الوحدة العاشرة

التماثلات الذاتية ومبرهنة جالوا
Automorphisms and Galois Theory

الفصل 48 التماثلات الذاتية للحقول Automorphisms of Fields

تماثلات الترافق في مبرهنة الحقول الجبرية

ليكن F حقلًا، وليكن $\overline{F}$ إغلاقًا جبريًّا لـ F، أي امتداد جبري لـ F ومغلق جبريًّا. فالحقل $\overline{F}$ موجود، بحسب المبرهنة 17.31، واختيارنا له محدد، وليس حاسمًا؛ وذلك – وكما سنرى في الفصل 49– لأنّ أيّ إغلاقين جبريين لـ F يكونان متماثلين باستخدام دالة تبقي F ثابتة، وسنفرض في عملنا من الآن فصاعدًا أنّ الامتدادات الجبرية والعناصر الجبرية على الحقل F قيد الدراسة كلها محتواة في إغلاق جبري ثابت $\overline{F}$ لـ F.

تذكر أننا نعمل على دراسة أصفار كثيرات الحدود، وباستخدام مصطلحات الفصل 31، دراسة أصفار كثيرات الحدود في $F[x]$ تعادل دراسة بناء الامتدادات الجبرية لـ F والعناصر الجبرية على F، وسنثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًّا لـ F وكانت $\alpha, \beta \in E$، فإنّ لـ α وβ الخصائص الجبرية نفسها، إذا وفقط إذا كانت $\operatorname{irr}(\alpha, F) = \operatorname{irr}(\beta, F)$ سنصوغ هذه الحقيقة باستخدام الدوال – كما كنا نعمل دائمًا في مبرهنة الحقول – وسوف نحقق هذا من خلال إثبات أنه إذا كانت $\operatorname{irr}(\alpha, F) = \operatorname{irr}(\beta, F)$، فإنه يوجد تماثل $\psi_{\alpha,\beta}$ من $F(\alpha)$ وغامر لـ $F(\beta)$، ويربط كل عنصر من F بنفسه، ويربط α بـ β. تعرض المبرهنة الآتية هذا التماثل $\psi_{\alpha,\beta}$، حيث ستصبح هذه التماثلات أدواتنا الأساسية في دراسة الامتدادات الجبرية، وهي تخلف تشاكلات التعويض ψ_α في المبرهنة 4.22، التي تجعل آخر مشاركاتها تعريف هذه التماثلات قبل النصّ على هذه المبرهنة وإثباتها، لنقدم المزيد من المصطلحات.

48.1 تعريف ليكن الحقل E امتدادًا جبريًّا لـ F، حيث يقال عن العنصرين $\alpha, \beta \in E$: إنهما **مترافقان على F** (***Conjugate over F***) إذا كان– $\operatorname{irr}(\alpha, F) = \operatorname{irr}(\beta, F)$ بمعنى أنّ α و β صفران لكثيرة الحدود نفسها غير المختزلة على F. ■

48.2 مثال مفهوم العناصر المترافقة الذي عرّف توًّا يتوافق مع التعريف الكلاسيكي لفكرة الأعداد المركبة المترافقة، إذا فهمنا أنّ الأعداد المركبة المترافقة تعني عناصر مترافقة على $\mathbb{R}$، فإذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ و$b \neq 0$، فإنّ المترافقين $a + bi$ و$a - bi$ صفران لـ $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$، التي تكون غير مختزلة في $\mathbb{R}[x]$. ▲

48.3 مبرهنة (**تماثلات الترافق**): ليكن F حقلًا، ولتكن α وβ جبرية على F و $\deg(\alpha, F) = n$. تكون الدالة $\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to F(\beta)$ والمعرفة بـ:

$$\psi_{\alpha, \beta}(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) = c_0 + c_1\beta + \dots + c_{n-1}\beta^{n-1}$$

حيث $c_i \in F$ تماثل من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$ ، إذا وفقط إذا كانت α وβ مترافقتين على F.

البرهان افترض أنّ $\psi_{\alpha,\beta}: F(\alpha) \to F(\beta)$ المعرفة في نصّ المبرهنة تماثل. ليكن $\operatorname{irr}(\alpha, F) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$؛ إذن، $a_0 + a_1\alpha + \dots a_n\alpha^n = 0$، ما يعني أنّ

$$\psi_{\alpha,\beta}(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n) = a_0 + a_1\beta + \cdots + a_n\beta^n = 0.$$

بحسب العبارة الأخيرة في نص المبرهنة 13.29، ينتج أنّ $\operatorname{irr}(\beta, F)$ تقسم $\operatorname{irr}(\alpha, F)$ وبأسلوب مشابه باستخدام التماثل $(\psi_{\alpha,\beta})^{-1} = \psi_{\beta,\alpha}$ يتبيّن أنّ $\operatorname{irr}(\alpha, F)$ تقسم $\operatorname{irr}(\beta, F)$، وهذا يؤدي – ولأن كثيرتي الحدود أحاديتان– إلى أنّ $\operatorname{irr}(\beta, F) = \operatorname{irr}(\alpha, F)$.

إذن، α و β مترافقان على F.

في المقابل، افترض أنّ $\operatorname{irr}(\alpha.F) = \operatorname{irr}(\beta,F) = p(x)$، هذا يؤدي إلى أن تشاكلي التعويض $\phi_\alpha: F[x] \longrightarrow F(\alpha)$ و $\phi_\beta: F[x] \longrightarrow F(\beta)$ لهما النواة نفسها $\langle p(x)\rangle$ بحسب المبرهنة 17.26 وبالرجوع إلى $\phi_\alpha : F[x] \longrightarrow F(\alpha)$ – يوجد تماثل طبيعي ψ_α يربط $F[x]/\langle p(x)\rangle$ بصورة غامرة بـ $F(\alpha) = \phi_\alpha[F[x]]$ وبالمثل، يعطي ϕ_β تماثلاً ψ_β يربط $F[x]/\langle p(x)\rangle$ بصورة غامرة بـ $F(\beta)$. ليكن $\psi_{\alpha,\beta} = \psi_\beta(\psi_\alpha)^{-1}$. يعطي الشكل 4.48 رسمًا توضيحيًا لهذه الدوال، حيث تشير الخطوط المقطعة إلى العناصر المتقابلة في هذه الدوال، ولأنَّ تركيب تماثلين $\psi_{\alpha,\beta}$ هو أيضًا تماثل، ويربط $F(\alpha)$ بصورة غامرة بـ $F(\beta)$، فإذا كانت $(c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) \in F(\alpha)$، فإنّ:

$$\begin{aligned}&\psi_{\alpha,\beta}(c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1})\\ &\quad = \left(\psi_\beta{\psi_\alpha}^{-1}\right)(c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1})\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & F[x] \arrow[dl, "\phi_\alpha"'] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\phi_\beta"] & \\
F(\alpha) & F[x]/\langle p(x)\rangle \arrow[l, "\psi_\alpha"] \arrow[r, "\psi_\beta"'] & F(\beta) \\
\alpha \arrow[u, dash, dashed] & x + \langle p(x)\rangle \arrow[u, dash, dashed] & \beta \arrow[u, dash, dashed]
\end{tikzcd}$$

x

$\gamma =$ الدالة القانونية لصفوف البواقي

الشكل 4.48

$$\begin{aligned}&= \psi_\beta\left((c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}) + \langle p(x)\rangle\right)\\ &= c_0 + c_1\beta + \cdots + c_{n-1}\beta^{n-1}.\end{aligned}$$

إذن، $\psi_{\alpha,B}$ هي الدالة المعرفة في نص المبرهنة. ◆

النتيجة الآتية للمبرهنة 3.48 هي حجر الزاوية في برهاننا لمبرهنة امتداد التماثلات المهمّة في الفصل 49 وفي معظم بقية عملنا.

5.48 نتيجة لتكن α جبرية على الحقل F. كل تماثل ψ يربط $F(\alpha)$ بصورة غامرة بحقل جزئي من $\overline{F}$ بحيث $\psi(a) = a$ لكل $a \in F$، فإنه يربط α بمرافق له β على F، وفي المقابل، لكل مرافق β لـ α على F، يوجد بالضبط تماثل واحد $\psi_{\alpha,\beta}$ من $F(\alpha)$ وبصورة غامرة إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويربط α بـ β ويربط كل $a \in F$ بنفسه.

البرهان ليكن ψ تماثلاً من $F(\alpha)$ وبصورة غامرة إلى حقل جزئي من $\bar{F}$، بحيث إنّ $\psi(a) = a$ لكل $a \in F$. لتكن $\text{irr}(\alpha,F) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$؛ إذن:

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0,$$

وهكذا ينتج

$$0 = \psi(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n) = a_0 + a_1\psi(\alpha) + \cdots + a_n\psi(\alpha)^n,$$

و $\beta = \psi(\alpha)$ مرافق لـ α.

في المقابل، لكل مرافق β لـ α على F، يكون تماثل الترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ في المبرهنة 3.48 هو تماثل بالصفات المطلوبة؛ ولأن $\psi_{\alpha,\beta}$ هو التماثل الوحيد الذي ينتج من حقيقة أنّ أيّ تماثل على $F(\alpha)$ يتحدد تمامًا من قيمه على عناصر F وقيمته على α. ◆

وبوصفها نتيجة ثانية للمبرهنة 3.48، فيمكننا إثبات نتيجة مشهورة.

6.48 نتيجة لتكن $f(x) \in \mathbb{R}[x]$، فإذا كانت $f(a + bi) = 0$، حيث $(a + bi) \in \mathbb{C}$، و$a, b \in \mathbb{R}$، فإنّ $f(a - bi) = 0$ كذلك، وبصورة أكثر بساطة، الأصفار المركبة لكثيرات حدود ذات معاملات حقيقية تكون أزواجًا مترافقة.

البرهان رأينا أنّ $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$، الآن:

$$\text{irr}(i,R) = \text{irr}(-i,R) = x^2 + 1$$

إذن، i و$-i$ مترافقان على $\mathbb{R}$ بحسب المبرهنة 3.48، دالة الترافق $\psi_{i,-i}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

حيث $\psi_{i,-i}(a + bi) = a - bi$ تكون تماثلًا، وهكذا، فإذا كان $a_i \in \mathbb{R}$

$$f(a + bi) = a_0 + a_1(a + bi) + \cdots + a_n(a + bi)^n = 0$$

فإنه

$$0 = \psi_{i,-i}(f(a + bi)) = a_0 + a_1(a - bi) + \cdots + a_n(a - bi)^n$$
$$= f(a - bi),$$

بمعنى أنّ $f(a - bi) = 0$ كذلك. ◆

7.48 مثال افترض $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ على $\mathbb{Q}$. أصفار $\text{irr}(\sqrt{2},\mathbb{Q}) = x^2 - 2$ هي $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$، ما يعني أنّ $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ مترافقان على $\mathbb{Q}$. وبحسب المبرهنة 3.48 تكون الدالة $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ المعرّفة بـ

$$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

تماثلاً من $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ إلى نفسها. ▲

التماثلات الذاتية والحقول الثابتة

كما تم توضيحه في النتيجة والمثال السابقين، يمكن أن يكون للحقل تماثل غير بدهي مع نفسه. هذه الدوال ستكون ذات أهمية قصوى في العمل المقبل.

8.48 تعريف التماثل من الحقل إلى نفسه يسمى **تماثلًا ذاتيًا للحقول** (***automorphism of fields***). ■

9.48 تعريف إذا كانت σ تماثلًا من الحقل E إلى أيّ حقل، فيسمى العنصر a من E **متروكًا ثابتًا** (***left Fixed***) بـ σ، إذا كان $\sigma(a) = a$، مجموعة التماثلات S على E، التي **تترك الحقل الجزئي** F من E **ثابتًا** (***leaves a subfield F of E fixed***)، إذا كان كل $a \in F$ متروكًا ثابتًا بكل $\sigma \in S$. إذا كانت $\{\sigma\}$ **تترك** F **ثابتًا**، فإن σ **تترك** F **ثابتًا** (***leaves F fixed***). ■

10.48 مثال ليكن $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ الدالة $\sigma: E \to E$ المعرفة بـ

$$\sigma\left(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}\right) = a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ تكون تماثلًا ذاتيًا على E؛ إنها تماثل الترافق $\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ من E إلى نفسها. إذا تصورنا E على الصورة $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right)(\sqrt{3})$، فسوف نرى أنّ σ تترك $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ثابتًا. ▲

هدفنا دراسة بنية التمدد الجبري E للحقل F من خلال دراسة التماثلات الذاتية على E، التي تترك كل عنصر في F ثابتًا، وسنثبت في الوقت الحاضر أنّ هذه التماثلات تشكل زمرة بطريقة طبيعية، ثم بعد ذلك سنطبق هذه النتائج الخاصة ببنية الزمرة للحصول على معلومات عن بنية امتداد الحقول؛ إذن، الكثير من عملنا السابق سيجمع الآن معًا، والمبرهنات الثلاث اللاحقة تبرهن بسهولة، ولكن الأفكار المحتواة فيها تمثل الأساس لكل شيء قادم؛ لذلك، فهذه المبرهنات ذات أهمية بالغة لنا، إنها في الحقيقة تعادل ملاحظات أكثر منها مبرهنات، والمهم هو الأفكار التي تحويها، فالخطوات الكبيرة في الرياضيات ليست دائمًا مكوّنة من مبرهنات صعبة، بل من الممكن أن تتكوّن من ملاحظة كيف أنّ معلومات رياضية معروفة قد توصل إلى مواقف جديدة، سنحضر هنا مبرهنة الزمر لدراسة أصفار كثيرات الحدود، وحاول أن تتأكد من فهمك لهذه الأفكار، حيث إنها المفتاح لحل هدفنا النهائي في هذا الكتاب، وذلك بخلاف ما يبدو.

الهدف النهائي (سيتمّ النصّ عليه بدقة لاحقًا): إثبات أنه ليست الأصفار كلها لأيّ كثيرة حدود $f(x)$ من الدرجة الخامسة، يمكن التعبير عنها باستخدام الجذور بدءًا بعناصر من الحقل الذي يحوي معاملات $f(x)$

نبذة تاريخية

كان ريتشارد ديدكند (*Richard Dedekind*) أول من طوّر فكرة التماثلات الذاتية للحقول – التي أطلق عليها " تباديل الحقول" – عام 1894م، وكان التطبيق المبكر لمبرهنة الزمر في مبرهنة المعادلات من خلال زمر التباديل لجذور كثيرات حدود خاصة، وقد عمم ديدكند هذه الفكرة إلى دوال على كامل الحقل، وأثبت كثيرًا من مبرهنات هذا الفصل.

على الرغم من أنّ هنريك ويبر (*Heinrich Weber*) أكمل طريقة ديدكند إلى زمر التأثير في الحقول في كتابه في الجبر عام 1895م، إلّا أنّ هذه الطريقة لم تتابع في كتب أخرى إلى عام 1920 – بعد أن أصبحت معالجة إيمي نوثير (*Emmy Noether*) المجردة للجبر مؤثرة في جامعة جوتنجن – حيث طوّر إميل آرتن (*Emil Artin* 1898- 1962) هذه العلاقة بين الزمر والحقول بكثير من التفصيل، وقد أكد آرتن أنّ الهدف مما أصبح يعرف الآن بمبرهنة جالوا ليس تحديد شروط الحل للمعادلات الجبرية، بل اكتشاف العلاقة بين امتدادات الحقول وزمرة التماثلات الذاتية، لقد فصّل آرتن طريقته في محاضرة أعطيت عام 1926م؛ ونشرت مقاربته أول مرة عن طريق ب. ل. فان دير واردن (*B. L. Van der Waerden*) في كتابه الجبر الحديث (*Modern Algebra*) عام 1930م، ثمّ نشرها آرتن نفسه في ملخص محاضرات في العامين 1938م و 1942م. في الواقع، بقية هذا الكتاب مبنية على تطوير آرتن لمبرهنة جالوا.

إذا كانت $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ مجموعة من التماثلات الذاتية للحقل E، فإنّ العناصر في E التي تعطي $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ أقل قدر من المعلومات هي $a \in E$ المتروكة ثابتة من كل σ_i حيث $i \in I$، وأول مبرهناتنا الثلاث تقريبًا تحوي معظم ما يمكن قوله عن هذه العناصر الثابتة في E.

11.48 مبرهنة لتكن $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ مجموعة من التماثلات الذاتية على الحقل E، فتكون المجموعة $E_{\{\sigma i\}}$ المؤلفة من العناصر جميعها $a \in E$ المتروكة ثابتة بكل σ_i، $i \in I$، حقلاً جزئيًا من E.

البرهان إذا كانت $\sigma_i(a) = a$ و $\sigma_i(b) = b$ لكل $i \in I$، فإنّ:

$$\sigma_i(a \pm b) = \sigma_i(a) \pm \sigma_i(b) = a \pm b$$

و $$\sigma_i(ab) = \sigma_i(a)\sigma_i(b) = ab$$

لكل $i \in I$، كذلك إذا كانت $b \neq 0$ ، فإنّ:

$$\sigma_i(a/b) = \sigma_i(a) / \sigma_i(b) = a/b$$

لكل $i \in I$، ولأنّ σ_i تماثل ذاتي، فنحصل على

$$\sigma_i(1) = 1 \qquad \text{و} \qquad \sigma_i(0) = 0$$

لكل $i \in I$؛ إذن، $0, 1 \in E_{\{\sigma i\}}$ ، ما يعني أنّ $E_{\{\sigma\}}$ حقل جزئي من E. ♦

12.48 تعريف يسمى الحقل $E_{\{\sigma i\}}$ في المبرهنة 11.48 **الحقل الثابت** لـ $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ (**fixed field**). سوف نشير في حالة التماثل الذاتي الوحيد σ، إلى $E_{\{\sigma\}}$ بـ الحقل الثابت بـ σ (***fixed field of*** σ) ■

13.48 مثال ليكن التماثل الذاتي $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ المعطى في المثال 7.48، فإذا كانت $a, b \in \mathbb{Q}$، فإنّ

$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$ و $a-b\sqrt{2} = a+b\sqrt{2}$، إذا وفقط إذا كانت $b = 0$؛ إذن، الحقل الثابت بـ $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ هو $\mathbb{Q}$. ▲

لاحظ أنّ أيّ تماثل ذاتي للحقل E هو بصورة خاصة دالة أحادية وغامرة من E إلى E، أي إنها تباديل على E. إذا كانت σ وτ تماثلين ذاتيين على E، فإنّ التبديلة $\sigma\,\tau$ هي كذلك تماثل ذاتي على E؛ لأنّ – وبوجه عام – تركيب تشاكلين يعطي تشاكلًا. هكذا تصنع مبرهنة الزمر المدخل للموضوع.

14.48 مبرهنة مجموعة التماثلات الذاتية كلها المعرفة على الحقل E تكون زمرة بالنسبة إلى عملية تركيب الدوال.

البرهان ضرب التماثلات الذاتية على E معرّف بوصفه تركيب الدوال، وهكذا، فإنه تجميعي (إنه ضرب التباديل). التبديلة المحايدة $i : E \to E$ المعرفة بالقاعدة $i\,(\alpha) = \alpha$ لكل $\alpha \in E$ تكون تماثلًا ذاتيًّا على E، فإذا كانت σ تماثلًا ذاتيًّا، فإنّ التبديلة σ^{-1} هي كذلك تماثل ذاتي؛ إذن، تشكل مجموعة التماثلات الذاتية كلها المعرفة على E زمرة جزئية من S_E، زمرة التباديل جميعها المعرفة على E المعطاة في المبرهنة 5.8. ♦

15.48 مبرهنة ليكن E حقلًا، وليكن F حقلًا جزئيًّا من E. تشكل المجموعة – $G\,(E\,/\,F)$ المكونة من التماثلات الذاتية جميعها على E ، التي تترك F ثابتة – زمرة جزئية من زمرة التماثلات الذاتية جميعها على E. إضافة إلى ذلك $F \leq E_{G(E/F)}$.

البرهان إذا كانت $\sigma, \tau \in G(E/F)$ و$a \in F$، فإنّ

$$(\sigma\,\tau)(a) = \sigma\,(\tau(a)) = \sigma\,(a) = a$$

إذن، $\sigma\,\tau \in G(E/F)$، بالطبع، فإن التماثل الذاتي المحايد i عنصر في $G\,(E/F)$. وكذلك، فإن كان $\sigma\,(a) = a$ حيث $a \in F$، فإنّ $a = \sigma^{-1}\,(a)$؛ إذن، $\sigma \in G\,(E\,/F)$ يؤدي إلى $\sigma^{-1} \in G\,(E/\,F)$.

إذن، $G\,(E\,/F)$ زمرة جزئية من زمرة التماثلات الذاتية على E.

لأنَّ كل عنصر في F يترك ثابتًا بكل عنصر في $G\,(E/\,F)$، فينتج مباشرة أنّ الحقل $E_{G(E/F)}$ المكوّن من عناصر E جميعها المتروكة ثابتة بـ $G\,(E\,/\,F)$ تحوي F. ♦

16.48 تعريف تسمى الزمرة $G\,(E\,/\,F)$ في المبرهنة السابقة **زمرة التماثلات الذاتية على E التي تترك F ثابتًا** (***group of automorphisms of E leaving F fixed***)، أو باختصار **زمرة E على F** (***group of E over F***).

لا تفكر في $E\,/F$ في الرمز $G\,(E\,/F)$ بوصفه مؤشرًا على فضاء خارج قسمة من نوع ما، بل بالأحرى إنه يعني أنّ E حقل امتداد للحقل F.

ستُوضَّح الأفكار المحتواة في المبرهنات الثلاث السابقة في المثال الآتي، ويجب أن تدرس هذا المثال بعناية. ■

مثال 17.48 افترض الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. أظهر المثال 9.31 أن $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]=4$، وإذا نظرنا إلى $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على الصورة $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))(\sqrt{2})$، فإن تماثل الترافق $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ من المبرهنة 3.48 المعرّف بـ

$$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\left(a+b\sqrt{2}\right)=a-b\sqrt{2}$$

حيث $a,b\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$، يشكل تماثلًا ذاتيًا على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$، ويترك الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ثابتًا. وبالمثل، فإنّ التماثل الذاتي $\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ على $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ يترك الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ثابتًا، ولأنَّ ضرب تماثلين ذاتيين يعطي تماثلًا ذاتيًا، فيمكن اعتبار $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ الذي يحرك كلًّا من $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$، أي لا يثبّت أيًا من العددين.

ليكن تماثل العنصر المحايد $=\iota$

$$\sigma_1=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$$

$$\sigma_2=\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$$

$$\sigma_3=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$$

الجدول 18.48

	ι	σ_1	σ_2	σ_3
ι	ι	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	ι	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	ι	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	ι

لزمرة التماثلات الذاتية كلها على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ حقلًا ثابتًا، فبحسب المبرهنة 11.48، يجب أن يحوي هذا الحقل $\mathbb{Q}$؛ لأن كل تماثل ذاتي يجب أن يترك 1 ثابتًا، ويؤدي هذا إلى أن يكون الحقل الجزئي الأولي ثابتًا. أساس $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$ هو $\left\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\right\}$ لأن

$\sigma_1\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2},\sigma_1\left(\sqrt{6}\right)=-\sqrt{6}$ و $\sigma_2\left(\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3},$، فإننا نرى أنّ $\mathbb{Q}$ هو بالضبط الحقل الثابت لـ $\left\{\iota,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right\}$، ومن السهل التحقق أنّ $G=\left\{\iota,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right\}$ تشكل زمرة بالنسبة إلى ضرب التماثلات الذاتية (تركيب الدوال). جدول الزمرة G معطًى في الجدول 18.48، على سبيل المثال:

$$\sigma_1\sigma_3=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\left(\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}\right)=\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}=\sigma_2$$

الزمرة G تماثل زمرة كلاين الرباعية (*Klein 4- group*)، ويمكننا إثبات أنّ G هي كامل الزمرة $\mathbb{G}\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q})$؛ لأن كل تماثل ذاتي τ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ يقرن $\sqrt{2}$ بـ $\pm\sqrt{2}$ بحسب النتيجة 5.48. وبالمثل يقرن τ $\sqrt{3}$ بـ $\pm\sqrt{3}$، ولأنَّ $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}\right\}$ أساس لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$، فإنّ أيّ تماثل ذاتي على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ويبقي $\mathbb{Q}$ ثابتة، يحدد بقيمه على $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$.

الآن، i، σ_1، σ_2، σ_3 تعطي التراكيب جميعها الممكنة لصور $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$، وإذن، فهي التماثلات الذاتية كلها الممكنة على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

لاحظ أنّ $G\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}\right)$ من الرتبة 4، و $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]=4$ فهذه ليست مصادفة، بل هي حالة من الظاهرة العامة، كما سنرى لاحقًا. ▲

التماثل الذاتي لفروبينس

ليكن F حقلًا منتهيًا، سنرى لاحقًا أنّ زمرة التماثلات الذاتية على F جميعها دورية. الآن، وبحسب التعريف، فإنّ للزمرة الدورية مولدًا، ويمكن أن تكون لها مولدات عدة، بالنسبة إلى الزمرة الدورية المجردة، ولا توجد طريقة لجعل أحد المولدات أكثر أهمية من الأخريات. على أيّ حال، بالنسبة إلى الزمرة الدورية للتماثلات الذاتية جميعها لحقل منته، فيوجد مولد قانوني (طبيعي) هو التماثل الذاتي لفروبينس (بصورة كلاسيكية تعويض فروبينس). هذه الحقيقة ذات أهمية كبيرة في بعض العمل المتقدم في الجبر.
تقدم المبرهنة الآتية التماثل الذاتي لفروبينس.

19.48 مبرهنة ليكن F حقلًا منتهيًا ذا مميز p. تكون الدالة $\sigma_p : F \to F$ المعرّفة بـ $\sigma_P(a)= a^p$ لكل $a \in F$ تماثلًا ذاتيًا – التماثل الذاتي لفروبينس – على F. وكذلك فإنّ $F_{\{\sigma p\}} \simeq \mathbb{Z}_p$.

البرهان لتكن $a, b\in F$. خذ $n=1$ في التمهيدية 9.33، فسنرى أنّ $(a+b)^p = a^p + b^p$. إذن:

$$\sigma_p(a+b) = (a+b)^p = a^p + b^p = \sigma_p(a) + \sigma_p(b)$$

وبالطبع:

$$\sigma_p(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \sigma_p(a)\sigma_p(b),$$

إذن، σ_P على الأقل تشاكل، فإذا كان $\sigma_P(a)=0$، فإنّ $a^P=0$، وهكذا $a=0$؛ إذن، نواة σ_P هي $\{0\}$، ما يعني أنّ σ_P دالة أحادية. أخيرًا؛ لأن F منتهية، فإنّ σ_P وباستخدام العد غامرة، وهكذا فإنّ σ_P تماثل ذاتي على F.
يجب أن يكون الحقل الأولي $\mathbb{Z}_p$ (تبعًا للتماثل) محتوًى في F؛ لأن F ذو مميز p. وإذا كانت $c\in \mathbb{Z}_p$، فإنّ $\sigma_p(c)=c^p=c$ بحسب مبرهنة فيرما (انظر النتيجة 2.20)؛ إذن، كثيرة الحدود $x^P - x$ لها p من الأصفار في F، عناصر $\mathbb{Z}_p$ تحديدًا، وبحسب النتيجة 5.23، فإنّ أيّ كثيرة حدود من الدرجة n على حقل لها على الأكثر n من الأصفار في الحقل. لأنَّ العناصر الثابتة بـ σ_P هي تحديدًا أصفار $x^P - x$ في F، نرى أنّ

$$Z_p = F_{\{\sigma p\}}$$ ◆

يخطئ الطالب الساذج أحيانًا عندما يقول: $(a+b)^n = a^n + b^n$. نرى هنا أنّ أسس الطالب الساذج، $(a+b)^P = a^P + b^P$ مع الأس p، متحققة في حقل F ذي مميز p.

تمارين 48

حسابات

في التمارين من 1 إلى 8، أوجد المرافقات جميعها في $\mathbb{C}$ للأعداد المعطاة على الحقول:

.1 $\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$ **.2** $\sqrt{2}$ على $\mathbb{R}$

.3 $3+\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$ **.4** $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ على $\mathbb{Q}$

.5 $\sqrt{2}+i$ على $\mathbb{Q}$ **.6** $\sqrt{2}+i$ على $\mathbb{R}$

.7 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}$ **.8** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

في التمارين من 9 إلى 14، سنفترض الحقل $E=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\right)$، من الممكن إثبات أنّ $[E:\mathbb{Q}]=8$

باستخدام المصطلحات في المبرهنة 3.48، ينتج لدينا تماثلات الترافق الآتية (التي هي هنا تماثلات ذاتية على E):

$$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}:(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}))(\sqrt{2})\to(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}))(-\sqrt{2}),$$
$$\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}:(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}))(\sqrt{3})\to(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}))(-\sqrt{3}),$$
$$\psi_{\sqrt{5},-\sqrt{5}}:(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}))(\sqrt{5})\to(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}))(-\sqrt{5}).$$

باستخدام ترميز مختصر، لتكن $\tau_2=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}},\tau_3=\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ و $\tau_5=\psi_{\sqrt{5},-\sqrt{5}}$ احسب العنصر المشار إليه في E.

.9 $\tau_2\left(\sqrt{3}\right)$ **.10** $\tau_2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

.11 $\left(\tau_3\tau_2\right)\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)$ **.12** $\left(\tau_5\tau_3\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$

.13 $\left(\tau_5^2\tau_3\tau_2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{45}\right)$ **.14** $\tau_3\left[\tau_5(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\left(\tau_2\tau_5\right)(\sqrt{30}))\right]$

.15 بالرجوع إلى المثال 17.48، أوجد الحقول الثابتة في $E=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

أ. $E_{\{\sigma1,\sigma3\}}$ ب. $E_{\{\sigma3\}}$ جـ $E_{\{\sigma2,\sigma3\}}$

في التمارين من 16 إلى 21، ارجع إلى تعليمات التمارين من 9 إلى 14 وأوجد الحقل الثابت لكل تماثل ذاتي أو مجموعة تماثلات ذاتية على E.

.16 τ_3 **.17** τ_3^2 **.18** $\{\tau_2,\tau_3\}$

.19 $\tau_5\tau_2$ **.20** $\tau_5\tau_3\tau_2$ **.21** $\{\tau_2,\tau_3,\tau_5\}$

22. ارجع إلى تعليمات التمارين من 9 إلى 14 في هذا التمرين.

أ. أثبت أنّ التماثلات الذاتية جميعها τ_2، τ_3، و τ_5 من الرتبة 2 في $G(E/\mathbb{Q})$. (تذكر ماذا تعني رتبة العنصر في الزمرة).

ب. أوجد الزمرة الجزئية H من $G(E/\mathbb{Q})$ المولدة من العناصر τ_2، τ_3، و τ_5، وأوجد جدول هذه الزمرة. [مساعدة: يوجد ثمانية عناصر].

جـ. تمامًا كما فُعل في المثال 17.48، ناقش كيف أنّ H في الفرع (ب) هي كل الزمرة $G(E/\mathbb{Q})$.

مفاهيم

في التمرينين 23 و24، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

23. يكون العنصران α وβ، في الامتداد الجبري E على الحقل F مترافقين على F، إذا وفقط إذا كانا صفرين لكثيرة الحدود نفسها $f(x)$ في $F[x]$.

24. يكون العنصران α وβ، في الامتداد الجبري E على الحقل F مترافقين على F، إذا وفقط إذا كان لتشاكلي التعويض $\phi_\alpha : F[x] \to E$ و $\phi_\beta : F[x] \to E$ النواة نفسها.

25. الحقلان $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ و$\mathbb{Q}(3+\sqrt{2})$ متساويان بالطبع. لتكن $\alpha = 3+\sqrt{2}$.

أ. أوجد مرافق α لـ $\beta \neq \alpha$ على $\mathbb{Q}$.

ب. بالرجوع إلى الفرع (أ)، قارن بين تماثل الترافق الذاتي $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ وتماثل الترافق الذاتي $\psi_{\alpha,\beta}$.

26. أوجد قيمة تماثل فروبينس الذاتي σ_2 على كل عنصر في الحقل المنتهي من أربعة عناصر المعطى في المثال 19.29. أوجد الحقل الثابت لـ σ_2.

27. أوجد قيمة تماثل فروبينس الذاتي σ_3 على كل عنصر في الحقل المنتهي من تسعة عناصر المعطى في التمرين 18 في الفصل 29. أوجد الحقل الثابت لـ σ_3.

28. ليكن F حقلاً ذا مميز $p \neq 0$. أعط مثالًا يبين أنّ الدالة $\sigma_p : F \to F$ المعرفة بـ $\sigma_p(a) = a^p$، حيث $a \in F$ ليست بالضرورة تماثلًا ذاتيًا إذا كان F غير منتهٍ. ما الخطأ الذي يمكن أن يحدث؟

29. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. لكل $\alpha, \beta \in E$، يوجد دائمًا تماثل ذاتي على E يربط α بـ β.

______ ب. لكل α, β جبريان على الحقل F، يوجد دائمًا تماثل من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$.

______ جـ. لكل α, β جبريان ومترافقان على الحقل F، يوجد دائمًا تماثل من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$.

______ د. كل تماثل ذاتي لأيّ حقل E، يترك كل عنصر في الحقل الجزئي الأولي لـ E ثابتًا.

______ هـ. كل تماثل ذاتيّ لأيّ حقل E، يترك عددًا لا نهائيًا من عناصر E ثابتة.

______ و. كل تماثل ذاتيّ لأيّ حقل E، يترك على الأقل عنصرين ثابتين في E.

______ ز. كل تماثل ذاتيّ لأيّ حقل E ذا مميز 0، يترك عددًا لا نهائيًا من عناصر E ثابتة.

______ ح. التماثلات الذاتية كلها لحقل E تشكل زمرة بالنسبة إلى عملية تركيب الدوال.

______ ط. مجموعة عناصر حقل E التي تركت ثابتة بتماثل ذاتي واحد على E تشكل حقلًا جزئيًا من E.

______ ي. للحقول $F \leq E \leq K$، $G(K/E) \leq G(K/F)$.

براهين مختصرة

30. أعطِ برهانًا مختصرًا من جملة واحدة لجزء «إذا كان» في المبرهنة 3.48.

31. أعطِ برهانًا مختصرًا من جملة واحدة لجزء «وفقط إذا كان» في المبرهنة 3.48.

براهين

32. لتكن α جبرية من الدرجة n على F. أثبت – باستخدام النتيجة 5.48 – أنه يوجد على الأكثر n من التماثلات المختلفة من $F(\alpha)$ إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ تاركة F ثابتة.

33. ليكن $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ امتدادًا للحقل F. أثبت أنّ أيّ تماثل ذاتي σ على $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ويترك F ثابتة، يتحدد تمامًا بـ ألـ n قيمة لـ $\sigma(\alpha_i)$.

34. ليكن E امتدادًا جبريًّا للحقل F، ولتكن σ تماثلًا ذاتيًّا على E ويترك F ثابتة. لتكن $\alpha \in E$. أثبت أنّ σ تنتج تباديل على أصفار $irr\,(\alpha, F)$ الموجودة في E.

35. ليكن E امتدادًا جبريًا للحقل F. لتكن $S = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ مجموعة من التماثلات الذاتية على E، بحيث إنّ كل σ_i تترك عناصر F كلها ثابتة. أثبت أنه إذا كانت S تولد زمرة جزئية H من $G\,(E/F)$ ، فإنّ $E_S = E_H$.

36. رأينا في النتيجة 17.23 أنّ كثيرة الحدود الدورية:

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$$

غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ لكل عدد أولي p. ليكن ζ صفرًا لـ $\Phi_p(x)$، وافترض الحقل $\mathbb{Q}(\zeta)$.

أ. أثبت أنّ $\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{p-1}$ أصفار مختلفة لـ $\Phi_p(x)$، واستنتج أنها أصفار $\Phi_p(x)$ جميعها.

ب. استنتج من النتيجة 5.48 ومن الفرع (أ) في هذا التمرين أنّ $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ تبديلية من الرتبة $p-1$.

جـ. أثبت أنّ $\mathbb{Q}$ هو الحقل الثابت لـ $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$. [مساعدة: أثبت أنّ $\{\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{p-1}\}$ أساس لـ $\mathbb{Q}(\zeta)$ على $\mathbb{Q}$، ثم عيّن أيًّا من التراكيب الخطية لـ $\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{p-1}$ تبقى ثابتة مع عناصر $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ كلها.

37. تصف المبرهنة 3.48 تماثلات الترافق في حال كانت α و β عناصر جبرية مترافقة على F. هل يوجد تماثل مشابه بين $F(\alpha)$ و $F(\beta)$ عندما يكون كل من α و β متسامبين على F؟

38. ليكن F حقلًا، وليكن x أيّ غير معين على F. أوجد التماثلات الذاتية على $F(x)$ كلها التي تترك F ثابتة من خلال وصف قيمها على x.

39. أثبت سلسلة المبرهنات الآتية:

أ. يحمل التماثل الذاتي على E مربعات عناصر في E إلى عناصر هي مربعات لعناصر في E.

ب. يحمل التماثل الذاتي على $\mathbb{R}$ الأعداد الموجبة إلى أعداد موجبة.

جـ. إذا كانت σ تماثلًا ذاتيًّا على $\mathbb{R}$ و $a < b$، حيث $a, b \in \mathbb{R}$، فإنّ $\sigma(a) < \sigma(b)$.

د. التماثل الذاتي الوحيد على $\mathbb{R}$ هو التماثل الذاتي المحايد.

الفصل 49 مبرهنة تمديد التماثل The Isomorphism Extension Theorem

مبرهنة التمديد

لنكمل دراسة التماثلات الذاتية للحقل. في هذا الفصل الذي يليه، سنكون مهمتين بإثبات وجود تماثلات ذاتية على حقل E وعددها.

افترض أنّ E امتداد جبري لـ F، ونريد أن نجد بعض التماثلات على E. نعرف من المبرهنة 3.48 أنه إذا كانت $\alpha, \beta \in E$ مترافقتين على F، فإنه يوجد تماثل $\psi_{\alpha,\beta}$ من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$. بالطبع $\alpha, \beta \in E$ يؤدي إلى أنّ كلا $F(\alpha) \leq E$ و$F(\beta) \leq E$. من الطبيعي أن نتساءل ما إذا كان مجال تعريف $\psi_{\alpha,\beta}$ يمكن تكبيره من $F(\alpha)$ إلى حقل أكبر، وربما كل E، وما إذا أدّى هذا إلى تماثل ذاتي على E. رسم بياني لهذه الدوال في هذه الحالة معروض في الشكل 1.49. عوضًا عن الحديث عن «تكبير مجال تعريف $\psi_{\alpha,\beta}$»،

$$\begin{tikzcd} & \overline{F} \arrow[d, dash] \\ E \arrow[r, "?"] \arrow[d, dash] & E \arrow[d, dash] \\ F(\alpha) \arrow[r, "\psi\alpha\beta"] & F(\beta) \end{tikzcd}$$

الشكل 1.49

$$\begin{tikzcd} & \overline{F}' \arrow[d, dash] \\ E \arrow[r, "\tau = ?"] \arrow[d, dash] & \tau[E] \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "\sigma"] & F' \end{tikzcd}$$

الشكل 2.49

من المألوف الحديث عن « **تمديد الدالة** $\psi_{\alpha,\beta}$ **إلى الدالة** τ »، التي هي دالة معرفة على E كلها.

تذكر أننا دائمًا نفترض أنّ الامتدادات الجبرية قيد الدراسة جميعها محتواة في إغلاق جبري محدد $\overline{F}$ لـ F. تثبت مبرهنة تمديد التماثل أنّ الدالة $\psi_{\alpha,\beta}$ يمكن تمديدها دائمًا إلى تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$. والسؤال: ما إذا كان هذا التمديد يعطي تماثلًا ذاتيًا على E ، بمعنى تربط E بنفسها؟ هو سؤال سندرسه في الفصل 50.

تضمن مبرهنة التمديد هذه وباستخدام تماثل الترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ وجود كثير من دوال التماثل، على الأقل لكثير من الحقول، إذ إنّ مبرهنات التمديد مهمّة جدًا في الرياضيات، وخاصة في الجبر والطبولوجيا.

لنأخذ نظرة أكثر شمولًا لهذه الحالة. افترض أنّ E امتداد جبري للحقل F ، وأنّ لدينا تماثل σ من F غامرًا للحقل F' ، وليكن $\overline{F}'$ الإغلاق الجبري لـ F'. نرغب في تمديد σ إلى تماثل τ من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}'$ ، حيث يعرض هذا الوضع ببساطة في الشكل 2.49 ، سنختار $\alpha \in E$ ولكن ليست في F ، ونحاول تمديد σ إلى $F(\alpha)$. إذا كان:

$$p(x) = \mathrm{irr}(\alpha, F) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

ليكن β صفرًا في $\overline{F}'$ لـ

$$q(x) = \sigma(a_0) + \sigma(a_1)x + \cdots + \sigma(a_n)x^n.$$

هنا $q(x) \in F'[x]$. نعلم أنّ $q(x)$ غير مختزلة في $F'[x]$ ؛ لأن σ تماثل، فيبدو منطقيًا أنه يمكن ربط $F(\alpha)$ بتماثل غامر مع $F(\beta)$ بدالة تمديد σ وتربط α بـ β، (هذه ليست تمامًا المبرهنة 3.48، ولكنها قريبة منها، وقد غُيّرت أسماء بعض العناصر باستخدام σ)، فإذا كانت $F(\alpha)= E$ فقد انتهينا، أمّا إذا كانت $F(\alpha) \neq E$، فعلينا أن نجد عنصرًا آخر في E وليس في $F(\alpha)$، ونكمل العملية، إنه موقف شبيه جدًا ببناء الإغلاق الجبري $\overline{F}$ لـ F، ومرة أخرى المشكلة بوجه عام، عندما لا يكون E امتدادًا منتهيًا، فالعملية يمكن أن تكرر (من المحتمل الكثير) عددًا لا نهائيًا من المرات، وسنحتاج إلى بدهية زورن لمعالجتها، ولهذا السبب، سنؤجل إثبات المبرهنة 3.49 إلى نهاية هذا الفصل.

3.49 مبرهنة (**مبرهنة تمديد التماثل**): ليكن E امتدادًا جبريًا للحقل F، ولتكن σ تماثلًا من F وبصورة غامرة إلى الحقل F'. ليكن $\overline{F'}$ الإغلاق الجبري لـ F'.

يمكن تمديد σ إلى تماثل τ من E إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$، بحيث $\tau(a) = \sigma(a)$ لكل $a \in F$.

وبوصفها نتيجة إثبات، سوف نجد تمديدًا لأحد تماثلات الترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ كما ذكر في بداية هذا الفصل.

4.49 نتيجة إذا كان $\overline{F} \geq E$ امتدادًا جبريًا لـ F و $\alpha, \beta \in E$ مترافقة على F، فيمكن تمديد تماثل الترافق $\psi_{\alpha,\beta}: F(\alpha) \to F(\beta)$ – المعطى في المبرهنة 3.48 – إلى تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$.

البرهان ينتج إثبات هذه النتيجة مباشرة من المبرهنة 3.49، إذا استبدلنا في نصّ المبرهنة $F(\alpha)$ بـ F، $F(\beta)$ بـ $\overline{F}$` و $\overline{F}$ بـ $\overline{F'}$. ♦

بوصفها نتيجة أخرى، يمكننا إثبات – كما وعدنا سابقًا – أنّ الإغلاق الجبري لـ F وحيد، تبعًا لتماثل يترك F ثابتة.

5.49 نتيجة ليكن $\overline{F}$ و $\overline{F'}$ إغلاقين جبريين لـ F. إن $\overline{F}$ يماثل $\overline{F'}$ بتأثير تماثل يترك كل عنصر في F ثابتًا.

البرهان بحسب المبرهنة 3.49 فإنّ التماثل المحايد من F إلى F يمكن تمديده إلى تماثل τ يربط $\overline{F}$ بحقل جزئي من $\overline{F'}$ ويترك F ثابتًا. (انظر الشكل 6.49) نحتاج فقط إلى إثبات أنّ τ غامر لـ $\overline{F'}$، ولكن بحسب المبرهنة 3.49، فإنّ الدالة يمكن تمديدها إلى تماثل من $\overline{F'}$ إلى حقل جزئي من $\overline{F}$، ولأنَّ τ^{-1} بالتأكيد غامرة لـ $\overline{F}$، فيجب أن تكون $\tau[\overline{F}] = \overline{F'}$. ♦

$$\begin{tikzcd} & \overline{F}' \arrow[d, dash] \\ \overline{F} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dash] & \tau[\overline{F}] \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "e"] & F \end{tikzcd}$$

الشكل 6.49

دليل امتداد الحقل

بعد مناقشتنا لسؤال الوجود، ننتقل الآن للسؤال عن العدد. لامتداد منتهٍ E للحقل F، نود أن نحصي عدد التماثلات من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ التي تترك F ثابتة، سنثبت وجود عددٍ منتهٍ من التماثلات، ولأنَّ أنّ كل تماثل ذاتي في $G\,(E/F)$ هو أحد هذه التماثلات، فإنّ إحصاءَ هذه التماثلات سيتضمن التماثلات الذاتية، وقد أثبت المثال 17.48 أنّ $G(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ يحوي أربعة عناصر و$[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}]=4$، فعلى الرغم من أنّ هذه المعادلة ليست دائمًا صحيحة، إلّا أنها صحيحة في حالة مهمّة جدًّا، وتأخذ المبرهنة الآتية أول خطوة كبيرة في برهان ذلك، وسنذكر نصّ المبرهنة بصورة أكثر عمومية ما سنحتاج إليه، ولكنها لن تجعل البرهان أكثر صعوبة.

7.49 مبرهنة ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F، ولتكن σ تماثلًا من F إلى حقل جزئي من F'، وليكن $\overline{F'}$ الإغلاق الجبري لـ F'. إن عدد التمديدات لـ σ إلى تماثل τ من E إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$ منتهٍ ومستقل عن F' ، $\overline{F'}$ وσ. بمعنى أنّ عدد التمديدات يحدد تمامًا من الحلقين E وF؛ فهو جوهري لهما.

البرهان ربما يساعدنا الرسم في الشكل 8.49 على تتبع الإنشاء الذي سنصنعه، إذ إن هذا الرسم يصنع كما يأتي: افترض تماثلين

$$\sigma_2 : F \xrightarrow{\text{غامر}} F_2',\ \ \sigma_1 : F \xrightarrow{\text{غامر}} F_1',$$

حيث $\overline{F_1}'$ و $\overline{F_2}'$ إغلاقان جبريان لـ F_1' وF_2'، على الترتيب. الآن $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ تماثل من F_1' غامر لـ F_2'؛ إذن، وبحسب المبرهنة 3.49 والنتيجة 5.49 يوجد تماثل

$$\lambda : \overline{F_1'} \xrightarrow{\text{غامر}} \overline{F_2'}$$

يمدد التماثل $F_1' \overset{\text{غامر}}{\to} F_2'$: $\sigma_2\sigma_1^{-1}$، وبالرجوع إلى الشكل 8.49 ومطابقة كل من $\tau_1 : E \to \overline{F}'_1$ التي تمدد σ_1 نحصل على تماثل $\tau_2 : E \to \overline{F}'_2$ بالبدء بـ E والذهاب أولًا إلى اليسار، ثم إلى أعلى، ثم إلى اليمين. وبالكتابة جبريًا

$$\tau_2(\alpha) = (\lambda\tau_1)(\alpha)$$

حيث $\alpha \in E$، واضح أنّ τ_2 تمدد σ_2، كان بإمكاننا البدء بـ τ_2 واستعادة τ_1 بتعريف

$$\tau_1(\alpha) = (\lambda^{-1}\tau_2)(\alpha),$$

أي بالمتابعة من الجهة الأخرى للرسم، يمكن إثبات أنّ المطابقة بين $\tau_1 : E \to \overline{F}'_1$ و$\tau_2 : E \to \overline{F}'_2$ أحادية، ومن وجهة هذا التقابل الأحادي الغامر، فإنّ عدد τ الممددة لـ σ مستقل عن F'، $\overline{F'}$ وσ.

يُستنتج أنّ عدد الدوال الممددة لـ σ منتهٍ من حقيقة أنّ E امتداد منتهٍ لـ F، $E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$، حيث $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$، وبحسب المبرهنة 11.31.

$$\begin{tikzcd}
\overline{F}'_1 \arrow[rr, "\lambda", "\text{تمديد } \sigma_2\sigma_1^{-1}"'] \arrow[d, dash] & & \overline{F}'_2 \arrow[d, dash] \\
\tau_1[E] \arrow[d, dash] & E \arrow[l, "\tau_1"'] \arrow[r, "\tau_2", "\tau_2(\alpha) = (\lambda\tau_1)(\alpha)"'] \arrow[d, dash] & \tau_2[E] \arrow[d, dash] \\
F'_1 & F \arrow[l, "\sigma_1"'] \arrow[r, "\sigma_2"] & F'_2
\end{tikzcd}$$

α

الشكل 8.49

يوجد عدد منتهٍ من الاحتمالات المرشحة بوصفها صورًا لـ $\tau(\alpha_i)$ في F'؛ لذلك، إذا كان

$$\operatorname{irr}(\alpha_i, F) = a_{i0} + a_{i1}x + \cdots + a_{im_i}x^{m_i}$$

حيث $a_{ik} \in F$، فإنّ $\tau(\alpha_i)$ يجب أن يكون أحد الأصفار لـ $\overline{F'}$ لـ

$$[\sigma(a_{i0}) + \sigma(a_{i1})x + \cdots + \sigma(a_{im_i})x^{m_i}] \in F'[x].$$

♦

9.49 تعريف ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F، فيسمى عدد التماثلات من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ التي تترك F ثابتة، **دليل** $\{E : F\}$ لـ E على F. (**index** $\{E : F\}$ **of** E **over** F) ■

10.49 نتيجة إذا كان $F \le E \le K$، حيث الحقل K امتداد منتهٍ للحقل F، فإنّ $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$.

البرهان: ينتج من المبرهنة 7.49 أنّ كلًا من الـ $\{E : F\}$ تماثل τ_i من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ وتترك F ثابتة، لها $\{K : F\}$ من التمديدات إلى تماثلات من K إلى حقل جزئي من $\overline{F}$. ♦

في الحقيقة، كانت النتيجة السابقة هي الشيء الرئيس الذي نسعى إليه، لاحظ أنها تُعدّ شيئًا، فلا تقلل من قدر أيّ نتيجة مثلها، حتى لو كان اسمها "نتيجة".

سنثبت في الفصل 51 أنه ما لم يكن F حقلًا غير منته ذا مميز $p \neq 0$، فإنه دائمًا يكون $\{E : F\} = [E : F]$ لكل امتداد منته E لـ F. وفي حالة $E= F(\alpha)$، فإنّ ألـ $\{F(\alpha) : F\}$ تمديد للدالة المحايدة $i: F \to \overline{F}$، التي تربط $F(\alpha)$ بحقل جزئي من $\overline{F}$، معطاة بتماثلات الترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ لكل مرافق β في $\overline{F}$ لـ α على F، فإذا كان لـ $irr\ (\alpha, F)$ عدد n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$، فإنّ $n = \{E : F\}$، سنثبت لاحقًا أنه ما لم يكن F حقلًا غير منته ذا مميز $p \neq 0$، فإنّ عدد الأصفار المختلفة لـ $irr\ (\alpha, F)$ يساوي $\deg(\alpha, F) = [F(\alpha) : F]$.

11.49 مثال افترض $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$، كما في المثال 17.48، فقد أثبت عملنا في ذلك المثال أنّ $\{E : \mathbb{Q}\} = [E : \mathbb{Q}] = 4$، وكذلك $\{E : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\} = 2$ و $\{\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\} = 2$، إذن:

$$4 = \{E : \mathbb{Q}\} = \{E : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}\{\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\} = (2)(2)$$

هذا يوضح النتيجة 10.49. ▲

إثبات مبرهنة التمديد

سنعيد صياغة مبرهنة التمديد التماثل 3.49.

مبرهنة تمديد التماثل: ليكن E امتدادًا جبريًّا للحقل F، ولتكن σ تماثلًا من F غامرًا للحقل F'، ليكن $\overline{F'}$ الإغلاق الجبري لـ F'، فيمكن تمديد σ إلى تماثل τ من E إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$ بحيث $\tau(a) = \sigma(a)$ لكل $a \in F$.

البرهان افترض الأزواج كلها (L, λ)، حيث L حقل يحقق $F \leq L \leq E$ و λ تماثل من L إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$، بحيث إنّ $\lambda(a) = \sigma(a)$ لكل $a \in F$. المجموعة S المكوّنة من الأزواج (L, λ) غير خالية؛ لأن (F, σ) هو أحد هذه الأزواج. عرّف ترتيبًا جزئيًّا على S، بحيث $(L_1, \lambda_1) \leq (L_2, \lambda_2)$ إذا كان $L_1 \leq L_2$ و $\lambda_1(a) = \lambda_2(a)$ لكل $a \in L_1$. من السهل التحقق أنّ هذه العلاقة $\leq$ تعطي ترتيبًا جزئيًّا على S.

لتكن $T = \{(H_i, \lambda_i) \mid i \in I\}$ أي سلسلة في S. نزعم أنّ $H = \bigcup_{i \in I} H_i$ حقل جزئي من E. لتكن $a,b \in H$، حيث $a \in H_1$ و $b \in H_2$؛ إذن، إما $H_1 \leq H_2$ أو $H_2 \leq H_1$؛ لأن T سلسلة. إذا كان – فرضًا– $H_1 \leq H_2$، فإنّ $a, b \in H_2$، وهذا يؤدي إلى أنّ $a \pm b$، ab، وa/b إذا كانت $b \neq 0$ كلها في H_2 ومن ثم في H، ولأنّه لكل $i \in I$، $F \subseteq H_i \subseteq E$، فإنّ $F \subseteq H \subseteq E$. إذن، H حقل جزئي من E.

عرّف $\lambda : H \to \overline{F'}$ كالآتي: ليكن $c \in H$؛ إذن، $c \in H_i$ حيث $i \in I$، ولتكن:

$$\lambda(c) = \lambda_i(c)$$

الدالة λ حسنة التعريف؛ لأنه إذا كانت $c \in H_1$ و $c \in H_2$، فإما $(H_1, \lambda_1) \le (H_2, \lambda_2)$ أو $(H_2,\lambda_2) \le (H_1,\lambda_1)$؛ لأن T سلسلة، وفي كلتا الحالتين $\lambda_1(c) = \lambda_2(c)$. نزعم أنّ λ تماثل من H إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$، فإذا كان $a, b \in H$، فيوجد H_i بحيث إنّ $a,b \in H_i$

و $$\lambda(a + b) = \lambda_i (a + b) = \lambda_i (a) + \lambda_i (b) = \lambda(a) + \lambda(b)$$

وبالمثل

$$\lambda(ab) = \lambda_i (ab) = \lambda_i (a)\lambda_i (b) = \lambda(a) \lambda(b).$$

إذا كان $\lambda(a) = 0$، فيوجد i حيث $a \in H_i$ و $\lambda_i (a) = 0$، وهذا يؤدي إلى أنّ $a = 0$.

إذن، λ تماثل. وهكذا، فإنّ $(H, \lambda) \in S$، وواضح من تعريف H وλ أنّ (H, λ) حدّ أعلى لـ T. أثبتنا أنّ كل سلسلة في S لها حدّ أعلى في S، وهكذا، فإنّ شروط بدهية زورن متحققة؛ إذن، يوجد عنصر أعظمي (K, τ) في S. ليكن $\tau(K) = K'$ حيث $K' \le \overline{F'}$. الآن، إذا كانت $K \ne E$، فلتكن $\alpha \in E$ ولكن $\alpha \notin K$. الآن α جبرية على F، وهذا يؤدي إلى أنّ α جبرية على K، وكذلك فلتكن $p(x)= \mathrm{irr}\,(\alpha, K)$. ليكن ψ_α التماثل القانوني

$$\psi_\alpha : K[x] / \langle p(x)\rangle \to K(\alpha)$$

المرتبط بتشاكل التعويض $\phi_\alpha : K[x] \to K(\alpha)$. إذا كانت

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

افترض

$$q(x) = \tau (a_0) + \tau (a_1)x + \cdots + \tau (a_n)x^n$$

في $K'[x]$. لأنَّ τ تماثل، فإنّ $q(x)$ غير مختزلة في $K'[x]$ ، ولأنَّ $K' \le F'$ ، يوجد صفر α' لـ $q(x)$ في $\overline{F'}$. لتكن

$$\psi_{\alpha'} : K'[x] / \langle q(x)\rangle \to K'(\alpha')$$

$$\begin{tikzcd}
 & & K[x] \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, dash] \arrow[ddl, "\substack{\text{القانوني}\\ \gamma}"'] & K'[x] \arrow[d, dash] \arrow[ddr, "\substack{\text{القانوني}\\ \gamma'}"] & & \\
 & & K \arrow[r, "\tau"] & K' & & \\
K(\alpha) & K[x]/\langle p(x)\rangle \arrow[l, "\psi_\alpha"'] \arrow[rrr, "\overline{\tau}", "\overline{\tau} = \gamma'\tau_x\gamma^{-1}"'] & & & K'[x]/\langle p(x)\rangle \arrow[r, "\psi_{\alpha'}"] & K'(\alpha')
\end{tikzcd}$$

الشكل 12.49

التماثل المشابه لـ ψ_α. أخيرًا، ليكن

$$\overline{\tau} : K[x]/\langle p(x)\rangle \to K'[x]/\langle q(x)\rangle$$

التماثل الممدد لـ τ على K، ويربط $x+ \langle p(x)\rangle$ بـ $x+ \langle q(x)\rangle$. (انظر الشكل 12.49). إذن، تركيب الدوال

$$\psi_{\alpha'}\overline{\tau}\psi_\alpha^{-1} : K(\alpha) \to K'(\alpha')$$

تماثل من $K(\alpha)$ إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$، وواضح أنّ $(K, \tau) < (K(\alpha), \psi_{\alpha'}\bar{\tau}\,\psi_{\alpha}^{-1})$، ما يناقض أنّ (K, τ) عنصر أعظمي؛ إذن، يجب أن تكون $K = E$. ♦

تمارين 49

حسابات

لتكن $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$، بالإمكان إثبات أنّ $[E : \mathbb{Q}] = 8$. في التمارين من 1 إلى 3، لكل تماثل معطًى على حقل جزئي من E، أوجد التمديدات كلها للدالة إلى تماثل من E إلى حقل جزئي من $\bar{\mathbb{Q}}$، وصف التمديدات بإعطاء قيمها على مجموعة المولدات $\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$ لـ E على $\mathbb{Q}$.

1. $\iota : \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15})$ حيث ι الدالة المحايدة.

2. $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15})$ بحيث $\sigma(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ و $\sigma(\sqrt{15}) = -\sqrt{15}$.

3. $\psi_{\sqrt{30},-\sqrt{30}} : \mathbb{Q}(\sqrt{30}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{30})$

إنها حقيقة يمكن إثباتها بالتكعيب أنّ أصفار $x^3 - 2$ في $\bar{\mathbb{Q}}$ هي:

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{2},\quad \alpha_2 = \sqrt[3]{2}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \alpha_3 = \sqrt[3]{2}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

حيث $\sqrt[3]{2}$ – كالعادة– الجذر التكعيبي الحقيقي لـ 2. استخدم هذه المعلومات في التمارين 4 إلى 6.

4. صف التمديدات للدالة المحايدة على $\mathbb{Q}$ إلى تماثل يربط $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ بحقل جزئي من $\bar{\mathbb{Q}}$.

5. صف التمديدات جميعها للدالة المحايدة على $\mathbb{Q}$ إلى تماثل يربط $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ بحقل جزئي من $\bar{\mathbb{Q}}$.

6. صف التمديدات جميعها للتماثل الذاتي $\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ إلى تماثل يربط بحقل جزئي من $\bar{\mathbb{Q}}$.

7. ليكن σ تماثلًا ذاتيًا على $\mathbb{Q}(\pi)$ التي تربط π بـ $-\pi$.

أ. صف الحقل الثابت لـ σ.

ب. صف تمديدات σ جميعها إلى تماثل يربط الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$ بحقل جزئي من $\overline{\mathbb{Q}(\pi)}$.

مفاهيم

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. ليكن $F(\alpha)$ أيّ امتداد بسيط للحقل F، فكل تماثل من F إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ له تمديد إلى تماثل من $F(\alpha)$ إلى حقل جزئي من $\overline{F}$.

________ ب. ليكن $F(\alpha)$ أيّ امتداد جبريّ بسيط للحقل F، فكل تماثل من F إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ له تمديد إلى تماثل من $F(\alpha)$ إلى حقل جزئي من $\overline{F}$.

________ جـ. كل تماثل من F إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ له العدد نفسه من التمديدات لكل امتداد جبري بسيط لـ F.

________ د. الإغلاقات الجبرية للحقول المتماثلة دائمًا متماثلة.

________ هـ. الإغلاقات الجبرية للحقول غير المتماثلة لا يمكن أبدًا أن تكون متماثلة.

________ و. الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ متماثل مع الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$.

_______ ز. دليل الامتداد المنتهي E على الحقل F منته.

_______ ح. يتصرف الدليل ضربيًّا بالنسبة إلى الأبراجٍ المنتهية للامتدادات المنتهية للحقول.

_______ ط. ملاحظاتنا السابقة للنصّ الأول للمبرهنة 3.49 تشكل أساسًا لإثبات هذه المبرهنة للامتدادات المنتهية E لـ F.

_______ ي. تثبت النتيجة 5.49 أنّ $\mathbb{C}$ يماثل $\overline{\mathbb{Q}}$.

براهين

9. ليكن K حقلًا مغلقًا جبريًّا. أثبت أنّ أيّ تماثل σ من K إلى حقل جزئي منه، بحيث تكون K جبرية على $\sigma[K]$ يكون تماثلًا ذاتيًّا على K– بمعنى أنه دالة غامرة. [مساعدة: استخدم المبرهنة 3.49 على σ^{-1}].

10. ليكن E امتدادًا جبريًّا على الحقل F. أثبت أنّ كل تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يمكن تمديده إلى تماثل ذاتي على $\overline{F}$.

11. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، فإنّ أيّ إغلاقين جبريين $\overline{F}$ و $\overline{E}$ لـ F وE، على الترتيب، متماثلان.

12. أثبت أنّ الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$ في $\mathbb{C}$ يماثل أيّ إغلاق جبري لـ $\overline{\mathbb{Q}}(x)$، حيث $\overline{\mathbb{Q}}$ هو حقل الأعداد الجبرية وx غير معين.

13. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا منتهيًا للحقل F، فإنّ $\{E : F\} \leq [E : F]$.

[مساعدة: تثبت الملاحظات السابقة للمثال 11.49 بصورة أساسية هذا بالنسبة إلى امتداد جبري بسيط $F(\alpha)$ لـ F. استخدم حقيقة أنّ الامتداد المنتهي هو برج من الامتدادات البسيطة، بالترافق مع الخصائص الضربية للدليل والدرجة].

الفصل 50 حقول الانشطار Splitting Fields

سنكون مهتمين بصورة رئيسة بالتماثلات الذاتية للحقل E، وليس مجرد التماثلات التي تربط E بحقل جزئي من $\overline{E}$. إنها التماثلات الذاتية للحقل التي تشكل زمرة، ونتساءل ما إذا كان للتمدد E للحقل F، كل تماثل يربط E بحقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة هو في الحقيقة تماثل ذاتي لـ E.

افترض أنّ E تمدد جبري للحقل F، فإذا كانت $\alpha \in E$ و $\beta \in \overline{F}$ مرافقة لـ α على F، فإنه يوجد تماثل ترافق

$$\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to F(\beta).$$

بحسب النتيجة 4.49، يمكن تمديد $\psi_{\alpha,\beta}$ إلى تماثل يربط E بحقل جزئي من $\overline{F}$. الآن، إذا كانت $\beta \notin E$، فإنّ مثل هذا التماثل على E لا يمكن أن يكون تماثلًا ذاتيًا على E؛ إذن، إذا كان امتداد جبري E للحقل F يحقق خاصية أنّ تماثلاته كلها التي تربطه بحقل جزئي من $\overline{F}$ وتترك F ثابتة هي في الحقيقة تماثلات ذاتية على E، فإنّ لكل $\alpha \in E$، يجب أن يحوي E مرافقات α على F جميعها كذلك، يمكن ملاحظة هذا بسهولة. نشير هنا إلى أننا استخدمنا الكثير من القوة، تحديدًا وجود تماثلات الترافق ومبرهنة تمديد التماثل 3.49.

تقترح هذه الأفكار صياغة للتعريف الآتي:

1.50 تعريف ليكن F حقلًا له إغلاق جبري $\overline{F}$، ولتكن $\{f_i(x) \mid i \in I\}$ مجموعة من كثيرات الحدود في $F[x]$، فيسمى الحقل $E \le \overline{F}$ **حقل انشطار لـ** $\{f_i(x) \mid i \in I\}$ **على F (splitting filed)** إذا كان E أصغر حقل جزئي من $\overline{F}$ يحوي F والأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل $f_i(x)$ حيث $i \in I$، ويسمى $K \le \overline{F}$ **حقل انشطار على** F إذا كان حقل انشطار لبعض كثيرات الحدود في $F[x]$. ■

2.50 مثال رأينا أنّ $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ حقل انشطار لـ $\{x^2-2, x^2-3\}$ وكذلك $\{x^4-5x^2+6\}$. ▲

لكثيرة حدود واحدة $f(x) \in F[x]$، سوف نشير عادة إلى حقل انشطار لـ $\{f(x)\}$ على F، **بحقل انشطار $f(x)$ على** F. لاحظ أنّ حقل الانشطار لـ $\{f_i(x) \mid i \in I\}$ على F في $\overline{F}$ هو تقاطع الحقول الجزئية جميعها من $\overline{F}$ التي تحوي F، والأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل $f_i(x)$، حيث $i \in I$؛ إذن، مثل حقل الانشطار هذا موجود بالتأكيد.

سنثبت الآن أنّ حقول الانشطار على F هي تحديدًا تلك الحقول $E \le \overline{F}$، مع خاصية أنّ التماثلات جميعها التي تربط E بحقل جزئي من $\overline{F}$ وتترك F ثابتة، هي تماثلات ذاتية على E، وستكون هذه نتيجة للمبرهنة المقبلة. مرة أخرى، نشخّص مفهومًا باستخدام الدوال، وتذكر أننا دائمًا نفترض أنّ الامتدادات الجبرية للحقل F قيد الدراسة جميعها محتواة في إغلاق جبري محدد $\overline{F}$ لـ F.

3.50 مبرهنة يكون الحقل E، حيث $F \le E \le \overline{F}$ حقل انشطار على F، إذا وفقط إذا كان كل تماثل ذاتي لـ $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يربط E بنفسها، وهكذا فهو يصنع تماثلًا ذاتيًا لـ E ويبقي F ثابتة.

البرهان ليكن E حقل انشطار على F في $\overline{F}$ لـ $\{f_i(x) \mid i \in I\}$، ولتكن σ تماثلًا ذاتيًا على $\overline{F}$ وتترك F ثابتة، ولتكن $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ مجموعة الأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل $f_i(x)$ حيث $i \in I$. يثبت عملنا السابق أنّ لـ α_j محددة، وتكون عناصر $F(\alpha_j)$ هي التراكيب جميعها على الصورة:

$$g(\alpha_j) = a_0 + a_1\alpha_j + \cdots + a_{n_j-1}\alpha_j^{n_j-1},$$

حيث n_j هي درجة $\operatorname{irr}(\alpha_j, F)$ و $a_k \in F$. افترض المجموعة S المكوّنة من المجاميع المنتهية كلها لحاصل الضرب المنتهي لعناصر من الشكل $g(\alpha_j)$ لكل $j \in J$. المجموعة S محتواة في E ومغلقة بالنسبة إلى الجمع والضرب، وتحوي 0 و 1 ومعكوسًا جمعيًا لكل عنصر، ولأنّ كل عنصر في S محتوًى في $F(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_r}) \subseteq S$، فنرى أنّ S تحوي كذلك المعكوس الضربي لكل عنصر لا يساوي الصفر؛ إذن، S حقل جزئي من E، وتحوي α_j لكل $j \in J$، وبحسب تعريف حقل الانشطار E لـ $\{f_i(x) \mid i \in I\}$، نرى أنه يجب أن تكون $S=E$، هذا العمل كان فقط لإثبات أنّ $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ تولد E على F، بطريقة أخذ المجاميع المنتهية وحاصل الضرب المنتهي. وبمعرفة هذا، نرى مباشرة أنّ قيمة σ لأيّ عنصر في E تتحدد تمامًا بقيم $\sigma(\alpha_j)$، ولكن بحسب النتيجة 5.48، يجب أن تكون $\sigma(\alpha_j)$ كذلك صفرًا لـ $\operatorname{irr}(\alpha_j, F)$.

بحسب المبرهنة 13.29، فإنّ $\operatorname{irr}(\alpha_j, F)$ تقسم $f_i(x)$ التي تحقق $f_i(\alpha_j) = 0$، إذن $\sigma(\alpha_j) \in E$ كذلك، وهكذا فإنّ σ تربط E بحقل جزئي من E تماثليًا. على أيّ حال، فإنّ المثل صحيح بالنسبة إلى التماثل الذاتي σ^{-1} على $\bar{F}$. ولأنّ لكل $\beta \in E$،

$$\beta = \sigma(\sigma^{-1}(\beta)),$$

نرى أنّ σ تربط E بصورة غامرة بـ E، وهكذا، فهي تعطي تماثلًا ذاتيًا على E.

افترض العكس، أي إنّ كل تماثل ذاتي على $\bar{F}$ ويترك F ثابتة، يعطي تماثلًا ذاتيًا على E. لتكن $g(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$ ولها صفر α في E، فإذا كان β أيّ صفر لـ $g(x)$ في $\bar{F}$، فإنه وبحسب المبرهنة 3.48، يوجد تماثل ترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$، ويترك F ثابتة بحسب المبرهنة 3.49، يمكن تمديد $\psi_{\alpha,\beta}$ إلى تماثل τ من $\bar{F}$ إلى حقل جزئي من $\bar{F}$. ولكن

$$\tau^{-1}: \tau[\bar{F}] \to \bar{F}$$

يمكن تمديدها إلى تماثل يربط $\bar{F}$ بحقل جزئي من $\bar{F}$، ولأنّ صورة τ^{-1} هي كل $\bar{F}$، فإننا نرى أنّ τ يجب أن تكون غامرة لـ $\bar{F}$، بمعنى أنّ τ تماثل ذاتي على $\bar{F}$، ويترك F ثابتة؛ إذن، وبحسب الفرض، تولد τ تماثلًا ذاتيًا على E، ما يؤدي إلى أنّ $\tau(\alpha) = \beta$ موجودة في E. لقد أثبتنا أنه إذا كانت $g(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$ ولها صفر في E، فإنّ أصفار $g(x)$ الموجودة في $\bar{F}$ جميعها تنتمي لـ E؛ إذن، إذا كانت $\{g_k(x)\}$ مجموعة كثيرات الحدود جميعها غير المختزلة في $F[x]$ ولها صفر في E، فإنّ E هي حقل الانشطار لـ $\{g_k(x)\}$. ♦

4.50 تعريف ليكن E امتدادًا للحقل F، فنقول: إنّ كثيرة الحدود $f(x)$ تنشطر في E **(splits)** إذا أمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عوامل خطية في $E[x]$. ■

5.50 مثال كثيرة الحدود x^4+5x^2+6 في $\mathbb{Q}[x]$ تنشطر في الحقل $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ إلى

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$ ▲

6.50 نتيجة إذا كان $E \leq \bar{F}$ حقل انشطار على F، فإنّ كل كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$ ولها صفر في E تنشطر في E.

البرهان إذا كان E حقل انشطار على F في $\bar{F}$، فإنّ كل تماثل ذاتي على $\bar{F}$ يولد تماثلًا ذاتيًا على E، الجزء الثاني من إثبات المبرهنة 3.50 ، يبرهن بالضبط أنّ E كذلك حقل الانشطار على F للمجموعة $\{g_k(x)\}$ المكوّنة من كثيرات الحدود غير المختزلة في $F[x]$ ولها صفر في E؛ إذن، أيّ كثيرة حدود غير مختزلة $f(x)$ في $F[x]$ ولها صفر في E تكون أصفارها في $\bar{F}$ جميعها تنتمي لـ E، وهكذا، فإنّ تحليلها إلى عوامل خطية في $\bar{F}[x]$ – المعطى في المبرهنة 5.31 – في الحقيقة يحدث في $E[x]$، وهكذا، فإنّ $f(x)$ تنشطر في E. ♦

7.50 نتيجة إذا كان $E \leq \bar{F}$ حقل انشطار على F، فإنّ كل تماثل يربط E بحقل جزئي من $\bar{F}$ ويترك F ثابتة، هو في الحقيقة تماثل ذاتي على E، وبوجه خاص، إذا كان E حقل انشطار من درجة منهية على F، فإنّ

$$\{E : F\} = |G(E/F)|$$

البرهان كل تماثل σ يربط E بحقل جزئي من $\bar{F}$ ويترك F ثابتة، يمكن تمديده إلى تماثل ذاتي τ على $\bar{F}$، بحسب المبرهنة 3.49 ومناقشة الغمر في الجزء الثاني من إثبات المبرهنة 3.50. إذا كان E حقل انشطار على F، فإنه وبحسب المبرهنة 3.50، قصر τ على E – أي σ – يعطي تماثلًا ذاتيًا على E، وهكذا لحقل انشطار E على F، كل تماثل يربط E بحقل جزئي من $\bar{F}$ ويترك F ثابتة، هو تماثل ذاتي على E.

تنتج المعادلة $\{E : F\} = |G(E/F)|$ مباشرة لحقل انشطار E ذي درجة منتهية على F؛ لأن $\{E:F\}$ تم تعريفها بوصفها عدد التماثلات المختلفة التي تربط E بحقل جزئي من $\bar{F}$ وتترك F ثابتة. ♦

8.50 مثال لاحظ أنّ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ حقل انشطار لـ

$$\{x^2-2, x^2-3\}$$

على $\mathbb{Q}$ يثبت المثال 17.48 أنّ الدوال i، σ_1، σ_2، σ_3 هي التماثلات الذاتية كلها لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ التي تترك $\mathbb{Q}$ ثابتة. (في الحقيقة؛ لأن كل تماثل ذاتي للحقل الجزئي يجب أن يترك الحقل الجزئي الأولي ثابتًا، فإننا نرى أنها التماثلات الذاتية الوحيدة على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$؛ إذن:

$$\{\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}\} = |G(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})| = 4$$

موضحًا النتيجة 7.50. ▲

نود أن نحدد شروطًا تؤدي إلى أنّ

$$|G(E/F)| = \{E : F\} = [E : F]$$

لامتداد منته E على F، هذا هو موضوعنا الآتي، وسنثبت في الفصل المقبل أنّ هذه المعادلة تتحقق دائمًا عندما يكون E حقل انشطار على الحقل F ذي المميز 0 ، أو عندما يكون F حقلًا منتهيًا. هذه المعادلة ليست بالضرورة صحيحة، عندما يكون F حقلًا غير منتهٍ ذا مميز $p \neq 0$.

9.50 مثال ليكن $\sqrt[3]{2}$ الجذر التكعيبي الحقيقي لـ 2، كالعادة، الآن x^3-2 لا تنشطر في $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$؛ لأن $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})<\mathbb{R}$ وهناك صفر حقيقي واحد فقط لـ x^3-2؛ إذن، x^3-2 تتحلل في $\left(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\right)[x]$ إلى عامل خطي x - $\sqrt[3]{2}$ وعامل تربيعي غير مختزل.

حقل الانشطار E لـ x^3-2 على $\mathbb{Q}$ هو لذلك من الدرجة 2 على $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$؛ إذن،

$$[E:\mathbb{Q}] = [E: \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}): \mathbb{Q}] = (2)(3) = 6$$

أثبتنا أنّ حقل الانشطار على $\mathbb{Q}$ لـ x^3-2 من الدرجة 6 على $\mathbb{Q}$، ويمكننا التحقق باستخدام التكعيب أنّ:

$$\sqrt[3]{2}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{2}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

هي الأصفار الأخرى لـ x^3-2 في $\mathbb{C}$؛ إذن، حقل الانشطار E لـ x^3-2 على $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$. (هذا ليس الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i,\sqrt{3})$ ، الذي له درجة 12 على $\mathbb{Q}$). ستترك دراسة أخرى لهذا المثال المشوق إلى التمارين (انظر التمارين 7، 8، 9، 16، 21، 23). ▲

تمارين 50

حسابات

في التمارين من 1 إلى 6، أوجد درجة حقل الانشطار على $\mathbb{Q}$ لكثيرات الحدود المعطاة في $\mathbb{Q}[x]$.

1. x^2+3 **2.** x^4-1 **3.** $(x^2-2)\,(x^2-3)$

4. x^3-3 **5.** x^3-1 **6.** $(x^2-2)\,(x^3-2)$

ارجع إلى المثال 9.50 في التمارين من 7 إلى 9.

7. ما رتبة $G(\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)/\mathbb{Q})$؟

8. ما رتبة $G(\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q})$؟

9. ما رتبة $G(\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$؟

10. ليكن α صفرًا لـ x^3+x^2+1 على $\mathbb{Z}_2$. أثبت أنّ x^3+x^2+1 تنشطر في $\mathbb{Z}_2(\alpha)$. [مساعدة: يوجد ثمانية عناصر في $\mathbb{Z}_2(\alpha)$. أوجد صفرين لـ x^3+x^2+1 –إضافة إلى α – من هذه العناصر الثمانية. أو عوضًا عن ذلك استخدم نتائج الفصل 33].

مفاهيم

في التمرينين 11 و 12، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

11. ليكن $F \le E \le \overline{F}$ حيث $\overline{F}$ الإغلاق الجبري للحقل F. يكون الحقل E حقل انشطار على F إذا وفقط إذا كانت E تحوي الأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل كثيرة حدود في $F[x]$ ، التي لها صفر في E.

12. كثيرة الحدود $f(x)$ في $F[x]$ تنشطر في الامتداد الحقلي E لـ F ، إذا وفقط إذا كانت تحلل إلى عوامل في $E[x]$، هي حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل.

13. لتكن $f(x)$ كثيرة حدود في $F[x]$ من الدرجة n، وليكن $E \le \overline{F}$ حقل الانشطار لـ $f(x)$ على F في $\overline{F}$. ما الحدود التي يمكن وضعها لـ $[E:F]$؟

14. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. لتكن $\alpha, \beta \in E$، حيث $E \le \overline{F}$ حقل انشطار على F؛ إذن، يوجد تماثل ذاتي على E ويترك F ثابتًا، ويربط α بـ β ، إذا وفقط إذا كانت $\mathrm{irr}\,(\alpha,F) = \mathrm{irr}\,(\beta,F)$.

______ ب. $\mathbb{R}$ حقل انشطار على $\mathbb{Q}$.

______ جـ. $\mathbb{R}$ حقل انشطار على $\mathbb{R}$.

______ د. $\mathbb{C}$ حقل انشطار على $\mathbb{R}$.

______ هـ. $\mathbb{Q}(i)$ حقل انشطار على $\mathbb{Q}$.

______ و. $\mathbb{Q}(\pi)$ حقل انشطار على $\mathbb{Q}(\pi^2)$.

______ ز. لكل حقل انشطار E على F، حيث $E \leq \overline{F}$ ، كل تماثل على E هو تماثل ذاتي على E.

______ ح. لكل حقل انشطار E على F، حيث $E \leq \overline{F}$ ، كل تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ هو تماثل ذاتي على E.

______ ط. لكل حقل انشطار E على F، حيث $E \leq \overline{F}$ ، كل تماثل على E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، هو تماثل ذاتي على E.

______ ي. يكون كل إغلاق جبري $\overline{F}$ للحقل F حقل انشطار على F.

15. أثبت مستخدمًا مثالاً أنّ النتيجة 6.50 لن تبقى صحيحة إذا أُزيلت الكلمة «غير مختزل».

16. أ. هل $|G(E/F)|$ ضربية على الأبراج المنتهية للامتدادات المنتهية، أي هل صحيح أنّ:

$$|G(K/F)| = |G(K/E)||G(E/F)|$$

حيث $F \leq E \leq K \leq \overline{F}$؟

لماذا نعم أو لماذا لا؟ [مساعدة: استخدم التمارين من 7 إلى 9].

ب. هل $|G(E/F)|$ ضربية على الأبراج المنتهية للامتدادات المنتهية التي كل منها حقل انشطار على الحقل الذي أسفل منه؟ لماذا نعم أو لماذا لا؟

براهين

17. أثبت أنه إذا كان الامتداد المنتهي E للحقل F حقل انشطار على F ، فإنّ E حقل انشطار لكثيرة حدود واحدة في $F[x]$.

18. أثبت أنه إذا كان $[E:F]=2$، فإنّ E حقل انشطار على F.

19. أثبت أنه إذا كان $F \leq E \leq \bar{F}$، فإنّ E حقل انشطار على F ، إذا وفقط إذا كان E يحوي المترافقات كلها على F في $\bar{F}$ لكل عنصر من عناصره.

20. أثبت أنّ لـ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ التماثل الذاتي المحايد فقط.

21. بالرجوع إلى المثال 9.50، أثبت أنّ:

$$G(\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})/\mathbb{Q}(i\sqrt{3})) \simeq \langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$$

22. أ. أثبت أنّ التماثل الذاتي لحقل الانشطار E على F لكثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$. يكون تباديل على أصفار $f(x)$ في E.

ب. أثبت أنّ التماثل الذاتي لحقل الانشطار E على F لكثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$. يتعين تمامًا بالتباديل على أصفار $f(x)$ في E المعطاة في الفرع (أ).

جـ. أثبت أنه إذا كان E حقل انشطار على F لكثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$، فإنه يمكن النظر لـ $G(E/F)$ بطريقة طبيعية بوصفها زمرة تباديل.

23. ليكن E حقل الانشطار لـ x^3-2 على $\mathbb{Q}$، كما في المثال 9.50.

أ. ما رتبة $G(E/\mathbb{Q})$؟ [مساعدة: استخدم النتيجة 7.50 والنتيجة 4.49 المطبقة على البرج $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right) \leq E$].

ب. أثبت أنّ $G(E/\mathbb{Q}) = S_3$، زمرة التناظر على ثلاثة أحرف. [مساعدة: استخدم التمرين 22 مع الفرع (أ)].

24. أثبت أنه لأيّ عدد أولي p، تكون درجة حقل الانشطار على $\mathbb{Q}$ لـ x^p-1 هي $p-1$. [مساعدة: ارجع إلى النتيجة 17.23].

25. ليكن $\bar{F}$ و $\bar{F}'$ إغلاقين جبريين للحقل F، ولتكن $f(x) \in F[x]$، أثبت أنّ حقل الانشطار E على F لـ $f(x)$ في $\bar{F}$، يماثل حقل الانشطار E' على F لـ $f(x)$ في $\bar{F}'$. [مساعدة: استخدم النتيجة 5.49].

الفصل 51 الامتدادات القابلة للفصل Separable Extensions

تكرارات أصفار كثيرة الحدود

تذكر أننا الآن نفترض دائمًا أنّ الامتدادات الجبرية للحقل F قيد الدراسة جميعها محتواة في إغلاق جبري محدد $\bar{F}$ لـ F.

هدفنا الآتي هو تحديد الشروط الواجب توافرها – لامتداد منتهٍ E لـ F – لكي يكون $\{E:F\}=[E:F]$. مفتاح الإجابة عن هذا السؤال هو افتراض تكرار أصفار كثيرات الحدود.

1.51 تعريف ليكن $f(x) \in F[x]$. يكون العنصر α من $\bar{F}$ حيث $f(\alpha) = 0$ **صفرًا ذا تكرار ν لـ $f(x)$** (**zero of $f(x)$ of multiplicity ν**)، إذا كان ν أكبر عدد صحيح، بحيث يكون $(x-\alpha)^{\nu}$ عاملًا من عوامل $f(x)$ في $\bar{F}[x]$. ■

تثبت المبرهنة الآتية أنّ تكرارات أصفار كثيرة حدود غير مختزلة ومعطاة على حقل، كلها متساوية. السهولة التي يمكننا بها إثبات هذه المبرهنة، هي دليل آخر على قوة تماثلات الترافق، وطريقتنا كلها في دراسة أصفار كثيرات الحدود هي عن طريق الدوال.

2.51 مبرهنة لتكن $f(x)$ غير مختزلة في $F[x]$. كل أصفار $f(x)$ في $\bar{F}$ لها التكرار نفسه.

البرهان لتكن α و β أصفارًا لـ $f(x)$ في $\bar{F}$ بحسب المبرهنة 3.48، يوجد تماثل ترافق. $\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \xrightarrow{\text{غامر}} F(\beta)$ بحسب النتيجة 4.49، يمكن تمديد $\psi_{\alpha,\beta}$ إلى تماثل $\tau : \bar{F} \to \bar{F}$. يُنتج τ تماثلا طبيعيًا $\tau_x : \bar{F}[x] \to \bar{F}[x]$، حيث $\tau_x(x) = x$. الآن، τ_x تترك $f(x)$ ثابتة؛ لأن $f(x) \in F[x]$ و $\psi_{\alpha,\beta}$ تترك F ثابتة. ولكن

$$\tau_x((x-\alpha)^{\nu}) = (x-\beta)^{\nu},$$

ما يثبت أنّ تكرار β في $f(x)$ أكبر أو يساوي تكرار α. بالطريقة نفسها يمكن الحصول على المتباينة العكسية؛ إذن، تكرار α يساوي تكرار β. ♦

3.51 نتيجة إذا كانت $f(x)$ غير مختزلة في $F[x]$، فيمكن تحليل $f(x)$ في $\bar{F}[x]$ على الصورة:

$$a\prod_i (x-\alpha_i)^{\nu},$$

حيث α_i الأصفار المختلفة لـ $f(x)$ في $\bar{F}$ و $a \in F$.

البرهان النتيجة مباشرة من المبرهنة 2.51. ♦

عند هذه النقطة، يحتمل أنه يتعيّن علينا الإثبات بمثال، أنّ ظاهرة الأصفار ذات التكرار أكبر من 1 لكثيرة حدود غير مختزلة، هي ظاهرة ممكنة الحدوث، وسوف نعرض لاحقًا في هذا الفصل، أنها يمكن أن تحدث فقط لكثيرة حدود في حقل غير منتهٍ ذي مميز $p \neq 0$.

4.51 مثال لتكن $E = \mathbb{Z}_p(y)$، حيث y غير معين. لتكن $t = y^p$، وليكن F الحقل الجزئي $\mathbb{Z}_p(t)$ من E. (انظر الشكل 5.51). الآن، $E = F(y)$ جبري على F؛ لأن y صفر لـ $(x^p - t) \in F[x]$. بحسب المبرهنة 13.29، $\text{irr}(y,F)$ يجب أن تقسم $x^p - t$ في $F[x]$. [في الحقيقة، $\text{irr}(y,F) = x^p - t$، وسنترك برهان هذا إلى التمارين انظر التمرين 10].

$$
\begin{array}{c}
E = \mathbb{Z}_p(y) = F(y) \\
| \\
F = \mathbb{Z}_p(t) = \mathbb{Z}_p(y^p) \\
| \\
\mathbb{Z}_p
\end{array}
$$

الشكل 5.51

لأنّ $F(y)$ لا يساوي F، فيجب أن تكون درجة $\text{irr}(y, F) \geq 2$، ولكن لاحظ أنّ

$$x^p - t = x^p - y^p = (x - y)^p,$$

لأن E ذو مميز p (انظر المبرهنة 19.48 والملاحظة التي بعدها).

إذن، y صفر لـ $\text{irr}(y,F)$ وذو تكرار > 1. في الحقيقة $x^p - t = \text{irr}(y,F)$، ما يعني أنّ تكرار y يساوي p. ▲

من الآن فصاعدًا، سنعتمد بصورة مكثفة على المبرهنة 7.49 ونتيجتها. تثبت المبرهنة 3.48 ونتيجتها أنه لامتداد جبري بسيط $F(\alpha)$ لـ F، يوجد تمديد واحد لتماثل العنصر المحايد i، الذي يربط F بـ F للأصفار المختلفة جميعها لـ $irr(\alpha,F)$، وهذه هي التمديدات الوحيدة لـ i؛ إذن، $\{F(\alpha):F\}$ يساوي عدد الأصفار المختلفة لـ $\text{irr}(\alpha,F)$.

بالنظر لعملنا في مبرهنة لاجرانج والمبرهنة 4.31، فيجب أن ندرك قوة مبرهنة مثل هذه المقبلة.

6.51 مبرهنة إذا كان E امتدادًا لـ F، فإنّ $\{E:F\}$ يقسم $[E:F]$.

البرهان بحسب المبرهنة 11.31، إذا كان E منتهيًا على F، فإنّ $E = F(\alpha_1, ..., \alpha_n)$، حيث $\alpha_i \in \overline{F}$. لتكن $\text{irr}(\alpha_i, F(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}))$ لها α_i بوصفه أحد أصفارها ألـ n_i التي لها جميعها التكرار v_i بحسب المبرهنة 2.51؛ إذن:

$$[F(\alpha_1, \cdots, \alpha_i) : F(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1})] = n_i v_i = \{F(\alpha_1, \cdots, \alpha_i) : F(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1})\} v_i .$$

بحسب المبرهنة 4.31 والنتيجة 10.49.

$$[E : F] = \prod_i n_i v_i$$

و

$$\{E : F\} = \prod_i n_i$$

إذن، $\{E:F\}$ تقسم $[E:F]$. ♦

الامتدادات القابلة للفصل

7.51 تعريف يسمى الامتداد المنتهي E لـ F **امتدادًا قابلاً للفصل على** F (**separable extension**)، إذا كان $\{E:F\}=[E:F]$. العنصر α في $\overline{F}$ قابل **للفصل** على F، إذا كان $F(\alpha)$ امتدادًا قابلًا للفصل على F. كثيرة الحدود غير المختزلة $f(x) \in F[x]$ **قابلة للفصل** على F، إذا كانت أصفار $f(x)$ في $\overline{F}$ جميعها **قابلة للفصل** على F. ■

8.51 مثال الحقل $E=\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ قابل للفصل على $\mathbb{Q}$؛ لأننا رأينا في المثال 8.50 أن $\{E:\mathbb{Q}\}=4=[E:\mathbb{Q}]$. ▲

ولجعل الأمور أكثر بساطة، سنحدد تعريفنا للامتدادت القابلة للفصل للحقل F على الامتدادات المنتهية E لـ F. للتعريف المقابل للامتدادات غير المنتهية، انظر التمرين 12.

نعلم أنّ $\{F(\alpha):F\}$ يساوي عدد الأصفار المختلفة لـ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$، وكذلك تكرار α في $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ مساوٍ لتكرار كل مرافق لـ α على F، بحسب المبرهنة 2.51.

إذن، α قابلة للفصل على F، إذا وفقط إذا كانت $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ لها أصفار ذات تكرار 1، وهذا يخبرنا بأنّ كثيرة الحدود غير المختزلة $f(x) \in F[x]$ قابلة للفصل على F، إذا وفقط إذا كانت أصفارها جميعها ذات تكرار 1.

9.51 مبرهنة إذا كان K امتدادًا منتهيًا لـ E، وكانت E امتدادًا منتهيًا لـ F، أي إنّ $F \le E \le K$، فإنّ K قابلة للفصل على F، إذا وفقط إذا كانت K قابلة للفصل على E و E قابلة للفصل على F.

البرهان: الآن:

$$[K:F]=[K:E][E:F],$$

و

$$\{K:F\}=\{K:E\}\{E:F\}.$$

إذا كانت K قابلة للفصل على F، فإنّ $[K:F]=\{K:F\}$، وهذا يجب أن يؤدي إلى أنّ $[K:E]=\{K:E\}$ و $[E:F]=\{E:F\}$؛ لأنه في كل حالة يقسم الدليل الدرجة بحسب المبرهنة 6.51 إذن، إذا كانت K قابلة للفصل على F، فإنّ K قابلة للفصل على E و E قابلة للفصل على F.

في المقابل، لاحظ أنّ $[K:E]=\{K:E\}$ و $[E:F]=\{E:F\}$ يؤدي إلى:

$$[K:F]=[K:E][E:F]=\{K:E\}\{E:F\}=\{K:F\}.$$ ♦

يمكن تعميم المبرهنة 9.51 بصورة واضحة – باستخدام الاستقراء الرياضي – إلى أيّ برج منته من الامتدادات المنتهية. الحقل الأعلى امتداد قابل للفصل على الحقل في الأسفل، إذا وفقط إذا كان كل حقل امتدادًا قابلًا للفصل على الحقل أسفله مباشرة.

10.51 نتيجة إذا كان E امتدادًا منتهيًا على F، فإنّ E قابل للفصل على F، إذا وفقط إذا كان كل α في E قابلًا للفصل على F.

البرهان افترض أنّ E قابل للفصل على F، ولتكن $\alpha \in E$. فإنّ

$$F \le F(\alpha) \le E,$$

وتثبت المبرهنة 9.51 أنّ $F(\alpha)$ قابل للفصل على F.

افترض – في الحالة المقابلة– أنّ كل $\alpha \in E$ قابلة للفصل على F، ولأنَّ E امتداد منتهٍ على F، فيوجد $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$، حيث:

$$F < F(\alpha_1) < F(\alpha_1, \alpha_2) < \cdots < E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

لأنَّ α_i قابلة للفصل على F، α_i قابلة للفصل على $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$؛ لأن

$$q(x) = \mathrm{irr}(\alpha_i, F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}))$$

تقسم $\mathrm{irr}(\alpha_i, F)$، وهذا يؤدي إلى أنّ α_i صفر لـ $q(x)$ ذو تكرار 1؛ إذن، $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ قابل للفصل على $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$؛ إذن، E قابل للفصل على F بحسب المبرهنة 9.51، معممة بالاستقراء الرياضي. ♦

الحقول الكاملة

نتحول الآن إلى إثبات أنّ α يمكن أن تفشل في أن تكون قابلة للفصل على F فقط، إذا كان F حقلًا غير منته ذا مميز $p \neq 0$، إحد الطرق هي تقديم المشتقات الشكلية لكثيرات الحدود، وعلى الرغم من أنها تقنية رائعة ومفيدة كذلك، فإننا – ورغبة في الاختصار– سنستخدم بدلاً منها التمهيدية الآتية، ستقدم المشتقات الشكلية في التمارين من 15 إلى 22.

11.51 تمهيدية ليكن $\bar{F}$ إغلاقًا جبريًا لـ F، ولتكن:

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

أي كثيرة حدود أحادية في $\bar{F}[x]$، فإذا كانت $(f(x))^m \in F[x]$ و $1 \neq 0$. m في F، فإن $f(x) \in F[x]$، أي إنّ كل $a_i \in F$.

البرهان يجب أن نثبت أنّ $a_i \in F$، سنعمل – باستخدام الاستقراء الرياضي على r– لإثبات أنّ $a_{n-r} \in F$. إذا كان $r = 1$

$$(f(x))^m = x^{mn} + (m \cdot 1)a_{n-1}x^{mn-1} + \cdots + a_0^m.$$

ولأنَّ $(f(x))^m \in F[x]$، فإننا نحصل وبوجه خاص على:

$$(m \cdot 1)a_{n-1} \in F$$

إذن، $a_{n-1} \in F$ ؛ لأنّ $1 \neq 0$. m في F.

بوصفها فرضية للاستقراء، افترض أنّ $a_{n-r} \in F$ و $r = 1, 2, \ldots, k$؛ إذن، معامل $x^{mn-(k+1)}$ في $(f(x))^m$ يكون على الصورة:

$$(m \cdot 1)a_{n-(k+1)} + g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}),$$

حيث $g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ هي تعبير بكثيرة حدود شكلية في $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}$. بحسب فرضية الاستقراء التي ذكرناها آنفاً، $g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) \in F$، وهكذا، فإنّ $a_{n-(k+1)} \in F$؛ لأن $m \cdot 1 \neq 0$ في F. ♦

نحن الآن في موضع معالجة الحقول F ذات المميز صفر، وإثبات أنه لامتداد منته E لـ F، فإنّ $[E:F]=\{E:F\}$. وبحسب التعريف، هذا يعادل إثبات أنّ كل امتداد منتهٍ لحقل ذيٍ مميز صفر، يكون امتدادًا قابلًا للفصل، نعطي في البداية تعريفًا.

12.51 تعريف يكون الحقل كاملاً (**Perfect**) إذا كان كل امتداد منتهٍ قابلًا للفصل. ■

13.51 مبرهنة كل حقل مميزه صفر كامل.

البرهان ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F ذي المميز صفر، ولتكن $\alpha \in E$؛ إذن، تتحل $f(x) = \text{irr}(\alpha,F)$ في $\overline{F}[x]$ إلى $\prod_i (x-\alpha_i)^v$ ، حيث α_i الأصفار المختلفة لـ $\text{irr}(\alpha,F)$ وافترض $\alpha=\alpha_1$؛ إذن:

$$f(x)=\left(\prod_i (x-\alpha_i)\right)^v$$

ولأن $v.\ 1 \neq 0$ في حقل F مميزه صفر، فيجب أن يكون:

$$\left(\prod_i (x-\alpha_i)\right) \in F[x]$$

بحسب التمهيدية 11.51؛ ولأن $f(x)$ غير مختزلة وذات درجة صغرى في $F[x]$ و α صفر لها، نرى أنّ $v=1$؛ إذن، α قابلة للفصل على F لكل $\alpha \in E$. وهذا يعني، وبحسب النتيجة 10.51 أنّ E امتداد قابل للفصل على F. ♦

ستدخلنا التمهيدية 11.51 لحالة الحقول المنتهية على الرغم من أنّ برهانها أصعب قليلاً.

14.51 مبرهنة كل حقل منتهٍ كامل.

البرهان ليكن F حقلًا منتهيًا مميزه p، وليكن E امتدادًا منتهيًا لـ F، ولتكن $\alpha \in E$. نريد إثبات أنّ α قابلة للفصل على F. الآن، $f(x)=\text{irr}(\alpha,F)$ تتحل في $\overline{F}$ إلى $\prod_i (x-\alpha_i)^v$ ، حيث α_i الأصفار المختلفة لـ $f(x)$، وافترض أنّ $\alpha=\alpha_1$. لتكن $v=p^t e$ ،

حيث p لا تقسم e؛ إذن:

$$f(x)=\prod_i (x-\alpha_i)^v=\left(\prod_i (x-\alpha_i)^{p^t}\right)^e$$

تنتمي إلى $F[x]$، وبحسب التمهيدية 11.51 ، فإنّ $\prod_i (x-\alpha_i)^{p^t}$ تنتمي إلى $F[x]$؛ لأن $e.1 \neq 0$ في F، ولأن $f(x)=\text{irr}(\alpha,F)$ ذات درجة صغرى على F و α صفر لها، فيجب أن يكون $e=1$.

تثبت المبرهنة 19.48 والملاحظة اللاحقة لها أنّ:

$$f(x)=\prod_i (x-\alpha_i)^{p^t}=\left(\prod_i x^{p^t}-\alpha_t^{p^t}\right)$$

إذن، إذا افترضنا $f(x)$ مثل $g(x^{p^t})$، فيجب أن تكون $g(x) \in F[x]$. الآن، $g(x)$ قابلة للفصل على F وأصفارها المختلفة $\alpha_i^{p^t}$. افترض $F(\alpha_1^{p^t}) = F(\alpha^{p^t})$؛ إذن، $F\left(\alpha^{p^t}\right)$ قابل للفصل على F، ولأنَّ $x^{p^t} - \alpha^{p^t} = (x-\alpha)^{p^t}$، فنرى أنّ α هو الصفر الوحيد لـ $x^{p^t} - \alpha^{p^t}$ في $\overline{F}$. يجب أن يكون كذلك حقلًا منتهيًا – لأنه فضاء متجهات منتهي البعد على حقل منتهٍ F– إذن، الدالة

$$\sigma_p : F(\alpha^{p^t}) \to F(\alpha^{p^t})$$

المعطاة بـ $\sigma_p(a) = a^p$، حيث $a \in F(\alpha^{p^t})$، تماثل ذاتي على حسب المبرهنة 19.48. وعليه، $(\sigma_p)^t$ تماثل ذاتي كذلك على، $F(\alpha^{p^t})$، و $(\sigma_p)^t(a) = a^{p^t}$

لأنَّ التماثل الذاتي على $F(\alpha^{p^t})$ هو دالة غامرة، فيوجد $\beta \in F(\alpha^{p^t})$، بحيث $(\sigma_p)^t(\beta) = \alpha^{p^t}$. وهكذا، $\beta^{p^t} = \alpha^{p^t}$ وقد رأينا أن α هو الصفر الوحيد لـ $x^{p^t} - \alpha^{p^t}$؛ ولذلك، فيجب أن يكون $\beta = \alpha$. لأنّ $\beta \in F\left(\alpha^{p^t}\right)$، فإننا نحصل على $F(\alpha) = F\left(\alpha^{p^t}\right)$، ولأنَّ $F\left(\alpha^{p^t}\right)$ كانت قابلة للفصل على F، فإننا نرى الآن أنّ $F(\alpha)$ قابلة للفصل على F؛ لذلك، α قابلة للفصل على F و $t = 0$.

أثبتنا أنه لـ $\alpha \in E$، α قابلة للفصل على F؛ إذن وبحسب النتيجة 10.51، E امتداد قابل للفصل على F. ♦

لقد أكملنا هدفنا، الذي كان إثبات أنّ كل حقل مميزه 0 وكل حقل منتهٍ له فقط امتدادات منتهية قابلة للفصل، أي إنّ هذه الحقول كاملة، وللامتدادات المنتهية E لمثل هذه الحقول الكاملة F، يكون $[E:F]=\{E:F\}$.

مبرهنة العناصر البدائية

المبرهنة الآتية كلاسيكية في مبرهنة الحقول.

15.51 مبرهنة (**مبرهنة العناصر البدائية**): ليكن E امتدادًا منتهيًا قابلًا للفصل على الحقل F؛ إذن، يوجد $\alpha \in E$ بحيث $F = F(\alpha)$ (مثل هذا العنصر α يسمى **عنصرًا بدائيًا** (**Primitive element**))، بمعنى أنّ الامتداد المنتهي القابل للفصل لحقل يكون امتدادًا بسيطًا.

البرهان: إذا كان F حقلًا منتهيًا، فإنّ E حقل منته كذلك، لتكن α مولدة للزمرة الدورية E^* من العناصر غير الصفرية في E بالنسبة إلى الضرب. (انظر المبرهنة 5.33). من الواضح أنّ $E=F(\alpha)$، وهكذا فإنّ α عنصر بدائي في هذه الحالة.

نفترض الآن أنّ F غير منته، ونثبت مبرهنتنا في حالة $E=F(\beta,\gamma)$، فالمناقشة بالاستدلال الرياضي من هنا إلى الحالة العامة واضحة. لتكن $\mathrm{irr}(\beta, F)$ لها أصفار مختلفة $\beta = \beta_1,\ldots, \beta_n$، ولتكن $\mathrm{irr}(\gamma, F)$ لها أصفار مختلفة $\gamma = \gamma_1,\ldots,\gamma_m$ في $\overline{F}$، حيث الأصفار جميعها ذات تكرار 1؛ لأن E امتداد قابل للفصل على F، ولأنَّ F غير منتهٍ، فنستطيع أن نجد $a \in F$، بحيث:

$$a \neq (\beta_i - \beta)/(\gamma - \gamma_j)$$

لكل i و j حيث $j \neq 1$ ، بمعنى أنّ $a(\gamma - \gamma_j) \neq \beta_i - \beta$ ، وبجعل $a = \beta + a\gamma$، فإننا نحصل على $\alpha = \beta + a\gamma \neq \beta_i + a\gamma_j$؛ إذن،

$$\alpha - a\gamma_j \neq \beta_i$$

لكل i ولكل $j \neq 1$. لتكن $f(x) = \operatorname{irr}(\beta, F)$، وافترض

$$h(x) = f(\alpha - ax) \in (F(\alpha))[x].$$

الآن، $h(\gamma) = f(\beta) = 0$، على أيّ حال، $h(\gamma_j) \neq 0$ لكل $j \neq 1$ بالتعريف؛ لأن β_i هي الأصفار الوحيدة لـ $f(x)$؛ إذن، $h(x)$ و $g(x) = \operatorname{irr}(\gamma, F)$ لهما عامل مشترك في $(F(\alpha)[x])$، وهو $\operatorname{irr}(\gamma, F(\alpha))$ الذي يجب أن يكون خطيًّا؛ لأن γ هو الصفر الوحيد المشترك لـ $g(x)$ و $h(x)$؛ إذن، $\gamma \in F(\alpha)$؛ ولذلك، $\beta = \alpha - \alpha\gamma$ تنتمي لـ $F(\alpha)$؛ إذن، $F(\beta, \gamma) = F(a)$. ♦

16.51 نتيجة يكون الامتداد المنتهي لحقل مميزه صفر امتدادًا بسيطًا.

البرهان تثبت النتيجة مباشرة من المبرهنتين 13.51 و 15.51. ♦

نرى أنّ الاحتمال الوحيد "للحالة السيئة" حيث يمكن أن يكون الامتداد المنتهي غير بسيط هو الامتداد المنتهي لحقل غير منتهٍ مميزه $p \neq 0$.

تمارين 51

حسابات

في التمارين من 1 إلى 4، أوجد α بحيث يكون الحقل المعطى $\mathbb{Q}(\alpha)$، وأثبت أنّ α هي بالتأكيد في الحقل المعطى، تحقق مستخدمًا الحسابات المباشرة أنّ المولدات المعطاة للامتداد على $\mathbb{Q}$ ، يمكن بالتأكيد التعبير عنها بوصفها كثيرة حدود شكلية باستخدام α ومعاملات من $\mathbb{Q}$.

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ **2.** $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{2})$

3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ **4.** $\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2})$

مفاهيم

في التمرينين 5 و6، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب، – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

5. ليكن $\overline{F}$ الإغلاق الجبري للحقل F، تكرار الصفر $\alpha \in F$ لكثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$ هو $\nu \in \mathbb{Z}^+$، إذا وفقط إذا كان $(x-\alpha)^\nu$ هو أعلى قوة لـ $x-\alpha$ ، وتكون عاملًا لـ $f(x)$ في $F[x]$.

6. ليكن $\overline{F}$ إغلاقًا جبريًا لـ F. العنصر α في $\overline{F}$ قابل للفصل على F ، إذا وفقط إذا كانت α صفرًا ذا تكرار 1 لـ$\mathrm{irr}(\alpha, F)$.

7. أعطِ مثالاً على $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ لا أصفار لها في $\mathbb{Q}$ ، ولكن أصفارها في $\mathbb{C}$ لها تكرار 2. فسّر كيف يتوافق هذا مع المبرهنة 13.51، التي تثبت أنّ $\mathbb{Q}$ حقل كامل.

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. كل امتداد منتهٍ لأيّ حقل F قابل للفصل على F.

______ ب. كل امتداد منتهٍ لأيّ حقل منتهٍ F قابل للفصل على F.

______ جـ. كل حقل ذي مميز 0 كامل.

______ د. كل كثيرة حدود من الدرجة n على أيّ حقل F، لها دائمًا n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$.

______ هـ. كل كثيرة حدود من الدرجة n على أيّ حقل كامل F ، لها دائمًا n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$.

______ و. كل كثيرة حدود غير مختزلة من الدرجة n على أيّ حقل كامل F ، لها دائمًا n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$.

______ ز. كل حقل مغلق جبريًا كامل.

______ ح. كل حقل F له امتداد جبري E بحيث يكون كاملاً.

______ ط. إذا كان الحقل E امتداد انشطار منتهيًا قابلًا للفصل على F، فإنّ $|G(E/F)| = [E:F]$.

______ ي. إذا كان الحقل E امتداد انشطار منتهيًا لـ F، فإنّ $|G(E/F)|$ يقسم $[E:F]$.

براهين

9. أثبت أنه إذا كان كلا $\alpha, \beta \in \overline{F}$ قابلين للفصل على F، فإنّ $\alpha \pm \beta$ ،$\alpha\beta$ و α/β، إذا كانت $\beta \neq 0$ كلها قابلة للفصل على F.
[مساعدة: استخدم المبرهنة 9.51 ونتيجتها].

10. أثبت أنّ $\{1, y, \ldots, y^{p-1}\}$ أساس لـ $\mathbb{Z}_p(y)$ على $\mathbb{Z}_p(y^p)$، حيث y غير معينة. بالرجوع إلى المثال 4.51، استنتج بمناقشة الدرجة أنّ $x^p - t$ غير مختزلة على $\mathbb{Z}_p(t)$، حيث $t = y^p$.

11. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًّا لحقل كامل F، فإنّ E كامل.

12. الامتداد الجبري – الذي يمكن أن يكون غير منتهٍ– E على الحقل F **امتداد قابل للفصل على** F (**Separable extension**)، إذا كان لكل $\alpha \in E$ ، $F(\alpha)$ امتداد قابل للفصل على F، بالمعنى المعرّف في الكتاب. أثبت أنّ E امتداد يمكن أن يكون غير منتهٍ – قابل للفصل على F و K امتداد – يمكن أن يكون غير منتهٍ – قابل للفصل على E، فإنّ K امتداد قابل للفصل على F.

13. ليكن E امتدادًا جبريًّا للحقل F. أثبت أنّ مجموعة عناصر E جميعها القابلة للفصل على F تشكل حقلًا جزئيًّا من E، **الإغلاق القابل للفصل لـ** F في E (**Separable Closure**). [مساعدة: استخدم التمرين 9].

14. ليكن E حقلًا منتهيًا من الرتبة p^n.

أ. أثبت أنّ التماثل الذاتي لفروبينس σ_p له رتبة n.

ب. استنتج من الفرع (أ) أنّ $G(E/\mathbb{Z}_p)$ دورية من الرتبة n ومولدة بـ σ_p.

[مساعدة: تذكر أنّ $|G(E/F)| = \{E : F\} = [E : F]$ لامتداد الانشطار المنتهي القابل للفصل E على F].

تقدم التمارين من 15 إلى 22 المشتقات الشكلية في $F[x]$.

15. ليكن F أيّ حقل، ولتكن $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_n x^n$ في $F[x]$. **المشتقة** $f'(x)$ لـ $f(x)$ (**derivative**) هي كثيرة الحدود

$$f'(x) = a_1 + \cdots + (i \cdot 1) a_i x^{i-1} + \cdots + (n \cdot 1) a_n x^{n-1}$$

حيث $i.1$ لها معناها الطبيعي لـ $i \in \mathbb{Z}^+$ و $1 \in F$. هذه مشتقات شكلية؛ لا «نهايات» متطلبة هنا.

أ. أثبت أنّ الدالة $D: F[x] \to F[x]$ المعطاة بـ $D(f(x)) = f'(x)$ ، تشاكل على $\langle F[x], + \rangle$.

ب. أوجد نواة D في حالة مميز F يساوي 0.

جـ. أوجد نواة D في حالة مميز F يساوي $p \neq 0$.

16. استكمالاً لأفكار التمرين 15، أثبت أنّ:

أ. $D(\alpha f(x)) = \alpha D(f(x))$ لكل $f(x) \in F[x]$ و $\alpha \in F$.

ب. $D(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ لكل $f(x), g(x) \in F[x]$. [مساعدة: استخدم الفرع (أ) من هذا التمرين والتمرين السابق، ثم أكمل مستخدمًا الاستقراء الرياضي على درجة $f(x)g(x)$].

جـ. $D((f(x))^m) = (m \cdot 1) f(x)^{m-1} f'(x)$ **لكل** $f(x) \in F[x]$. [**مساعدة: استخدم الفرع (ب)**].

17. لتكن $f(x) \in F[x]$، وليكن $\alpha \in \overline{F}$ صفرًا لـ $f(x)$ تكراره ν ، فأثبت أنّ $\nu > 1$ إذا وفقط إذا كانت α صفرًا كذلك لـ $f'(x)$.

[مساعدة: طبّق الفرع (ب) و(جـ) في التمرين 16 على التحليل $f(x) = (x-\alpha)^\nu g(x)$ لـ $f(x)$ في الحلقة].

18. أثبت مستخدمًا التمرين 17 ، أنّ كل كثيرة حدود غير مختزلة على حقل F مميزه 0 قابلة للفصل.

[مساعدة: استخدم حقيقة أنّ $\mathrm{irr}(\alpha, F)$ كثيرة حدود ذات درجة صغرى لـ α على F].

19. أثبت مستخدمًا التمرين 17 ، أنّ كثيرة الحدود غير المختزلة $q(x)$ على حقل F مميزه $p \neq 0$ غير قابلة للفصل، إذا وفقط إذا كان كل أسّ لكل حدّ في $q(x)$ يقسم بـ p.

20. عمّم التمرين 17، بإثبات أنّ $f(x) \in F[x]$ لا أصفار لها بتكرار > 1 ، إذا وفقط إذا كانت $f(x)$ و $f'(x)$ بلا قواسم مشتركة في $\overline{F}[x]$ من درجة > 0.

21. بجعل العمل أكثر صعوبة من العمل في التمرين 20، أثبت أنّ $f(x) \in F[x]$ لا أصفار لها بتكرار > 1، إذا وفقط إذا كانت $f(x)$ و $f'(x)$ بلا قواسم مشتركة غير ثابتة في $F[x]$. [مساعدة: استخدم المبرهنة 9.46 في إثبات أنه إذا كان 1 هو القاسم المشترك الأكبر لـ $f(x)$ و $f'(x)$ في $F[x]$، فإنه القاسم المشترك الأكبر لهما في $\overline{F}[x]$ كذلك].

22. صف إجراءً حسابيًّا عمليًّا لتحديد ما إذا كانت $f(x) \in F[x]$ لها أصفار تكرارها > 1، من غير إيجاد أصفار $f(x)$ فعليًّا. [مساعدة: استخدم التمرين 21].

الفصل 52 الامتدادات غير القابلة للفصل كليًّا[1] Totally Inseparable Extensions

يثبت هذا الفصل أنّ الامتداد المنتهي E للحقل F يمكن أن يقسم إلى مرحلتين، هما: امتداد قابل للفصل K على F، متبوعًا بامتداد آخر لـ K إلى E، الذي يكون أبعد عن أنّه قابل للفصل بوصفه أبعد ما يمكن أن يتخيله المرء.

سنطور نظريتنا عن الامتدادات غير القابلة للفصل كليًّا بطريقة موزاية لطريقة تطوير الامتدادات القابلة للفصل.

1.52 تعريف يكون الامتداد المنتهي E للحقل F **غير قابل للفصل كليًّا على** F **(totally inseparable extension)**، إذا كان $\{E:F\} = 1 < [E:F]$، ويكون العنصر a في $\overline{F}$ **غير قابل للفصل كليًّا على** F، إذا كان $F(a)$ غير قابل للفصل كليًّا على F. ■

نعلم أنّ $\{F(\alpha):F\}$ يساوي عدد الأصفار المختلفة لـ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$؛ إذن، α غير قابلة للفصل كليًّا على F، إذا وفقط إذا كانت $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ لها صفر واحد تكراره > 1.

2.52 مثال بالعودة إلى المثال 5.51، نرى أنّ $\mathbb{Z}_p(y)$ غير قابل للفصل كليًّا على $\mathbb{Z}_p(y^p)$، حيث y غير معينة. ▲

3.52 مبرهنة (نظيرة المبرهنة 9.51): إذا كان K امتدادًا منتهيًا لـ E، وكان E امتدادًا منتهيًا لـ F، و $F \le E \le K$، فإنّ K غير قابل للفصل كليًّا على F، إذا وفقط إذا كان K غير قابل للفصل كليًّا على E، و E غير قابل للفصل كليًّا على F.

البرهان لأنّ $F < E < K$، فإننا نحصل على $[K:E] > 1$ و $[E:F] > 1$. افترض أنّ K غير قابل للفصل كليًّا على F؛ إذن، $\{K:F\} = 1$، و $\{K:F\} = \{K:E\}\{E:F\}$،

إذن، يجب أن نحصل على:

$$\{K:E\} = 1 < [K:E] \quad \text{و} \quad \{E:F\} = 1 < [E:F]$$

وبذلك، K غير قابل للفصل كليًّا على E، و E غير قابل للفصل كليًا على F.

في المقابل، إذا كان K غير قابل للفصل كليًّا على E، و E غير قابل للفصل كليًّا على F، فإنّ:

$$\{K:F\} = \{K:E\}\{E:F\} = (1)(1) = 1,$$

و $[K:F] > 1$؛ إذن K غير قابل للفصل كليًّا على F. ◆

4.52 نتيجة (نظيرة النتيجة **10.51**): إذا كان E امتدادًا منتهيًا لـ F، فإنّ E غير قابل للفصل كليًّا على F، إذا وفقط إذا كانت كل α في E و $\alpha \notin F$ غير قابلة للفصل كليًّا على F.

البرهان افترض أنّ E غير قابل للفصل على F، ولتكن $\alpha \in E$ و $\alpha \notin F$، فإنّ

$$F < F(\alpha) \le E$$

إذا كان $F(\alpha) = E$، نكون قد انتهينا، بحسب تعريف α غير قابلة للفصل كليًّا على F.

إذا كان $F < F(\alpha) < E$، فإنّ المبرهنة 3.52 تثبت ذلك؛ ولأن E غير قابل للفصل كليًّا على F، فإنّ $F(\alpha)$ غير قابل للفصل كليًّا على F.

---

[1] لن يستخدم هذا الفصل فيما تبقى من الكتاب

في المقابل، افترض أنه لكل $\alpha \in E$, $\alpha \notin F$ و α غير قابلة للفصل كليًّا على F. لأنَّ E منتهٍ على F، فيوجد $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$، بحيث:

$$F < F(\alpha_1) < F(\alpha_1, \alpha_2) < \cdots < E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

ولأنَّ كل α_i غير قابلة للفصل كليًّا على F، α_i غير قابلة للفصل كليًّا على $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$؛ لأن $q(x) = \text{irr}(\alpha_i, F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}))$ تقسم $\text{irr}(\alpha_i, F)$ بحيث α_i هو الصفر الوحيد لـ $q(x)$ وله تكرار > 1؛ إذن، $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ غير قابل للفصل كليًّا على $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$، و E غير قابل للفصل كليًّا على F، بحسب المبرهنة 3.52 معممة باستخدام الاستقراء الرياضي. ♦

لقد قمنا بعمل موازٍ لعملنا في الفصل 51، بحيث نستطيع التعامل مع هذه الأفكار معًا.

الإغلاقات القابلة للفصل

نأتي الآن للسبب الرئيس لإدراج هذه المادة.

5.52 مبرهنة ليكن F ذا مميز $p \neq 0$، وليكن E امتدادًا منتهيًا لـ F؛ إذن، $\alpha \in E$ و $\alpha \notin F$ غير قابلة للفصل كليًّا على F، إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح $t \geq 1$، بحيث $\alpha^{p^t} \in F$.

وكذلك يوجد امتداد وحيد K لـ F، بحيث $F \leq K \leq E$ و K قابل للفصل على F، وإما $E = K$ أو E غير قابل للفصل كليًّا على K.

البرهان لتكن $\alpha \in E$ ، $\alpha \notin F$، غير قابلة للفصل كليًّا على F؛ إذن، يوجد صفر وحيد α لـ $\text{irr}(\alpha, F)$ (تكراره > 1 ، وكما جاء في إثبات المبرهنة 14.51، يجب أن تكون $\text{irr}(\alpha, F)$ على الصورة:

$$x^{p^t} - \alpha^{p^t}.$$

إذن، $\alpha^{p^t} \in F$، حيث $t \geq 1$.

في المقابل، إذا كانت $\alpha^{p^t} \in F$ حيث $t \geq 1$ و $\alpha \in E$، $\alpha \notin F$ فإنّ:

$$x^{p^t} - \alpha^{p^t} = (x - \alpha)^{p^t}$$

و $(x^{p^t} - \alpha^{p^t}) \in F[x]$ ، مثبتًا أنّ $\text{irr}(\alpha, F)$ تقسم $(x - \alpha)^{p^t}$ ؛ إذن، α هو الصفر الوحيد لـ $\text{irr}(\alpha, F)$ ، وهذا الصفر تكراره > 1، ما يعني أنّ α غير قابلة للفصل كليًّا على F.

للجزء الثاني من المبرهنة، لتكن $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$؛ إذا كان

$$\text{irr}(\alpha_i, F) = \prod_j \left(x^{p^{t_i}} - \alpha_j p^{t_i} \right)$$

حيث $\alpha_{i1} = \alpha_i$، لتكن $\beta_j = \alpha_j p^{t_i}$ ، نحصل على $F(\beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{n1}) \leq E$ ، و β_{i1} صفر لـ

$$f_i(x) = \prod_j \left(x - \beta_j \right)$$

حيث $f_i(x) \in F[x]$؛ لأنَّ الرفع للقوة p يعطي التماثل σ_p من E إلى حقل جزئي من E، الرفع إلى القوة p^t هو دالة التماثل $(\sigma_p)^t$ من E إلى حقل جزئي من E، ولأنَّ $\alpha_{,j}$ كلها مختلفة لـ i محددة، فكذلك ألـ $\beta_{,j}$ لـ i محددة؛ لذلك، $\beta_{,j}$ قابلة للفصل على F،

لأنه صفر لكثيرة الحدود $f_i(x)$ في $F[x]$، التي أصفارها ذات تكرار 1؛ إذن:

$$K = F(\beta_{11}, \beta_{21}, \cdots, \beta_{n1})$$

قابل للفصل على F، بحسب برهان النتيجة 10.51.

إذا كانت كل ألـ $p^{ti} \neq 1$، فإنّ $K=E$، أمّا إذا كان بعض ألـ $p^{ti} \neq 1$، فإنّ $K \neq E$، و$\alpha_i^{p^{ti}} = \beta_{i1}$ عنصر في K، ما يثبت أنّ كل $\alpha_i \notin K$ غير قابل للفصل كليًا على K– بحسب الجزء الأول من هذه المبرهنة –.

إذن، $E = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ غير قابلة للفصل كليًا على K– بحسب برهان النتيجة 4.52.

ينتج من النتيجتين 10.51 و4.52 أنّ الحقل K يتكوّن من العناصر α جميعها في E القابلة للفصل على F؛ إذن K وحيد. ◆

6.52 تعريف يسمى الحقل الوحيد K في المبرهنة 5.52 **الإغلاق القابل للفصل** لـ F في E **(separable closure)**. ■

تعرض المبرهنة السابقة التركيب الدقيق للامتدادات غير القابلة للفصل كليًّا لحقل مميزه $p \neq 0$. يمكن الحصول على هذا الامتداد بتكرار إضافة الأصفار التي ترتيبها p لعناصر ليست قوًى لـ p.

نشير إلى أنّ المبرهنة 5.52 صحيحة للامتدادات الجبرية غير المنتهية E لـ F. إثبات الجزء الأول من المبرهنة صحيح كذلك في حالة الامتدادات غير المنتهية، أما الجزء الثاني، فلأنَّ $\alpha \pm \beta$، $\alpha\beta$، و α/β، عندما $\beta \neq 0$ كلها محتواة في الحقل $F(\alpha,\beta)$، فإنّ عناصر E جميعها القابلة للفصل على F تشكل حقلًا جزئيًّا K من E – **الإغلاق القابل للفصل** لـ F في E ، ما يؤدي إلى أنّ $\alpha \in E$ و$\alpha \notin K$ غير قابلة للفصل كليًّا على K؛ لأن α ومعاملات $\mathrm{irr}(\alpha, K)$ جميعها محتواة في امتداد منتهٍ لـ F، وعليه، يمكن تطبيق المبرهنة 5.52.

تمارين 52

مفاهيم

1. لتكن y و z غير معينة، ولتكن $u = y^{12}$ و $v = z^{18}$. صف الإغلاق القابل للفصل لـِ $\mathbb{Z}_3(u, v)$ في $\mathbb{Z}_3(y, z)$.
2. لتكن y و z غير معينة، ولتكن $u = y^{12}$ و $v = y^2 z^{18}$. صف الإغلاق القابل للفصل لـِ $\mathbb{Z}_3(u, v)$ في $\mathbb{Z}_3(y, z)$.
3. بالرجوع إلى التمرين 1، صف الإغلاق غير القابل للفصل كليًّا (انظر التمرين 6) لـ $\mathbb{Z}_3(u,v)$ في $\mathbb{Z}_3(y,z)$.
4. بالرجوع إلى التمرين 2، صف الإغلاق غير القابل للفصل كليًّا لـِ $\mathbb{Z}_3(u, v)$ في $\mathbb{Z}_3(y, z)$. (انظر التمرين 6).
5. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. لا يوجد امتداد جبري فعلي لحقل غير منتهٍ مميزه $p \neq 0$، يمكن أن يكون امتدادًا قابلًا للفصل.

______ ب. إذا كان $F(\alpha)$ غير قابل للفصل كليًّا على F ذي المميز $p \neq 0$، فإنّ $\alpha^{p^t} \in F$ حيث $t > 0$.

______ جـ. لغير المعين y، $\mathbb{Z}_5(y)$، قابل للفصل على $\mathbb{Z}_5(y^5)$.

______ د. لغير المعين y، $\mathbb{Z}_5(y)$، قابل للفصل على $\mathbb{Z}_5(y^{10})$.

______ هـ. لغير المعين y، $\mathbb{Z}_5(y)$، غير قابل للفصل كليًّا على $\mathbb{Z}_5(y^{10})$.

______ و. إذا كان F حقلًا و a جبرية على F، فإنّ a إما قابلة للفصل أو غير قابلة للفصل كليًّا على F.

______ ز. إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، فإنّ لـ F إغلاقًا قابلًا للفصل في E.

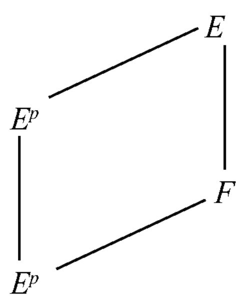
______ ح. إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، فإنّ E غير قابل للفصل كليًّا على الإغلاق القابل للفصل لـ F في E.

______ ط. إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، و E ليس امتدادًا قابلًا للفصل على F، فإنّ E غير قابل للفصل كليًّا على الإغلاق القابل للفصل لـ F في E.

______ ي. إذا كانت α غير قابلة للفصل كليًّا على F، فإنّ α هو الصفر الوحيد لـ $\mathrm{irr}(\alpha, F)$.

براهين

6. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، فإنّ اتحاد F ومجموعة عناصر E غير القابلة للفصل كليًّا على F، تشكل حقلًا جزئيًّا من E، **الإغلاق غير القابل للفصل كليًّا لـ F في E** (**totally inseparable closure**).
7. أثبت أنّ الحقل F ذا المميز $p \neq 0$ كامل إذا وفقط إذا كان $F^p = F$، بمعنى أنّ كل عنصر في F هو القوة p لعنصر في F.
8. ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F ذي المميز p. باستخدام مصطلحات التمرين 7، أثبت أنّ $E^p = E$ إذا وفقط إذا كان $E^p = E$. [مساعدة: الدالة $\sigma_p: E \to E$ المعرفة بـ $\sigma_p(\alpha) = \alpha^p$، حيث $\alpha \in E$ تماثل إلى حقل جزئي من E. افترض المخطط في الشكل 7.52 ثم ناقش الدرجة].



الشكل 7.52

الفصل 53 مبرهنة جالوا Galois Theory

ملخَص هذا الفصل ربما يكون ذروة مادة البحث في كل الكتاب، حيث تعطي مبرهنة جالوا التفاعل الجميل بين نظريتي الزمر والحقول، وقد كان عملنا يقصد هذا الهدف بدءًا من الفصل 48، وسنبدأ باستذكار النتائج الرئيسة التي طوّرناها، حيث يتعيّن أن تكون في الذاكرة تمامًا:

1. ليكن $F \le E \le \overline{F}$ ، $\alpha \in E$ ، ولتكن β مرافقة لـ α على F بمعنى أنّ β صفر كذلك لـ $\mathrm{irr}(\alpha, F)$؛ إذن، يوجد تماثل $\psi_{\alpha,\beta}$ يربط $F(\alpha)$ بصورة غامرة مع $F(\beta)$، ويترك F ثابتة، ويربط α بـ (β).
2. إذا كان $F \le E \le \overline{F}$ و $\alpha \in E$ ، فإنّ التماثل الذاتي σ على $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يجب أن يربط α بأحد مرافقات α على F.
3. إذا كانت $F \le E$، تشكل مجموعة التماثلات الذاتية على E التي تترك F ثابتة الزمرة $G(E/F)$، فلأيّ مجموعة جزئية S من $G(E/F)$، تشكل مجموعة عناصر E جميعها التي تُترك ثابتة بعناصر S كلها، حقلًا E_S، وكذلك فإنّ $F \le E_{G(E/F)}$.
4. يكون الحقل E، $F \le E \le \overline{F}$، حقل انشطار على F ، إذا وفقط إذا كان كل تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، تماثل ذاتي على E، وإذا كان E امتدادًا منتهيًا وحقل انشطار على F، فإنّ $|G(F/E)| = \{F : E\}$.
5. إذا كان E امتدادًا منتهيًا لـ F، فإنّ $\{E : F\}$ يقسم $[E : F]$، وإذا كان E قابلًا للفصل على F كذلك، فإنّ $[E : F] = \{E : F\}$، وكذلك فإنّ E قابل للفصل على F، إذا وفقط إذا كانت أصفار $\mathrm{irr}\,(\alpha,F)$ جميعها تكرارها 1، لكل $\alpha \in E$.
6. إذا كان E امتدادًا منتهيًا على F وقابلًا للفصل وحقل انشطار على F، فإنّ:
$$|G(E/F)| = \{E : F\} = [E : F].$$

الامتدادات الناظمية

سنكون مهتمين بالامتدادات المنتهية K لـ F ، بحيث إنّ كل تماثل من K إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يكون تماثلًا ذاتيًا على K، ويحقق:

$$[K : F] = \{K : F\}.$$

بالنظر إلى النتيجتين 4 و5، هذه هي الامتدادات المنتهية لـ F التي تكون قابلة للفصل وحقول انشطار على F.

1.53 تعريف يكون الامتداد المنتهي K لـ F **امتدادًا ناظميًا منتهيًا لـ F (finite normal extension)** ، إذا كان K قابلًا للفصل وحقل انشطار على F. ■

افترض أنّ K امتداد منته ناظمي على F، حيث $F \le K$ –كالعادة– إذن وبحسب النتيجة 4، كل تماثل على $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، ينتج تماثلًا ذاتيًا على K، وكما في السابق نترك $G(K/F)$ لتكون زمرة التماثلات الذاتية جميعها المعرفة على K وتترك F ثابتة، إذ سنكون جاهزين بعد خطوة واحدة أخرى لتوضيح المبرهنة الأساسية .

2.53 مبرهنة ليكن K امتدادًا منتهيًا ناظميًا على F، وليكن E امتدادًا لـ F، بحيث $F \le E \le K \le \overline{F}$ ؛ إذن، K امتداد منتهٍ ناظمي على E، و $G(K/E)$ هو بالتحديد الزمرة الجزئية.

من $G(K/F)$ المكوّنة من التماثلات الذاتية التي تترك E ثابتة. إضافة إلى ذلك، يولد التماثلان الذاتيان σ و τ من $G(K/F)$ التماثل نفسه من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$، إذا وفقط إذا كانا في المجموعة المشاركة اليسرى نفسها لـ $G(K/E)$ في $G(K/F)$.

البرهان إذا كان K حقل انشطار للمجموعة $\{f_i(x) \mid i \in I\}$ من كثيرات الحدود في $F[x]$، فإنّ K حقل انشطار على E لهذه المجموعة نفسها من كثيرات الحدود معتبرة بوصفها عناصر في $E[x]$، حيث تثبت المبرهنة 9.51 أنّ K قابل للفصل على E؛ لأنه قابل للفصل على F؛ إذن،K امتداد ناظمي على E، وهذا يبرهن الزعم الأول.

الآن كل عنصر في $G(K/E)$ هو تماثل ذاتي على K ويترك F ثابتة؛ لأنها تترك الحقل الأكبر E ثابتًا؛ إذن، يمكن النظر إلى $G(K/E)$ بوصفها مجموعة جزئية من $G(K/F)$، ولأنَّ $G(K/E)$ زمرة مع عملية تركيب الدوال كذلك، فإننا نرى أنّ $G(K/E) \leq G(K/F)$.

أخيرًا، لـ σ وτ في $G(K/E)$، تقع σ وτ في المجموعة المشاركة اليسرى نفسها لـ $G(K/E)$، إذا وفقط إذا كان $\tau^{-1}\sigma \in G(K/E)$، أو إذا وفقط إذا كان $\sigma = \tau\mu$، حيث $\mu \in G(K/E)$؛ ولكن، إذا كان $\sigma = \tau\mu$، حيث $\mu \in G(K/E)$، فإنه لكل $\alpha \in E$

$$\sigma(\alpha) = (\tau\mu)(\alpha) = \tau(\mu(\alpha)) = \tau(\alpha),$$

لأن $\mu(\alpha) = \alpha$ لكل $\alpha \in E$. في المقابل، إذا كان $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$ لكل $\alpha \in E$، فإنّ

$$(\tau^{-1}\sigma)(\alpha) = \alpha$$

لكل $\alpha \in E$، وهذا يعني أنّ $\tau^{-1}\sigma$ تترك E ثابتة، و$\mu = \tau^{-1}\sigma$ لذلك تنتمي إلى $G(K/E)$. ♦

تثبت المبرهنة السابقة أنّ هناك تقابلًا بين المجموعات المشاركة اليسرى لـ $G(K/E)$ في $G(K/F)$، والتماثلات من E إلى حقل جزئي من K وتترك F ثابتة. لاحظ أننا لا نستطيع القول: إنّ هذه المجموعات المشاركة اليسرى تقابل تماثلات ذاتية من E على F؛ لأن E قد لا يكون حقل انشطار على F. بالطبع، لو كان E امتدادًا ناظميًّا على F، فإنّ هذه التماثلات ستصبح تماثلات ذاتية من E على F، حيث يمكننا أن نظن أنّ هذا سيحدث، إذا وفقط إذا كان $G(K/E)$ زمرة جزئية ناظمية من $G(K/F)$، وهذه هي الحالة حقًّا.

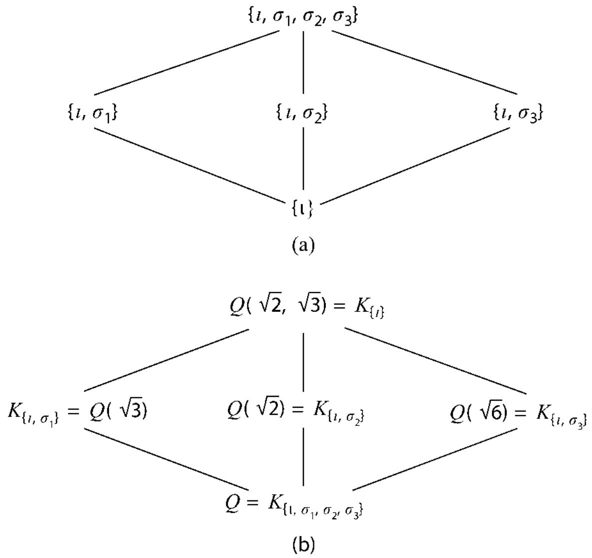
بمعنى أنّ الاستخدامين المختلفين لكلمة ناظمي وثيق الصلة بصورة حقيقية؛ إذن، إذا كان E امتدادًا ناظميًّا لـ F، فإنّ المجموعات المشاركة اليسرى لـ $G(K/E)$ في $G(K/F)$ يمكن النظر إليها بوصفها عناصر في زمرة العامل $G(K/F)/G(K/E)$، وهي زمرة التماثلات الذاتية المؤثرة في E وتترك F ثابتة، سوف نثبت أنّ زمرة العامل هذه تماثل $G(E/F)$.

المبرهنة الأساسية

تنصّ المبرهنة الأساسية في مبرهنة جالوا على أنه لامتداد ناظمي منته K للحقل F، يوجد تقابل بين الزمر الجزئية لـ $G(K/F)$ والحقول المتوسطة E، حيث $F \leq E \leq K$.

هذا التقابل يربط بكل حقل متوسط E الزمرة الجزئية $G(K/E)$. ويمكننا كذلك الانتقال للجهة الأخرى، والبدء بالزمرة الجزئية H من $G(K/F)$، ونقابل H بالحقل الثابت K_H. سنوضح هذا بمثال، ثمّ نقدّم نصّ المبرهنة، ونناقش إثباتها.

3.53 مثال ليكن $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ الآن K امتداد ناظمي لـ $\mathbb{Q}$، ويثبت المثال 17.48 أنه يوجد أربعة تماثلات ذاتية على K وتترك $\mathbb{Q}$ ثابتة، نُذكّر بها بإعطاء قيمها على الأساس $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ لـ K على $\mathbb{Q}$.



الشكل 4.53 (أ) مخطط الزمر (ب) مخطط الحقول

τ : الدالة المحايدة.

σ_1: تربط $\sqrt{2}$ بـ $-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{6}$ بـ $-\sqrt{6}$ وتترك الباقي ثابتًا.

σ_2: تربط $\sqrt{3}$ بـ $-\sqrt{3}$ ، $\sqrt{6}$ بـ $-\sqrt{6}$ وتترك الباقي ثابتًا.

σ_3: تربط $\sqrt{2}$ بـ $-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ بـ $-\sqrt{3}$ وتترك الباقي ثابتًا.

رأينا أنّ $\{\iota, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ تماثل زمرة كلاين الرباعية، والقائمة الكاملة للزمر الجزئية، ومقرونة بكل زمرة جزئية الحقل المتوسط الذي تتركه ثابتًا، هي كما يأتي:

$$\{i, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \leftrightarrow \mathbb{Q},$$
$$\{i, \sigma_1\} \leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$
$$\{i, \sigma_2\} \leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$
$$\{i, \sigma_3\} \leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{6}),$$
$$\{i\} \leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

الزمر الجزئية كلها من الزمرة الإبدالية $\{\iota, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ زمر جزئية ناظمية، والحقول المتوسطة كلها امتدادات ناظمية لـ $\mathbb{Q}$، أليس هذا رائعًا؟!

لاحظ أنه إذا كانت إحدى الزمر الجزئية محتواة في أخرى، فإنّ الأكبر من هاتين الزمرتين الجزئيتين تقابل الأصغر من الحقلين الثابتين المقابلين، فكلما كبرت الزمرة الجزئية، أي كلما زاد عدد التماثلات الذاتية صغر الحقل الثابت، أي قلّ عدد العناصر المتروكة ثابتة، لقد أعطينا في الشكل 4.53 الرسومات المتقابلة للزمر الجزئية والحقول المتوسطة، ولاحظ مرة ثانية أنّ الزمر قرب القمة تقابل الحقول قرب القاع، بمعنى أنّ أحد الرسمين يشبه الآخر مقلوبًا رأسًا على عقب، ولأنّ الرسم هنا في الحقيقة يشبه نفسه مقلوبًا رأسًا على عقب، فإنه ليس مثالاً جيدًا لنا.

لتوضيح المبدأ المقابل، تقدّم إلى الأمام للشكل 6.54 لترى الرسم الذي لا يشبه معكوسه. ▲

5.53 تعريف إذا كان K امتدادًا ناظميًّا منتهيًا للحقل F، فإنّ $G(K/F)$ **زمرة جالوا** لـ K على F **(Galois group)**. ■

سنذكر الآن نصّ المبرهنة الرئيسة، ثم نعطي مثالاً آخر، وأخيرًا نكمل إثبات المبرهنة الأساسية.

6.53 مبرهنة **(المبرهنة الرئيسة في مبرهنة جالوا)**: ليكن K امتدادًا منتهيًا ناظميًّا على الحقل F، مع زمرة جالوا $G(K/F)$. لأيّ حقل E، حيث $F \leq E \leq K$، لتكن $\lambda(E)$ الزمرة الجزئية من $G(K/E)$ التي تترك E ثابتة؛ إذن، λ دالة تقابل من مجموعة هذه الحقول المتوسطة E إلى مجموعة الزمر الجزئية من $G(K/F)$، حيث تتحقق الخصائص الآتية لـ λ:

1. $\lambda(E) = G(K/E)$

2. $E = K_{G(K/E)} = K_{\lambda(E)}$

3. إذا كانت $H \leq G(K/F)$ ، فإنّ $\lambda(E_H) = H$:

4. $[K : E] = |\lambda(E)|$ و $[E : F] = (G(K/F) : \lambda(E))$، عدد المجموعات المشاركة اليسرى لـ $\lambda(E)$ في $G(K/F)$.

5. E امتداد ناظمي على F ، إذا وفقط إذا كانت $\lambda(E)$ زمرة جزئية ناظمية من $G(K/F)$، وعندما تكون $\lambda(E)$ زمرة جزئية ناظمية في $G(K/F)$، فإن:

$$G(E/F) \simeq G(K/F)/G(K/E).$$

6. الرسم البياني للزمر الجزئية من $G(K/F)$ ، هو معكوس الرسم البياني للحقول المتوسطة من K على F.

ملاحظات على البرهان: في الحقيقة أثبتنا توًّا جزءًا كبيرًا من هذه المبرهنة، لنرَ كم تبقى علينا لنثبته.

الخاصية 1 هي مجرد تعريف λ المذكور في نصّ المبرهنة، وتثبت المبرهنة 15.48 للخاصية 2 أنّ:

$$E \leq K_{G(K/E)}.$$

لتكن $\alpha \in K$، حيث $\alpha \notin E$، ولأنَّ K امتداد ناظمي على E، وباستخدام تماثل الترافق ومبرهنة تمدد التماثلات، فيمكننا أن نجد تماثلًا ذاتيًّا على K، ويترك E ثابتة، ويربط α بالأصفار المختلفة لـ $\operatorname{irr}(\alpha, F)$، وهذا يؤدي إلى أنّ:

$$K_{G(K/E)} \leq E,$$

إذن، $E = K_{G(K/E)}$، وهذا يثبت الخاصية 2، ويخبرنا كذلك بأنّ λ أحادية؛ لأنه إذا كان $\lambda(E_1) = \lambda(E_2)$، فإننا وبحسب الخاصية 2 نحصل على:

$$E_1 = K_{\lambda(E_1)} = K_{\lambda(E_2)} = E_2$$

الآن، ستكون الخاصية 3 عملنا الأساسي، وهذا يعادل تمامًا إثبات أنّ λ دالة غامرة. بالطبع، إذا كانت $H \leq G(K/F)$، فإنّ $H \leq \lambda(K_H)$؛ لأن H متضمنة بالتأكيد في مجموعة التماثلات الذاتية كلها التي تترك K_H ثابتة، حيث سنستخدم هنا بقوة خاصيتنا $\{K : E\} = [K : E]$.

نستنتج الخاصية 4 من، $[K : E] = \{K : E\}, [E : F] = \{E : F\}$ والعبارة الأخيرة في المبرهنة 2.53.

سيبقى علينا إثبات أنّ المعنيين لكلمة ناظمي تتقابل في الخاصية 5،

وقد أثبتنا توًّا الخاصية 6 في المثال 3.53؛ إذن، يبقى علينا إثبات الخاصيتين 3 و 5.

المبرهنة الرئيسة لمبرهنة جالوا أداة قوية لدراسة أصفار كثيرات الحدود. فإذا كانت $f(x) \in F[x]$، بحيث إنّ كل عامل غير مختزل لـ $f(x)$ قابل للفصل على F، فإنّ حقل الانشطار K لـ $f(x)$ على F امتداد ناظمي لـ F. زمرة جالوا $G(K/F)$ هي **زمرة كثيرة الحدود** $f(x)$ على F، ويمكن أن تعطى بنية هذه الزمرة معلومات ذات فائدة بخصوص أصفار $f(x)$، سيُوضَّح هذا بصورة مدهشة في الفصل 56 عندما نحقق هدفنا النهائي.

زمر جالوا على الحقول المنتهية

ليكن K امتدادًا منتهيًا للحقل المنتهي F، لقد رأينا أنّ K امتداد قابل للفصل على F (الحقل المنتهي كامل). افترض أنّ رتبة F هي p^r و $[K : F] = n$، إذن، رتبة K تساوي p^{rn}، وقد رأينا أنّ K هو حقل الانشطار لـ $x^{p^{rn}} - x$ على F؛ إذن، K امتداد ناظمي على F.

الآن أحد التماثلات الذاتية التي تترك F ثابتة σ_{p^r}، حيث لكل $\alpha \in K$، $\sigma_{p^r}(\alpha) = \alpha^{p^r}$. **لاحظ** أنّ $(\sigma_{p^r})^i(\alpha) = \alpha^{p^{ri}}$، ولأنَّ كثيرة الحدود من الدرجة p^{ri} يمكن أن يكون لها على الأكثر p^{ri} من الأصفار في الحقل، فإننا نرى أنّ أصغر أس لـ σ_{p^r} التي يمكن أن تترك كل الـ p^{rn} عنصرًا في K ثابتة، هي القوة n. بمعنى أنّ رتبة العنصر σ_{p^r} في $G(K/F)$ هي على الأقل n؛ **ولذلك**، لأنَّ $|G(K/F)| = [K : F] = n$، فيجب أن تكون $G(K/F)$ دورية ومولدة بـ σ_{p^r}. نلخّص هذه الخطوات في مبرهنة.

7.53 مبرهنة ليكن K امتدادًا منتهيًا من الدرجة n للحقل المنتهي F، الذي يحوي p^r من العناصر؛ إذن، $G(K/F)$ دورية من الرتبة n، ومولدة بـ σ_{p^r}، حيث $\sigma_{p^r}(\alpha) = \alpha^{p^r}$ لكل $\alpha \in K$

نستخدم هذه المبرهنة في إعطاء توضيح آخر للمبرهنة الرئيسة في مبرهنة جالوا.

8.53 مثال ليكن $F = \mathbb{Z}_p$ ، ولتكن $K = \mathrm{GF}(p^{12})$؛ إذن، $[K : F] = 12$، هذا يؤدي إلى أنّ $G(K/F)$ تماثل الزمرة الدورية $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ ، إذ إنّ الرسم البياني للزمر الجزئية والحقول المتوسطة معطًى في الشكل 9.53، ومرة أخرى، كل رسم ليس معكوس الآخر فقط ، بل للأسف، يشبه معكوس نفسه، ستُعطى أمثلة في الفصل 54، حيث الرسوم البيانية لا تشبه معكوسها، إضافة إلى أن نصف الزمر الجزئية الدورية

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \langle \sigma_p \rangle = G(K/F) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & \langle \sigma_p^2 \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \langle \sigma_p^3 \rangle \arrow[dl, dash] \\
\langle \sigma_p^4 \rangle \arrow[dr, dash] & & \langle \sigma_p^6 \rangle \arrow[dl, dash] & \\
 & \{\iota\} & &
\end{tikzcd}$$

(أ)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & K = \mathrm{GF}(p^{12}) = K_{\{\iota\}} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
K_{\langle \sigma_p^4 \rangle} = \mathrm{GF}(p^4) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{GF}(p^6) = K_{\langle \sigma_p^6 \rangle} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & K_{\langle \sigma_p^2 \rangle} = \mathrm{GF}(p^2) \arrow[dr, dash] & & \mathrm{GF}(p^3) = K_{\langle \sigma_p^3 \rangle} \arrow[dl, dash] \\
 & & F = \mathbb{Z}_p = \mathrm{GF}(p) = K_{\langle \sigma_p \rangle} &
\end{tikzcd}$$

(ب)

الشكل 9.53 (أ) **مخطط الزمر** (ب) **مخطط الحقول**

من $\langle \sigma_p \rangle = G(K/F)$ بإعطاء مولداتها، على سبيل المثال:

$$\langle \sigma_p^{\,4} \rangle = \{\iota, \sigma_p^4, \sigma_p^8\}$$ ▲

إتمام إثبات المبرهنة الرئيسة

رأينا أنّ الخاصيتين 3 و 5 ، هما كل ما تبقى لإثباته في المبرهنة الرئيسة في مبرهنة جالوا.

البرهان بالعودة إلى الخاصية 3، يجب أن تثبت أنه لـ $H \leq G(K/F)$ ، $\lambda(K_H) = H$.

نعلم أنّ $H \leq \lambda(K_H) \leq G(K/F)$؛ إذن، ما يجب علينا في الحقيقة إثباته، أنه من المستحيل أن تكون H زمرة جزئية فعلية من $\lambda(K_H)$. سنفرض أنّ:

$$H < \lambda(K_H)$$

ثم نجد تناقضًا، وبوصفه امتدادًا منتهيًا قابلًا للفصل، $K = K_H(\alpha)$ حيث $\alpha \in K$، بحسب المبرهنة 15.51، ولتكن:

$$n = [K : K_H] = \{K : K_H\} = |G(K/K_H)|.$$

إذن، $H < G(K/K_H)$ يؤدي إلى أنّ $|H| < |G(K/K_H)| = n$، ما يعني أنّ: $|H| < [K : K_H] = n$ لتكن عناصر H $\sigma_1, \ldots, \sigma_{|H|}$ ، وافترض كثيرة الحدود

$$f(x) = \prod_{i=1}^{|H|} \left(x - \sigma_i(\alpha)\right).$$

إذن، درجة $f(x)$ تساوي $|H| > n$ ، وتكون معاملات كل قوة لـ x في $f(x)$ تعابير متماثلة في $\sigma_I(\alpha)$، على سبيل المثال: معامل $x^{|H|-1}$ يساوي $-\sigma_1(\alpha) - \sigma_2(\alpha) - \cdots - \sigma_{|H|}(\alpha)$ إذن، لا تتغير هذه المعاملات تحت أيّ تماثل $\sigma_i \in H$؛ لأنه إذا كانت $\sigma \in H$، فإنّ:

$$\sigma\sigma_1, \cdots, \sigma\sigma_{|H|}$$

هي مرة أخرى المتتالية $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{|H|}$، ما عدا طبعًا الترتيب؛ لأنّ H زمرة؛ إذن، تنتمي معاملات $f(x)$ إلى K_H، ولأنَّ إحدى σ_i هي i، نرى أنّ $\sigma_i(\alpha)$ هي α، وهكذا $f(\alpha) = 0$؛ إذن، نحصل على:

$$\deg(\alpha, K_H) \leq |H| < n = [K : K_H] = [K_H(\alpha) : K_H].$$

وهذا مستحيل، وهكذا نكون قد أثبتنا الخاصية 3.

نتوجه الآن للخاصية 5. كل امتداد E لـ F، $F \leq E \leq K$ يكون قابلًا للفصل بحسب المبرهنة 9.51؛ إذن، E ناظمي على F ، إذا وفقط إذا كان E حقل انشطار على F، وبحسب مبرهنة تمديد التماثل، كل تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يمكن تمديده إلى تماثل ذاتي على K؛ لأن K ناظمي على F؛ إذن، التماثلات الذاتية في كلها تنتج التماثلات الممكنة من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ وتترك F ثابتة، وبحسب المبرهنة 3.50، فإنّ هذا يثبت أنّ E حقل انشطار على F؛ ولذا، فهو ناظمي على F ، إذا وفقط إذا كان لكل $\sigma \in \mathrm{G}\left(K / F\right)$ و $\alpha \in E$ ،

$$\sigma(\alpha) \in E$$

بحسب الخاصية 2، E هوالحقل الثابت لـ $G(K/E)$؛ وإذن، $\sigma(\alpha) \in E$، إذا وفقط إذا كان لكل $\tau \in G(K/E)$.

$$\tau(\sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha).$$

وهذا بدوره يتحقق إذا وفقط إذا كان:

$$(\sigma^{-1}\tau\sigma)(\alpha) = \alpha$$

لكل $\alpha \in E$ ، $\sigma \in G(K/F)$ و $\tau \in G(K/E)$ ، ولكن هذا يعني أنه لكل $\sigma \in G(K/F)$ و $\tau \in G(K/E)$ ، $\sigma^{-1}\tau\sigma$ تترك كل عنصر في E ثابتًا، أي:

$$(\sigma^{-1}\tau\sigma) \in G(K/E).$$

هذا بالتحديد شرط أنّ $G\left(K / F\right)$ زمرة جزئية ناظمية في $G\left(K / F\right)$.

بقي علينا إثبان أنه عندما يكون E امتدادًا ناظميًّا لـ F ، فإنّ:

$G(E/F) \simeq G(K/F)/G(K/E)$. إذا كانت $\sigma \in G(K/F)$، دع σ_E تكون التماثل الذاتي على E المتولد من σ (نفترض أنّ E امتداد ناظمي لـ F)؛ إذن، $\sigma_E \in G(E/F)$. الدالة $\phi : G(K/F) \rightarrow G(K/F)$ المعطاة بـ

$$\phi(\sigma) = \sigma_E$$

حيث $\sigma \in G(K/F)$، تمثل تشاكلًا بحسب مبرهنة تمديد التماثل، كل تماثل ذاتي على E ويترك F ثابتة، يمكن تمديده إلى تماثل ذاتي على K، أي إنه τ_E حيث $\tau \in G(K/F)$؛ إذن، ϕ غامر لـ $G(K/F)$ ، ونواة ϕ هي $G(K/E)$. وهكذا وبحسب المبرهنة الأساسية للتماثل،

$G\left(E / F\right) \simeq G\left(K / F\right) / G\left(K / E\right)$ إضافة إلى ذلك، هذا التماثل طبيعي. ♦

تمارين 53

حسابات

الحقل $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$ امتداد ناظمي منته على $\mathbb{Q}$. يمكن إثبات أنّ $[K : \mathbb{Q}]=8$ في التمارين 1 إلى 8، احسب الكمية العددية المطلوبة. استُخدمت الرموز في المبرهنة 6.53.

1. $\{K : \mathbb{Q}\}$

2. $|G(K / \mathbb{Q})|$

3. $|\lambda(\mathbb{Q})|$

4. $|\lambda (\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}))|$

5. $|\lambda (\mathbb{Q}(\sqrt{6}))|$

6. $|\lambda (\mathbb{Q}(\sqrt{30}))|$

7. $|\lambda (\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{6}))|$

8. $|\lambda(K)|$

9. صف زمرة كثيرة الحدود $(x^4 - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$.

10. أوجد الرتبة، وصف المولد للزمرة $G (GF (729)/GF(9))$.

11. ليكن K حقل انشطار $x^3 - 2$ على $\mathbb{Q}$. (ارجع للمثال 9.50).

أ. صف العناصر الستة لـ $G(K/\mathbb{Q})$ بإيجاد قيمها على $\sqrt[3]{2}$ و $i\sqrt{3}$. (بحسب المثال 9.50 $(K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},i\sqrt{3})$.

ب. أيّ الزمر التي رأيناها سابقًا تماثل $G(K/\mathbb{Q})$؟

جـ. باستخدام الرموز المعطاة لإجابة الفرع (أ) في نهاية الكتاب، أوجد الرسم البياني للحقول الجزئية من K والزمر الجزئية من $G(K/\mathbb{Q})$ ، مظهرًا الحقول المتوسطة والزمر الجزئية المتقابلة، كما فعلنا في الشكل 4.53.

12. صف زمرة كثيرة الحدود $(x^4 - 5x^2 + 6) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$.

13. صف زمرة كثيرة الحدود $(x^3 - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$.

مفاهيم

14. أعطِ مثالاً على امتدادين ناظميين منتهيين K_1 و K_2 للحقل F نفسه، بحيث K_1 لا يماثل K_2، ولكن: $G(K_1/F) \simeq G(K_2/F)$.

15. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. يمكن أن يكون لزمرتين جزئيتين مختلفتين من زمرة جالوا الحقل الثابت نفسه.

________ ب. برموز المبرهنة 6.53، إذا كان $F \le E < L \le K$ ، فإنّ $\lambda(E) < \lambda(L)$.

________ جـ. إذا كان K امتدادًا ناظميًّا منتهيًا لـ F، فإنّ K امتداد ناظمي لـ E حيث $F \le E \le K$.

________ د. إذا كان للامتدادين الناظميين المنتهيين E و L للحقل F زمرتي جالوا متماثلتين، فإنّ: $[E :F] = [L : F]$.

________ هـ. إذا كان E امتدادًا ناظميًّا منتهيًا لـ F و H زمرة جزئية ناظمية لـ $G(E/F)$، فإنّ E_H امتداد ناظمي لـ F.

________ و. إذا كان E امتدادًا بسيطًا ناظميًّا منتهيًا للحقل F، فإنّ زمرة جالوا $G(E/F)$ زمرة بسيطة.

________ ز. زمرة جالوا لا تكون بسيطة.

________ ح. زمرة جالوا لامتداد منتهٍ لحقل منتهٍ إبدالية.

________ ط. الامتداد E ذو الدرجة 2 على الحقل F ، يكون دائمًا امتدادًا ناظميًّا لـ F.

________ ي. الامتداد E ذو الدرجة 2 على الحقل F ، يكون دائمًا امتدادًا ناظميًّا لـ F ، إذا كان مميز F ليس 2.

براهين

16. يسمى الامتداد المنتهي الناظمي K للحقل F إبداليًّا على F ، إذا كانت $G(E/F)$ زمرة إبدالية. أثبت أنه إذا كان K إبداليًّا على F ، وكان E امتدادًا ناظميًّا لـ F، بحيث $F \leq E \leq K$، فإنّ K إبدالي على E و E إبدالية على F.

17. ليكن K امتدادًا ناظميًّا منتهيًا للحقل F. أثبت أنه لكل $\alpha \in K$، فإنّ معيار α على F **(norm of α over F)** المعطى بـ:

$$N_{K/F}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G(K/F)} \sigma(\alpha)$$

وأثر α في F (trace of α) المعطى بـ:

$$Tr_{K/F}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G(K/F)} \sigma(\alpha),$$

تكون عناصر في F.

18. افترض $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i\sqrt{3})$. بالرجوع إلى التمرين 17، احسب كلًّا مما يأتي (انظر المثال 3.53):

أ. $N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$ ب. $N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

جـ. $N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{6})$ د. $N_{K/\mathbb{Q}}(2)$

هـ. $Tr_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$ و. $Tr_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

ز. $Tr_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{6})$ ح. $Tr_{K/\mathbb{Q}}(2)$

19. ليكن K امتدادًا ناظميًّا لـ F، ولتكن $K = F(\alpha)$، ولتكن:

$$\operatorname{irr}(\alpha, F) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

بالرجوع إلى التمرين 17، أثبت أنّ:

أ. $N_{K/F}(\alpha) = (-1)^n a_0$, ب. $Tr_{K/F}(\alpha) = -a_{n-1}$.

20. لتكن $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود من الدرجة n ، بحيث إنّ كل عامل غير مختزل لها قابل للفصل على F. أثبت أنّ رتبة زمرة $f(x)$ على F تقسم $n!$.

21. لتكن $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود، بحيث إنّ كل عامل غير مختزل لـ $f(x)$ كثيرة حدود قابلة للفصل على F. أثبت أنّ زمرة $f(x)$ على F يمكن أن تُعدّ بصورة طبيعية زمرة تباديل أصفار $f(x)$ في $\overline{F}$.

22. ليكن F حقلًا، ولتكن ζ جذرًا بدائيًّا من الرتبة n للواحد في $\overline{F}$ ، حيث مميز F يساوي 0 أو لا يقسم n.

أ. أثبت أنّ $F(\zeta)$ امتداد ناظمي على F.

ب. أثبت أنّ $G(F(\zeta)/F)$ إبدالية. [مساعدة: كل $\sigma \in G(F(\zeta)/F)$ تربط ζ بأحد ζ^r وتتحدد تمامًا بهذه القيمة r].

23. يسمى الامتداد الناظمي المنتهي K للحقل F دوريًّا على F **(cyclic)**، إذا كانت $G(K/F)$ زمرة دورية.

أ. أثبت أنه إذا كان K دوريًّا على F، وكان E امتدادًا ناظميًّا على F، بحيث $F \leq E \leq K$ ، فإنّ E دوري على F وK دوري على E.

ب. أثبت أنه إذا كان K دوريًا على F، فإنه يوجد بالضبط حقل واحد E، $F \le E \le K$ ، من الدرجة d على F لكل قاسم d لـ $[K : F]$.

24. ليكن K امتدادًا ناظميًّا منتهيًا لـ F.

أ. لـ $\alpha \in K$، أثبت أنّ:

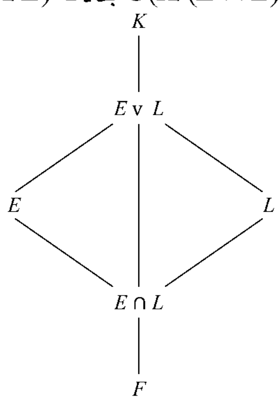
$$f(x) = \prod_{\sigma \in G(K/F)} \left(x - \sigma(\alpha)\right)$$

عنصر في $F[x]$

ب. بالإشارة إلى الفرع (أ)، أثبت أنّ $f(x)$ قوة لـ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ ، و $f(x) = \mathrm{irr}(\alpha,F)$، إذا وفقط إذا كان $K = F(\alpha)$.

25. الموصل (**join**) $E \vee L$ للامتدادين E و L للحقل F في $\overline{F}$، هو أصغر حقل جزئي من $\overline{F}$ ويحوي كلًّا من E و L، بمعنى أنّ $E \vee L$ هو تقاطع الحقول الجزئية كلها من $\overline{F}$ التي تحوي كلًّا من E و L. ليكن K امتدادًا ناظميًّا منتهيًا للحقل F، وليكن E و L امتدادين لـ F محتويين في K، كما هو موضح في الشكل 10.53 ، صف $G(K/(E \vee L))$ بدلالة $G(K/E)$ و $G(K/L)$.

26. بالإشارة إلى الوضع في التمرين 25، صف $G(K/(E \cap L))$ بدلالة $G(K/E)$ و $G(K/L)$.



الشكل 9.53

الفصل 54 توضيحات على مبرهنة جالوا Illustrations of Galois Theory

الدوال المتناظرة

ليكن F حقلًا، ولتكن $y_1, \dots y_n$ غير معينات، هناك تماثلات ذاتية طبيعية على $F(y_1, \dots y_n)$ تترك F ثابتة – يعني – تلك المعرفة بوصفها تباديل على $\{y_1, \dots y_n\}$. لنكن أكثر وضوحًا، لتكن σ تبديلة على $\{1,\dots,n\}$ أي $\sigma \in S_n$؛ إذن، تعمّم σ إلى دالة طبيعية $\sigma : F(y_1, \cdots, y_n) \to F(y_1, \cdots, y_n)$ المعطاة بـ:

$$\bar{\sigma}\left(\frac{f\left(y_1,\dots,y_n\right)}{g\left(y_1,\dots,y_n\right)}\right)=\frac{f\left(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(n)}\right)}{g\left(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(n)}\right)}$$

حيث $f(y_1,\dots y_n),\ g(y_1,\dots,y_n) \in F[y_1,\dots,y_n]$ و $g(y_1,\dots,y_n) \neq 0$. نستنتج على الفور أنّ $\bar{\sigma}$ تماثل ذاتي على $F(y_1,\dots y_n)$ يترك F ثابتة، وعناصر $F(y_1,\dots,y_n)$ التي تترك ثابتة بكل $\bar{\sigma}$، لكل $\sigma_n \in S$، هي الدوال النسبية المتناظرة في غير المعينات $y_1,\dots y_n$.

تعريف 1.54 يسمى العنصر في الحقل $F(y_1,\dots y_n)$ **دالة متناظرة في** $y_1,\dots y_n$ **على** F (**Symmetric function**)، إذا تُركت ثابتة بتباديل $y_1,\dots y_n$ كلها، بالمعنى الذي شرحناه توًّا. ■

لتكن $\bar{S}_n$ زمرة التماثلات الذاتية $\bar{\sigma}$ كلها، حيث $\sigma_n \in S$، لاحظ أنّ $\bar{S}_n$ تماثل S_n بصورة طبيعية. ليكن K الحقل الجزئي من $F(y_1,\dots y_n)$ الذي يترك ثابتًا بـ $\bar{S}_n$. افترض كثيرة الحدود.

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-y_i)$$

تسمى كثيرة الحدود $f(x) \in (F(y_1,\dots,y_n))\,[x]$ **كثيرة الحدود العامة من الدرجة n** (**general polynomial of degree n**): لتكن $\bar{\sigma}_x$ تمديدًا لـ $\bar{\sigma}$ – بصورة طبيعية – إلى $(F(y_1,\dots,y_n))\,[x]$، حيث $\bar{\sigma}_x(x)=x$. الآن، تترك $f(x)$ ثابتة بكل دالة $\bar{\sigma}_x$، حيث $\sigma \in S_n$. بمعنى أنّ:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x-y_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-y_{\sigma(i)}\right).$$

إذن، معاملات $f(x)$ في K؛ إنها **الدوال المتناظرة الابتدائية في** $y_1,\dots,y_n$، وبوصفه توضيحًا، لاحظ أنّ الحدّ الثابت في $f(x)$ هو:

$$(-1)^n y_1 y_2 \cdots y_n,$$

معامل x^{n-1} هو $(y_1+y_2+\dots+y_n)$، وهكذا. هذه دوال متناظرة في $y_1,\dots,y_n$، وأول دالة متناظرة ابتدائية في $y_1,\dots,y_n$، هي:

$$s_1=y_1+y_2+\cdots+y_n,$$

والثانية هي: $s_2=y_1y_2+y_1y_3+\cdots+y_{n-1}y_n$، وهكذا، والدالة التي ترتيبها n، هي $s_n=y_1y_2\cdots y_n$.

افترض الحقل $E=F(s_1,\dots,s_n)$. بالطبع $E \leq K$، حيث K حقل الدوال المتناظرة جميعها في $y_1,\dots,y_n$ على F. ولكن $F(y_1,\dots,y_n)$ امتداد ناظمي منتهٍ لـ E – تحديدًا – حقل الانشطار لـ

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-y_i)$$

على E. لأنَّ درجة $f(x)$ هي n، فإننا نحصل مباشرة على:

$$[F(y_1,\cdots,y_n):E]\le n!$$

(انظر التمرين 13، في الفصل 50). وعلى أيّ حال، لأنَّ K هو الحقل الثابت بـ $\overline{S}_n$

و

$$|\overline{S}_n|=|S_n|=n!,$$

نحصل كذلك على:

$$n!\le\{F(y_1,\cdots,y_n):K\}\le[F(y_1,\cdots,y_n):K].$$

ولذلك:

$$n!\le[F(y_1,\cdots,y_n):K]\le[F(y_1,\cdots,y_n):E]\le n!,$$

إذن:

$$K=E.$$

لذلك، فإنّ زمرة جالوا الكاملة لـ $F(y_1,\ldots,y_n)$ على E هي $\overline{S}_n$، وحقيقة أنّ $K=E$ تثبت أنه يمكن التعبير عن الدوال المتناظرة جميعها بدوال نسبية من الدوال المتناظرة الابتدائية $s_1,\ldots,s_n$. نلخص هذه النتائج في مبرهنة.

2.54 مبرهنة لتكن $s_1,\ldots,s_n$ الدوال المتناظرة الابتدائية في غير المعينات $y_1,\ldots,y_n$. كل دالة متناظرة في $y_1,\ldots,y_n$ على F، هي دالة نسبية في الدوال المتناظرة الابتدائية، كذلك $F(y_1,\ldots,y_n)$ امتداد ناظمي منتهٍ من الدرجة $n!$ على $F(s_1,\ldots,s_n)$، وزمرة جالوا لهذا الامتداد تماثل S_n بصورة طبيعية.

بالنظر في مبرهنة كيلي 16.8، يمكن الاستنتاج من المبرهنة 2.54 أنّ أيّ زمرة منتهية يمكن أن تظهر بوصفها زمرة جالوا (تبعًا للتماثل). (انظر التمرين 11).

أمثلة

لنعطي المثال الذي وعدنا به عن امتداد ناظمي منتهٍ له زمرة جالوا، بحيث يكون الرسم البياني لزمرها الجزيئة لا يظهر بوصفه معكوسًا لنفسه.

3.54 مثال افترض حقل الانشطار في $\mathbb{C}$ لـ x^4-2 على $\mathbb{Q}$، x^4-2 غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ – حسب معيار إيزنستين، حيث $p=2$ – لتكن $\alpha=\sqrt[4]{2}$ الصفر الحقيقي الموجب لـ x^4-2، والأصفار الأربعة لـ x^4-2 في $\mathbb{C}$. هي α، $-\alpha$، $i\alpha$، و $-i\alpha$ ، حيث i هو الصفر المعروف لـ x^2+1 في $\mathbb{C}$، وحقل الانشطار K لـ x^4-2 على $\mathbb{Q}$ يحتوي على $(i\alpha)/\alpha=i$. لأنَّ α عدد حقيقي، $\mathbb{Q}(\alpha)<\mathbb{R}$؛ إذن، $\mathbb{Q}(\alpha)\neq K$. على أيّ حال، لأنَّ $\mathbb{Q}(\alpha,i)$ تحوي أصفار x^4-2 جميعها، فنرى أنّ $\mathbb{Q}(\alpha,i)=K$. لتكن $E=\mathbb{Q}(\alpha)$، نحصل على الرسم البياني في الشكل 4.54.

الآن، $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ أساس لـ E على $\mathbb{Q}$ ، و $\{1, i\}$ أساس لـ K على E؛ إذن:

$$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, i, i\alpha, i\alpha^2, i\alpha^3\}$$

أساس لـ K على $\mathbb{Q}$، ولأنّ $[K : \mathbb{Q}] = 8$، فيجب أن نحصل على $|G(K/\mathbb{Q})| = 8$؛ لذا، نحتاج إلى أن نجد ثمانية تماثلات ذاتية على K تترك $\mathbb{Q}$ ثابتة. نعرف أنّ أيّ تماثل ذاتي σ يتحدد تمامًا بقيمه على عناصر الأساس $\{1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,i,i\alpha,i\alpha^2,i\alpha^3\}$، وهذه القيم بدورها تتحدد بـ $\sigma(\alpha)$ و $\sigma(i)$؛ ولكن $\sigma(\alpha)$ يجب أن تكون دائمًا مرافقًا لـ α على $\mathbb{Q}$، أي أحد الأصفار الأربعة لـ $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^4-2$. وكذلك $\sigma(i)$ يجب أن تكون صفرًا لـ $\mathrm{irr}(i, \mathbb{Q}) = x^2 + 1$؛ إذن، الاحتمالات الأربعة لـ $\sigma(\alpha)$، منضمة لاحتمالي $\sigma(i)$، يجب أن تعطي التماثلات الذاتية الثمانية. نصفها في الجدول 5.54، على سبيل المثال: $\rho_3(\alpha) = i\alpha$ و $\rho_3(i) = i$، بينما ρ_0 هو التماثل الذاتي المحايد. الآن،

$$K = \mathbb{Q}(\alpha,i)$$
$$E = \mathbb{Q}(\alpha)$$
$$\mathbb{Q}$$

الشكل **4.54**

$$(\mu_1 p_1)(\alpha) = \mu_1(p_1(\alpha)) = \mu_1(i\,\alpha) = \mu_1(i)\mu_1(\alpha) = -i\,\alpha$$

وبالمثل كذلك

$$(\mu_1 p_1)(i) = -i\,,$$

إذن، $\mu_1\,\rho_1 = \delta_2$، وتثبت حسابات مشابهة أنّ

$$(\rho_1\mu_1)(\alpha) = i\alpha \quad \text{و} \quad (p_1\mu_1)(i) = -i\,.$$

إذن، $\rho_1\mu_1 = \delta_1$ ، ما يعني أنّ $\rho_1\mu_1 \neq \mu_1\,\rho_1$ و$G(K/\,\mathbb{Q})$ ليست إبدالية؛ لذلك، يجب أن تكون $G(K/\,\mathbb{Q})$ تماثل أحد الزمرتين غير الإبداليتين من الرتبة 8 الموصوفة في المثال 6.40.

بالحساب من الجدول 5.54، نرى أنّ رتبة ρ_1 تساوي 4، و μ_1 من الرتبة 2، $\{\rho_1, \mu_1\}$ تولد $G(K/\mathbb{Q})$، و $\rho_1\mu_1 = \mu_1\,\rho_1^3 = \delta_1$ ؛ إذن، $G(K/\mathbb{Q})$ تماثل الزمرة G_1 في المثال 6.40، الزمرة الثمانية.

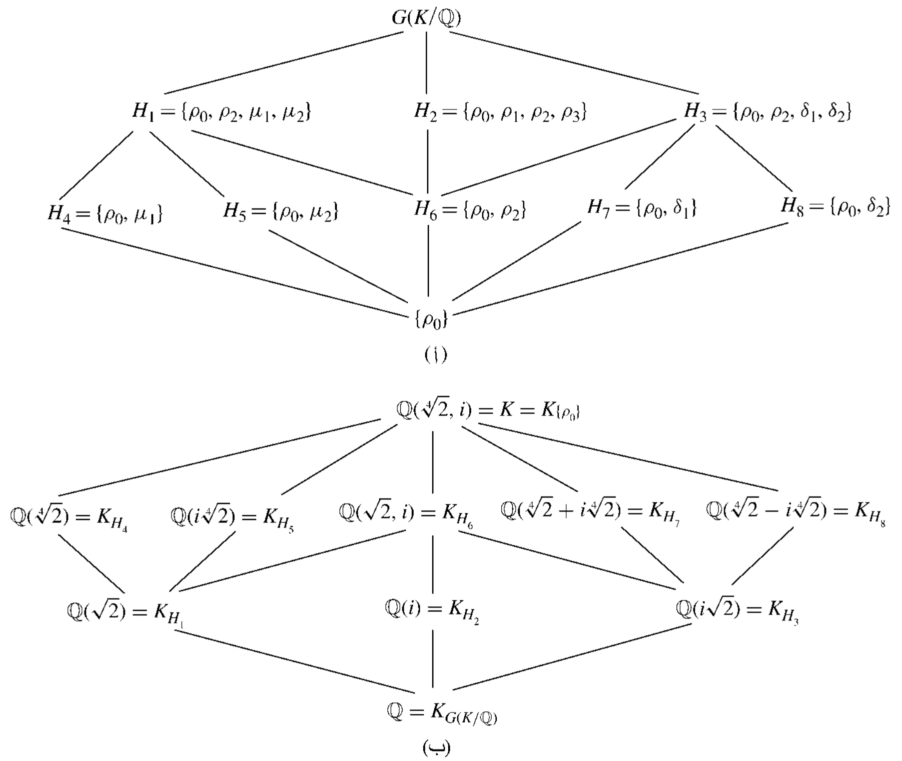
لقد اخترنا ترميز العناصر في $G(K/\mathbb{Q})$ ليكون جدول الزمرة منطبقًا مع جدول الزمرة الثمانية في الجدول 12.8. حيث إنّ الرسم البياني للزمر الجزئية H_i من $G(K/\mathbb{Q})$ معطًى في الشكل 13.8، ونعيد كتابته هنا في الشكل 6.54 ، ونعطي كذلك الرسم البياني للحقول المتوسطة بين $\mathbb{Q}$ و K، هذا في النهاية يوضح بصورة لطيفة أنّ أحد الرسمين هو معكوس الآخر.

تحديد الحقول الثابتة K_{H_i} يحتاج أحيانًا إلى بعض الإبداع، لنوضح ذلك ، لإيجاد K_{H_2}، لا يجب علينا غير إيجاد امتداد لـ $\mathbb{Q}$ من الدرجة 2 يترك ثابتًا بـ $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$، ولأنّ كل ρ_j تترك i ثابتة، فإنّ $\mathbb{Q}(i)$ هو الحقل الذي نبحث عنه، ولإيجاد K_{H_4}، يجب علينا إيجاد امتداد لـ $\mathbb{Q}$ من الدرجة 4 يترك ثابتًا بـ ρ_0 و μ_1، ولأنّ μ_1 تترك α ثابتة و α صفر لـ $\mathrm{irr}(\alpha,Q) = x^4 - 2$ ، نرى أنّ $\mathbb{Q}(\alpha)$ من الدرجة 4 على $\mathbb{Q}$ ويترك ثابتًا بـ $\{\rho_0, \mu_1\}$. بحسب مبرهنة جالوا، إنه الحقل الوحيد. نستخدم هنا بقوة التقابل المعطى بمبرهنة جالوا، فإذا وجدنا حقلاً يلائم القائمة، فإنه الحقل الذي نبحث عنه، أضف إلى ذلك، إيجاد K_{H_7} يحتاج إلى مزيد من الإبداع، فلأنّ $H_7 = \{\rho_0, \delta_1\}$ زمرة، فلكل $\beta \in K$ نرى أنّ $\rho_0(\beta) + \delta_1(\beta)$ تترك ثابتة بـ ρ_0 و δ_1، وبأخذ $\beta = \alpha$، نرى أنّ $\rho_0(\alpha) + \delta_1(\alpha) = \alpha + i\alpha$ تترك ثابتة بـ H_7، حيث يمكننا التحقق ورؤية أنّ ρ_0 و δ_1 هي

التماثلات الذاتية الوحيدة التي تترك $\alpha + i\alpha$ ثابتة؛ إذن:

جدول 5.54

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2
$\alpha \rightarrow$	α	$i\alpha$	$-\alpha$	$-i\alpha$	α	$i\alpha$	$-\alpha$	$-i\alpha$
$i \rightarrow$	i	i	i	i	$-i$	$-i$	$-i$	$-i$



الشكل 6.54 (أ) الرسم البياني للزمر (ب) الرسم البياني للحقول

بحسب التقابل، يجب أن نحصل على:

$$\mathbb{Q}\left(\alpha + i\,\alpha\right) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}) = K_{H_7}$$

افترض أننا نودّ إيجاد $\operatorname{irr}(\alpha + i\alpha, \mathbb{Q})$، فإذا كانت $\gamma = \alpha + i\alpha$، فإن لكل مرافق لـ γ على $\mathbb{Q}$، يوجد تماثل ذاتي على K يربط γ بمرافق لها؛ إذن، نحتاج فقط إلى حساب القيم المختلفة لـ $\sigma(\gamma)$، حيث $\sigma \in G(K/\mathbb{Q})$ لإيجاد بقية أصفار $\operatorname{irr}(\gamma, \mathbb{Q})$، وبحسب المبرهنة 2.53، عناصر σ في $G(K/\mathbb{Q})$ التي تعطي هذه القيم المختلفة، يمكن إيجادها بأخذ مجموعة الممثلات للمجموعة المشاركة اليسرى $G(K/\mathbb{Q}(\gamma)) = \{\rho_0, \delta_1\}$ في $G(K/\mathbb{Q})$. مجموعة الممثلات لهذه المجموعات المشاركة اليسرى هي:

$$\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}.$$

إذن، مرافقات $\gamma = \alpha + i\alpha$ هي $\alpha + i\alpha$، $i\alpha - \alpha$، $-\alpha - i\alpha$، و $-i\alpha + \alpha$

إذن:

$$\begin{aligned} \mathrm{irr}(\gamma, Q) &= [(x - (\alpha + i\alpha))(x - (i\alpha - \alpha))] \\ &\cdot[(x - (-\alpha - i\alpha))(x - (-i\alpha + \alpha))] \\ &= (x^2 - 2i\alpha x - 2\alpha^2)(x^2 + 2i\alpha x - 2\alpha^2) \\ &= x^4 + 4\alpha^4 = x^4 + 8. \end{aligned}$$

▲

رأينا أمثلة فيها حقل الانشطار لكثيرة حدود من الدرجة الرابعة على حقل F، يكون امتدادًا على F من الدرجة 8 (المثال 3.54) ومن الدرجة 24 (المبرهنة 2.54، حيث n=4). درجة امتداد للحقل F الذي يكون حقل انشطار لرباعي الدرجة على F، يجب أن تقسم دائمًا 24 =4!، وحقل الانشطار لـ $(x-2)^4$ على $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}$، امتداد من الدرجة 1، وحقل الانشطار لـ $(x^2-2)^2$ على $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$، امتداد من الدرجة 2. مثالنا الأخير سيعطي امتدادًا من الدرجة 4 لحقل امتداد لرباعي الدرجة.

7.54 مثال افترض حقل الانشطار لـ x^4+1 على $\mathbb{Q}$، فيمكننا بحسب المبرهنة 11.23 إثبات أنّ x^4+1 غير مختزلة على $\mathbb{Q}$، بمناقشة عدم إمكانية تحليلها في $\mathbb{Z}[x]$. (انظر التمرين 1). العمل في الأعداد المركبة في الفصل 1 يثبت أنّ أصفار x^4+1، هي: $(1 \pm i)/\sqrt{2}$ و $(-1 \pm i)/\sqrt{2}$.

تثبت الحسابات أنه إذا كانت:

$$\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

فإنّ

$$\alpha^3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha^5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha^7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

إذن، حقل الانشطار K لـ x^4+1 على $\mathbb{Q}$ ، هو $\mathbb{Q}(\alpha)$، و $[K:\mathbb{Q}]=4$. لنحسب $G(K/\mathbb{Q})$ ، ونعطي الرسم البياني للزمر والحقول، فلأنّه توجد تماثلات ذاتية على K تربط α بكل مرافق لها؛ ولأنّ أيّ تماثل σ على $\mathbb{Q}(\alpha)$ يتحدد تمامًا بـ $\sigma(\alpha)$، فنرى أنّ العناصر الأربعة لـ $G(K/\mathbb{Q})$ معرفة بالجدول 54.8، ولأنّ $(\sigma_j\sigma_k)(\alpha) = \sigma_j(\alpha^k) = (\alpha^j)^k = \alpha^{jk}$ و $\alpha^8 = 1$، نرى أنّ $G(K/\mathbb{Q})$ يماثل الزمرة $\{1, 3, 5, 7\}$ مع الضرب مقياس 8. هذه هي الزمرة G_8 في المبرهنة 6.20، ولأنّ $\sigma_j^2 = \sigma_1$ – الدالة المحايدة – لكل j، فيجب أن تكون $G(K/\mathbb{Q})$ مماثلة لزمرة كلاين الرباعية. الرسوم البيانية معطاة في الشكل 9.54.

لإيجاد $K_{\{\sigma1,\ \sigma3\}}$، فإنه من الضروري فقط إيجاد عنصر في K وليس في $\mathbb{Q}$ يترك ثابتًا بـ $\{\sigma_1,\ \sigma_3\}$، لأنّ $[K_{\{\sigma1,\ \sigma3\}}:\ \mathbb{Q}]=2$. من الواضح أنّ $\sigma_1(\alpha)+\sigma_3(\alpha)$ تترك ثابتة بكلا σ_1 و σ_3؛ ولأنّ $\{\sigma_1,\ \sigma_3\}$ زمرة نحصل على:

$$\sigma_1(\alpha)+\sigma_3(\alpha)=\alpha+\alpha^3=i\sqrt{2}.$$

بالمثل:

$$\sigma_1(\alpha)+\sigma_7(\alpha)=\alpha+\alpha^7=\sqrt{2}$$

الجدول 8.54

	σ_1	σ_3	σ_5	σ_7
$\alpha\rightarrow$	α	α^3	α^5	α^7

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& G(K/\mathbb{Q}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\sigma_1,\sigma_3\} \arrow[dr, dash] & \{\sigma_1,\sigma_5\} \arrow[d, dash] & \{\sigma_1,\sigma_7\} \arrow[dl, dash] \\
& \{\sigma_1\} &
\end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbb{Q}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=K \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(i\sqrt{2})=K_{\{\sigma_1,\sigma_3\}} \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(i)=K_{\{\sigma_1,\sigma_5\}} \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2})=K_{\{\sigma_1,\sigma_7\}} \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q}=K_{G(K/\mathbb{Q})} &
\end{tikzcd}$$

(b)

الشكل 9.54 (أ) الرسم البياني للزمر. (ب) الرسم البياني للحقول.

يترك ثابتًا بـ $\{\sigma_1,\sigma_7\}$. لن تُجدي هذه التقنيات لإيجاد $E_{\{\sigma_1,\sigma_5\}}$؛ لأن

$$\sigma_1(\alpha)+\sigma_5(\alpha)=\alpha+\alpha^5=0$$

و $0\in\mathbb{Q}$، ولكن بمناقشة مشابهة، $\sigma_1(\alpha)\,\sigma_5(\alpha)$ تترك ثابتة بكلا σ_1 و σ_5،

$$\sigma_1(\alpha)\sigma_5(\alpha)=\alpha\alpha^5=-i$$ و

إذن، $\mathbb{Q}(i)=\mathbb{Q}(-i)$ هو الحقل الذي نسعى وراءه. ▲

تمارين 54

حسابات (تتطلب استخدام مبرهنات أكثر من المعتاد)

1. أثبت أنّ x^4+1 غير مختزل على $\mathbb{Q}[x]$ – كما ذكرنا في المثال 7.54.

2. تحقق من أنّ الحقول المتوسطة المعطاة في الرسم البياني للحقول في الشكل 6.54 صحيحة. (تمّ التحقق من بعضها في الكتاب. تحقق من الباقي).

3. لكل حقل من الحقول في الرسم البياني في الشكل 6.54، أوجد العنصر البدائي المولد للحقل على $\mathbb{Q}$ (انظر المبرهنة 5.51)، وأعطِ كثيرة الحدود غير المختزلة لها على $\mathbb{Q}$.

4. ليكن ζ جذرًا بدائيًا من الرتبة 5 للواحد في $\mathbb{Q}$.

أ. أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\zeta)$ حقل انشطار لـ x^5-1 على $\mathbb{Q}$.

ب. أثبت أنّ أيّ تماثل ذاتي على $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ يربط ζ بأحد القوى ζ^r لـ ζ.

جـ. مستخدمًا الفرع (ب)، صف عناصر $G(K/\mathbb{Q})$.

د. أعطِ الرسم البياني للزمر والحقول لـ $\mathbb{Q}(\zeta)$ على $\mathbb{Q}$، واحسب الحقول المتوسطة، كما فعلنا في المثالين 3.54 و 7.54.

5. صف زمرة كثيرة الحدود $(x^5-2)\in(\mathbb{Q}(\zeta))[x]$ على $\mathbb{Q}(\zeta)$، حيث ζ الجذر البدائي من الرتبة 5 للواحد.

6. أعد التمرين 4 لـ ζ الجذر البدائي من الرتبة 7 للواحد في $\mathbb{C}$.

7. صف زمرة كثيرة الحدود بأسهل طريقة ممكنة على $\mathbb{Q}$.

$$(x^8-1)\in\mathbb{Q}[x]$$

8. أوجد حقل الانشطار K في $\mathbb{C}$ لكثيرة الحدود $(x^4-4x^2-1)\in\mathbb{Q}[x]$، احسب زمرة كثيرة الحدود على $\mathbb{Q}$، وأظهر التقابل بين الزمر الجزئية لـ $G(K/\mathbb{Q})$ والحقول المتوسطة. بعبارة أخرى، قم بالعمل كله.

9. عبّر عن الدوال المتناظرة الآتية كلها في y_1, y_2, y_3 على $\mathbb{Q}$ بوصفها دالة نسبية في الدوال المتناظرة البدائية s_1, s_2, s_3.

أ. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

ب. $\dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}+\dfrac{y_1}{y_3}+\dfrac{y_3}{y_1}+\dfrac{y_2}{y_3}+\dfrac{y_3}{y_2}$

10. لتكن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ أصفارًا في $\mathbb{C}$ لكثيرة الحدود

$$(x^3-4x^2+6x-2)\in\mathbb{Q}[x].$$

أوجد كثيرة الحدود ذات الأصفار المحددة الآتية:

أ. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

ب. $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$

براهين

11. أثبت أنّ أيّ زمرة منتهية تماثل زمرة جالوا $G(K/F)$ لامتداد منتهٍ ناظمي K لأحد الحقول F.

12. لتكن $f(x)\in F[x]$ كثيرة حدود أحادية من الدرجة n، بحيث إنّ عواملها غير المختزلة كلها قابلة للفصل على F. ليكن $K\leq\overline{F}$ حقل انشطار $f(x)$ على F، وافترض أنّ $f(x)$ تتحلل في $K[x]$ إلى:

$$\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i).$$

لتكن:

$$\Delta(f) = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j);$$

يسمى حاصل الضرب $(\Delta(f))^2$ **بالمميز** لـ $f(x)$**(discriminant)**

أ. أثبت أنّ $0=(\Delta f)$، إذا وفقط إذا كان أحد عوامل $f(x)$ مربعًا لكثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$.

ب. أثبت أنّ $(\Delta(f))^2 \in F$.

ج. يمكن النظر لـ $G(K/F)$ بوصفها زمرة جزئية من $\overline{S}_n$، حيث $\overline{S}_n$ زمرة جميع التبادل $\{\alpha_i | i=1, ..., n\}$. أثبت أنّ $G(K/F)$ – عندما ينظر لها بهذه الطريقة – زمرة جزئية من $\overline{A}_n$ – الزمرة المكوّنة من التباديل الزوجية جميعها في $\{\alpha_i | i=1, ..., n\}$–، إذا وفقط إذا كان $\Delta(f) \in F$.

13. يسمى العنصر في $\mathbb{C}$ **عددًا صحيحًا جبريًّا**، **(algebraic integer)** إذا كان صفرًا لكثيرة حدود أحادية في $\mathbb{Z}[x]$. أثبت أنّ مجموعة العناصر الصحيحة الجبرية، تشكل حلقة جزئية من $\mathbb{C}$.

الفصل 55 الامتدادات الدورية Cyclotomic Extensions

زمرة جالوا لامتداد دوري

سيعالج هذا الفصل حقول الامتداد لحقل F ، التي يحصل عليها بإضافة بعض جذور الواحد لـ F، غُطّيت حالة الحقل المنتهي في الفصل 33؛ لذا، سنكون مهتمين بصورة أساسية بحالة F غير المنتهي.

1.55 تعريف يسمى حقل انشطار x^n-1 على F **الامتداد الدوري من الرتبة n لـ F** **(nth cyclotomic extension)**. ■

افترض أنّ F أيّ حقل، وافترض $(x^n - 1) \in F[x]$ ، فباستخدام القسمة الطويلة – كما في برهان التمهيدية 8.33- نرى أنه إذا كانت α صفرًا لـ $x^n - 1$ و $g(x) = (x^n - 1) / (x-\alpha)$، فإنّ $g(\alpha) = (n\ .\ 1)\ (1/\alpha) \neq 0$، بشرط أنّ مميز F لا يقسم n؛ لذلك – وتحت هذا الشرط – يكون حقل انشطار $x^n - 1$ قابلًا للفصل، وهكذا، فهو امتداد ناظمي لـ F.

نبذة تاريخية

عالج كارل جاوس كثيرات الحدود الدورية في الفصل الأخير من كتابه (*Disquisitiones Arithmeticae*) عام 1801م. في ذلك الفصل، أعطى إجراءات بنائية لتحديد أصفار $\Phi_p(x)$ ، حيث p عدد أولي.

أصبحت طريقة جاوس مثالاً مهمًا لجالوا في تطوير المبرهنة العامة، التي كانت حلّ سلسلة من المعادلات المساعدة، كلٌ من درجة أولية تقسم $p - 1$، ومعاملات كل منها، وعليه، تحدد من جذور المعادلة السابقة، فقد علم جاوس – بلا ريب – أنّ جذور $\Phi_p(x)$ هي قوى إحداها، وليكن ζ، وقد حدّد المعادلات المساعدة بأخذ مجموعات محددة من مجاميع الجذور ζ^j ، التي كانت الجذور المطلوبة لهذه المعادلات، على سبيل المثال: في حالة $p = 19$ و $(2 \times 3 \times 3 = 18 = p - 1)$، احتاج جاوس إلى إيجاد معادلتين من الدرجة 3 ومعادلة من الدرجة 2 بوصفها مساعدات، وقد تبيّن أنّ الأولى لها الجذور الثلاثة:

$$\alpha_1 = \zeta + \zeta^8 + \zeta^7 + \zeta^{18} + \zeta^{11} + \zeta^{12}$$

$$\alpha_3 = \zeta^4 + \zeta^{13} + \zeta^9 + \zeta^{15} + \zeta^6 + \zeta^{10}, \quad \alpha_2 = \zeta^2 + \zeta^{16} + \zeta^{14} + \zeta^{17} + \zeta^3 + \zeta^5$$

في الحقيقة، هذه القيم الثلاث هي جذور المعادلة التكعيبية $x^3 + x^2 - 6x - 7$، ثم وجد جاوس معادلة تكعيبية ثانية، تتألف معاملاتها من ألـ α، وكانت جذورها مجاميع قوتين لـ ζ، وأخيرًا معادلة تربيعية، تتألف معاملاتها من جذور المعادلة السابقة، التي كانت ζ أحد جذورها.

صرّح جاوس بعدها (من غير برهان كامل): أنّ كل معادلة مساعدة يمكن أن تختزل إلى معادلة على الصورة $x^m - A$ ، التي يمكن حلها باستخلاص الجذور، أي إنه أثبت أنّ قابلية الحل لزمرة جالوا في هذه الحالة – الزمرة الدورية من الرتبة $p - 1$ – تؤدي إلى قابلية حلّ المعادلة الدورية باستخلاص الجذور. (انظر الفصل 56).

افترض من الآن فصاعدًا أنّ هذه هي الحالة، وأنّ K حقل الانشطار لـ $x^n - 1$ على F؛ إذن، $x^n - 1$ لها n من الأصفار في K، وبحسب النتيجة 6.23، تشكل هذه الأصفار زمرة دورية من الرتبة n مع عملية الضرب في الحقل، لقد رأينا في النتيجة 16.6، أنّ الزمرة الدورية من الرتبة n لها $\varphi(n)$ من المولدات – حيث φ هي دالة – فاي لأويلر التي عرفت قبل المبرهنة 8.20. في حالتنا هذه، المولدات $\phi(n)$ هي بالضبط الجذور البدائية من الرتبة n للواحد.

2.55 تعريف كثيرة الحدود

$$\Phi_n(x)=\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\alpha_i)$$

حيث ألـ α_i الجذور البدائية من الرتبة n للواحد في $\overline{F}$، هي **كثيرة الحدود الدورية من الرتبة n على** F (**nth cyclotomic polynomial**). ■

لأنّ التماثل من زمرة جالوا $G(K/F)$، يجب أن يبادل بين الجذور البدائية من الرتبة n للواحد، فنرى أنّ $\Phi_n(x)$ تترك ثابتة مع أيّ عنصر في $G(K/F)$، معدودًا بوصفه تمديدًا طبيعيًّا إلى $K[x]$؛ إذن، $\Phi_n(x)\in F[x]$. بوجه خاص، لـ $F=\mathbb{Q}$، $\Phi_n(x)\in\mathbb{Q}[x]$، و$\Phi_n(x)$ تقسم x^n-1؛ إذن، على $\mathbb{Q}$، يجب في الحقيقة أن نعدّ $\Phi_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$ بحسب المبرهنة 11.23. لقد رأينا أنّ $\Phi_p(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$، في النتيجة 17.23، بينما $\Phi_n(x)$ ليست بالضرورة غير مختزلة في حالة الحقول $\mathbb{Z}_p$، حيث يمكن إثبات أنّ $\Phi_n(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

دعونا الآن نحدد نقاشنا بالمميز 0، بوجه خاص الحقول الجزئية من الأعداد المركبة. ليكن i الصفر المركب العادي لـ x^2+1. عملنا بهذا العدد المركب في الفصل 1 يثبت أنّ:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$

إذن $\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$، جذر من الرتبة n للواحد، وأقل عدد صحيح m، بحيث $(\cos(2\pi/n)^m+i\sin(2\pi/n))^m=1)$ هو n؛ إذن $\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$، جذر بدائي من الرتبة n للواحد، وصفر لـ

$$\phi_n(x)\in\mathbb{Q}[x].$$

3.55 مثال الجذر البدائي من الرتبة 8 للواحد في $\mathbb{C}$، هو:

$$\begin{aligned}\xi&=\cos\frac{2\pi}{8}+i\sin\frac{2\pi}{8}\\&=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

بحسب مبرهنة الزمر الدورية، وبوجه خاص بحسب النتيجة 16.6، الجذور البدائية من الرتبة 8 للواحد في $\mathbb{Q}$، هي:

ζ^5، ζ^3، ζ، و ζ^7؛ إذن:

$$\Phi_8(x)=(x-\zeta)(x-\zeta^3)(x-\zeta^5)(x-\zeta^7).$$

يمكننا الحساب مباشرة من هذا التعبير، $\Phi_8(x)=x^4+1$ (انظر التمرين 1). قارن هذا بالمثال 7.54. ▲

لنظل محددين عملنا على $F = \mathbb{Q}$، ولنفترض – من غير برهان – أنّ $\Phi_n(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$. لتكن :

$$\xi = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\sin\frac{2\pi}{n},$$

إذن، ζ جذر بدائي من الرتبة n للواحد. لاحظ أنّ ζ مولد لزمرة الضرب الدورية من الرتبة n، المكوّنة من الجذور من الرتبة n للواحد. الجذور البدائية كلها من الرتبة n – أي مولدات هذه الزمرة – تكون على الصورة ζ^m، حيث $1 \leq m < n$ وm أولية بالنسبة إلى n. الحقل $\mathbb{Q}(\zeta)$ هو كامل حقل الانشطار لـ $x^n - 1$ على $\mathbb{Q}$. ليكن $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. إذا كان ζ^m جذرًا بدائيًا آخر من الرتبة n للواحد؛ إذن – ولأنّ ζ و ζ^m مترافقان على $\mathbb{Q}$ – يوجد تماثل ذاتي τ_m في $G(k/\mathbb{Q})$ يربط ζ بـ ζ^m. ليكن τ_r تماثلا ذاتيًا مشابهًا في $G(K/\mathbb{Q})$ بالنسبة إلى ζ^r الجذر البدائي من الرتبة n للواحد؛ إذن:

$$(\tau_m\tau_r)(\zeta) = \tau_m(\zeta^r) = (\tau_m(\zeta))^r = (\zeta^m)^r = \zeta^{rm}.$$

هذا يثبت أنّ زمرة جالوا $G(K/\mathbb{Q})$ تماثل الزمرة G_n في المبرهنة 6.20 ، المكوّنة من عناصر $\mathbb{Z}_n$ الأولية بالنسبة إلى n مع عملية الضرب مقياس n، وتحوي هذه الزمرة $\varphi(n)$ من العناصر، وهي إبدالية.

ظهرت بعض الحالات الخاصة من هذه المادة مرات عدة في الكتاب والتمارين، على سبيل المثال: α في المثال 7.54 جذر بدائي من الرتبة 8 للواحد، وقد ناقشنا في ذلك المثال مطابقة لتلك المعطاة هنا. نلخص هذه النتائج في مبرهنة.

4.55 مبرهنة زمرة جالوا للامتداد الدوري من الرتبة n،$\varphi(n)$ من العناصر، وتماثل الزمرة المؤلفة من الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من n والأولية بالنسبة إلى n مع عملية الضرب مقياس n.

5.55 مثال يوضح المثال 7.54 هذه المبرهنة؛ لأنه من السهل رؤية أنّ حقل الانشطار لـ $x^4 + 1$ ، هو نفسه حقل الانشطار لـ $x^8 - 1$ على $\mathbb{Q}$، حيث يستنتج هذا من حقيقة أنّ $\Phi_8(x) = x^4 + 1$ (انظر المثال 3.55 والتمرين 1). ▲

6.55 نتيجة زمرة جالوا للامتداد الدوري من الرتبة p على $\mathbb{Q}$ ، حيث p أولي، هي الزمرة الدورية من الرتبة $p - 1$.

البرهان بحسب المبرهنة 4.55، لزمرة جالوا للامتداد الدوري من الرتبة p على $\mathbb{Q}$،$\varphi(p) = p - 1$ من العناصر، وهي تماثل زمرة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من p والأولية بالنسبة إلى p مع عملية الضرب مقياس p. هذه بالضبط زمرة الضرب $\langle \mathbb{Z}^*_p , . \rangle$ المؤلفة من العناصر غير الصفرية في الحقل $\mathbb{Z}_p$ مع عملية الضرب في الحقل، وبحسب النتيجة 6.23، هذه الزمرة دورية. ♦

المضلعات القابلة للإنشاء

نختم بتطبيق يحدد أيًّا من المضلعات المنتظمة التي لها n من الأضلاع قابلة للإنشاء بالمسطرة والفرجار، لقد رأينا في الفصل 32، أنّ المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا يكون قابلًا للإنشاء، إذا وفقط إذا كان $\cos(2\pi/n)$ عددًا حقيقيًّا قابلًا للإنشاء. الآن، لتكن:

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

إذن

$$\frac{1}{\zeta} = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$$

لأن:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \cos^2\frac{2\pi}{n} + \sin^2\frac{2\pi}{n} = 1$$

ولكن

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = 2\cos\frac{2\pi}{n}.$$

إذن، تثبت النتيجة 8.32 أنّ المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا، يكون قابلًا للإنشاء، فقط إذا كان $\zeta + 1/\zeta$ يولد امتدادًا على $\mathbb{Q}$ درجته من قوى ألـ 2.

إذا كان K حقل الانشطار لـ $x^n - 1$ على $\mathbb{Q}$، فإنّ $[K : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$، بحسب المبرهنة 4.55، وإذا كانت $\sigma \in G(K/\mathbb{Q})$ و $\sigma(\zeta) = \zeta^r$، فإنّ:

$$\begin{aligned}\sigma\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) &= \zeta^r + \frac{1}{\zeta^r}\\ &= \left(\cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n}\right) + \left(\cos\frac{2\pi r}{n} - i\sin\frac{2\pi r}{n}\right)\\ &= 2\cos\frac{2\pi r}{n}.\end{aligned}$$

ولكن إذا كان $1 < r < n$، فنحصل على $\cos(2\pi r/n) = 2\cos(2\pi/n)$ فقط في حالة $r = n - 1$؛ إذن، العناصر الوحيدة في $G(K/G)$ التي تحمل $\zeta/1$ إلى نفسها، هي التماثل الذاتي المحايد والتماثل الذاتي τ، حيث $\tau(\zeta) = \zeta^{n-1} = 1/\zeta$، يثبت هذا أنّ الزمرة الجزئية من $G(K/\mathbb{Q})$ التي تترك $\mathbb{Q}(\zeta + 1/\zeta)$ ثابتًا، هي من الرتبة 2؛ إذن وبحسب مبرهنة جالوا:

$$\left[\mathbb{Q}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) : \mathbb{Q}\right] = \frac{\varphi(n)}{2}.$$

إذن، يكون المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا قابلاً للإنشاء، فقط إذا كان $\varphi(n)/2$ – وهكذا $\varphi(n)$ كذلك – من قوى ألـ 2.

يمكن الإثبات بمناقشة أولية في مبرهنة الأعداد، أنه إذا كانت:

$$n = 2^v p_1^{s1} \cdots p_t^{st},$$

حيث ألـ p_i أعداد أولية مختلفة تقسم n؛ إذن:

$$\varphi(n) = 2^{v-1} p_1^{s1-1} \cdots p_t^{st-1}(p_1 - 1) \cdots (p_t - 1). \qquad (1)$$

إذا كانت $\varphi\ (n)$ قوة لـ 2، فإنّ كل عدد أولي فردي يقسم n ، يجب أن يظهر فقط للقوة الأولى، ويجب أن يكون أكثر بواحد من إحدى قوى ألـ 2؛ إذن، يجب أن يكون كل

$$p_i = 2^m + 1$$

لأي m. ولأنّ -1 صفر لـ $x^q + 1$ ، حيث q عدد أولي فردي، $x + 1$ تقسم $x^q + 1$ ، حيث q عدد أولي فردي؛ إذن، إذا كانت $m = q^{\ u}$، حيث q عدد أولي فردي، فإنّ $2^m + 1 = (2^u)^q + 1$ تقسم بـ 2^u+1؛ وعليه، ليكون $p_i = 2^m + 1$ عددًا أوليًا، يجب أن تكون m تقسم بـ 2 فقط، وبهذا يجب أن تكون p_i على الصورة:

$$p_i = 2^{(2^k)} + 1,$$

عدد فيرما الأولي (Fermat prime): خمّن فيرما أنّ هذه الأعداد $2^{(2^k)}+1$ أعداد أولية لكل عدد صحيح غير سالب k، ولكن أثبت أويلر أنه بينما تعطى $k = 0,1,2,3$ و $k = 4$ الأعداد الأولية 3 ، و5 ، و17 ، و257 و 65537 ، فإنّ لـ $k = 5$، العدد الصحيح $2^{(2^5)} + 1$ يقبل القسمة على 641، وقد أثبت أنّ لـ$5 \leq k \leq 19$ ، تكون الأعداد $2^{(2^k)} + 1$ كلها غير أولية. حالة $k = 20$ ما زالت غير محلولة على حدّ علمنا، وكذلك لـ 60 قيمة على الأقل لـ k أكبر من 20، بما فيها $k = 9448$ ، وقد أثبت أنّ $2^{(2^k)} + 1$ غير أوليّ، ومن غير المعلوم ما إذا كان عدد أعداد فيرما الأولية منتهيًا أم غير منتهٍ.

لقد أثبتنا أنّ المضلعات المنتظمة التي لها n ضلعًا والوحيدة التي يمكن أن تكون قابلة للإنشاء، هي تلك التي تكون الأعداد الأولية الفردية القاسمة لـ n أعداد فيرما الأولية، التي لا تقسم مربعاتها n، بوجه خاص، المضلعات المنتظمة التي لها p ضلعًا الوحيدة التي يمكن أن تكون قابلة للإنشاء، حيث p أكبر من 2 ، هي تلك التي تكون حيث p عدد فيرما أولي.

7.55 مثال المضلع المنتظم الذي له 7 أضلاع غير قابل للإنشاء؛ لأن 7 ليس عدد فيرما أوليًا. بالمثل المضلع المنتظم الذي له 18 ضلعًا ليس قابلًا للإنشاء؛ لأنه على الرغم من أنّ 3 عدد فيرما أولي، فإنّ مربعها يقسم ألـ 18. ▲

سنبين الآن أنّ هذه المضلعات المنتظمة التي لها n ضلعًا المرشحة لتكون قابلة للإنشاء، هي في الحقيقة قابلة للإنشاء. لتكن ζ مرة أخرى الجذر البدائي من الرتبة n للواحد $\cos(2\pi/n) + i\ sin(2\pi/n)$. لقد رأينا قبل قليل أنّ:

$$2\cos\frac{2\pi}{n} = \zeta + \frac{1}{\zeta},$$

وأنّ

$$\left[\mathbb{Q}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) : \mathbb{Q}\right] = \frac{\varphi(n)}{2}.$$

افترض الآن أنّ $\varphi(n)$ القوة 2^s لـ 2. ليكن $E = \mathbb{Q}(\zeta + 1/\zeta)$، لقد رأينا سابقًا أنّ $\mathbb{Q}(\zeta + 1/\zeta)$ حقل جزئي من $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ يترك ثابتًا بـ $H_1 = \{\iota, \tau\}$، حيث i العنصر المحايد في $G(K/\mathbb{Q})$ و $\tau(\zeta) = 1/\zeta$، وبحسب مبرهنة سيلو، توجد زمر جزئية إضافية H_j من الرتبة 2^j من $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$، حيث $j = 0,2,3,\ldots,s$، بحيث إنّ:

$$\{\iota\} = H_0 < H_1 < \cdots < H_s = G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}).$$

بحسب مبرهنة جالوا

$$\mathbb{Q} = K_{H_s} < K_{H_{s-1}} < \ldots < K_{H_1} = \mathbb{Q}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right),$$

و $[K_{H_{j-1}} : K_H] = 2$. لاحظ أنّ $(\zeta + 1/\zeta) \in \mathbb{R}$، وهكذا $\mathbb{Q}(\zeta + 1/\zeta) < \mathbb{R}$ إذا كان $K_{H_{j-1}} = K_{H_j}(\alpha_j)$، فإنّ α_j صفر لـ $(a_j x^2 + b_j x + c_j) \in K_{H_j}[x]$. وبحسب "القانون العام لحلّ المعادلة التربيعية" المشهور، نحصل على:

$$K_{H_{j-1}} = K_{H_j}(\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j})$$

لأننا رأينا في الفصل 33 أنّ إنشاء الجذور التربيعية لعدد موجب قابل للإنشاء يمكن تحقيقه بالمسطرة والفرجار، نرى أنّ كلّ عنصر في $\mathbb{Q}(\zeta + 1/\zeta)$، وبوجه خاص، $\cos(2\pi/n)$ قابل للإنشاء؛ إذن، المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا، حيث $\varphi(n)$ إحدى قوى الـ 2 قابل للإنشاء.

نلخص عملنا تحت هذا العنوان بمبرهنة.

8.55 مبرهنة المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا قابل للإنشاء بالمسطرة والفرجار، إذا وفقط إذا كانت الأعداد الأولية الفردية كلها التي تقسم n، أعداد فيرما الأولية، وبحيث لا تقسم مربعاتها n.

9.55 مثال المضلع المنتظم الذي له 60 ضلعًا قابلًا للإنشاء؛ لأن $(5)(3)(2^2) = 60$ وكلا 3 و 5 أعداد فيرما الأولية. ▲

تمارين 55

حسابات

1. بالرجوع إلى المثال 3.55، أكمل الحسابات المشار إليها، مثبتًا أنّ $\Phi_8(x) = x^4 + 1$.
[اقتراح: احسب حاصل الضرب بدلالة ζ، ثمّ استخدم حقيقة أنّ $\zeta^8 = 1$ و $\zeta^4 = -1$ لتبسيط المعاملات].

2. صنّف زمرة كثيرة الحدود $(x^{20} - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$ بحسب المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية التولد.
[**مساعدة**: استخدام المبرهنة 4.55].

3. مستخدمًا صيغة $\varphi(n)$ بدلالة تحليل n، كما هو معطًى في المعادلة (1)، احسب القيم المشار إليها:

أ. $\varphi(60)$ ب. $\varphi(1000)$ جـ. $\varphi(8100)$

4. أعطِ القيم الـ 30 الأولى لـ $n \geq 3$ ، بحيث يكون المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا قابلًا للإنشاء بالمسطرة والفرجار.

5. أوجد أصغر زاوية ذات درجة صحيحة، أي $1°$ ، $2°$ ، $3°$ ، إلى آخره، قابلة للإنشاء بالمسطرة والفرجار. [مساعدة: إنشاء الزاوية $1°$ يعادل إنشاء المضلع المنتظم الذي له 360 ضلعًا، وهكذا].

6. ليكن K حقل انشطار $x^{12} - 1$ على $\mathbb{Q}$.

أ. أوجد $[K : \mathbb{Q}]$.

ب. أثبت أنه لكل $\sigma \in G(K/\mathbb{Q})$ ، σ^2 هو التماثل الذاتي المحايد. صنّف $G(K/\mathbb{Q})$ بحسب المبرهنة الأساسية 12.11 للزمر الإبدالية منتهية التولد.

7. أوجد $\Phi_3(x)$ على $\mathbb{Z}_2$. وأوجد $\Phi_8(x)$ على $\mathbb{Z}_3$.

8. كم عنصرًا يوجد في حقل انشطار $x^6 - 1$ على $\mathbb{Z}_3$؟

مفاهيم

9. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. $\Phi_n(x)$ غير مختزلة على أيّ حقل مميزه 0.

________ ب. كل صفر في $\mathbb{C}$ لـ $\Phi_n(x)$ ، هو جذر بدائي من الرتبة n للواحد.

________ جـ. زمرة $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$ تحوي n من العناصر.

________ د. زمرة $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$ إبدالية.

________ هـ. زمرة جالوا لحقل انشطار $\Phi_n(x)$ على $\mathbb{Q}$ من الرتبة $\varphi(n)$.

________ و. المضلع المنتظم الذي له 25 ضلعًا، قابل للإنشاء بالمسطرة والفرجار.

________ ز. المضلع المنتظم الذي له 17 ضلعًا، قابل للإنشاء بالمسطرة والفرجار.

________ ح. لكل عدد أولي p، المضلع المنتظم الذي له p ضلعًا، قابل للإنشاء إذا وفقط إذا كان p عدد فيرما الأولي.

________ ط. الأعداد الصحيحة كلها على الشكل $2^{(2^k)} + 1$ ، حيث k عدد صحيح غير سالب، هي أعداد فيرما الأولية.

________ ي. أعداد فيرما الأولية كلها أعداد على الصورة $2^{(2^k)} + 1$، حيث k عدد صحيح غير سالب.

براهين

10. أثبت أنه إذا كان F حقلًا مميزه لا يقسم n، فإنّ

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x)$$

في $F[x]$، حيث الضرب على القواسم d لـ n كلها.

11. أوجد كثيرة الحدود الدورية $\Phi_n(x)$ على $\mathbb{Q}$ لـ $n = 1,2,3,4,5,6$. [مساعدة: استخدم التمرين 10].

12. أوجد $\Phi_{12}(x)$ في $\mathbb{Q}[x]$. [مساعدة: استخدم التمرينين 10 و 11].

13. أثبت أنه في $\mathbb{Q}[x]$، $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ لكل عدد صحيح فردي $n > 1$. [مساعدة: إذا كانت ζ جذرًا بدائيًّا من الرتبة n الفردية للواحد، فما رتبة $-\zeta$؟].

14. لتكن $n,m \in \mathbb{Z}^+$ أولية نسبيًّا. أثبت أنّ حقل الانشطار في $\mathbb{C}$ لـ $x^{nm} - 1$ على $\mathbb{Q}$ هو نفسه حقل الانشطار في $\mathbb{C}$ لـ $(x^n - 1)(x^m - 1)$ على $\mathbb{Q}$.

15. لتكن $n,\ m \in \mathbb{Z}^+$ أولية نسبيًّا. أثبت أنّ زمرة $(x^{nm} - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$ تماثل الضرب المباشر لزمرتي $(x^n - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ و $(x^m - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$. [مساعدة: مستخدمًا مبرهنة جالوا، أثبت أنّ زمرتي $x^m - 1$ و $x^n - 1$ كلتيهما يمكن أن تُعدّا زمرتين جزئيتين من زمرة $x^{nm} - 1$. ثم استخدم التمرينين 50 و 51 في الفصل 11].

الفصل 56 عدم قابلية حل المعادلة من الدرجة الخامسة للحلّ Insolvability of the Quintic

المشكلة نحن معتادون على حقيقة أنّ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية $f(x) = ax^2 + bx + c$، $a \neq 0$ ذات المعاملات الحقيقية لها $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a)$ بوصفها أصفارًا في $\mathbb{C}$. في الحقيقة، هذا صحيح لـ $f(x) \in F[x]$ حيث F أيّ حقل مميزه $\neq 2$ والأصفار في $\overline{F}$. سيُطلب منا في التمرين 4 إثبات هذا. وهكذا، وعلى سبيل المثال:

$(x^2 + 2x + 3) \in \mathbb{Q}[x]$ أصفارها في $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

امتدادات بالجذور

قد تتساءل ما إذا كانت أصفار كثيرة حدود من الدرجة الثالثة على $\mathbb{Q}$، يمكن دائمًا التعبير عنها باستخلاص الجذور، والجواب نعم بالتأكيد، وحتى أصفار كثيرة حدود من الدرجة 4 على $\mathbb{Q}$، يمكن التعبير عنها باستخلاص الجذور، وبعد أن حاول الرياضيون سنوات إيجاد "صيغة باستخلاص الجذور". لأصفار كثيرة الحدود من الدرجة 5، فقد كان نصرًا، عندما أثبت "أبل" أنّ المعادلة الخامسة لا تحلّ بالضرورة باستخلاص الجذور، سيكون عملنا الأول الوصف الدقيق لما يعنيه هذا، وسيُستخدم في المناقشة المقبلة قدر كبير من الجبر الذي طوّرناه .

1.56 تعريف يسمى الامتداد K للحقل F **امتدادًا لـ F بالجذور** (**extension of F by radicals**)، إذا وجدت عناصر $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in K$ وأعداد صحيحة موجبة $n_1, \ldots, n_r$ ، بحيث إنّ $\alpha_1^{n_1} \in F$، $K = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ و $\alpha_i^{n_i} \in F(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1})$، لكل $1 < i \leq r$ حيث كثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$ **قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على** F (**Solvable by radicals over F**)، إذا كان حقل الانشطار E لـ $f(x)$ على F محتوًى في امتداد لـ F بالجذور. ■

إذن، تكون كثيرة الحدود $f(x) \in F(x)$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F، إذا كان بالإمكان الحصول على كل صفر لـ $f(x)$ باستخدام سلسلة منتهية من عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وأخذ الجذور n_i بدءًا بعناصر من F. الآن، قولنا: إنّ المعادلة من الدرجة الخامسة غير قابلة للحل في الحالة التقليدية – أي المميز 0– لا يعني قولنا: إنه لا معادلة من الدرجة الخامسة قابلة للحلّ، كما يثبت المثال الآتي.

■ نبذة تاريخية

كان أول نشر لصيغة حلّ المعادلة من الدرجة الثالثة باستخلاص الجذور عام 1545م في كتاب (*Ars Magna*) لجيرولامو كاردانو (*Girolamo Cardano*)، على الرغم من أنّ بداية اكتشاف الطريقة جزئيًا يعود كذلك لسيبوني ديل فيرو، ونيكولو تارتاجليا (*Scipione del Ferro and Niccolo Tartaglia*). اكتشف تلميذ كاردانو، لودوفيكو فيراري (*Lodovico Ferrari*) طريقة لحلّ المعادلة من الدرجة الرابعة باستخلاص الجذور، التي ظهرت كذلك ضمن عمل كاردانو.

وبعد أن حاول كثير من الرياضيين حلّ المعادلة من الدرجة الخامسة بطرق مشابهة، كان جوزيف لويس لاجرانج (*Joseph Louis Lagrange*) عام 1770م أول من حاول بالتفصيل تحليل المبدأ العام وراء حلول كثيرات الحلول من الدرجة 3 و 4، وبرهن لماذا فشلت هذه الطرق في حل تلك المعادلات ذات الدرجات الأعلى، كان أساس فهمه العميق لهذه الطرق السابقة يقوم على وجود دوال نسبية للجذور، التي تأخذ قيمتين أو ثلاثة– على التوالي– تحت التباديل الممكنة للجذور كلها، وهكذا يمكن كتابة هذه الدوال النسبية بوصفها جذورًا لمعادلات ذات درجة أقلّ من الأصلية، لم تكن أي من هذه الدوال واضحة في المعادلات ذات الدرجات الأعلى.

كان أول رياضي يدعي عدم قابلية المعادلة من الدرجة الخامسة للحلّ هو باولو روفيني (*Paolo Ruffini* 1765-1822)، في كتابه في الجبر عام 1799م، وقد كان برهانه تبعًا لمقترحات لاجرانج، ففي الواقع، حدّد الزمر الجزئية جميعها من S_5، وأثبت كيف تؤثر هذه الزمر الجزئية في الدوال النسبية لجذور المعادلة، ولسوء الطالع، كان هناك كثير من الثغرات في النسخ المنشورة من البرهان، لقد كان نيلز هينريك أبل (*Niels Henrik Abel*) الذي نشر برهانًا كاملًا عامي 1824م و1826م ، مغلقًا ثغرات روفيني جميعها ، الذي حلّ سؤالًا عمره قرون.

2.56 مثال كثيرة الحدود x^5-1 قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$. حقل الانشطار K لـ x^5-1 مولد بالجذر البدائي ζ من الرتبة 5 للواحد، أي $\zeta^5=1$ و $K=\mathbb{Q}(\zeta)$. وكذلك x^5-2 قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$؛ لأن حقل انشطارها مولد بـ $\sqrt[5]{2}$ و ζ، حيث $\sqrt[5]{2}$ هو الصفر الحقيقي لـ x^5-2. ▲

للقول: إنّ المعادلة من الدرجة الخامسة غير قابلة للحلّ في الحالة التقليدية، يعني أنه يوجد بعض كثيرات الحدود من الدرجة 5 معاملاتها أعداد حقيقية، ولا يمكن حلها باستخلاص الجذور. سنثبت ذلك، سوف نفترض أنّ الحقول المذكورة خلال هذا الفصل جميعها ذات مميز 0.

الخطوط العريضة للمناقشة هي كما يأتي، ومن النافع محاولة تذكرها.

1. سنثبت أنّ كثيرة الحدود $f(x)\in F(x)$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F، (إذا و) فقط إذا كان حقل انشطارها E على F له زمرة جالوا قابلة للحل.

   تذكر أنّ الزمرة القابلة للحلّ، هي تلك التي يكون لها سلسلة تركيب مع خوارج إبدالية، ومع أنّ هذه المبرهنة صحيحة في الاتجاهين، فإننا لن نثبت جزء ألـ «إذا».

2. سوف نثبت أنه يوجد حقل جزئي F من الأعداد الحقيقية وكثيرة حدود $f(x)\in F(x)$ من الدرجة 5 مع حقل انشطار E على F، بحيث $G(E/F)\simeq S_5$، زمرة التناظر على 5 حروف. تذكر أنّ سلسلة التركيب لـ S_5 هي $\{\iota\}<A_5<S_5$، ولأنّ A_5 ليست إبدالية، نكون قد انتهينا.

التمهيدية الآتية تقوم بمعظم عمل الخطوة 1.

3.56 تمهيدية ليكن F حقلًا مميزه 0، وليكن $a \in F$، فإذا كان K حقل انشطار $x^n - a$ على F، فإنّ $G(K/F)$ زمرة قابلة للحل.

البرهان: افترض أولاً أنّ F يحوي الجذور جميعها من الرتبة n للواحد، وبحسب النتيجة 6.23، تشكل الجذور من الرتبة n للواحد زمرة جزئية دورية من $\langle F^*,.\rangle$ ليكن ζ مولدًا لهذه الزمرة الجزئية. (في الحقيقة، المولدات هي بالضبط الجذور البدائية من الرتبة n للواحد)؛ إذن، الجذور من الرتبة n للواحد هي:

$$1, \zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{n-1}.$$

فإذا كان $\beta \in \overline{F}$ صفرًا لـ $(x^n - a) \in F[x]$، فإنّ أصفار $x^n - a$ هي:

$$\beta, \zeta\beta, \zeta^2\beta, \cdots, \zeta^{n-1}\beta.$$

ولأنّ $K = F(\beta)$، فإنّ أيّ تماثل ذاتي σ في $G(K/F)$ يتحدّد بقيمة $\sigma(\beta)$ للتماثل الذاتي σ على β. الآن، إذا كان $\sigma(\beta) = \zeta^i\beta$ و $\tau(\beta) = \zeta^j\beta$، حيث $\tau \in G(K/F)$، فإنّ:

$$(\tau\sigma)(\beta) = \tau(\sigma(\beta)) = \tau(\zeta^i\beta) = \zeta^i \tau(\beta) = \zeta^i \zeta^j\beta,$$

لأنّ $\zeta^i \in F$. وبالمثل:

$$.(\sigma\tau)(\beta) = \zeta^j \zeta^i \beta$$

إذن، $\sigma\tau = \tau\sigma$، و$G(F/K)$ إبدالية؛ ولذلك، فهي قابلة للحل.

الآن، افترض أنّ F لا يحوي الجذور البدائية من الرتبة n للواحد. ليكن ζ مولدًا للزمرة الدورية للجذور من الرتبة n للواحد مع عملية الضرب في $\overline{F}$. ليكن β مرة أخرى صفرًا لـ $x^n - a$، فلأنّ β و $\zeta\beta$ كليهما في حقل الانشطار K لـ $x^n - a$، فإنّ $\zeta=(\zeta\beta)/\beta$ تقع في K. ليكن $F' = F(\zeta)$، نحصل على $F < F' \leq K$. الآن، F' امتداد ناظمي على F؛ لأن F' حقل انشطار $x^n - 1$. ولأنّ $F' = F(\zeta)$، فيتحدد التماثل الذاتي η من $G(F'/F)$ بـ $\eta(\zeta)$، ويجب أن نحصل على $\eta(\zeta)=\zeta^i$؛ لأن أصفار $x^n - 1$ كلها هي قوًى لـ ζ، وإذا كان $\mu(\zeta) = \zeta^j$، حيث $\mu \in G(F'/F)$؛ إذن:

$$(\mu\eta)(\zeta) = \mu(\eta(\zeta)) = \mu(\zeta^i) = \mu(\zeta)^i = (\zeta^j)^i = \zeta^{ij}$$

وكذلك بالمثل،

$$(\eta\mu)(\zeta) = \zeta^{ij}.$$

إذن، $G(F'/F)$ إبدالية. وبحسب المبرهنة الأساسية لمبرهنة جالوا،

$$\{\iota\} \leq G(K/F') \leq G(K/F)$$

سلسلة ناظمية؛ ولذلك فهي سلسلة تحت ناظمية من الزمر. أثبت الجزء الأول من البرهان أنّ $G(K/F')$ إبدالية، وتخبرنا مبرهنة جالوا بأنّ $G(K/F)/G(K/F')$ تماثل $G(F'/F)$، وهي إبدالية، حيث يثبت التمرين 6، أنه إذا كان لزمرة سلسلة تحت ناظمية من الزمر الجزئية وزمر خارجة إبدالية، فإنّ أيّ تصفية لهذه السلسلة لها كذلك زمر خارجة إبدالية؛ إذن، سلسلة التركيب لـ $G(K/F)$ لها زمر خارجة إبدالية، وهكذا، فإنّ $G(K/F)$ قابلة للحل. ♦

ستكمل المبرهنة الآتية الخطوة 1 في برنامجنا.

4.56 مبرهنة ليكن F حقلًا مميزه صفر، وليكن $F \leq E \leq K \leq \overline{F}$ ، حيث E امتداد ناظمي لـ F و K امتداد بالجذور لـ F؛ إذن، $G(E/F)$ زمرة قابلة للحل.

البرهان سنثبت في البداية أنّ K محتوًى في امتداد ناظمي منته L لـ F بالجذور، وأنّ الزمرة $G(L/F)$ قابلة للحل. لأنّ K امتداد بالجذور، $K = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$

حيث $\alpha_i^{n_i} \in F(\alpha_1, \cdots, \alpha^{i-1})$ و $1 < i \leq r$ و $\alpha_1^{n1} \in F$. ولتكوين L، نكوّن أولاً حقل الانشطار L_1 لكثيرة الحدود $f_1(x) = x^{n1} - \alpha^{n1}$ على F؛ إذن، L_1 امتداد ناظمي على F، وتثبت التمهيدية 3.56 أنّ $G(L_1/F)$ زمرة قابلة للحل. الآن، $\alpha_2^{n2} \in L_1$ ونكوّن كثيرة الحدود.

$$f_2(x) = \prod_{\sigma \in G(L_1/F)} \left[\left(x^{n_2} - \sigma(\alpha_2)\right)^{n_2}\right].$$

لأنّ كثيرة الحدود لا تتغير تحت تأثير أيّ σ في $G(L_1/F)$ ، نرى أنّ $f_2(x) \in F[x]$. سنترك L_2 ليكون حقل انشطار $f_2(x)$ على L_1؛ إذن، L_2 حقل انشطار على F كذلك، وهو امتداد ناظمي على F بالجذور، نستطيع بناء L_2 من L_1 عن طريق خطوات متكررة كما في التمهيدية 3.56 مرورًا إلى حقل انشطار $x^{n2} - \sigma(\alpha_2)^{n2}$ بكل خطوة، وبحسب التمهيدية 3.56 وتمرين 7، نرى أنّ زمرة جالوا على F لكل امتداد جديد مكوّن تظل قابلة للحل، نستمر بهذه الخطوات بتكوين حقول انشطار على F بهذا الأسلوب: في المرحلة i، نكوّن حقل انشطار لكثيرة الحدود

$$f_i(x) = \prod_{\alpha \in G(L_{i-1}/F)} \left[\left(x^{n_i} - \sigma(\alpha_i)\right)^{n_i}\right]$$

على L_{i-1}. نحصل أخيرًا على الحقل $L = L_r$ ، الذي يكون امتدادًا ناظميًّا على F بالجذور، ونرى أنّ $G(L/F)$ زمرة قابلة للحلّ، حيث نرى من خلال العمل أنّ $K \leq L$.

لنختم عملنا، نحتاج إلى أن نلاحظ أنه بحسب المبرهنة 6.53، يكون $G(E/F) \simeq G(L/F)/G(L/E)$. إذن $G(E/F)$، زمرة عامل، وعليه، هي صورة تشاكل من $G(L/F)$. ولأنّ $G(L/F)$ قابل للحل، فيثبت التمرين 29 في الفصل 35 أنّ $G(E/F)$ قابل للحل. ♦

عدم قابلية المعادلة من الدرجة الخامسة للحل باستخلاص الجذور

بقي علينا إثبات وجود حقل جزئي F من الأعداد الحقيقية وكثيرة حدود $f(x) \in F(x)$ من الدرجة الخامسة، بحيث إنّ حقل الانشطار E لـ $f(x)$ على F له زمرة جالوا تماثل S_5.

ليكن $y_1 \in \mathbb{R}$ متساميًا على $\mathbb{Q}$، $y_2 \in \mathbb{R}$ متساميًا على $\mathbb{Q}(y_1)$ ، وهكذا، حتى نصل إلى $y_5 \in \mathbb{R}$ متسامية على $\mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_4)$. بالإمكان برهنة وجود مثل هذه الأعداد الحقيقية المتسامية باستخدام مقاربة العدّ، فالأعداد المتسامية التي يمكن إيجادها بهذه الطريقة تسمى **عناصر متسامية مستقلة** على $\mathbb{Q}$ **(independent transcendental elements)**. ليكن $E = \mathbb{Q}(y_1, \cdots, y_5)$، ولتكن:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{5} (x - y_i).$$

إذن، $f(x) \in E[x]$ الآن معاملات $f(x)$– ما عدا احتمال الإشارة – ضمن الدوال المتناظرة الابتدائية في y_i، يعني:

$$s_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_5,$$
$$s_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_1y_5 + y_2y_3$$
$$+ y_2y_4 + y_2y_5 + y_3y_4 + y_3y_5 + y_4y_5,$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$s_5 = y_1y_2y_3y_4y_5.$$

$$\begin{array}{c} E = \mathbb{Q}(y_1,\ldots,y_5) \\ | \\ F = \mathbb{Q}(s_1,\ldots,s_5) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

الشكل 5.56

معامل x^i في $f(x)$ هو $\pm s_{5-i}$. ليكن $F = \mathbb{Q}(s_1, s_2, \cdots, s_5)$؛ إذن، $f(x) \in F[x]$ (انظر الشكل 5.56)؛ وعليه، E حقل انشطار على F لـ $f(x)$.

لأن ألـ y_i تتصرف بوصفها غير معين على $\mathbb{Q}$ ، فإنّ كل $\sigma \in S_5$ زمرة التماثل على خمسة حروف – تولد تماثلًا ذاتيًا على E معرّف بـ $\sigma(a) = a$ لكل $a \in \mathbb{Q}$ و $\sigma(y_i) = y_{\sigma(i)}$.. ولأنّ $\prod_{i=1}^{5}(x - y_i)$ هي كثيرة الحدود نفسها، $\prod_{i=1}^{5}(x - y_{\sigma(i)})$ فنحصل على

$$\overline{\sigma}(s_i) = s_i$$

لكل i، وهذا يؤدي إلى أنّ $\overline{\sigma}$ تترك F ثابتة، وهكذا، فإنّ $\overline{\sigma} \in G(E/F)$ الآن، رتبة S_5 تساوي $5!$، وعليه،

$$|G(E/F)| \geq 5!.$$

لأنّ درجة حقل الانشطار على F لكثيرة حدود من الدرجة 5 على F ، هي على الأكثر $5!$، فنرى أنّ:

$$|G(E/F)| \leq 5!.$$

إذن، $|G(E/F)| = 5!$ ، والتماثلات الذاتية $\overline{\sigma}$ تصنع كامل زمرة جالوا $G(E/F)$.

لذلك، $G(E/F) \simeq S_5$ ، وهذا يؤدي إلى أنّ $G(E/F)$ غير قابلة للحل، هذا يكمل خطوطنا العريضة، ونلخص ذلك في مبرهنة.

6.56 مبرهنة لتكن $y_1, \ldots, y_5$ أعدادًا حقيقية متسامية مستقلة على $\mathbb{Q}$. كثيرة الحدود

$$f(x) = \prod_{i=1}^{5}(x - y_i)$$

غير قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $F = \mathbb{Q}(s_1, s_2, \cdots, s_5)$، حيث s_i هي الدالة المتناظرة الابتدائية i في $y_1, \ldots, y_5$.

من الواضح أنّ تعميم هذه المناقشة يثبت (**الهدف النهائي**)، أنّ كثيرة الحدود من الدرجة n ليست بالضرورة قابلة للحلّ باستخلاص الجذور لـ $n \geq 5$.

وختامًا، نشير إلى أنه توجد كثيرات حدود من الدرجة 5 في $\mathbb{Q}[x]$ غير قابلة للحل باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$. يترك برهان هذا إلى التمارين (انظر التمرين 8).

تمارين 56

مفاهيم

1. هل يمكن الحصول على حقل الانشطار K لـ x^2+x+1 على $\mathbb{Z}_2$ بإضافة جذر تربيعي لـ $\mathbb{Z}_2$ لأحد عناصر $\mathbb{Z}_2$؟ هل K امتداد بالجذور لـ $\mathbb{Z}_2$؟

2. هل كل كثيرة حدود في $F[x]$ على الصورة $ax^8+bx^6+cx^4+dx^2+e$، حيث $a \neq 0$، قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F، إذا كان مميز F يساوي 0؟ لماذا نعم أو لا؟

3. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. ليكن F حقلًا مميزه 0. كثيرة الحدود في $F[x]$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور إذا وفقط إذا كان حقل انشطارها في $\overline{F}$ محتوًى في امتداد بالجذور لـ F.

______ ب. ليكن F حقلًا مميزه 0. كثيرة الحدود في $F[x]$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور إذا وفقط إذا كان حقل انشطارها في $\overline{F}$ له زمرة جالوا قابلة للحلّ على F.

______ جـ. حقل انشطار $x^{17}-5$ على $\mathbb{Q}$ له زمرة جالوا قابلة للحلّ.

______ د. العددان π و $\sqrt{\pi}$ متساميان مستقلان على $\mathbb{Q}$.

______ هـ. زمرة جالوا لامتداد منتهٍ لحقل منتهٍ قابلة للحل.

______ و. لا معادلة من الدرجة الخامسة قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على أيّ حقل.

______ ز. كل كثيرة حدود من الدرجة 4 على حقل مميزه 0 ، قابلة للحلّ باستخلاص الجذور.

______ ح. أصفار كثيرة حدود تكعيبية على حقل F مميزه 0 ، يمكن دائمًا الوصول إليها بسلسلة منتهية من عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وأخذ الجذور التربيعية بدءًا من عناصر في F.

______ ط. لا يمكن أبدًا الوصول إلى أصفار كثيرة حدود تكعيبية على حقل F مميزه 0، بسلسلة منتهية من عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وأخذ الجذور التربيعية بدءًا من عناصر في F.

______ ي. أدت مبرهنة سلاسل الزمر تحت الناظمية دورًا مهمًّا في تطبيقات مبرهنة جالوا.

براهين

4. ليكن F حقلاً، ولتكن $f(x) = ax^2+bx+c$ في $F[x]$ ، حيث $a \neq 0$. أثبت أنه إذا كان مميز F لا يساوي 2، فإنّ حقل انشطار $f(x)$ على F هو $F(\sqrt{b^2-4ac})$.

[مساعدة: أكمل المربع، تمامًا كما في عمل المدرسة العليا، لاستنتاج «القانون العام لحلّ المعادلة التربيعية»].

5. أثبت أنه إذا كان F حقلاً مميزه لا يساوي 2 و $f(x) = ax^4+bx^2+c,$

حيث $a \neq 0$، فإنّ $f(x)$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F.

6. أثبت أنه لزمرة منتهية، كل تصفية لسلسلة تحت ناظمية مع خوارج إبدالية، لها كذلك خوارج إبدالية، وهكذا يكتمل إثبات التمهيدية 3.56. [مساعدة: استخدم المبرهنة 7.34].

7. أثبت أنه لزمرة منتهية، يمكن تصفية سلسلة تحت ناظمية مع زمر خارجة قابلة للحلّ إلى سلسلة تركيب مع خوارج إبدالية، وهكذا يكتمل إثبات المبرهنة 4.56.

[مساعدة: استخدم المبرهنة 7.34].

8. يقدم هذا التمرين كثيرة حدود من الدرجة 5 في $\mathbb{Q}[x]$ غير قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$.

أ. أثبت أنه إذا كانت H زمرة جزئية من S_5، وتحوي حلقة طولها 5 وحلقة طولها 2، فإنّ $H=S_5$. [مساعدة: أثبت أنّ H تحوي الحلقات الثنائية جميعها في S_5، وطبق النتيجة 12.9. انظر التمرين 39، في الفصل 9].

ب. أثبت أنه إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ من الدرجة 5، ولها بالضبط صفران مركبان وثلاثة أصفار حقيقية في $\mathbb{C}$، فإنّ زمرة $f(x)$ على $\mathbb{Q}$ تماثل S_5. [مساعدة: استخدم مبرهنة سيلو في إثبات أنّ الزمرة تحوي عنصرًا رتبته 5. استخدم حقيقة أنّ $f(x)$ له بالضبط صفران مركبان لإثبات أنّ الزمرة تحوي عنصرًا رتبته 2، ثم طبّق الفرع (أ)].

جـ. كثيرة الحدود $f(x)=2x^5-5x^4+5$ غير مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ – بحسب معيار أيزنستين، حيث $p=5$. استخدم تقنيات التفاضل والتكامل في إيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية و"رسم دالة كثيرة الحدود f"؛ لمشاهدة أنّ $f(x)$ يجب أن يكون لها بالضبط ثلاثة أصفار حقيقية في $\mathbb{C}$. استنتج من الفرع (ب) والمبرهنة 4.56، أنّ $f(x)$ غير قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$.

حلول التمارين ذات الأرقام الفردية

التي لا تسأل عن تعريفات أو براهين

الفصل 0

1. $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

3. $\{1,-1, 2,-2, 3,-3, 4,-4, 5,-5, 6,-6, 10,-10, 12,-12, 15,-15, 20,-20, 30,-30, 60,-60\}$

5. ليست مجموعة (ليست حسنة التعريف). حالة يمكن عملها أيضًا للمجموعة الخالية ϕ

7. المجموعة ϕ

9. المجموعة $\mathbb{Q}$

11. $(a, 1), (a, 2), (a, c), (b, 1), (b, 2), (b, c), (c, 1), (c, 2), (c, c)$

13. ارسم الخط المارّ خلال P و x، ولتكن y هي نقطة تقاطعه مع القطعة المستقيمة CD

17. مخمّنة: $2^s = n(\mathscr{P}(A))$ (البراهين عادة تحذف من الحلول)

21. $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = 12^{\aleph_0} = 10^2, 10^5, 10^{\aleph_0}$. [(الأعداد x حيث $0 \le x \le 1$ يمكن كتابتها للأساس 12 وللأساس 2 وأيضًا للأساس 10)

23. 1 **25.** 5 **27.** 52

29. ليست علاقة تكافؤ.

31. علاقة تكافؤ، $\bar{0} = \{0\}$ ، $\bar{a} = \{a,-a\}$ لأيِّ عنصر غير صفري $a \in \mathbb{R}$.

33. علاقة تكافؤ:

$$\bar{1} = \{1,2,\ldots,9\},$$

$$\overline{10} = \{10,11,\ldots,99\},$$

$$\overline{100} = \{100,101,\ldots,999\},$$ وبوجه عام

$$\overline{10^n} = \{10^n, 10^n+1, \ldots, 10^{n+1}-1\}$$

35. أ. $\{1, 3, 5, \ldots\}, \{2, 4, 6, \ldots\}$

ب. $\{1, 4, 7, \ldots\}, \{2, 5, 8, \ldots\}, \{3, 6, 9, \ldots\}$

جـ. $\{1, 6, 11, \ldots\}, \{2, 7, 12, \ldots\}, \{3, 8, 13, \ldots\}, \{4, 9, 14, \ldots\}, \{5, 10, 15, \ldots\}$

37. الاسم دالة اثنين إلى اثنين يقترح أنّ دالة f كهذه يجب أن تحمل كل زوج من النقاط المختلفة إلى نقطتين مخلفتين، دالة كهذه أحادية بالمعنى الاصطلاحي . (إذا كان في المجال عنصر واحد، فالدالة لا يمكن أن تفشل في أن تكون دالة اثنين إلى اثنين؛ لأن الطريقة الوحيدة التي يمكن أن تفشل فيها أن تكون دالة اثنين إلى اثنين هي أن تحمل نقطتين إلى نقطة واحدة، والمجموعة ليس فيها نقطتان)، في المقابل، كل دالة أحادية بالمعنى الاصطلاحي تحمل أيّ زوج من النقاط إلى نقطتين مختلفتين. وعليه، فمن الناحية الاصطلاحية، فإن الدوال التي تسمى أحادية هي بالضبط تلك التي تحمل أيّ نقطتين إلى نقطتين، وذلك باعتبار أن هذه الدوال وبصورة بدهية هي ذات طريق أحادي الاتجاه. أيضًا، الطريقة القياسية لإثبات أن الدالة أحادية، هي بالتحديد إثبات أنها لا تحمل نقطتين إلى نقطة واحدة فقط. وعليه، إثبات أنّ الدالة أحادية صار طبيعيًّا من خلال اصطلاح اثنين إلى اثنين.

الفصل 1

1. $-i$ **3.** $-i$ **5.** $23 + 7i$

7. $17 - 15i$ **9.** $-4 + 4i$

11. $2\sqrt{13}$ **13.** $\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

15. $\sqrt{34}\left(\frac{-3}{\sqrt{34}}+\frac{5}{\sqrt{34}}i\right)$

17. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$ **19.** $\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i, 3i$

21. $\sqrt{3}\pm i\ ,\ \pm 2i\ ,\ -\sqrt{3}\pm i$ **23.** 4 **25.** $\frac{3}{8}$ **27.** $\sqrt{2}$

29. 11 **31.** 5 **33.** $1, 7$

35. $\zeta^0 \leftrightarrow 0,\ \zeta^3 \leftrightarrow 7\ ,\ \zeta^4 \leftrightarrow 4\ ,\zeta^5 \leftrightarrow 1,\ \zeta^6 \leftrightarrow 6,\ \zeta^7 \leftrightarrow 3$

37. مع $\zeta \leftrightarrow 4$ يجب أن يكون لدينا $\zeta^2 \leftrightarrow 1$ ، $\zeta^3 \leftrightarrow 0$ ، وأيضًا $\zeta^4 \leftrightarrow 4$ ، التي هي مستحيلة في التقابل الأحادي.

39. بالضرب، نحصل على:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)i\ ]$$

والنتيجة المطلوبة تنتج مباشرة من التمرين 38 ومن المعادلة $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

الفصل 2

1. e, b, a **3.** a ، c. * ليست تجميعية

5. الصف الأوّل: d الصف الثاني: a، الصف الرابع: c، b

7. ليست تبديلية، ليست تجميعية.

9. تبديلية، تجميعية.

11. ليست تبديلية، ليست تجميعية.

13. 8، 729، $n^{[n(n+1)/2]}$

17. لا، الشرط 2 يفشل **19.** نعم

21. لا، الشرط 1 يفشل

23. أ. نعم ب. نعم

25. لتكن $S = \{?, \triangle\}$. عرِّف * و $*'$ على S بـ $a * b = ?$ و $a *' b = \triangle$ لكل $a, b \in S$ (هناك حلول أخرى ممكنة).

27. صح. **29.** صح

31. خطأ، افترض أنّ $f(x) = x^2$، $g(x) = x$، و $h(x) = 2x + 1$. عندئذٍ:

لكن $(f(x) - g(x)) - h(x) = x^2 - 3x - 1$

$$f(x) - (g(x) - h(x)) = x^2 - (-x - 1) = x^2 + x + 1$$

33. صح **35.** خطأ، افترض أنّ * هي + ، وافترض أنّ $*'$ على $\mathbb{Z}$

الفصل 3

1. أ. ϕ يجب أن يكون أحاديًا ب. $\phi[S]$ يجب أن تكون جميع S'

جـ. $\phi(a * b) = \phi(a) *' \phi(b)$ لكل $a, b \in S$

3. لا؛ لأن ϕ لا ترسل $\mathbb{Z}$ بصورة غامرة إلى $\mathbb{Z}'$. $\phi(n) \neq 1$ لكل $n \in \mathbb{Z}$

5. نعم **7.** نعم **9.** نعم

11. لا؛ لأنّ $\phi(x^2) = \phi(x^2 + 1)$

13. لا؛ لأنّ $\phi(f) = x + 1$ ليس لها حل $f \in F$

15. لا؛ لأنّ $\phi(f)=1$ ليس لها حل $f \in F$

17. أ. $m*n = mn - m - n + 2$؛ العنصر المحايد 2

ب. $m*n = mn + m + n$؛ العنصر المحايد 0

19. أ. $a*b = \frac{1}{3}(ab + a + b - 2)$؛ العنصر المحايد 2

ب. $a*b = 3ab - a - b + \frac{2}{3}$؛ العنصر المحايد $\frac{2}{3}$

25. لا، إذا كانت $\langle S, *\rangle$ لها عنصر محايد أيسر e_L وعنصر محايد أيمن e_R، فإن $e_L = e_R$. (من عادتنا حذف البراهين من الحلول).

الفصل 4

1. لا. $\mathscr{G}_3$ تفشل **3.** لا. $\mathscr{G}_1$ تفشل **5.** لا. $\mathscr{G}_1$ تفشل

7. الزمرة $\langle U_{1000}, .\rangle$ لحلول المعادلة $z^{1000}=1$ في $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الضرب فيها 1000 عنصر.

9. المعادلة على الصورة: $x*x*x*x=e$ لها أربعة حلول في $\langle U, .\rangle$، حل واحد في $\langle \mathbb{R}, +\rangle$، وحلّان في $\langle \mathbb{R}^*, .\rangle$

11. نعم **13.** نعم

15. لا. المصفوفة التي جميع مدخلاتها 0 هي مثلثية علوية، لكن ليس لها معكوس.

17. نعم

19. (البرهان محذوف) جـ. $-\frac{1}{3}$

21. 2، 3. (تصبح الإجابة صعبة في حالة أربعة عناصر، حيث إنّ الجواب ليس 4).

25. أ. خطأ جـ. صح هـ. خطأ ز. صح ط. خطأ

الفصل 5

1. نعم **3.** نعم **5.** نعم **7.** $\mathbb{Q}^+$ و $\{\pi^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ **9.** نعم

11. لا، ليست مغلقة بالنسبة إلى الضرب.

13. نعم

15. أ. نعم ب. لا، إنها ليست حتى مجموعة جزئية من $\tilde{F}$

17. أ. لا، ليست مغلقة بالنسبة إلى الجمع ب. نعم

19. أ. نعم ب. لا، الدالة الثابتة الصفرية ليست في $\tilde{F}$

21. أ. $-50, -25, 0, 25, 50$ ب. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$ ج. $1, \pi, \pi^2, 1/\pi, 1/\pi^2$

23. جميع المصفوفات $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لـ $n \in \mathbb{Z}$

25. المصفوفات جميعها على الصورة: $\begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 0 & -2^{2n+1} \\ -2^{2n+1} & 0 \end{bmatrix}$ لـ $n \in \mathbb{Z}$

27. 4 **29.** 3 **31.** 4 **33.** 2 **35.** 3

39. أ. صح ج. صح هـ. خطأ ز. خطأ ط. صح

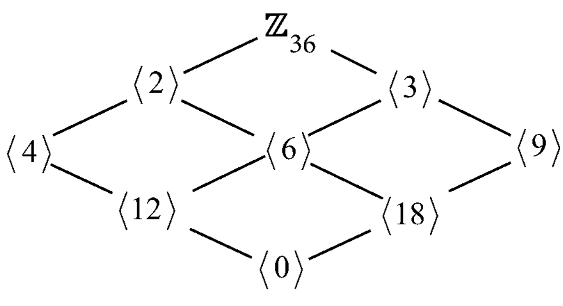
الفصل 6

1. $q = 4, r = 6$ **3.** $q = -7, r = 6$ **5.** 8 **7.** 60

9. 4 **11.** 16 **13.** 2 **15.** 2 **17.** 6 **19.** 4

19. زمرة دورية لا نهائية

23.



25. 1، 2، 3، 6 **27.** 1، 2، 3، 4، 6، 12 **29.** 1، 17

33. زمرة كلاين الرباعية **35.** $\mathbb{Z}_2$ **37.** $\mathbb{Z}_8$

39. $\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و $\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$

41. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ ، $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$ ، $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$ ، $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i)$

51. $(p-1)(q-1)$

الفصل 7

1. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

3. $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$

5. $\ldots, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, \ldots$

7. أ. a^3b ب. a^2 جـ. a^2

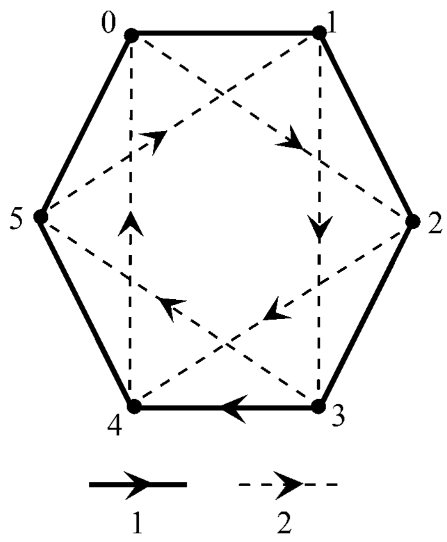
9.

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	c	b	f	d
b	b	d	e	f	a	c
c	e	f	a	d	e	b
d	d	b	f	e	c	a
f	f	c	d	a	b	e

11. اختر زوجًا من الحوافّ الموجّهة المولّدة، أطلق عليهما الاسمين $arc1$ و$arc2$، ابدأ من أيّ رأس لرسم موجه، وانظر فيما إذا كانت المتتالية $arc1$، $arc2$ و$arc2$، $arc1$ تؤدي إلى الرأس نفسه. (هذه تقابل السؤال فيما إذا كان المولدان المقابلان للزمرتين تبديليين). الزمرة تبديلية إذا وفقط إذا كانت هاتان المتسلسلتان تؤديان إلى الرأس نفسه لأيّ زوج من الحوافّ الموجّهة المولّدة.

13. إنها ليست واضحة؛ لأن رسم موجه لزمرة دورية يمكن أن يشكل باستخدام مجموعة مولدة من عنصرين أو أكثر، ليس أيّ منهما يولد الزمرة.

15.



17. أ. البدء من أيّ رأس a، أيّ مسار خلال البيان ينتهي عند الرأس a نفسه، يمثل ضربًا لمولدات أو لمعكوساتها، التي تساوي المحايد، وعليه، تعطي علاقة.

ب. $a^4 = e \ , b^2 = e, (ab)^2 = e$

الفصل 8

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. 2

9. ι

11. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

13. $\{1, \ 5\}$

15. $\in, \rho, \ \rho^2, \ \rho^3, \ \phi, \rho\phi, \rho^2\phi, \ \rho^3\phi$، حيث ϕ هنا هي μ_1 خاصتنا. هذه تعطي عناصرنا على الترتيب: $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \delta_1, \mu_2, \delta_2$

17. 24

19. بالرجوع إلى الجدول 12.8، نجد أنّ: $\langle \rho_0 \rangle = \{\rho_0\}$ ، $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_3 \rangle = \{\rho_0, \ \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$

$\langle\rho_2\rangle=\{\rho_0,\rho_2\}$، $\mu_1=\{\rho_0,\mu_1\}$، $\mu_2=\{\rho_0,\mu_2\}$، $\langle\delta_1\rangle=\{\rho_0,\delta_1\}$، و $\langle\delta_2\rangle=\{\rho_0,\delta_2\}$، تلك هي جميع الزمر الجزئية الدورية. الزمرة الجزئية التي تحوي واحدة من التباديل μ_1,μ_2,δ_1 ، أو δ_2 اللواتي "تعيد المربع" وتحوي أيضًا ρ_1 أو ρ_3 سوف تصف أوضاع المربع جميعها، وهكذا يجب أن تكون الزمرة D_4 جميعها. بفحص الصف في الجدول المقابل لـ μ_1 ، نرى أن العناصر الأخرى الوحيدة التي يمكن أن تكون في زمرة جزئية فعلية مع μ_1 هي ρ_0 ، ρ_2 ، μ_2 . نفحص أن $\{\rho_0,\ \rho_2,\mu_1,\mu_2\}$ مغلقة بالنسبة إلى الضرب، وفيما إذا كانت زمرة جزئية. بفحص الصف في الجدول المقابل لـ μ_2 يعطي الزمرة الجزئية نفسها، وبفحص الصفين في الجدول والمقابلين لـ δ_1 و δ_2 يعطي – باستخدام التفسير نفسه – الزمرة الجزئية $\{\rho_0,\ \rho_2,\delta_1,\delta_2\}$ كالاحتمال الوحيد المتبقي.

21. أ. هذه هي "مصفوفات التباديل البسيطة" التي تنتج عن تبديل صفوف مصفوفة الوحدة. عند ضرب مصفوفة أخرى A من اليسار بواحدة من هذه المصفوفات P، فإن صفوف المصفوفة A تتبدل بالطريقة نفسها التي تبدلت فيها صفوف مصفوفة الوحدة من الدرجة 3×3 لتنتج P؛ ولأن احتمالات التباديل الـ 6 جميعها للصفوف الثلاثة مُثِّلَت، نرى أنها تؤثر كتأثير عناصر S_3 في تبديل المدخلات 3, 2, 1 لمتجه العمود المعطى. وعليه، فإنها تشكل زمرة، وذلك؛ لأن S_3 زمرة.

ب. زمرة التناظر S_3 على ثلاثة أحرف.

23. $\mathbb{Z}_2$

25. D_4

27. لـ $\mathbb{Z}_4$، $\lambda_0=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}$ ، $\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\end{pmatrix}$، $\lambda_2=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}$، $\lambda_3=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&0&1&2\end{pmatrix}$.

الجدول للتمثيل المنتظم الأيسر هو نفسه الجدول لـ $\mathbb{Z}_4$ مع تبديل n بـ λ_n. لـ S_3،

$\rho_0=\begin{pmatrix}r_0&r_1&r_2&m_1&m_2&m_3\\r_0&r_1&r_2&m_1&m_2&m_3\end{pmatrix}$، $\rho_1=\begin{pmatrix}r_0&r_1&r_2&m_1&m_2&m_3\\r_1&r_2&r_0&m_2&m_3&m_1\end{pmatrix}$، ...إلخ، حيث الصف في الأسفل في التبديل ρ_σ يتكوّن من عناصر S_3 بالترتيب الذي تظهر فيه من الأعلى إلى الأسفل في العمود تحت تأثير σ في الجدول 8.8. الجدول للتمثيل المنتظم الأيمن هو نفسه الجدول لـ S_3 باستبدال σ بـ ρ_σ .

31. ليس تبديلًا

33. ليس تبديلا

35. أ. صح ب. صح جـ– خطأ د– خطأ

37. مونويد

41. لا

43. نعم

الفصل 9

.1 $\{1, 2, 5\}, \{3\}, \{4, 6\}$

.3 $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}, \{7, 8\}$

.5 $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

.7 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 8 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

.9 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

.11 $(1, 3, 4)(2, 6)(5, 8, 7) = (1, 4)(1, 3)(2, 6)(5, 7)(5, 8)$

.13 أ. 4

ب. الدورة التي طولها n رتبتها n

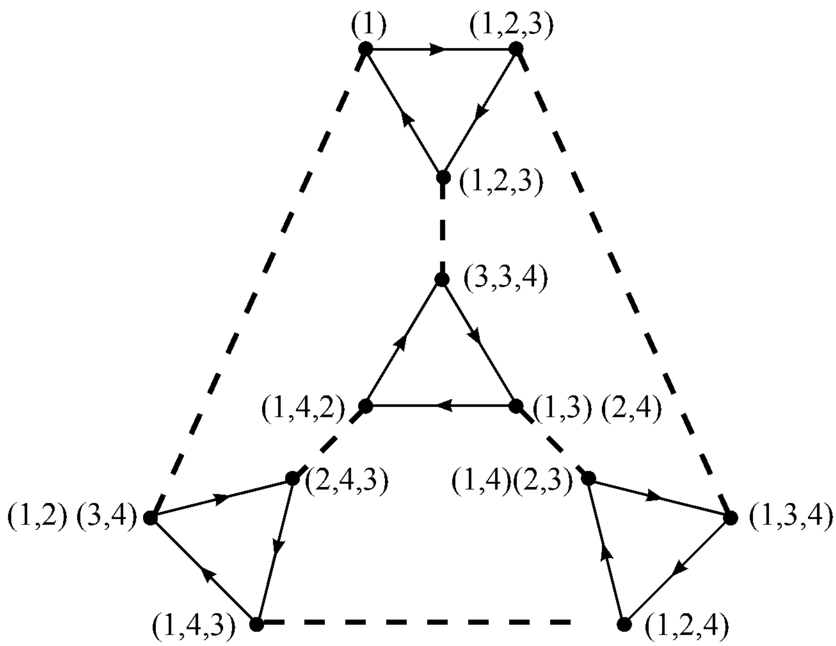
جـ. σ رتبتها 6؛ τ رتبتها 4

د. 6 في التمارين 10 و11، 8 في التمرين 12

هـ. رتبة التبديل المعبر عنه كضرب دورات منفصلة هي المضاعف المشترك الأصغر لأطوال تلك الدورات.

.15 6 **.17** 30

.19



23. أ. خطأ جـ. خطأ هـ. خطأ ز. صح ط. صح

الفصل 10

1. $4\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

$1 + 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$

$2 + 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$

$3 + 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$

3. $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $1 + \langle 2 \rangle = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

5. $\langle 18 \rangle = \{0, 18\}$, $1 + \langle 18 \rangle = \{1, 19\}$, $2 + \langle 18 \rangle = \{2, 20\}$, ..., $17 + \langle 18 \rangle = \{17, 35\}$

7. $\{\rho_0, \mu_2\}$, $\{\rho_1, \delta_1\}$, $\{\rho_2, \mu_1\}$, $\{\rho_3, m_2\}$. ليست نفسها

9. $\{\rho_0, \rho_2\}$, $\{\rho_1, \rho_3\}$, $\{\mu_1, \mu_2\}$, $\{\delta_1, \delta_2\}$

11. نعم، نحصل على زمرة مجموعات مشاركة تماثل زمرة كلاين الرباعية V

	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_1	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_2	δ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	δ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	δ_2	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	δ_1	μ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

13. 3   **15.** 24

19. أ. صح   ج. صح   هـ. صح   ز. صح   ط. خطأ

21. $G=\mathbb{Z}_2$، الزمرة الجزئية $H=\mathbb{Z}_2$

23. مستحيل، عدد الخلايا يجب أن يقسم رتبة الزمرة و12لا يقسم 6

الفصل 11

1.

العنصر	الرتبة	العنصر	الرتبة
(0, 0)	1	(0, 2)	2
(1, 0)	2	(1, 2)	2
(0, 1)	4	(0, 3)	4
(1, 1)	4	(1, 3)	4

الزمرة ليست دورية

3. 2   **5.** 9   **7.** 60

9. $\{(0,0),(0,1)\},\ \{(0,0),(1,0)\},\ \{(0,0),(1,1)\}$

11. $\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3)\}$

$\{(0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\}$

$\{(0,0), (1,1), (0,2), (1,3)\}$

13. $\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_3$ ، $\mathbb{Z}_{15}\times\mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_5$ ، $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4$

15. 12

17. 120

19. 180

21. $\mathbb{Z}_8$ ، $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

23. $\mathbb{Z}_{32}$ ، $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{16}$ ، $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8$ ، $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_8$ ، $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

25. $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_{121}$ ، $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{121}$ ، $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11}$ ، $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11}$

29. أ.

n	2	3	4	5	6	7	8
عدد الزمر	2	3	5	7	11	15	22

ب. i) 225 ii) 225 iii) 110

31. أ. إنها إبدالية، عندما تكون الأسهم على كلا المضلعين ذوي أل‍ـ n ضلعاً لها الاتجاه نفسه (مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة).

ب. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_n$

جـ. عندما يكون n فرديًا

د. الزمرة الزوجية D_n

33. $\mathbb{Z}_2$ مثال على ذلك.

35. S_3 مثال على ذلك.

37. الأعداد هي نفسها

41. $\{-1, 1\}$

الفصل 12

1. أ. التقايسات الوحيدة من $\mathbb{R}$ التي تترك العدد c مثبتًا، هي الانعكاس خلال c، الذي يحمل $c+x$ إلى $c-x$ لكل $x\in\mathbb{R}$، إضافة إلى الدالة المحايدة.

ب. التقايسات من $\mathbb{R}^2$ التي تترك نقطة P مثبتة، هي الدورانات حول P خلال أيّ زاوية θ، حيث $0\le\theta<360^\circ$ بالإضافة إلى الانعكاسات عبر أيّ محور يمر خلال P.

ج. التقايسات الوحيدة من $\mathbb{R}$ التي تحمل القطعة المستقيمة إلى نفسها هي الانعكاس خلال نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة (انظر إجابة الفرع (أ)) إضافة إلى الدالة المحايدة.

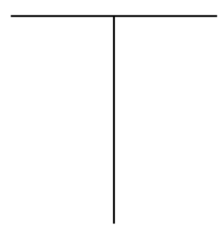
د. التقايسات لـ $\mathbb{R}^2$ التي تحمل القطعة المستقيمة إلى نفسها، هي تدوير بـ 180° حول نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة، وانعكاس في المحور الذي يحوي القطعة المستقيمة، وانعكاس في المحور الذي يعامد القطعة المستقيمة في نقطة منتصفها، إضافة إلى الدالة المحايدة.

هـ. التقايسات لـ $\mathbb{R}^3$ التي تحمل القطعة المستقيمة إلى نفسها تتضمن التدويرات خلال أيّ زاوية حول محور يحوي القطعة المستقيمة، والانعكاسات عبر أيّ مستوًى يحوي القطعة المستقيمة، والانعكاس عبر المستوى العمودي على القطعة المستقيمة في نقطة منتصفها.

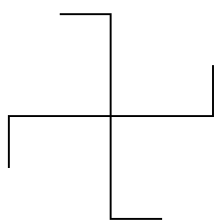
3.

	τ	ρ	μ	γ
τ	τ	ρ	$\mu\gamma$	$\mu\gamma$
ρ	ρ	$\rho\tau$	$\mu\gamma$	$\mu\gamma$
μ	$\mu\gamma$	$\mu\gamma$	$\tau\rho$	$\tau\rho$
γ	$\mu\gamma$	$\mu\gamma$	$\tau\rho$	$\tau\rho$

5.



7.



9. انسحاب: الرتبة ∞

دوران: الرتبة أي $n \leq 2$ أو ∞

انعكاس: الرتبة 2

انعكاس انحداري: الرتبة ∞

11. دورانات　　**13.** فقط المحايد والانعكاسات

17. نعم، الضرب لانسحابين هو انسحاب، ومعكوس الانسحاب هو انسحاب.

19. نعم، يوجد انعكاس واحد فقط μ عبر خط معين L ، و μ^2 هو المحايد، وهكذا لدينا زمرة تماثل $\mathbb{Z}_2$

21. فقط الانعكاسات والدورانات (والمحايد)؛ لأن الانسحابات والانعكاسات الانحدارية رتبها ليست منتهية في زمرة تقايسات المستوى جميعها.

25.	أ. لا	ب. لا	جـ. نعم	د. لا	هـ. D_∞
27.	أ. نعم	ب. لا	جـ. لا	د. لا	هـ. D_∞
29.	أ. لا	ب. لا	جـ. لا	د. نعم	هـ. $\mathbb{Z}$
31.	أ. نعم. 90°، 180°	ب. نعم	جـ. لا		
33.	أ. لا	ب. لا	جـ. لا		
35.	أ. نعم. 180°	ب. نعم	جـ. لا		
37.	أ. نعم. 120°	ب. نعم	جـ. لا		
39.	أ. نعم. 90°، 180°	ب. نعم	جـ. لا	د. $(-1, 1)$ و $(1, 1)$	
41.	أ. نعم. 120°	ب. نعم	جـ. لا	د. $(0, 1)$ و $(1, \sqrt{3})$	

الفصل 13

1. نعم　　**3.** نعم　　**5.** لا

7. نعم　　**9.** نعم

11. نعم　　**13.** نعم　　**15.** لا

17. $\mathrm{Ker}(\phi) = 7\mathbb{Z}$ ؛ $\phi(25) = 2$

19. $\mathrm{Ker}(\phi) = 6\mathbb{Z}$ ؛ $\phi(20) = (1,\ 2,\ 7)(4,\ 5,\ 6)$

21. $\mathrm{Ker}(\phi)=\{0,4,8,12,16,20\}$ ؛ $\phi(14)=(1,6)(4,7)$

23. $\mathrm{Ker}(\phi)=\{(0,0)\}$ ؛ $\phi(4,6)=(2,18)$

25. 2 **27.** 2 **29.** لكل $g \in G$

33. لا يوجد تشاكل غير تافه. المبرهنة 12.13 تبين أن الصورة لـ ϕ يجب أن تكون زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_5$، وعليه، لتشاكل غير تافه ϕ، ستكون الصورة لـ ϕ هي $\mathbb{Z}_5$ جميعها. لكن عدد مجموعات المشاركة لزمرة جزئية من زمرة منتهية هو قاسم لرتبة الزمرة، و 5 لا تقسم 12.

35. ليكن $\phi(m,n)=(m,0)$ لـ $(m,n)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$

37. ليكن $\phi(n)=\rho_n$ لـ $n\in\mathbb{Z}_3$، مستخدمًا رموزنا في الكتاب لعناصر S_3

39. ليكن $\phi(m,n)=2m$

41. بالنظر إلى D_4 بوصفها زمرة تباديل، ليكن $\phi(\sigma)=(1,2)$ لكل $\sigma\in D_4$ فردية و $\phi(\sigma)$ هو المحايد لكل $\sigma\in D_4$ زوجية.

43. ليكن $\phi(\sigma)=(1,2)$ لكل $\sigma\in S_4$ فردية و$\phi(\sigma)$ هو المحايد لكل $\sigma\in S_4$ زوجية.

51. الصورة لـ ϕ هي $\langle a\rangle$ و$\mathrm{Ker}(\phi)$ يجب ان تكون زمرة جزئية ما $n\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$.

53. $hk=kh$ **55.** h^n يجب أن يكون المحايد e في G.

الفصل 14

1. 3 **3.** 4 **5.** 2 **7.** 2

9. 4 **11.** 3 **13.** 4 **15.** 1

21. أ. عند العمل مع زمرة العامل G/H، يمكنك جعل a وb عنصرين في G، ليسا في G/H. من المحتمل أن الطالب لا يدرك صورة العناصر في G/H، ولا يستطيع كتابة شيء منطقي متعلق بهم.

ب. يجب أن نثبت أن G/H إبدالية. ليكن aH و bH عنصرين في G/H

23. أ. صح ج. صح هـ. صح ز. صح ط. صح

29. $\{\rho_0,\mu_1\}$ ،$\{\rho_0,\mu_2\}$ ، و $\{\rho_0,\mu_3\}$

35. مثال: لتكن $G=N=S_3$، ولتكن $H=\{\rho_0,\mu_1\}$. عندئذٍ N ناظمية في G، لكن $H\cap N=H$ ليست ناظمية في G.

الفصل 15

.1 $\mathbb{Z}_2$ **.3** $\mathbb{Z}_4$ **.5** $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$ **.7** $\mathbb{Z}$ **.9** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$

.11 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ **.13** $\mathbb{Z}(D_4) = C = \{\rho_0, \rho_2\}$

.15 $Z(S_3 \times D_4) = \{(\rho_0, \rho_0), (\rho_0, \rho_2)\}$ مستخدمًا الرموز الواردة في الفصل 8 لهذه الزمر–
$C = A_3 \times \{\rho_0, \rho_2\}$

.19 أ. صح ج. خطأ هـ. خطأ ز. خطأ ط. صح

.21 $\{f \in F^* \mid f(0) = 1\}$

.23 نعم. ليكن $f(x) = 1$ لـ $x \geq 0$ و $f(x) = -1$ لـ $x < 0$. عندئذٍ، $f(x)f(x) = 1$ لكل x، وهكذا $f^2 \in K^*$ لكن f ليس في K^*. وعليه، fK^* رتبتها 2 في F^*/K^*

.25 U

.27 زمرة الضرب U للأعداد المركبة ذات القيمة المطلقة 1

.29 لتكن $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. عندئذٍ $H = \langle(1,0)\rangle$ تماثل $K = \langle(0,2)\rangle$، لكن G/H تماثل $\mathbb{Z}_4$، بينما G/K تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

.31 أ. $\{e\}$ ب. الزمرة جميعها

الفصل 16

.1 $X_{\rho_0} = X$, $X_{\rho_1} = \{C\}$, $X_{\rho_2} = \{m_1, m_2, d_1, d_2, C\}$, $X_{\rho_3} = \{C\}$,

$X_{\mu_1} = \{s_1, s_3, m_1, m_2, C, P_1, P_3\}$, $X_{\mu_2} = \{s_2, s_4, m_1, m_2, C, P_2, P_4\}$,

$X_{\delta 1} = \{2, 4, d_1, d_2, C\}$, $X_{\delta_2} = \{1, 3, d_1, d_2, C\}$

.3 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $\{m_1, m_2\}$, $\{d_1, d_2\}$, $\{C\}$, $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

.7 مجموعة–G المتعدية لها مدار واحد فقط.

.9 أ. $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ و $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

.13 ب. مجموعة النقاط على الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وتمر في النقطة P

ج. الزمرة الجزئية الدورية $\langle 2\pi \rangle$ من $G = \mathbb{R}$

.17 أ. $K = g_0 H g_0^{-1}$

ب. مخمّنة: H وK يجب أن تكونا زمرتين جزئيتين مترافقتين من G

19. يوجد أربعة منها: X، Y، Z و $\mathbb{Z}_6$

	X	Y		Z		
	a	a	b	a	b	c
0	a	a	b	a	b	c
1	a	b	a	b	c	a
2	a	a	b	c	a	b
3	a	b	a	a	b	c
4	a	a	b	b	c	a
5	a	b	a	c	a	b

الفصل 17

1. 5 **3.** 2 **5.** 11, 712

7. أ. 45 ب. 231

9. أ. 90 ب. 6, 246

الفصل 18

1. 0 **3.** 1 **5.** $(1, 6)$

7. حلقة إبدالية، لا يوجد محايد، ليست حقلًا.

9. حلقة إبدالية مع عنصر محايد، ليست حقلًا.

11. حلقة إبدالية مع عنصر محايد، ليست حقلًا.

13. لا. $\{ri \mid r \in \mathbb{R}\}$ ليست مغلقة بالنسبة إلى الضرب.

15. $(1, 1)$ ، $(1,-1)$، $(-1, 1)$، $(-1,-1)$

17. جميع الأعداد غير الصفرية $q \in \mathbb{Q}$ **19.** 1، 3

21. لتكن $\mathbb{R}=\mathbb{Z}$ مع عنصر محايد 1 و $R'=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ مع العنصر المحايد $1'=(1,1)$. ليكن $\phi:R\to R'$ معرّف بـ $\phi(n)=(n,\ 0)$. عندئذٍ: $\phi(1)=(1,0)\neq 1'$

23. $\phi_1:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_1(n)=0$ ، $\phi_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_2(n)=n$

25. $\phi_1:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_1(n,m)=0$ ، $\phi_2:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_2(n,m)=n$

$\phi_3:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_3(n,m)=m$.

27. التفسير غير صحيح؛ لأن الضرب $(X-I_3)(X+I_3)$ لمصفوفتين يمكن أن يكون المصفوفة الصفرية 0 دون أن يكون أيّ من المصفوفتين مصفوفة صفرية. مثال مناقض:

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^2=I_3$$

31. $a=2$ ، $b=3$ في $\mathbb{Z}_6$

33. أ. صح   جـ. خطأ   هـ. صح   ز. صح   ط. صح

الفصل 19

1. 0، 3، 5، 8، 9، 11   **3.** لا توجد حلول   **5.** 0   **7.** 0   **9.** 12

11. $a^4+2a^2b^2+b^4$ **13.** $a^6+2a^3b^3+b^6$

17. أ. خطأ   جـ. خطأ   هـ. صح   ز. خطأ   ط. خطأ

19. 1. $\mathrm{Det}(A)=0$ 2. متّجهات الأعمدة لـ A غير مستقلة (تابعة).

3. متّجهات الصفوف لـ A غير مستقلة (تابعة).   4. الصفر هو قيمة ذاتية لـ A

5. A ليس لها معكوس.

الفصل 20

1. 3 أو 5   **3.** أي من 3، 5، 6، 7، 10، 11، 12 أو 14   **5.** 2

7. $\varphi(1)=1$ $\varphi(7)=6$ $\varphi(13)=12$ $\varphi(19)=18$ $\varphi(25)=20$

$\varphi(2)=1$ $\varphi(8)=4$ $\varphi(14)=6$ $\varphi(20)=8$ $\varphi(26)=12$

$\varphi(3)=2$ $\varphi(9)=6$ $\varphi(15)=8$ $\varphi(21)=12$ $\varphi(27)=18$

$\varphi(4)=2$ $\varphi(10)=4$ $\varphi(16)=8$ $\varphi(22)=10$ $\varphi(28)=12$

$\varphi(5)=4$ $\varphi(11)=10$ $\varphi(17)=16$ $\varphi(23)=22$ $\varphi(29)=28$

$\varphi(6)=2$ $\varphi(12)=4$ $\varphi(18)=6$ $\varphi(24)=8$ $\varphi(30)=8$

9. $(p-1)(q-1)$ **11.** $1+4\mathbb{Z}$, $3+4\mathbb{Z}$ **13.** لا توجد حلول

15. لا توجد حلول.

17. $55+65\mathbb{Z}$، $42+65\mathbb{Z}$، $29+65\mathbb{Z}$، $16+65\mathbb{Z}$، $3+65\mathbb{Z}$

19. 1 **21.** 9

23. أ. خطأ ج. صح هـ. صح ز. خطأ ط. خطأ

الفصل 21

1. $\{q_1+q_2i \mid q_1,q_2 \in \mathbb{Q}\}$

15. إنها تماثل حلقة جميع الأعداد النسبية D، التي يمكن أن يعبر عنها بوصفها خارج قسمة أعداد صحيحة مقامها قوة ما لـ 2

17. سنقع في مشكلة عند محاولتنا إثبات خاصية التعدي في التمهيدية 2.21؛ لأن الحذف في الضرب من الممكن ألا يتحقق. لـ $R=\mathbb{Z}_6$ و $T=\{1,2,4\}$ لدينا $(2,4)\sim(1,2)$؛ لأن $4=(2)(2)=(4)(1)$ و $(2,1)\sim(2,4)$؛ لأن $(2)(4)=(1)(2)$ في $\mathbb{Z}_6$. وفي الأحوال كلها، $(1,2)$ لا تكافئ $(2,1)$؛ لأن $(2)(2)\neq(1)(1)$ في $\mathbb{Z}_6$

الفصل 22

1. $f(x)+g(x)=2x^2+5$، $f(x)g(x)=6x^2+4x+6$

3. $f(x)+g(x)=5x^2+5x+1$، $f(x)g(x)=x^3+5x$

5. 16 **7.** 7 **9.** 2 **11.** 0 **13.** 2، 3 **15.** 0، 2، 4

17. 0، 1، 2، 3

21. x^4-5x^3 , x^2-5x , x^2-25 , $2x-10$, $x-5$, 0. (هناك حلول أخرى ممكنة).

23. أ. صح ج. صح هـ. خطأ ز. صح ط. صح

25. أ. إنها عناصر الوحدة في D ب. 1، −1 ج. 1، 2، 3، 4، 5، 6

27. ب. F جـ. $F[x]$ **31**. أ. 4، 27   ب. $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\,,\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

الفصل 23

1. $q(x)=x^4+x^3+x^2+x-2\,,\ r(x)=4x+3$

3. $q(x)=6x^4+7x^3+2x^2-x+2\,,\ r(x)=4$

5. 2، 3   **7**. 3، 10، 5، 11، 14، 7، 12، 6

9. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

11. $(x-3)(x+3)(2x+3)$

13. نعم. إنها من الدرجة 3، وليس لها أصفار في $\mathbb{Z}_5$

$2x^3+x^2+2x+2$

15. إجابة مختصرة: $g(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{R}$، لكنها مختزلة على $\mathbb{C}$

19. نعم. $p=3$ **21**. نعم. $p=5$

25. أ. صح   جـ. صح   هـ. صح   ز. صح   ط. صح

27. x^2+x+1

29. $x^2+1,\ x^2+x+2,\ x^2+2x+2\,,\ 2x^2+2\,,\ 2x^2+x+1,\ 2x^2+2x+1$

31. $p(p-1)^2/2$

الفصل 24

1. $1e+0a+3b$ **3**. $2e+2a+2b$ **5**. j **7**. $(1/50)\,j-(3/50)k$

9. $\mathbb{R}^*$، أي إن، $\{a_1+0i+0j+0k \mid a_1\in\mathbb{R}, a_1\neq 0\}$

11. أ. خطأ   جـ. خطأ   هـ. خطأ   ز. صح   ط. صح

جـ. إذا كان $|A|=1$، فإن $\mathrm{End}(A)=\{0\}$ هـ. $0\in\mathrm{End}(A)$ ليس في $\mathrm{Iso}(A)$

19. أ. $K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

ب. نرمز بالرمز B للمصفوفة ذات المعامل b، ونرمز بالرمز C للمصفوفة ذات المعامل c، ونرمز لمصفوفة الوحدة من الدرجة 2×2 بالرمز I، يجب علينا فحص أنَّ:

$$B^2 = -I\ ,\ C^2 = -I\ ,\ K^2 = -I$$

$$CK = B\ ,\ KB = C\ ,\ CB = -K\ ,\ KC = -B\ ,\ BK = -C$$

جـ. يجب علينا فحص أنّ ϕ أحادي

الفصل 25

1. $\ldots x^n < \ldots < x^3 < x^2 < x < a$ لأيّ $a \in R$

3. $m + n\sqrt{2}$ موجب إذا كان $m > 0$ و $n < 0$، أو إذا كان $m > 0$ و $m^2 > 2n^2$ ، أو إذا كان $n < 0$ و $2n^2 > m^2$

5. i. أ جـ هـ د ب ii. هـ جـ ب أ د

7. i. د أ ب جـ هـ ii. د جـ هـ أ ب

9. i. جـ أ هـ د ب ii. هـ جـ ب أ د

11. د ب أ هـ جـ 13. د هـ ب أ جـ

15. أ. صح جـ. خطأ هـ. صح ز. صح ط. خطأ

الفصل 26

1. هناك تسعة احتمالات فقط:

$\phi(1, 0) = (1, 0)$، بينما $\phi(0, 1) = (0, 0)$ أو $\phi(0, 1) = (0, 1)$

$\phi(1, 0) = (0, 1)$، بينما $\phi(0, 1) = (0, 0)$ أو $\phi(0, 1) = (1, 0)$

$\phi(1, 0) = (1, 1)$، بينما $\phi(0, 1) = (0, 0)$،

و $\phi(1, 0) = (0, 0)$، بينما $\phi(0, 1) = (0, 1)$ أو $\phi(0, 1) = (1, 0)$ أو $\phi(0, 1) = (0, 0)$ أو $\phi(0, 1) = (1, 1)$

3. $\langle 0\rangle = \{0\},\ \mathbb{Z}_{12}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}_{12}$

$\langle 1\rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},\ \mathbb{Z}_{12}/\langle 1\rangle \simeq \{0\}$

$\langle 2\rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \mathbb{Z}_{12}/\langle 2\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$

$\langle 3\rangle = \{0, 3, 6, 9\}, \mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle \simeq \mathbb{Z}_3$

$\langle 4\rangle = \{0, 4, 8\},\ \mathbb{Z}_{12}/\langle 4\rangle \simeq \mathbb{Z}_4$

$\langle 6\rangle = \{0, 6\},\ \mathbb{Z}_{12}/\langle 6\rangle \simeq \mathbb{Z}_6$

9. لتكن $\phi:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ معطاة بـ $\phi(n) = (n,0)$ لـ $n \in \mathbb{Z}$.

11. R/R و $R/\{0\}$ ليست ذات أهمية فعلية؛ لأن R/R هي الحلقة التي تحوي العنصر صفر فقط، و$R/\{0\}$ تماثل R.

13. $\mathbb{Z}$ حلقة تامة. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_4$، التي لها قاسم 2 لـ 0.

15. $\{(n, n \mid n \in \mathbb{Z})\}$ (هناك إجابات أخرى محتملة).

31. متلاشي الجذر لـ $\mathbb{Z}_{12}$ هو $\{0,6\}$. متلاشي الجذر لـ $\mathbb{Z}$ هو $\{0\}$، ومتلاشي الجذر لـ $\mathbb{Z}_{32}$ هو $\{0, 2, 4, 6, 8,\ldots, 30\}$.

35. أ. لتكن $R = \mathbb{Z}$، ولتكن $N = 4\mathbb{Z}$، عندئذٍ يكون $\sqrt{N} = 2\mathbb{Z} \neq 4\mathbb{Z}$.

ب. لتكن $R = \mathbb{Z}$، ولتكن $N = 2\mathbb{Z}$، عندئذٍ يكون $\sqrt{N} = N$.

الفصل 27

1. $\{0, 2, 4\}$ و $\{0, 3\}$ كلاهما أوليّ وأعظميّ.

3. $\{(0, 0), (1, 0)\}$ و $\{(0, 0), (0, 1)\}$ كلاهما أوليّ وأعظميّ.

5. 1 **7.** 2 **9.** 1، 4 **15.** $2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **17.** $4\mathbb{Z}\times\{0\}$

19. نعم. x^2-6x+6 غير مختزل على $\mathbb{Q}$ بالاعتماد على آيزنشتاين مع $p=2$.

21. نعم. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$

23. لا. بتكبير المجال إلى حقل خوارج، يجب أن يكون لديك حقل يحوي حقلين أوليين مختلفين $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{Z}_q$، وهذا مستحيل.

الفصل 28

1. $-3x^3+7x^2y^2z-5x^2yz^3+2xy^3z^5$

3. $2x^2yz^2-2xy^2z^2-7x+3y+10z^3$

5. $2z^5y^3x-5z^3yx^2+7zy^2x^2-3x^3$

7. $10z^3-2z^2y^2x+2z^2yx^2+3y-7x$

9. $1<z<y<x<z^2<yz<y^2<xz<xy<x^2<z^3<yz^2<y^2z<y^3<xz^2<xyz<xy^2<x^2z<x^2y<x^3<\cdots$

11. $3y^2z^5-8z^7+5y^3z^3-4x$ **13.** $3yz^3-8xy-4xz+2yz+38$

15. $\langle y^5+y^3, y^3+z, x-y^4\rangle$ **17.** $\langle y^2z^3+3, -3y-2z, y^2z^2+3\rangle$

19. $\{1\}$ **21.** $\{x-1\}$

23. $\{2x+y-5, y^2-9y+18\}$

المتنوعة الجبرية هي $\{(1,3), (-\frac{1}{2},6)\}$.

25. $\{x+y, y^3-y+1\}$

تتكوّن المتنوّعة الجبرية من نقطة واحدة $(a,-a)$، حيث $a\approx1.3247$.

27. أ. صح جـ. صح هـ. صح ز. صح ط. خطأ

الفصل 29

1. $x^2 - 2x - 1$ **3.** $x^2 - 2x + 2$

5. $x^{12} + 3x^8 - 4x^6 + 3x^4 + 12x^2 + 5$

7. $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{62}{9}; \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 4$

9. جبري، $\deg(\alpha,F) = 2$

11. متسامٍ

13. جبري، $\deg(\alpha,F) = 2$

15. جبري، $\deg(\alpha,F) = 1$

17. $x^2 + x + 1 = (x - \alpha)(x + 1 + \alpha)$

23. أ. صح جـ. صح هـ. خطأ ز. خطأ ط. خطأ

25. ب. $x^3 + x^2 + 1 = (x - \alpha)(x - \alpha^2)[x - (1 + \alpha + \alpha^2)]$

27. هي كثيرة الحدود الواحدية في $F[x]$ ذات الدرجة الأصغرية، التي α صفر لها.

الفصل 30

1. $\{(0, 1), (1, 0)\}$، $\{(1, 1), (-1, 1)\}$، $\{(2, 1), (1, 2)\}$. (هناك إجابات أخرى محتملة).

3. لا. $2(-1, 1, 2) - 4(2, -3, 1) + (10, -14, 0) = (0, 0, 0)$.

5. $\{1\}$ **7.** $\{1, i\}$ **9.** $\{1, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, (\sqrt[4]{2})^3\}$

15. أ. صح جـ. صح هـ. خطأ ز. خطأ ط. صح

17. أ. **الفضاء الجزئي** من V **المولد** بـ S هو تقاطع جميع الفضاءات الجزئية من V التي تحوي S.

19. جواب جزئي: أساس لـ F^n هو $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ حيث 1 هو المحايد الضربي لـ F.

25. أ. تشاكل

ب. جواب جزئي: النواة **(kernel)** (أو الفضاء الصفري **(nullspace)**) لـ ϕ هو $\{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = 0\}$.

جـ. ϕ تماثل من V إلى V' إذا كان $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$ ، وϕ ترسل V بصورة غامرة إلى V'.

الفصل 31

1. $2, \{1, \sqrt{2}\}$ **3.** $4, \{1, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$

5. $6, \{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\,(\sqrt[3]{2})^2, (\sqrt[3]{2})^2, \sqrt{2}(\sqrt[3]{2})^2\}$ **7.** $2, \{1, \sqrt{6}\}$

9. $9, \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{12}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{18}, \sqrt[3]{36}\}$

11. $2, \{1, \sqrt{2}\}$ **13.** $2, \{1, \sqrt{2}\}$

19. أ. خطأ جـ. خطأ هـ. خطأ ز. خطأ ط. خطأ

23. جواب جزئي: يتمّ الحصول على امتدادات من الدرجة 2^n لـ $n \in \mathbb{Z}^+$.

الفصل 32

الأسئلة جميعها ذات الأرقام الفردية تحتاج إلى براهين، وهي ليست مسرودة هنا.

الفصل 33

1. نعم **3.** نعم **5.** 6 **7.** 0

الفصل 34

.1 أ. $K = \{0, 3, 6, 9\}$

ب. $0 + K = \{0, 3, 6, 9\}, 1 + K = \{1, 4, 7, 10\}, 2 + K = \{2, 5, 8, 11\}$

جـ. $\mu(0 + K) = 0, \mu(1 + K) = 2, \mu(2 + K) = 1$

.3 أ. $HN = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}, H \cap N = \{0, 12\}$

ب. $0 + N = \{0, 6, 12, 18\}, 2 + N = \{2, 8, 14, 20\}, 4 + N = \{4, 10, 16, 22\}$

جـ. $0 + (H \cap N) = \{0, 12\}, 4 + (H \cap N) = \{4, 16\}, 8 + (H \cap N) = \{8, 20\}$

د. $\phi(0 + N) = 0 + (H \cap N), \phi(2 + N) = 8 + (H \cap N), \phi(4 + N) = 4 + (H \cap N)$

.5 أ. $0 + H = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}, 1 + H = \{1, 5, 9, 13, 17, 21\},$

$2 + H = \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}, 3 + H = \{3, 7, 11, 15, 19, 23\}.$

ب. $0 + K = \{0, 8, 16\}, 1 + K = \{1, 9, 17\}, 2 + K = \{2, 10, 18\},$

$3 + K = \{3, 11, 19\},$

$4 + K = \{4, 12, 20\}, 5 + K = \{5, 13, 21\}, 6 + K = \{6, 14, 22\},$

$7 + K = \{7, 15, 23\}.$

جـ. $0 + K = \{0, 8, 16\}, 4 + K = \{4, 12, 20\}$

د. $(0 + K) + (H/K) = H/K = \{0 + K, 4 + K\} = \{\{0, 8, 16\}, 4, 12, 20\}\}$

$(1 + K) + (H/K) = \{1 + K, 5 + K\} = \{\{1, 9, 17\}, \{5, 13, 21\}\}$

$(2 + K) + (H/K) = \{2 + K, 6 + K\} = \{\{2, 10, 18\}, \{6, 14, 22\}\}$

$(3 + K) + (H/K) = \{3 + K, 7 + K\} = \{\{3, 11, 19\}, \{7, 15, 23\}\}.$

هـ. $\phi(0 + H) = (0 + K) + (H/K), \phi(1 + H) = (1 + K) + (H/K)$

$\phi(2 + H) = (2 + K) + (H/K), \phi(3 + H) = (3 + K) + (H/K).$

الفصل 35

1. التصفيات $\mathbb{Z} < 10\ \mathbb{Z} < 250\mathbb{Z} < |\{0\}$ لـ $\mathbb{Z} < 10\mathbb{Z} < \{0\}$ و $\mathbb{Z} < 25\mathbb{Z} < 250\mathbb{Z} < \{0\}$ لـ $\mathbb{Z} < 25\mathbb{Z} < 0$ متماثلة.

3. المتسلسلات المعطاة متماثلة.

5. التصفيات $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} < (10\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (60\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (240\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (4800\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < \{(0, 0)\}$ للمتسلسلة الأولى،

و $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} < \mathbb{Z} \times (20\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (80\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (480\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (4800\mathbb{Z}) < \{(0, 0)\}$ للمتسلسلة الثانية هي تصفيات متماثلة.

7. $\{0\} < 16 < 8 < 4 < 2 < \mathbb{Z}_{48}$

$$\{0\} < \langle 24\rangle < \langle 8\rangle < \langle 4\rangle < \langle 2\rangle < \mathbb{Z}_{48}$$

$$\{0\} < \langle 24\rangle < \langle 12\rangle < \langle 4\rangle < \langle 2\rangle < \mathbb{Z}_{48}$$

$$\{0\} < \langle 24\rangle < \langle 12\rangle < \langle 6\rangle < \langle 2\rangle < \mathbb{Z}_{48}$$

$$\{0\} < \langle 24\rangle < \langle 12\rangle < \langle 6\rangle < \langle 3\rangle < \mathbb{Z}_{48}$$

9. $\{(\rho_0, 0)\} < A_3 \times \{0\} < S_3 \times (0) < S_3 \times \mathbb{Z}_2$

$$\{(\rho_0, 0)\} < \{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_2 < A_3 \times \mathbb{Z}_2 < S_3 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\{(\rho_0, 0)\} < A_3 \times \{0\} < A_3 \times \mathbb{Z}_4 < S_3 \times \mathbb{Z}_2$$

11. $\{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_4$ **13.** $\ldots \leq \{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_4 \leq \{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_4 \leq \{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_4$.

17. أ. صح جـ. صح هـ. خطأ ز. خطأ ط. صح

ط. تطبيق مبرهنة جوردن–هولدر على الزمر $\mathbb{Z}_n$ يضمن المبرهنة الأساسية للحساب.

19. نعم. $\{\rho_0\} < \{\rho_0, \rho_2\} < \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\} < D_4$ هي متسلسلة تركيب (فعليًّا رئيسة) وزمر العامل جميعها تماثل $\mathbb{Z}_2$، وعليه، فهي إبدالية.

21. سلسلة (3) سلسلة (4)

سلسلة (3)	سلسلة (4)
$\{0\} \leq \langle 12\rangle \leq \langle 12\rangle \leq \langle 12\rangle$	$\{0\} \leq \langle 12\rangle \leq \langle 12\rangle \leq \langle 6\rangle$
$\leq \langle 12\rangle \leq \langle 12\rangle \leq \langle 4\rangle$	$\leq \langle 6\rangle \leq \langle 6\rangle \leq \langle 3\rangle$
$\leq \langle 2\rangle \leq \mathbb{Z}_{24} \leq \mathbb{Z}_{24}$	$\leq \langle 3\rangle \leq \mathbb{Z}_{24} \leq \mathbb{Z}_{24}$

التماثلات

$$\langle 12\rangle/\{0\} \simeq \langle 12\rangle/\{0\} \simeq \mathbb{Z}_4 \qquad \langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \langle 6\rangle/\langle 6\rangle \simeq \{0\}$$

$$\langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \langle 3\rangle/\langle 3\rangle \simeq \{0\} \qquad \langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \{0\}$$

$$\langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \langle 6\rangle/\langle 6\rangle \simeq \{0\} \qquad \langle 4\rangle/\langle 12\rangle \simeq \mathbb{Z}_{24}/\langle 3\rangle \simeq \mathbb{Z}_3$$

$$\langle 2\rangle/\langle 4\rangle \simeq \langle 6\rangle/\langle 12\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_{24}/\langle 2\rangle \simeq \langle 3\rangle/\langle 6\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Z}_{24}/\mathbb{Z}_{24} \simeq \mathbb{Z}_{24}/\mathbb{Z}_{24} \simeq \{0\}$$

الفصل 36

1. 3   **3.** 1، 3

5. زمر سيلو الجزئية من النوع 3 هي: $\langle(1, 2, 3)\rangle$ ، $\langle(1, 2, 4)\rangle$ ، $\langle(1, 3, 4)\rangle$ ، و $\langle(2, 3, 4)\rangle$.

كذلك $\langle(1, 2, 4)\rangle = (3, 4)\langle(1, 2, 3)\rangle(3, 4)$، إلى آخره.

الفصل 37

1. أ. صفوف الترافق هي: $\{\rho_0\}$، $\{\rho_2\}$، $\{\rho_1, \rho_3\}$، $\{\mu_1, \mu_2\}$، $\{\delta_1, \delta_2\}$.

ب. $8 = 2 + 2 + 2 + 2$

3. أ. صح   جـ. خطأ   هـ. صح   ز. صح   ط. خطأ

هـ. هذا يُعدّ إلى حدّ ما وجهة نظر.

9. $24 = 1 + 6 + 3 + 8 + 6$

الفصل 38

1. $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$

3. لا. $n(2, 1) + m(4, 1)$ لا يمكن أن تؤدي إلى عدد فردي للإحداثي الأول.

7. $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ ، المرتبة $r = 1$

الفصل 39

1. أ. $a^2b^2a^3c^3b^{-2}$ ، $b^2c^{-3}a^{-3}b^{-2}a^{-2}$ ب. $a^{-1}b^3a^4c^6a^{-1}$ ، $ac^{-6}a^{-4}b^{-3}a$

3. أ. 16 ب. 36 جـ. 36

5. أ. 16 ب. 36 جـ. 18

11. أ. جواب جزئي: $\{1\}$ هو أساس لـ $\mathbb{Z}_4$. جـ. نعم

13. جـ. زمرة بلوب على S تماثل الزمرة الحرة $F[S]$ على S.

الفصل 40

1. $(a : a^4 = 1)$ ؛$(a, b : a^4 = 1, b = a^2)$ ؛$(a, b, c : a = 1, b^4 = 1, c = 1)$. (هناك إجابات أخرى محتملة).

3. الزمرة الثمانية:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	1	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	1	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	1	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1

الزمرة الرباعية: جدول الزمرة الثمانية نفسه ما عدا ألـ **16** مدخلًا في الزاوية اليمنى السفلى، فتكون:

a^2	a	1	a^2
a^3	a^2	a	1
1	a^3	a^2	a
a	1	a^3	a^2

5. $(a, b : a^7 = 1,\ b^3 = 1,\ ba = a^2 b)$. $\mathbb{Z}_{21}$

الفصل 41

1. أ. $2P_1P_3 - 3P_1P_4 + P_1P_6 - 3P_2P_3 + 3P_2P_4 - 5P_3P_4 + 4P_3P_6 - 5P_4P_6$

ب. لا ج. نعم

3. $C_i(P) = Z_i(P) = B_i(P) = H_i(P) = 0$ لـ $i > 0$. $B_0(P) = 0$. $Z_0(P) \simeq \mathbb{Z}$ وتتولد من P الدورة–0 $H_0(P) \simeq Z$ (0-cycle)

5. $C_i(X) = Z_i(X) = B_i(X) = H_i(X) = 0$ لـ $i > 0$. $B_0(x) \simeq \mathbb{Z}$، وتتولد من السلسلة–0 (0-chain) $P_2 - P_1$.

$Z_0(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، وتتولد من الدورتين–0 (two 0-cycles) P_1 و P_2؛ لأن $Z_0(X)/B_0(X)$ "تطابق P_1 مع P_2"،

$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$، وتولدت من مجموعة المشاركة $P_1 + B_0(X)$

7. أ. **مبسّط موجّه من الرتبة n هو** متتالية مرتبة $P_1P_2 \ldots P_{n+1}$

ب. **الحدود لـ** $P_1P_2 \ldots P_{n+1}$ تعطي بـ

$$\partial_n\left(P_1P_2 \ldots \mathrm{P}_{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1} P_1P_2 \ldots P_{i-1}P_{i+1} \ldots P_{n+1}.$$

ج. كل مجموع مفرد من حدود مبسّط موجّه من الرتبة n **هو وجه للمبسّط**

11. أ. $\delta^{(n)}\left(\sum_i m_i\sigma_i\right) = \sum_i m_i\delta^{(n)}(\sigma_i)$

13. $H^{(n)}(X) = Z^{(n)}(X)/B^{(n)}(X)$

$H^{(0)}(S) \simeq \mathbb{Z}$ وتتولد من $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + \{0\}$

$H^{(2)}(S) \simeq \mathbb{Z}$ وتتولد من $P_1P_2P_3 + B^{(2)}(S)$

الفصل 42

1. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_1(X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.\ H_n(X) = 0$ لـ $n > 1$

3. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.\ H_1(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_2(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_n(X) = 0$ لـ $n > 2$

5. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_1(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_2(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_n(X) = 0$ لـ $n > 2$

7. أ. صح ج. خطأ هـ. صح ز. صح ط. خطأ

9. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_1(X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.\ H_2(X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.\ H_n(X) = 0$ لـ $n > 2$.

11. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_1(X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.\ H_2(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_n(X) = 0$ لـ $n > 2$

الفصل 43

1. كلا العَدَّان يبينان أنّ $\chi(X) = 1$

3. ستتحقق للمنطقة المربعة؛ لأن منطقة كهذه تماثل E^2. من الوضوح أنها لا تتحقق لخليتين منفصلتين من الرتبة 2، لأن كلاً منهما يمكن أن ترسل بصورة متصلة وغامرة إلى الأخرى، ومثل هذه الدالة ليس لها نقاط مثبتة.

5. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.\ H_1(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.\ H_n(X) = 0$ لـ $n > 1$

7. $2 - 2n$

9. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}.H_1(X) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}_{\text{عامل } (q\text{-}1)}.H_n(X) = 0$ لـ $n > 1$

11. ليكن Q رأسًا لـ b، ولتكن c متسلسلة–2 (**2-chain**) تتكوّن من جميع المبسطات (**2-simplexes**) لـ X، موجهة بالطريقة نفسها، بحيث تكون $c \in Z_2(X)$

أ. f_{*0} معطًى بـ $f_{*0}(Q + B_0(X)) = Q + B_0(b)$

f_{*1} معطًى بـ $f_{*1}((ma + nb) + B_1(X)) = nb + B_1(b)$

f_{*2} معطًى بـ $f_{*2}(c + B_1(X)) = 0$

ب. f_{*0} كما في (أ)

f_{*1} معطًى بـ $f_{*1}((ma + nb) + B_1(X)) = 2nb + B_1(b)$

f_{*2} كما في (أ)

13. ليكن Q رأسًا لـ b،

f_{*0} معطًى بـ $f_{*0}(Q + B_0(X)) = Q + B_0(b)$

f_{*1} معطًى بـ $f_{*1}((ma + nb) + B_1(X)) = nb + B_1(b)$ حيث $m = 0,1$

f_{*2} تافه؛ لأن كلًّا من $H_2(X)$ و $H_2(b)$ هو 0.

الفصل 44

5. للمبرهنة 4.44، الشرط $f_{k-1}\partial_k = \partial'_k f_k$ يؤدي إلى $f_{k-1}(B_{k-1}(A)) \subseteq B_{k-1}(A')$

عندئذ التمرين 39.14 يبيّن أنّ f_{k-1} ينشئ تشاكلًا طبيعيًا من $Z_{k-1}(A)/B_{k-1}(A)$ إلى $Z_{k-1}(A')/B_{k-1}(A')$. هذه هي الطريقة الصحيحة للنظر إلى المبرهنة 4.44.

للمبرهنة 7.44، إذا استخدمنا التمرين 39.14، الحقيقة أن $\partial_k(A'_k) \subseteq A'_{k-1}$ تبين أن ∂_k ينشئ تشاكلًا طبيعيًا $\bar{\partial}_k : (A_k/A'_k) \to (A_{k-1}/A'_{k-1})$

7. متتالية الشباه المضبوطة هي

$$[H_2(a)=0] \xrightarrow{i_{*2}} [H_2(X)\simeq\mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*2}} [H_2(X,a)\simeq\mathbb{Z}] \xrightarrow{\partial_{*2}} [H_1(a)\simeq\mathbb{Z}]$$

$$\xrightarrow{i_{*1}} [H_1(X)\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*1}} [H_1(X,a)\simeq\mathbb{Z}] \xrightarrow{\partial_{*1}} [H_0(a\simeq\mathbb{Z}]$$

$$\xrightarrow{i_{*0}} [H_0(X)\simeq\mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*0}} [H_0(X,a)=0]$$

j_{*2} ترسل المولد $c + B_2(X)$ في $H_2(X)$ بصورة غامرة إلى المولد

$$(c + C_2(a)) + B_2(X, a)$$

في $H_2(X, a)$ وهي تماثل. وعليه، $(\text{kernel } j_{*2}) = (\text{image } i_{*2}) = 0$.

∂_{*2} ترسل كل شيء بصورة غامرة إلى 0، وهكذا $(\text{kernel } \partial_{*2}) = (\text{image } j_{*2}) \simeq \mathbb{Z}$.

i_{*1} ترسل المولد $a + B_1(a)$ بصورة غامرة إلى $(a + 0b) + B_1(X)$، وهكذا i_{*1} هي تماثل إلى، و$(\text{kernel } i_{*1}) = (\text{image } \partial_{*2}) = 0$.

j_{*1} ترسل $(ma+nb)+B_1(X)$ بصورة غامرة إلى $(nb + C_1(a)) + B_1(X, a)$، وهكذا $(\text{kernel } j_{*1}) = (\text{image } i_{*1}) \simeq \mathbb{Z}$.

∂_{*1} ترسل $(nb + C_1(a)) + B_1(X, a)$ بصورة غامرة إلى 0، وهكذا $(\text{kernel } \partial_{*1}) = (\text{image } j_{*1}) \simeq \mathbb{Z}$.

للرأس Q لـ a، i_{*0} ترسل $Q + B_0(a)$ بصورة غامرة إلى $Q + B_0(X)$، وهكذا i_{*0} تماثل، و$(\text{kernel } i_{*0}) = (\text{image } \partial_{*1}) = 0$.

j_{*0} ترسل $Q + B_0(X)$ بصورة غامرة إلى $B_0(X, a)$ من $H_0(X, a)$، وهكذا $(\text{kernel } j_{*0}) = (\text{image } i_{*0}) \simeq \mathbb{Z}$.

9. الحل بصورة منهجية مماثل لذلك في التمرين 44.7

11. إجابة جزئية: متتالية الشباه المضبوطة هي

$$[H_2(Y)=0] \xrightarrow{i_{*2}} [H_2(X)=0] \xrightarrow{j_{*2}} [H_2(X,Y)\simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{\partial_{*2}} [H_1(Y)\simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}]$$

$$\xrightarrow{i_{*1}} [H_1(X)\simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*1}} [H_1(X,Y)\simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{\partial_{*1}} [H_0(Y)\simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}]$$

$$\xrightarrow{i_{*0}} [H_0(X)\simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*0}} [H_0(X,Y)=0]$$

يترك لك التحقق من أنها مضبوطة. لاحظ أنّ الحافّة P_1Q_1 في الشكل 11.42 تنشئ مولدًا لـ $H_1(X,Y)$. بالبدء بـ ∂_{*2} تلك الدوال ممتعة.

الفصل 45

1. نعم **3.** لا **5.** لا **7.** نعم

9. في $\mathbb{Z}[x]$: فقط $2x-7$، $-2x+7$

في $\mathbb{Q}[x]$: $4x-14$ ، $x-\frac{7}{2}$ ، $6x-21$ ، $-8x+28$

في $\mathbb{Z}_{11}[x]$: $2x-7$، $10x-2$، $6x+1$، $3x-5$، $5x-1$

11. 26، -26 **13.** 198، -198

15. إنها "كثيرة حدود بدائية"؛ لأن كل عنصر غير صفري في $\mathbb{Q}$ هو عنصر وحدة. في الواقع $18ax^2-12ax+48a$ كثيرة حدود بدائية لكل $a\in\mathbb{Q}$، $a\neq 0$

17. $2ax^2-3ax+6a$ كثيرة حدود بدائية لكل $a\neq 0$ في $\mathbb{Z}_7$؛ لأن كل عنصر a مثل هذا هو عنصر محايد في $\mathbb{Z}_7$.

21. أ. صح ج. صح هـ. صح ز. خطأ ط. خطأ

ط. أما p أو إحدى مرافقاتها **(associates)** فيجب أن تظهر في كل تحليل إلى غير مختزلات.

23. $2x+4$ غير مختزل في $\mathbb{Q}[x]$ لكن ليس في $\mathbb{Z}[x]$

31. إجابة جزئية: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

الفصل 46

1. نعم **3.** لا. (1) لا يتحقق **5.** نعم

7. 61 **9.** $x^3 + 2x - 1$ **11.** 66

13. أ. صح ج. صح هـ. صح ز. صح ط. صح

23. إجابة جزئية: المعادلة $ax = b$ لها حل في $\mathbb{Z}_n$ للعناصر غير الصفرية $a, b \in \mathbb{Z}_n$ إذا كان وفقط إذا كان gcd الموجب لـ a و n في $\mathbb{Z}$ يقسم b.

الفصل 47

1. $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ **3.** $4 + 3i = (1 + 2i)(2 - i)$

5. $6 = (2)(3) = \left(-1+\sqrt{-5}\right)\left(-1-\sqrt{-5}\right)$ **7.** $7 - i$

15. ج. i) الرتبة 9، المميز 3 ii) الرتبة 2، المميز 2 iii) الرتبة 5، المميز 5

الفصل 48

1. $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ **3.** $3+\sqrt{2}$ ، $3-\sqrt{2}$ **5.** $\sqrt{2}+i$ ، $\sqrt{2}-i$ ، $-\sqrt{2}+i$ ، $-\sqrt{2}-i$

7. $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ، $-\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{1-\sqrt{2}}$ ، $-\sqrt{1-\sqrt{2}}$ **9.** $\sqrt{3}$

11. $-\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ **13.** $-\sqrt{2}+\sqrt{45}$

15. أ. $\mathbb{Q}$ ب. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{6}\right)$ ج. $\mathbb{Q}$

17. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\right)$ **19.** $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{10}\right)$ **21.** $\mathbb{Q}$

25. أ. $3-\sqrt{2}$ ب. إنهما الدالة نفسها

27. $\sigma_3(0) = 0$، $\sigma_3(1) = 1$، $\sigma_3(2) = 2$، $\sigma_3(\alpha) = -\alpha$، $\sigma_3(2\alpha) = -2\alpha$،

$\sigma_3(1+\alpha) = 1-\alpha$، $\sigma_3(1+2\alpha) = 1-2\alpha$، $\sigma_3(2+\alpha) = 2-\alpha$،

$\sigma_3(2+2\alpha)=2-2\alpha$، $\mathbb{Z}_3(\alpha)\{\sigma_3\}=\mathbb{Z}_3$.

29. أ. خطأ ج. صح هـ. خطأ ز. صح ط. صح

37. نعم

الفصل 49

1. الدالة المحايدة من E وبصورة غامرة إلى E

τ المعطاة بـ $\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \tau(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

3. τ_1 المعطاة بـ $\tau_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \tau_1(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \tau_1(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

τ_2 المعطاة بـ $\tau_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \tau_2(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \tau_2(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

τ_3 المعطاة بـ $\tau_3(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \tau_3(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \tau_3(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

τ_4 المعطاة بـ $\tau_4(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \tau_4(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \tau_4(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

5. الدالة المحايدة من $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2},\sqrt{3}\right)$ إلى نفسها؛

τ_1 المعطاة بـ $\tau_1(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$، $\tau_1(\alpha_1) = \alpha_1$ حيث $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$

τ_2 المعطاة بـ $\tau_2(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$، $\tau_2(\alpha_1) = \alpha_2$، حيث $\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)/2$

τ_3 المعطاة بـ $\tau_3(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$، $\tau_3(\alpha_1) = \alpha_2$

τ_4 المعطاة بـ $\tau_4(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$، $\tau_4(\alpha_1) = \alpha_3$ حيث $\alpha_3 = \sqrt[3]{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)/2$

τ_5 المعطاة بـ $\tau_5(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$، $\tau_5(\alpha_1) = \alpha_3$

7. أ. $\mathbb{Q}(\pi^2)$ ب. τ_1 المعطاة بـ $\tau_1(\sqrt{\pi}) = i\sqrt{\pi}$، τ_2 المعطاة بـ $\tau_2(\sqrt{\pi}) = -i\sqrt{\pi}$

الفصل 50

1. 2 **3.** 4 **5.** 2 **7.** 1 **9.** 2 **13.** $1 \leq [E:F] \leq n!$

15. ليكن $F = \mathbb{Q}$ و $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. عندئذٍ، يكون لـ

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

صفر في E، لكنه لا ينشطر في E.

23. أ. 6

الفصل 51

1. $\sqrt[3]{2} = (\sqrt[6]{2})^2,\ \sqrt{2} = (\sqrt[6]{2})^3.\ \alpha = \sqrt[6]{2} = 2/(\sqrt[3]{2}\sqrt{2})$. (هناك إجابات أخرى محتملة).

3. $\sqrt{3} = (\frac{11}{2})\alpha - (\frac{1}{2})\alpha^3,\ \sqrt{2} = (\frac{1}{2})\alpha^3 - (\frac{9}{2})\alpha.\ \alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. (هناك إجابات أخرى محتملة).

7. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2$. هنا $f(x)$ ليست كثيرة حدود غير مختزلة. كل عامل غير مختزل لـ $f(x)$ له أصفار تكرارها 1 فقط.

15. ب. الحقل F. جـ. $F[x^p]$

الفصل 52

1. $\mathbb{Z}_3(y^3, z^9)$ **3.** $\mathbb{Z}_3(y^4, z^2)$

5. أ. خطأ جـ. خطأ هـ. خطأ ز. صح ط. صح

الفصل 53

1. 8 **3.** 8 **5.** 4 **7.** 2

9. للزمرة عنصران، التماثل الذاتي المحايد ι لـ $\mathbb{Q}(i)$ و σ، بحيث إنّ $\sigma(i) = -i$.

11. أ. ليكن $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$ ،$\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ، و $\alpha_3 = \sqrt[3]{2}\,\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

الدوال هي

ρ_0 ، حيث ρ_0 هي الدالة المحايدة؛

ρ_1، حيث $\rho_1(\alpha_1) = \alpha_2$ و $\rho_1(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$؛

ρ_2، حيث $\rho_2(\alpha_1) = \alpha_3$ و $\rho_2(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$؛

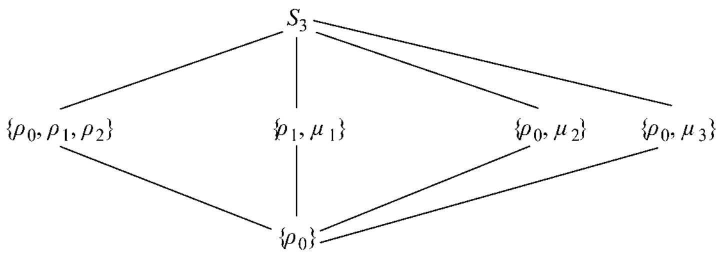
μ_1، حيث $\mu_1(\alpha_1) = \alpha_1$ و $\mu_1(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$؛

μ_2، حيث $\mu_2(\alpha_1) = \alpha_3$ و $\mu_2(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$؛

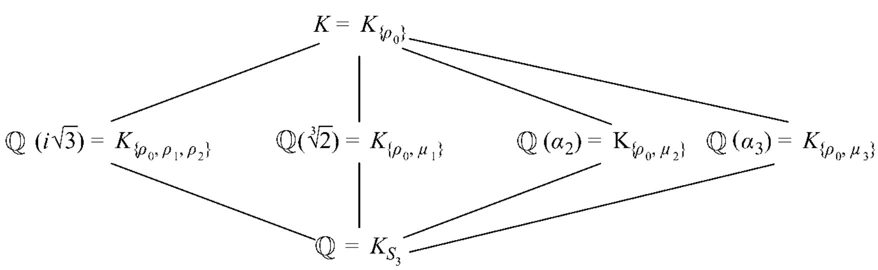
μ_3، حيث $\mu_3(\alpha_1) = \alpha_2$ و $\mu_3(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$.

ب. S_3. تمَّ اختيار الرموز في (أ) لتتطابق مع الرموز لـ S_3 في المثال 7.8.

جـ.



مخطط الزمرة



مخطط الحقل

13. حقل الانشطار لـ $(x^3-1) \in \mathbb{Q}[x]$ هو $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ ، والزمرة دورية من الرتبة 2 وعناصرها: ι، حيث ι هي الدالة المحايدة لـ $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ ، و σ، حيث $\sigma(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$.

15. أ. خطأ جـ. صح هـ. صح ز. خطأ ط. خطأ

25. جواب جزئي: $G(K/(E \vee L)) = G(K/E) \cap G(K/L)$

الفصل 54

3. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$: $\sqrt[4]{2} + i$, $x^8 + 4x^6 + 2x^4 + 28x^2 + 1$;

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$: $\sqrt[4]{2}$, $x^4 - 2$;

$\mathbb{Q}(i(\sqrt[4]{2}))$: $i(\sqrt[4]{2})$, $x^4 - 2$;

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$: $\sqrt{2} + i$, $x^4 - 2x^2 + 9$;

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i(\sqrt[4]{2}))$: $\sqrt[4]{2} + i(\sqrt[4]{2})$, $x^4 + 8$;

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} - i(\sqrt[4]{2}))$: $\sqrt[4]{2} - i(\sqrt[4]{2})$, $x^4 + 8$;

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: $\sqrt{2}$, $x^2 - 2$;

$\mathbb{Q}(i)$: i, $x^2 + 1$;

$\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$: $i\sqrt{2}$, $x^2 + 2$;

$\mathbb{Q}$: 1, $x - 1$

5. الزمرة دورية من الرتبة 5، وعناصرها هي:

	ι	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
$\sqrt[5]{2} \rightarrow$	$\sqrt[5]{2}$	$\zeta(\sqrt[5]{2})$	$\zeta^2(\sqrt[5]{2})$	$\zeta^3(\sqrt[5]{2})$	$\zeta^4(\sqrt[5]{2})$

حيث $\sqrt[5]{2}$ هو الجذر الحقيقي الخامس لـ 2.

7. حقل الانشطار لـ $x^8 - 1$ على $\mathbb{Q}$ هو حقل الانشطار نفسه لـ x^4+1 على $\mathbb{Q}$، وعليه، فهناك وصف كامل ضمن المثال 7.54. (هذه أسهل طريقة للإجابة عن السؤال).

9. أ. $s_1^2 - 2s_2$ ب. $\dfrac{s_1 s_2 - 3s_3}{s_3}$

الفصل 55

3. أ. 16 ب. 400 جـ. 2160

5. 3°

7. $\phi_3(x)$ على $\mathbb{Z}_2$ هي x^2+x+1

$\phi_8(x)$ على $\mathbb{Z}_3$ هي $x^4+1=(x^2+x+2)(x^2+2x+2)$.

9. أ. صح جـ. خطأ هـ. صح ز. صح ط. خطأ

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= x-1\\
\phi_2(x) &= x+1\\
\phi_3(x) &= x^2+x+1\\
\phi_4(x) &= x^2+1\\
\phi_5(x) &= x^4+x^3+x^2+x+1\\
\phi_6(x) &= x^2-x+1
\end{aligned}$$

الفصل 56

1. لا. نعم، K امتداد لـ $\mathbb{Z}_2$ بالجذور

3. أ. صح جـ. صح هـ. صح ز. صح ط. خطأ (x^3-2x على $\mathbb{Q}$ تعطى مثالًا مناقضًا)

ملحق

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -3+2i & -1-4i \\ 2 & -i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 5 & 16 & -3 \\ 0 & -18 & 24 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 4-6i & -2-2i \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 8 & -8i \\ 8i & 8 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. -48

ملحق: جبر المصفوفات

نعطي هنا ملخّصًا مختصرًا لجبر المصفوفات. تظهر المصفوفات في أمثلة لبعض وحدات الكتاب، كما ضُمِّنَت في كثير من التمارين.

المصفوفة (matrix) هي ترتيب على صورة مستطيل لصفوفٍ من الأعداد، على سبيل المثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

مصفوفة لها صفان وثلاثة أعمدة. مصفوفة لها m صفًّا وn عمودًا، هي مصفوفة من الدرجة $m \times n$، وهكذا المصفوفة (1) هي مصفوفة من الدرجة 2×3، إذا كان $m = n$، فإننا نقول: إن **المصفوفة مربعة (square)**.

يمكن أن تكون مدخلات المصفوفة من أيّ نوع من الأعداد – صحيحة، أو نسبية، أو حقيقية، أو مركبة، وقد جعلنا $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ترمز لمجموعة جميع المصفوفات من الدرجة $m \times n$ بمدخلات حقيقية، فإذا كان $m = n$، فيختصر الرمز إلى $M_n(\mathbb{R})$، ويمكننا بصورة مشابهة أن نعُدّ $M_n(\mathbb{Z})$، $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$، ... إلخ.

مصفوفتان لهما عدد الصفوف نفسه m ، وعدد الأعمدة نفسه n، يمكن جمعهما بطريقة واضحة: نجمع المدخلات في المواقع المتقابلة.

مثال A1 في $M_{2\times 3}(\mathbb{Z})$، لدينا

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

▲

سوف نستخدم الأحرف الكبيرة لنرمز للمصفوفات، فإذا كانت A، وB وC مصفوفات من الدرجة $n\times m$، فمن السهل رؤية أنّ $A + B = B + A$ و $A+(B + C) = (A + B) + C$.

ضـرب المصفوفـات، AB، مُعَرَّف فقط إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B، أي إنه إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m\times n$، فإنّ B يجب أن تكون مصفوفة من الدرجة $n\times s$ لعدد ما صحيح s، ونبدأ على النحو الآتي بتعريف الضرب AB، حيث A مصفوفة من الدرجة $1 \times n$ وB مصفوفة من الدرجة $n \times 1$:

$$AB = [a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n . \tag{2}$$

لاحظ أنّ النتيجة عدد. (لن نميز بين العدد والمصفوفة من الدرجة 1×1 التي لها هذا العدد بوصفه مدخلتها الوحيدة)، يمكنك تمييز هذا الضرب على أنه الضرب النقطي لمتجهين. المصفوفات التي لها صف واحد فقط أو عمود واحد فقط، هي **متجهات صف (row vectors)** أو **متجهات عمود (column vectors)**، على الترتيب.

مثال A2 نجد أنّ:

$$[3 \quad -7 \quad 2]\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix} = (3)(1) + (-7)(4) + (2)(5) = -15$$

▲

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ، ولتكن B مصفوفة من الدرجة $n \times s$. لاحظ أنّ العدد n للمدخلات في كل صَف من A هو العدد نفسه n للمدخلات في كل عمود من B. الضرب $C = AB$ هو مصفوفة $m \times s$، أمّا المدخلة في الصف ذي الترتيب i والعمود ذي الترتيب j في AB ، فهي الضرب للصف ذي الترتيب i من A بالعمود ذي الترتيب j من B، كما عُرِّف من خلال المعادلة (2)، ووضّح في المثال $A2$.

مثال A3 احسب

$$AB = \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\1 & 4 & 1 & -1\\-1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

الحل لاحظ أنّ A من الدرجة 2×3 ، وB من الدرجة 3×4. وعليه، AB ستكون من الدرجة 2×4، والمدخلة في صفها الثاني وعمودها الثالث، هي:

$$(\text{الصف الثاني } A)\,(\text{العمود الثالث } B) = [1 \quad 4 \quad 6]\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = 2 + 4 + 12 = 18 .$$

بحساب المدخلات الثمانية جميعها لـ AB بهذا الأسلوب، نحصل على:

$$AB = \begin{bmatrix}2 & -2 & 9 & 6\\1 & 17 & 18 & 3\end{bmatrix}$$

▲

مثال A4 الضرب

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 4\end{bmatrix}$$

غير مُعَرَّف؛ لأنّ عدد المدخلات في صفّ للمصفوفة الأولى لا يساوي عدد المدخلات في عمود للمصفوفة الثانية.

▲

لمصفوفتين مربعتين من الدرجة نفسها، الجمع والضرب كلاهما دائمًا مُعَرَّفَان. يسألنا التمرين 10 أن نوضّح الحقيقة الآتية:

ضرب المصفوفات غير إبدالي.

أي إنّ AB ليس بالضرورة تساوي BA، حتى عندما يكون كلا الضربين معرّفًا، كما لـ $A,B \in M_n(\mathbb{Z})$ يمكن إثبات أنّ $A(BC) = (AB)C$ و $A(B + C) = AB + AC$ متى كانت هذه التعابير معرفة.

جعلنا I_n لتكون المصفوفة من الدرجة $n \times n$ ، مع المدخلات 1 على القطر من الزاوية اليسرى العليا إلى الزاوية اليمنى السفلى والمدخلات 0 في الأماكن الأخرى.

على سبيل المثال:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

من السهل رؤية أنه إذا كانت A أيّ مصفوفة من الدرجة $n \times s$ ، و B أيّ مصفوفة من الدرجة $r \times n$، فإنّ $I_nA = A$ و $BI_n = B$، أي إنّ المصفوفة I_n تعمل كما يعمل العدد 1 للضرب عندما يكون الضرب بـ I_n مُعَرَّفًا.

لتكن A مصفوفة من الدرجة $n \times n$ ، وافترض معادلة مصفوفات على الصورة $AX = B$ ، حيث A و B معلومتان لكن X غير معلومة، فإذا استطعنا إيجاد مصفوفة A^{-1} من الدرجة $n \times n$ ، بحيث إنّ $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$، فإننا نستطيع استنتاج أنّ:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \qquad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \qquad I_nX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B$$

وقد وجدنا المصفوفة X المطلوبة. مصفوفة مثل A^{-1} تعمل مثل مقلوب العدد: $A^{-1}A = I_n$ و $r = 1$ $(1 / r)$. هذا هو سبب الرمز A^{-1}.

إذا كانت A^{-1} موجودة، فنقول: إن المصفوفة المربعة A لها **معكوس (invertible)** ، و A^{-1} هو **معكوس (inverse)** A، إما إذا كانت A^{-1} غير موجودة، فإنّ A يقال عنها: **منفردة (singular)**. يمكن إثبات أنه إذا وجدت مصفوفة A^{-1} بحيث إنّ $A^{-1}A = I_n$، فإنّ $AA^{-1} = I_n$ ، إضافة إلى ذلك، توجد مصفوفة واحدة فقط A^{-1} لها هذه الخاصية.

مثال A5 لتكن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

يمكننا فحص أنّ

$$\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وعليه،

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

نترك مسائل تحديد وجود A^{-1} وحسابها إلى مقرر دراسي في الجبر الخطي.

يترافق مع كل مصفوفة مربعة A من الدرجة $n \times n$ عدد يسمى المحددة لـ A ، ويرمز له بـ $\det(A)$، ويمكن حساب هذا العدد بوصفه جمعًا وطرحًا لضروب معينة للأعداد التي تظهر في المصفوفة A، على سبيل المثال: المحددة للمصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ من الدرجة 2×2 هي $ad- bc$. لاحظ أنّ مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ مدخلاتها أعداد حقيقية، يمكن النظر إليها بوصفها إعطاء إحداثيات نقطة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ ذي البعد n، وبضرب مصفوفة عمود واحد كهذه من اليسار بمصفوفة حقيقية A من الدرجة $n \times n$ ، تنتج مصفوفة عمود واحد تقابل نقطة في $\mathbb{R}^n$، وهذا الضرب من اليسار بـ A يعطي دالة من $\mathbb{R}^n$ إلى نفسها، ومن الممكن إثبات أنّ قطعة من $\mathbb{R}^n$ حجمها V تُرْسَلُ من خلال هذا الضرب بـ A إلى قطعة حجمها $V.|\det(A)|$. هذا أحد أسباب أهمية المحددات.

الخصائص الآتية للمحددات لمصفوفتين A و B من الدرجة $n \times n$ ذات أهمية في هذا الكتاب:

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(A) \neq 0$ ، إذا وفقط إذا كانت A مصفوفة لها معكوس.
4. إذا نتجت B عن A بتبديل صفّين (أو عمودين) من A، فإنّ $\det(B) = -\det(A)$
5. إذا كانت كل مدخلة لـ A صفرًا فوق القطر الرئيس من الزاوية اليسرى العليا إلى الزاوية اليمنى السفلى، فإنّ $\det(A)$ هو ضرب مدخلات هذا القطر. النتيجة نفسها صحيحة إذا كانت المدخلات كلها تحت القطر الرئيس أصفارًا.

■ التمارين أ

في التمارين من 1 إلى 9، احسب العبارات الجبرية للمصفوفات المعطاة إذا كانت العملية معرفة.

.1
$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

.2
$$\begin{bmatrix} 1+i & -2 & 3-i \\ 4 & i & 2-i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & i-1 & -2+i \\ 3-i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

.3
$$\begin{bmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & -2\mathrm{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3-\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \\ 2 & 1+\mathrm{i} \\ 3 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

.4
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

.5
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

.6
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

.7
$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3i & 1 \\ 4 & -2i \end{bmatrix}$$

.8
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4$$

.9
$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}^4$$

10. أعطِ مثالاً في $M_2(\mathbb{Z})$ يبيّن أنّ ضرب المصفوفات ليس إبداليًا.

11. أوجد $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ ، بالتجريب إذا لزم.

12. أوجد $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ ، بالتجريب إذا لزم.

13. إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 0 \\ 4 & 17 & 8 \end{bmatrix}$، فأوجد $\det(A)$.

14. أثبت أنه إذا كانت $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ لهما معكوس، فإنّ AB و BA لهما معكوس أيضًا.

قائمة المراجع

Classic Works — أعمال كلاسيكية

1. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique,* Book II of Part I, *Algèbre.* Paris: Hermann, 1942–58.
2. N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra.* Princeton, N.J.: Van Nostrand, vols. I, 1951, II, 1953, and III, 1964.
3. O. Schreier and E. Sperner, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory* (English translation), 2nd Ed. New York: Chelsea, 1959.
4. B. L. van der Waerden, *Modern Algebra* (English translation). New York: Ungar, vols. I, 1949, and II, 1950.

General Algebra Texts — كتب في الجبر العام

5. M. Artin, *Algebra.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1991.
6. A. A. Albert, *Fundamental Concepts of Higher Algebra.* Chicago: University of Chicago Press, 1956.
7. G. Birkhoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra,* 3rd Ed. New York: Macmillan, 1965.
8. J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra,* 2nd Ed. Lexington, Mass.: D. C. Heath, 1990.
9. I. N. Herstein, *Topics in Algebra.* New York: Blaisdell, 1964.
10. T. W. Hungerford, *Algebra.* New York: Springer, 1974.
11. S. Lang, *Algebra.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.
12. S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra.* New York: Macmillan, 1967.
13. N. H. McCoy, *Introduction to Modern Algebra.* Boston: Allyn and Bacon, 1960.
14. G. D. Mostow, J. H. Sampson, and J. Meyer, *Fundamental Structures of Algebra.* New York: McGraw-Hill, 1963.
15. W. W. Sawyer, *A Concrete Approach to Abstract Algebra.* San Francisco: Freeman, 1959.

Group Theory — مبرهنة الزمرة

16. W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order,* 2nd Ed. New York: Dover, 1955.
17. H. S. M. Coxeter and W. O. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups,* 2nd Ed. Berlin: Springer, 1965.
18. M. Hall, Jr., *The Theory of Groups.* New York: Macmillan, 1959.
19. A. G. Kurosh, *The Theory of Groups* (English translation). New York: Chelsea, vols. I, 1955, and II, 1956.
20. W. Ledermann, *Introduction to the Theory of Finite Groups,* 4th rev. Ed. New York: Interscience, 1961.
21. J. G. Thompson and W. Feit, "Solvability of Groups of Odd Order." *Pac. J. Math.*, **13** (1963), 775–1029.
22. M. A. Rabin, "Recursive Unsolvability of Group Theoretic Problems." *Ann. Math.*, **67** (1958), 172–194.

Ring Theory مبرهنة الحلقة

23. W. W. Adams and P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases* (Graduate Studies in Mathematics, vol. 3). Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1994.
24. E. Artin, C. J. Nesbitt, and R. M. Thrall, *Rings with Minimum Condition*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1944.
25. N. H. McCoy, *Rings and Ideals* (Carus Monograph No. 8). Buffalo: The Mathematical Association of America; LaSalle, III.: Open Court, 1948.
26. N. H. McCoy, *The Theory cf Rings*. New York: Macmillan, 1964.

Field Theory مبرهنة الحقل

27. E. Artin, *Galois Theory* (Notre Dame Mathematical Lecture No. 2), 2nd Ed. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1944.
28. O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*. Princeton, N.J.: Van Nostrand, vol. I, 1958.

Number Theory مبرهنة الأعداد

29. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory cf Numbers,* 4th Ed. Oxford: Clarendon Press, 1960.
30. S. Lang, *Algebraic Numbers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
31. W. J. LeVeque, *Elementary Theory cf Numbers,* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
32. W. J. LeVeque, *Topics in Number Theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 2 vols., 1956.
33. T. Nagell, *Introduction to Number Theory*. New York: Wiley, 1951.
34. I. Nivin and H. S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory cf Numbers*. New York: Wiley, 1960.
35. H. Pollard, *The Theory cf Algebraic Numbers* (Carus Monograph No. 9). Buffalo: The Mathematical Association of America; New York: Wiley, 1950.
36. D. Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*. Washington, D.C.: Spartan Books, vol. I, 1962.
37. B. M. Stewart, *Theory cf Numbers,* 2nd Ed. New York: Macmillan, 1964.
38. J. V. Uspensky and M. H. Heaslet, *Elementary Number Theory*. New York: McGraw-Hill, 1939.
39. E. Weiss, *Algebraic Number Theory*. New York: McGraw-Hill, 1963.

Homological Algebra الجبر الشّباهي

40. J. P. Jans, *Rings and Homology*. New York: Holt, 1964.
41. S. MacLane, *Homology*. Berlin: Springer, 1963.

Other References مراجع إضافية

42. A. A. Albert (ed.), *Studies in Modern Algebra* (MAA Studies in Mathematics, vol. 2). Buffalo: The Mathematical Association of America; Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963.
43. E. Artin, *Geometric Algebra*. New York: Interscience, 1957.
44. R. Courant and R. Robbins, *What Is Mathematics*? Oxford University Press, 1941.
45. H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry,* 2nd Ed. New York: Wiley, 1969.
46. R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*. New York: Ginn, 1963.
47. H. B. Edgerton, *Elements cf Set Theory*. San Diego: Academic Press, 1977.
48. C. Schumacher, *Chapter Zero*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1996.

الرموز