرياضيات . ألا وهو مجال الكيمياء .

الفصل الخامس

استخدام نظرية المجموعات في علم الكيمياء

لا تقتصر استمالات مفهوم ونظرية المجموعات على الرياضيات فقط ، بل تعداها إلى المجالات الأخرى ، وسنذكر فيما يلي بعض الأمثلة التي توضح تطبيق نظرية المجموعات في علم الكيمياء .

فما هو معروف أن الجزيئات الكيميائية لها أشكال هندسية مختلفة . ولكل شكل هندسي عدد من عناصر التماثل (محور تماثل — مستوى تماثل — مركز للتماثل) وبالتالي يمكن إجراء عدد من عمليات التماثل على كل شكل هندسي كال دوران مثلاً حول محور تماثل براوية معينة أو الانعكاس على مستوى تماثل . وسنبداً بتعريف عملية التماثل وعنصر التماثل :

عملية التماثل :

أن عملية التماثل هي حركة الجسم بحيث أنه بعد إتمام الحركة ، فإن كل نقطة في الجسم تنطبق تماماً على نقطة مكافئة (أو ربما على نفس النقطة) للجسم في وضعه الأصلي . أي إذا لاحظنا وضع الجسم وتنظيمه قبل وبعد الحركة ، فإن هذه الحركة تكون عملية تماثل إذا لم نستطع التفرقة بين وضعي الجسم وتنظيمه قبل وبعد الحركة . أي أن عملية التماثل على جسم ما ، هي العملية التي تكون نتيجتها شكل مكافئ لشكل الجسم الأصلي أي شكل لا يفترق عن الشكل الأصلي للجسم ، وإن كان ليس ضرورياً أن يكون مطابقاً له . وبحيث تحتفظ المسافات بين كل أزواج النقط في الجسم .

عنصر التماثل :

هو كيان هندسى مثل نقطة، خط أو مستوى بحيث يمكن إجراء عملية تماثل بالنسبة له .

وعناصر التماثل وعمليات التماثل لها مع بعضها علاقة وثيقة ، لأن العملية لا يمكن تعريفها إلا بالنسبة للعنصر فقط . وفى نفس الوقت فإن وجود عنصر تماثل يدل عليه وجود عمليات تماثل مناسبة وحيث أن وجود عنصر تماثل يخضع لوجود عملية تماثل وبالعكس ، فسنتناقش العناصر والعمليات المتعلقة بها معا . وفى معالجة تماثل الجزيئات فى الكيمياء ، يكتفى بأربعة أنواع من عمليات وعناصر التماثل ، يمكن توضيحها فى الجدول الآتى :

عملية التماثل	عنصر التماثل
انعكاس على المستوى	١ - مستوى
تماكس كل الذرات من خلال المركز	٢ - مركز التماثل أو مركز التماكس
دوران حول المحور مرة واحدة أو أكثر	٣ - محور حقيقى
دوران يتبعه انعكاس فى مستوى عمودى على محور الدوران وتكرار هذا التسلسل من العمليات مرة أو أكثر .	٤ - محور غير حقيقى

مستويات التماثل والانعكاس :

يجب أن يمر مستوى التماثل خلال الجسم بمعنى أن هذا المستوى لا يمكن أن يكون كله خارج الجسم . وتتلخص الشروط الواجب توافرها في المستوى لكي يكون مستوى تماثل ما يأتي :

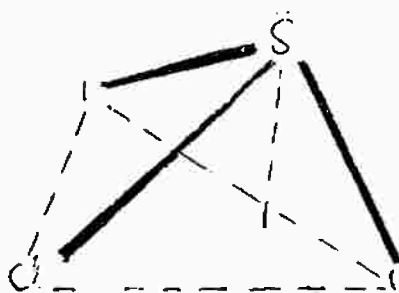
يستعمل نظام الإحداثيات الكارتيزية لوضع الجزى . بحيث أن المستوى يحتوى على المحورين السيني والصادى . وبذلك يكون المحور الثالث البائى عموديا على هذا المستوى . وبذلك يمكن تحديد وضع كل ذرة في الجزى . في نفس النظام الإحداثى . فإذا كانت الذرة مثلا موجودة أصلا عند النقطة (صر ، صر ، صر) وتركنا الإحداثيان السيني والصادى لهذه الذرة كما هو وغيرنا إشارة الإحداثى البائى فإن الذرة تتحرك إلى النقطة (صر ، صر ، - صر) ويمكن التعبير عن العملية السابقة كما يأتي :

إذا أسقطنا عمودا من كل ذرة على المستوى ، ومددنا هذا المستقيم على استقامته مسافة متساوية في الجانب الآخر للمستوى ثم حركنا الذرة إلى نهاية هذا المستقيم . فإذا أجرينا هذه العملية على كل ذرات الجزى . فإننا نحصل على شكل مكافئ للشكل الجزى . الأصلى . ويسمى المستوى الذى استعملناه بمستوى التماثل ، وعادة تستعمل σ لترمز لمستوى التماثل ويستعمل نفس الرمز ليدل على عملية الانعكاس خلال المستوى .

ويلاحظ أن وجود مستوى تماثل واحد يولد عملية تماثل واحدة كما نلاحظ أن تأثير استعمال نفس عملية الانعكاس مرتين هو إرجاع كل الذرات إلى وضعها الأصلى . وعلى هذا فإن استعمال العملية σ يعطى شكلا مكافئا للشكل الأصلى ، ولكن استعمال نفس العملية σ مرتين ينتج شكلا تماثلا أو مطابقا للأصلى . ويرمز لإستعمال العملية σ استعمالا متتاليا $\sigma\sigma$ ، من المرات بالرمز

σ وتكون $\sigma = E$ حيث استعملنا هنا الرمز E ليمثل أى مزج للعمليات بحيث تكون نتيجةها إرجاع الجزئ إلى وضع مماثل تماماً لوضعه الاصلى. وعلى ذلك تكون E العملية المحايدة ومن الواضح هنا أن $\sigma = E$ عندما تكون زوجية وأن $\sigma = \sigma$ إذا كانت فردية .

ويوجد جزيئات ليس لها مستويات تماثل على الإطلاق ومن ضمن هذه الجزيئات ، الجزيئات غير المستوية والتي تحتوى على عدد فردى من كل الذرات ، مثال مركب فل كل كب أ FCISO



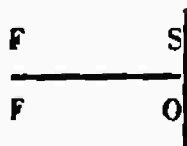
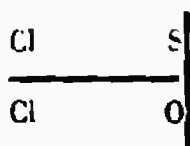
(شكل ١٠)

وعلى العكس يوجد الجزيئات التي تحتوى على عدد لا نهائى من مستويات التماثل وهى الجزيئات الخطية إذ أن أى مستوى يحتوى على محور الجزئ. يكون مستوى تماثل لهذه الجزيئات .

ومن الواضح أن هناك عددا لا نهائى من هذه المستويات . ولكن أغلب الجزيئات الصغيرة يقع بين هذين النوعين ، أى يكون لها مستوى تماثل واحد أو عدد قليل من هذه المستويات .

فمثلا إذا أخذنا جزئ (فل كب أ) SO_2 أو (كل كب أ)

$\text{Cl}_2 \text{SO}$ فإننا نجد أن كل جزيء له مستوى تماثل واحد وهو الذي يمر خلال ذرة الكبريت S وذرة الأكسجين O ويكون عموديا على مستوى (فل فل، أ)
 F, F, O أو مستوى (كل، كل، أ)
 Cl, Cl, O



(شكل ١١)

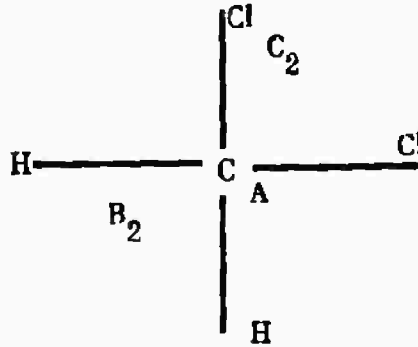
فإذا أخذنا الأمثلة الآتية :

أولا : جزيء الماء : (يد، أ) $\text{H}_2 \text{O}$.

يحتوى جزيء الماء على مستويين للتماثل أحدهما هو المستوى الجزيئي والآخر المستوى الذى يشتمل على ذرة الأكسجين ويكون عموديا على المستوى الجزيئي . ويكون تأثير الانعكاس خلال المستوى الثانى هو ترك ذرة الأكسجين ثابتة مع تبديل ذرات الأيدروجين بينما يكون نتيجة الانعكاس خلال المستوى الاول هو ترك كل الذرات مكانها كما هى . ونرمز لهذا النمط بالرمز AB_2 حيث يرمز هنا للاكسجين بـ A ، للأيدروجين بـ B_2 .

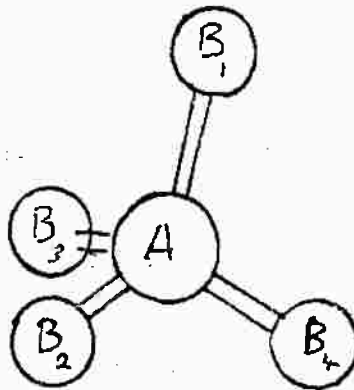
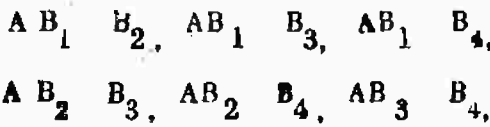
ثانيا - جزيء كلوريد الميثيلين : (ك يد، كل) $\text{CH}_2 \text{Cl}_2$

ويرمز لهذا النمط بالرمز $\text{AB}_2 \text{C}_2$ حيث يرمز لذرة الكربون بـ A والأيدروجين بـ B_2 والكلور بـ C_2 ويحتوى هذا الجزيء على مستويين للتماثل متعامدين أحدهما يشتمل على AB_2 والانعكاس خلال هذا المستوى يترك هذه الثلاث ذرات مكانها دون حركة ، بينما يبدل مكان ذرتى C أى الكلور . والمستوى الآخر يشتمل على AC_2 والانعكاس خلاله يبدل الذرات فقط أى ذرتى الأيدروجين .



(شكل ١٢)

ثالثاً - جزيء ذو الشكل الهرمي الرباعي (Regular tetrahedron)
 هذا النوع من الجزيئات يحتوى على ستة مستويات تماثل وبإستعمال نفس
 نظام الترميز السابق فإننا نستطيع تحديد هذه المستويات بذكر الذرات التي
 تحتويها وتشمل مستويات التماثل الذرات الآتية :



(شكل ١٣)

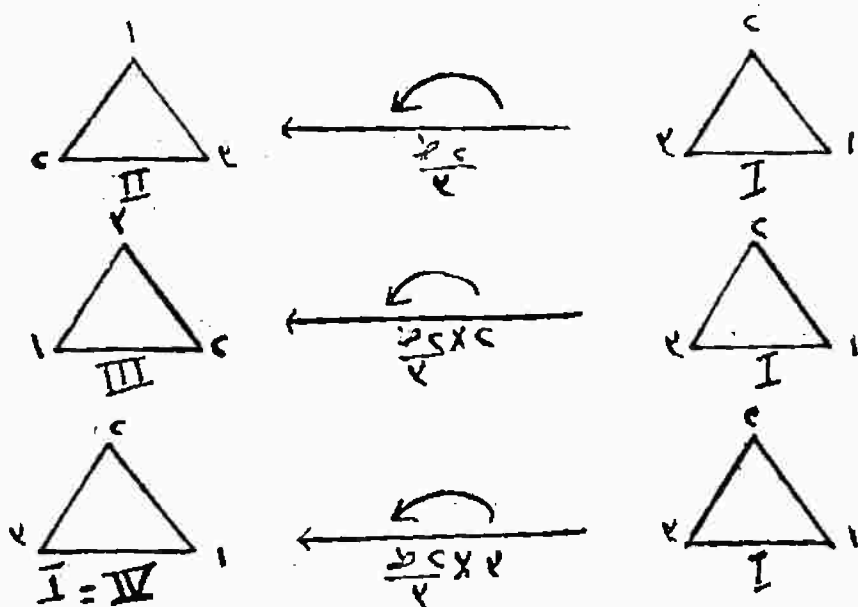
مركز التعاكس : The Inversion Center

إذا أمكن تغيير وضع الجزيء إلى وضع مكافئ لموضعه الاصلى وذلك بتغيير إحداثيات كل ذرة فيه من (س ، ص ، ي) إلى (-س ، -ص ، -ي) وكانت نقطة أصل الإحداثيات الكاريزية تقع داخل نقطة الجزيء فإن هذه النقطة التى تقع عليها نقطة الاصل تسمى مركز التماثل أو مركز التعاكس . وكما ذكرنا عند دراسة مستوى التماثل فإن مركز التعاكس يولد عملية تماثل واحدة فقط .

المحور الحقيقى والدوران الحقيقى :

المحور الحقيقى للدوران مثلث متساوى الاضلاع هو الخط المودى على مستوى المثلث مارا بمركزها الهندسى .

والدوران الحقيقى هو دوران المثلث بزواية ما حول هذا المحور الحقيقى فإذا دار المثلث بزواية قدرها 120° أى $\frac{2\pi}{3}$ حول هذا المحور فإن المثلث يتحول إلى شكل مكافئ وكذلك إذا دار المثلث بزواية 240° أى $2 \times \frac{2\pi}{3}$ حول هذا المحور تتج شكلاً مكافئاً ولكن دوران المثلث بزواية 2π لا يعطى فقط شكلاً مكافئاً بل يعطى أيضاً شكلاً مطابقاً .



(شكل ١٤)

والرمز العام للدور الحقيقي للدوران هو C_n حيث n هي رتبة المحور.

والرتبة تعني أكبر قيمة للرمز n بحيث أن الدوران خلال $(\frac{2\pi}{n})$

يعطى شكلاً متكاملاً أما الدوران خلال $(\frac{n \times 2\pi}{n})$ فلا

يعطى فقط شكلاً متكاملاً بل يعطى أيضاً شكلاً مطابقاً ويسمى المحور C_3

محور ثلاثي ويستعمل أيضاً الرمز C_3 لتمثيل عملية الدوران بزاوية $\frac{2\pi}{3}$

حول C_3 .

ويستعمل الرمز C_3^2 ليدل على عملية الدوران بزاوية $2 \times \frac{\pi}{3}$

ويرمز للدوران $3 \times \frac{\pi}{3}$ بالرمز C_3^3

وعلى ذلك نجد أن $C_3 = C_3^4$ وبذلك تكون العمليات المختلفة هي C_3 ، C_3^2 ، C_3^3 فقط وينتج عن الدوران C_3^3 نفس الشكل الأصلي أى يساوى العنصر المحايد ^(١) E .

ويلاحظ أنه في حالة مستوى التماثل أو مركز التماكس تتولد عملية واحدة (انعكاس) بواسطة مستوى التماثل . وكذلك عملية واحدة (تماكس) بواسطة مركز التماكس . ولكن في حالة الدوران حول محور حقيقى من رتبة n فإن n من العمليات تتولد مثل :

$$C_n, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n (= E)$$

(١) سنرمز هنا للعنصر المحايد بالرمز E وذلك تبعاً لكتب الكيمياء .

مجموعات نقطة التماثل : The Symmetry Point Groups

إذا فرضنا أننا نتيجة للبحث ، جمعنا قائمة بكل عناصر التماثل في جزيء ما ، فإننا نستطيع أن نضع قائمة لكل عمليات التماثل المولدة بواسطة كل من هذه العناصر . وهذا الأول هنا هو أن نبرهن على أن مثل هذه القائمة الكاملة لعمليات التماثل لو وضعت في جدول فإننا نجد أن عمليات التماثل تحقق الاربعة خواص الخاصة بالمجموعة ، الا وهي الإنغلاق ووجود العنصر المحايد وخاصة وجود معكوس عنصر وخاصة الدمج .

و نستخدم نظرية المجموعات لتساعد على تصنيف وإنتاج العديد من خواص الجزئيات الكيميائية ، وتعتمد نظريات علم الكيمياء في وقتنا الحاضر على استخدام نظرية المجموعات .

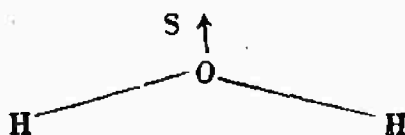
ف هناك أفرع في العلوم الكيميائية ، كالطيف الكيميائي ونظريات الروابط والتركيب الجزيئي ، لا يمكن فهمها بطريقة غير وصفية إلا باستخدام نظرية المجموعات . حتى الطرق الوصفية تعتمد في أساسها على نتائج استخدام نظرية المجموعات في الكيمياء .

تطبيق نظرية المجموعات

الفئة التي تتكون عناصرها من عمليات التماثل التي يمكن إجراؤها على جزيء ما ، معرف عليها عملية (لإجراء عمليات التماثل بالتتابع من اليمين إلى اليسار) تسمى بمجموعة .

وسنوضح هذا بالمثال الآتي :

نعتبر جزء الماء (وهو يتكون من ذرة أكسجين وذرتي أيودجين) وصيغته التركيبية هي :



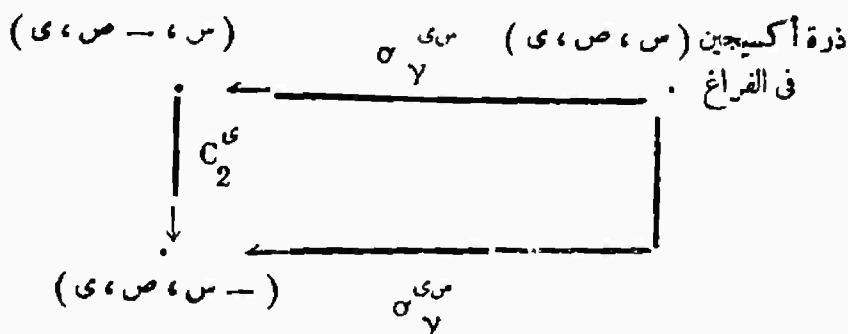
(شكل ١٥)

محور دى « هو محور دوران تماثل . فاذا لف الجزيء حوله بزاوية 180° نتج اتجاه لا يمكن تمييزه عن الاتجاه الأول . وبصفة عامة فان عمليات (تحويلات) التماثل التى يمكن إجراؤها على هذا الجزيء هى :

- ١ - ترك الجزيء كما هو ويستعمل الرمز E (العنصر المحايد) .
 - ٢ - الدوران حول محور دى « بزاوية 180° ويستعمل الرمز C_2 .
 - ٣ - الانعكاس على مستوى دى « ويستعمل الرمز σ_y أو $\sigma_y^{\cdot}$
 - ٤ - الانعكاس على مستوى دى « ويستعمل الرمز σ_y أو σ_y^*
- وينتمى هذا الجزيء والجزيئات التى لها نفس التركيب الفراغى إلى مجموعة يرمز لها بالرمز C_{2v} .
- وفيما يلى سنثبت أن العمليات (التحويلات) الأربعة المذكورة أعلاه والعمليات المعروفة عليها تكون مجموعة :
- أولاً : تحقق خاصية الإنغلاق . أى أن حاصل ضرب أى عنصرين فى الفئة هو عنصر فيها .

$$\sigma_y^{\cdot} \times \sigma_y^{\cdot} = C_2 \text{ وهو عنصر فى الفئة .}$$

الإثبات : باستخدام الإحداثيات الكارتيزية لذرة الأكسجين مثلاً :



ثانيا : تحقق الدمج

$$\sigma^{\gamma} \otimes (\sigma^{\gamma} \otimes C_2^{\gamma}) = (\sigma^{\gamma} \otimes \sigma^{\gamma}) \otimes C_2^{\gamma}$$

ويمكن إثبات هذا باستخدام نفس الأسلوب في أولا .

ثالثا : تحقق خاصية وجود عنصر محايد في الفئة وهو E

$$C_2^{\gamma} = C_2^{\gamma} \otimes E$$

$$\sigma^{\gamma} = \sigma^{\gamma} \otimes E \quad \text{وكذلك}$$

يترك إثبات ذلك للقارىء.

رابعا : تحقق خاصية وجود معكوس لكل عنصر .

$$E = {}^3C_2 \otimes C_2$$

أى دوران الجزىء بمقدار 180° في اتجاه عقارب الساعة ثم دورانه بنفس الزاوية في اتجاه عكس عقارب الساعة يكافئ ترك الجزىء كما هو .

ويمكن تمثيل المجموعة هذه التى رمزنا لها بالرمز C_{2v} بفئة من المصفوفات بحيث أن كل مصفوفة تناظر عملية أحادية فى المجموعه ولنفرض أن محور C_2 ينطبق

على محور γ من نظام الأحداثيات الكارتيزية وأن σ_{γ} هو المستوى $S \gamma$ ،
 σ_{γ}^* هو المستوى $S \gamma$.

فتكون المصفوفات التي تمثل التحويلات المؤثرة على نقطة ما هي :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\gamma}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \sigma_{\gamma}^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك يكون جدول المجموعة الضربية كالآتي :

(جدول ١)

$\otimes$	E	C_2	σ_{γ}'	σ_{γ}^*
E	E	C_2	σ_{γ}'	σ_{γ}^*
C_2	C_2	E	σ_{γ}^*	σ_{γ}'
σ_{γ}'	σ_{γ}'	σ_{γ}^*	E	C_2
σ_{γ}^*	σ_{γ}^*	σ_{γ}'	C_2	E

ومن الجدول يتضح أن $\sigma_{\gamma}' C_2 = \sigma_{\gamma}^* = C_2 \sigma_{\gamma}'$

وأن $\sigma_{\gamma}^* C_2 = \sigma_{\gamma}' = C_2 \sigma_{\gamma}^*$

وإن في $C_2 \gamma$ كل عنصر يكون معكوس نفسه .

تصنيف الجزيئات :

يمكن إدراك قيمة نظرية المجموعات إذا علمنا أن عدد الجزيئات الكيميائية بالملايين مما يصعب معه إستنتاج خواصها كلها. وعلمنا أن نظرية المجموعات يمكن أن تدمج هذه الملايين من المركبات الكيميائية في حوالى ٤٢ مجموعة بحيث يمكن إستنتاج العديد من خواصها بمجرد النظر في حوالى ٢٥ جدول يجمع سلوك تماثلها.

أى أن نظرية المجموعات تعمل على تصنيف الجزيئات الكيميائية .
وفىما يلي سنعطى مثالا آخر يبين أهمية نظرية المجموعات فى علم الطيف الكيميائى :

فى الجزيئات الكيميائية تعتمد حدوث الإنتقالات الالكترونية الناشئة عن امتصاص طاقة كهرو مغناطيسية فى المنطقة المرئية أو فوق البنفسجية من الطيف أم ما تعتمد على تماثل مستويات الطاقة التى ستم بينها هذه الإنتقالات .

والانتقال الالكترونى يحدث من مستوى طاقة تام التماثل ψ_g ($g=ground$) إلى مستوى آخر ψ_e ($e=excited$) يمكن معرفة نوع تماثله بمعلومية التركيب الالكترونى للجزيء فى الحالة المثارة .

وشدة الامتصاص (احتمالية حدوث الانتقال) تعطى بالتكامل الآتى ^(١):

$$1 - \text{فى حالة دالة فردية فان } \int \psi_e \mu \psi_g$$

حيث μ = كمية الطاقة ، حيث μ = $\int$ يعنى تكامل على فراغ المتغيرات وجمع المتغيرات وجمع المتغيرات الدورانية) .

أى أن حاصل ضرب ψ_e و μ و ψ_g غير تام التماثل .

(١) للاستزادة والتوسع يقرأ Levine, I. "Molecular spectroscopy", John Wiley N.Y. 1975, Ch. 5 & Ch. 6.

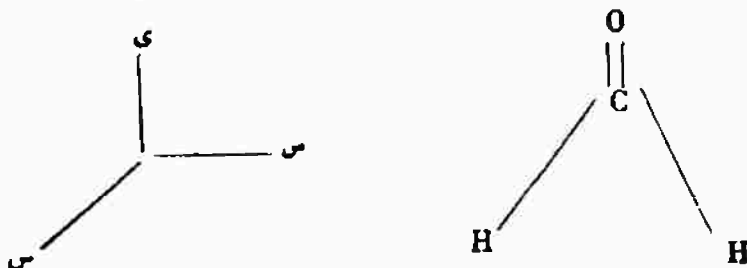
٢- في حالة دالة زوجية :

سيكون للتكامل قيمة أكبر من الصفر وبالتالي سيكون شدة الانتقال الالكترونية ملحوسة . ويمكن تحديد ذلك باستخدام ما يسمى بجدول الصفة (١).

والتي تبني بواسطة نظرية المجموعات .

سنوضح ما ذكر أعلاه بالمثال الآتي :

إذا أخذنا جزيء الفورمالدهايد (ذرة أكسجين وذرة كربون وذرتي هيدروجين) .



(شكلا ١٦)

وهو ينتمي إلى المجموعة $\Gamma_{2\gamma}$ (مثل جزيء الماء) وجدول الصفة

وأنواع التماثل لهذه المجموعة هو :

(جدول ٢)

	E	C_2	σ_{γ} سري	σ_{γ} سري
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

(الصفة $d + 1$ ، تعنى عدم تأثر المتجه بعملية التفاضل بينما $d - 1$ ، تعنى أن الاتجاه إنعكس بإجراء عملية التفاضل) .

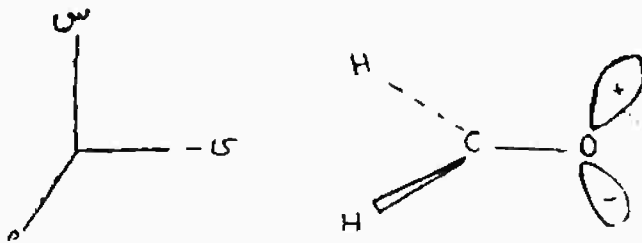
والانتقالات الالكترونية الجائز حدوثها وملاحظتها في طيف هذا الجزيء

هى :

(١) من مدار يسمى π إلى آخر يسمى π^* ($\pi^* \leftarrow \pi$)

(ب) من مدار يسمى π إلى آخر يسمى π^* ($\pi^* \leftarrow \pi$)

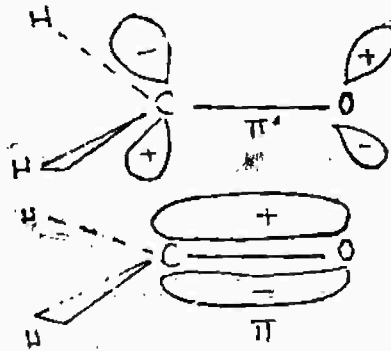
وأشكال المدارات المعنية ونوع تماثلها موضحة كالآتي :



(شكل ١٧)

مدار π على الأكسجين (الإشارة تعنى طور المدار phase (ground state)

ونوع التفاضل R_2 أنظر الجدول السابق (جدول ٢) .



(شكل ١٨)

ونوع التماثل B_1 أنظر الجدول السابق (جدول ٢) .

أى أن :

(١) الانتقال من مدار بمستوى طاقة معين $n \leftarrow \pi^*$ إلى مدار بمستوى طاقة آخر ينتج عنها التركيب الالكتروني $(n) \leftarrow (\pi^*)$ ونوع التماثل للحالة الناتجة ψ_0 هو $A_2 = B_1 \times B_2$.

(أنظر جدول ٢)

وعلى ذلك فإن تماثل μ (المذكورة في التكامل السابق) يجب أن يكون A_2 أو أحد مركباتها حيث أن $\mu = \mu_s + \mu_s + \mu_y$ حتى يكون $\psi_0 \times \mu = A_1$ ثم يكون :

$$A_1 = \psi_g \times \mu \times \psi_e$$

لكن الذى نراه من جدول الصفة أن مركبات μ ليس لأحد منها نوع تماثل A_2 ولذلك فإن التكامل في حالة الانتقال $n \leftarrow \pi^*$ سيكون مساويا للصفر والنتائج العملية (المقاسة) تتفق مع هذا الاستنتاج حيث أن الانتقال $n \leftarrow \pi^*$ لها شدة ضعيفة جدا .

(ب) الانتقال $\pi \leftarrow \pi^*$ مسموح بها حيث أن التكامل له قيمة أكبر من الصفر لأن تماثل $A_1 = B_1 \times B_1 = \psi_e$ ،

$$A_1 = \psi_g \quad , \quad A_1 = \mu_g$$

أي تام التماثل . وهذا يتفق تماما مع النتائج العملية .

يتضح من الأمثلة السابقة قيمة نظرية المجموعات في الكيمياء . وكيف أن هذه النظرية توفر كثير من الجهد والمال ، والفصل يرجع إلى قدرتها في تصنيف الجزيئات .

الفصل السادس

أثر نظرية المجموعات على مناهج الرياضيات في التعليم العام واعداد المعلم

في هذا الفصل ، سنتكلم عن أثر ما تقدم على مناهج التعليم العام وعلى برنامج إعداد المعلم :

اولا - أثر ما تقدم على مناهج التعليم العام :

(١) من حيث المحتوى :

يجب مراعاة ما يأتي :

١ - قبل دراسة المجموعات ، لابد من التمهيد للتلاميذ بدراسة معنى وخواص التركيب الرياضي . وذلك بدراسة مكوناته : الفئات ومدلولها ، والعمليات عليها . وكذلك العمليات الرياضية بمعناها العام . ودراسة الخواص الرياضية مثل الانغلاق - الدمج - الابدال - الممكوس - والعنصر المحايد بحيث يشعر الطالب بقيمة دراسة التراكيب الرياضية المختلفة .

٢ - ضرورة احتواء المنهج لبعض موضوعات التحويلات الهندسية . ويمكن بدء هذه الدراسة في المرحلة الابتدائية بطريقة حدسية محسوسة ، حتى يفهم التلاميذ معنى هذه التحويلات حدسيا قبل دراستها نظريا ، ثم دراسة التحويلات الهندسية التي تكون مجموعة مثل مجموعة تماثلات شكل ما ومثل مجموعة التقايصات (متساويات القياس) الهندسية .

٣ — الاهتمام بدراسة الجداول والتنظيمات وحساب الساعة .

٤ — ضرورة احتواء المنهج لمبادئ المنهجيات .

٥ — التأكيد على احتواء المنهج لكثير من التطبيقات والأمثلة التي توضح قيمة المجموعات في المجالات المختلفة أو استخداماتها في موضوعات منهج المدرسة الثانوية حتى يشعر الدارسون بأهمية هذا التركيب الرياضي المجرد .

٦ — ضرورة مراعاة الترابط بين مناهج الرياضيات ومناهج العلوم الأخرى، حيث أن هناك أهمية لأن تدرس العلوم أيضاً من وجهات نظر أحدث تظهر فيها المعالجات الرياضية الحديثة مثل استخدام المجموعات .

(ب) من حيث طرق التدريس :

هناك بعض المبادئ الواجب أخذها في الاعتبار حتى تتحقق أهداف دراسة المجموعات . هذه المبادئ هي :

١ — عند دراسة المجموعات ، يجب ألا نبدأ بتعريف المجموعة ، ولكن يجب الابتداء بمواقف محسوسة متنوعة تظهر فيها خواص المجموعة . ثم يطلب من التلاميذ اكتشاف هذه الخواص . وإعطائهم الفرصة للوصول إلى تعريف عام للمجموعة .

٢ — عند معالجة الأيسومورفيزم بين المجموعات — يجب أن نقدم مواقف وأمثلة متعددة تتضمن مجموعات أيسومورفية ونترك الفرصة للتلاميذ لاكتشاف الأيسومورفيزم بين المجموعات بأنفسهم ولكن تحت توجيه وإشراف المعلم وذلك قبل إعطاء الاصطلاحات أو التعاريف المجردة .

٣ — العمل على الربط بين المفاهيم الرياضية المجردة وتطبيقاتها في المجالات المختلفة .

٤ — الاستفادة من تطور ونشأة المجموعات في تدريسها .

ثانياً - اثر ما تقدم على برامج اعداد المعلم :

عند إعداد برامج إعداد المعلم يجب مراعاة ما يأتي :

١ - يجب أن تتضمن هذه البرامج دراسة تطبيقات الرياضيات في العلوم المختلفة ولا يقتصر على الرياضيات التطبيقية الكلاسيكية والتي كانت تقتصر على الميكانيكا .

٢ - يجب أن تتضمن برامج إعداد المعلم دراسة نشأة وتطور علم الرياضيات عامة وخواص ونظرية المجموعات خاصة ، حتى يشعر التلاميذ بالنمو الطبيعي للرياضيات وأنه لا يوجد ما يسمى رياضيات حديثة ورياضيات قديمة . ويشعروا بقيمة الاكتشافات الرياضية وكيف أن هذه الاكتشافات استغرقت زمناً طويلاً وجهداً كبيراً من جانب العلماء والباحثين كما أنها أدت إلى حل الكثير من المشكلات العملية وساهمت مع غيرها في تطوير المجتمع ورفاهية الإنسان .

٣ - يجب أن يدرس طلاب كليات إعداد المعلم بجميع تخصصاتهم مقرراً دراسياً يوضح القيمة التطبيقية للرياضيات والاسس الرياضية والتركيب الرياضي في ميادين تخصصهم ، حتى يشعروا بقيمة الرياضيات ودورها في التقدم العلمي والتكنولوجيا في عصرنا هذا .

٤ - يجب تشجيع الدارسين في كليات إعداد المعلم على البحث والاطلاع على كل جديد في الرياضيات بما يكفل لهم استمرارية التعليم ويزيد من ثقافتهم وعدم الاقتصار على طريقة المحاضرة في التدريس بالجامعة بل يجب أن تنوع طريقة التدريس بالجامعة . وأن يكلف الطلاب بدراسة بعض الموضوعات ومناقشتها وإعداد بعض البحوث التي يعتمدون على أنفسهم في إعدادها تحت إشراف وتوجيه الأستاذ واستعمال المكتبة .

ملخص لما في هذا البحث :

تعرفنا في هذا البحث على المجموعات وخواصها ونظريتها، وعلى الأيسومورفيزم بين المجموعات ثم قدمنا دراسة مختصرة عن نشأة المجموعات وتاريخها، وتطورها آملا أن تكون دافعا على استزادة العلم وطالب كليات إعداد المعلم، من الثقافة حول مادة تخصصه. وقد أعطينا بعض الأمثلة لإستخدام المجموعات في مجالات رياضية جبرية وهندسية داخل الفصل وخارجه. وبيننا مدى الاستفادة من الأيسومورفيزم. فإذا استطعنا اكتشاف أيسومورفيزم بين مجموعتين، حملنا على دراسة النظام الأسهل ثم عممنا نتائجنا على النظام الآخر. ولقد رأينا من الأمثلة التي ذكرناها، كيف أن تطبيقات استعمال المجموعات الأيسومورفية توضح أن ما يمكن أن يكون صعبا في لغة ما ربما يكون سهلا في لغة أخرى (مثال المضاعفات والأسس). كما أننا في الفصل الأخير وضحنا قيمة استخدام المجموعات وخواصها والأيسومورفيزم في دراسة الكيمياء، وبيننا كيف يمكن تصنيف الجزيئات الكيميائية عن طريق الأيسومورفيزم بين المجموعات ومن ذلك نتضح لنا كيف يمكن أن تكون الطريقة الرياضية موفرة للجهود والوقت والمال.

ومع أننا في هذه الدراسة اقتصرنا على استعمالات المجموعات في علم الرياضيات وفي أحد موضوعات الكيمياء. إلا أن نظرية المجموعات لا تقتصر على هذا الحد، وإنما لها استخدامات كثيرة في مجالات مختلفة وخصوصا في علم الفيزياء والميكانيكا الكمية والآلات الحاسبة. مما يجعل هذه النظرية لها قيمة تطبيقية عظيمة بالرغم من أنها نظرية مجردة.

وفي النهاية أوضحنا كيفية الاستفادة من نظرية المجموعات في تطوير مذاهب الرياضيات.

بحوث مقترحة :

تقترح الباحثة القيام بمزيد من الدراسات الخاصة بنظرية المجموعات وموضوعات رياضية أخرى . كالآتي :

- ١ — تطبيقات المجموعات في مجالات أخرى مثل الفيزياء والاقتصاد .
- ٢ — تطبيقات موضوعات رياضية أخرى مثل المصفوفات والمتجهات في المجالات العلمية والاقتصادية وغيرها .

REFERENCES

1. Birkhoff, G. and MacLane, S. "A Survey of Modern Algebra", MacMillan Company, New York 1958.
2. Cajori, F. "The History of Mathematics", MacMillan Company, 1931.
3. Cotton, Albert, "Chemical Applications of Group Theory", John Wiley, N.Y. 1971.
4. Courant, R. and Robbins, H. "What is Mathematics", Oxford University Press, 1947.
5. Eves, H. and Newson, C.V. "An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics", Rinehart and Company, Inc., New Work 1958.
6. Levine Ira, Molecular Spectroscopy, John Wiley, N.Y. 1975.
7. Miller, G.A. "The collected Works of George Abram Miller", Vol. I, University of Illinois, Urbana, Illinois, 1935
8. Murrel, The Theory of the Electronic Spectra of Organic Molecules, Chapman and Hall, London, 1971.
9. Richardson, M. "Fundamentals of Mathematics", MacMi Company, New York, 1954.
10. Smith, D.E. "History of Modern Mathematics", John and Sons, New York, 1906.
11. "Enrichment Mathematics for High School", N.C.T.M. 28th Yearbook, Washington D.C., 1963.
12. "Insights into Modern Mathematics", N.C.T.M. 23rd Yearbook, Washington, D.C. 1957.
13. "Historical Topics for the Mathematics Classroom", N.C.T.M. 31st. Yearbook, Washington, D.C. 1969.

Periodicals :

Dean, R. "Group theory for school mathematics", The Mathematics Teacher, Feb. 1962.

Litvak, B. "History of group theory-leading to the dev. of infinite abelian groups", M.T., Jan., 1964.

Miller, G.H. "The evolution of group theory", M.T., Jan., 1964.

Usiskin, Z., Applications of Groups and Isomorphic Groups to Topics in the Standard Curriculum", M.T., Feb. & March, 1975.

المراجع العربية :

١ - سعد حسنين وآخرون :

المدخل في الرياضيات الحديثة ، الجزء الأول (القاهرة : دار المعارف ١٩٧٤).

٢ - كمال رياض يعقوب :

« الرياضيات الحديثة » الجزء الأول (القاهرة : دار المعارف ١٩٧٣) .

٣ - معصومة كاظم وآخرون :

« أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة » (القاهرة : دار المعارف ١٩٧٠) .

Wiley

Wiley

رقم الايداع بدار الكتب المصرية

١٩٧٩/٤٦٢٧ م

الترقيم الحولى

٠ - ٨٢٥ - ٢٤٧ - ٩٧٧

٢٥٠٢٧٠٢١٢ - ٢٥٢٥٠

مطبعة دار نشر الثقافة
٢١ شارع كامل صدقي بالنجالة
ت : ٩١٦٠٧٦ - للقاهرة